

3

Estimativa do erro de NLOS com base no espalhamento da potência recebida

3.1

Introdução

Neste capítulo desenvolve-se um estimador para o erro em medidas de ToA provocado pela ausência de linha de visada entre terminal e base. A estimativa é feita a partir de uma média temporal de N medidas independentes do espalhamento da potência do sinal recebido em um receptor RAKE. Admite-se o conhecimento *a priori* do modelo de espalhamento temporal do canal¹. Escolhendo-se um estimador sob o critério WLS, demonstra-se analiticamente que este é despolarizado e pode atingir o CRLB para N elevado. Por fim, considera-se a aplicação do estimador proposto para um cenário em que os elementos espalhadores em torno do terminal têm distribuição gaussiana.

3.2

Receptor RAKE

Em sistemas de transmissão com espectro espalhado por seqüência direta, o período entre *chips* é, tipicamente, muito menor do que o espalhamento de atrasos do canal. Equivalentemente, a banda do sinal é muito maior do que a banda de coerência do canal, e, devido às propriedades de autocorrelação das seqüências pseudo-aleatórias utilizadas como código de espalhamento, as réplicas do sinal transmitido com valores de atraso superiores ao inverso da taxa de chip podem, em princípio, ser resolvidas no

¹A mitigação do erro de NLOS com base em modelos do espalhamento temporal do canal móvel foi proposta anteriormente em [12]. Porém, naquele trabalho, admite-se de forma simplificada que é possível obter o tempo de chegada de cada versão atrasada do sinal transmitido que chega ao receptor. Ou seja, admite-se implicitamente que no receptor a capacidade de resolução é “infinita”, o que viabiliza uma solução completamente diferente da desenvolvida neste capítulo.

receptor. O receptor normalmente utilizado para o processamento do sinal com estas propriedades é o receptor RAKE, ou *correlator* RAKE, que explora a diversidade proporcionada pela propagação multipercurso [55][56].

Um esquema simplificado do receptor RAKE é apresentado na Figura 3.1, para uma transmissão BPSK. Há M correlatores conectados em paralelo e operando de forma sincronizada. Cada correlator recebe dois sinais: uma versão do sinal transmitido com atraso múltiplo do período entre chips (T_c); e uma réplica da seqüência pseudo-aleatória utilizada como código de espalhamento. As saídas dos correlatores são então “ajustadas” segundo o princípio de *combinação de máxima razão* [55], cujo objetivo é maximizar a relação sinal-ruído para a detecção do símbolo transmitido. Neste ajuste, os coeficientes complexos de atenuação ($\beta_m e^{j\phi_m}$) proporcionados pelo canal para as M “janelas” de atraso são estimados, e as saídas dos correlatores são multiplicadas pelo complexo conjugado destes coeficientes. O objetivo deste procedimento é compensar os desvios de fase do canal e ponderar as componentes do sinal por um fator proporcional às suas intensidades relativas. A realização do receptor ótimo de máxima razão baseia-se na suposição de que os coeficientes de atenuação do canal são estimados perfeitamente [55].

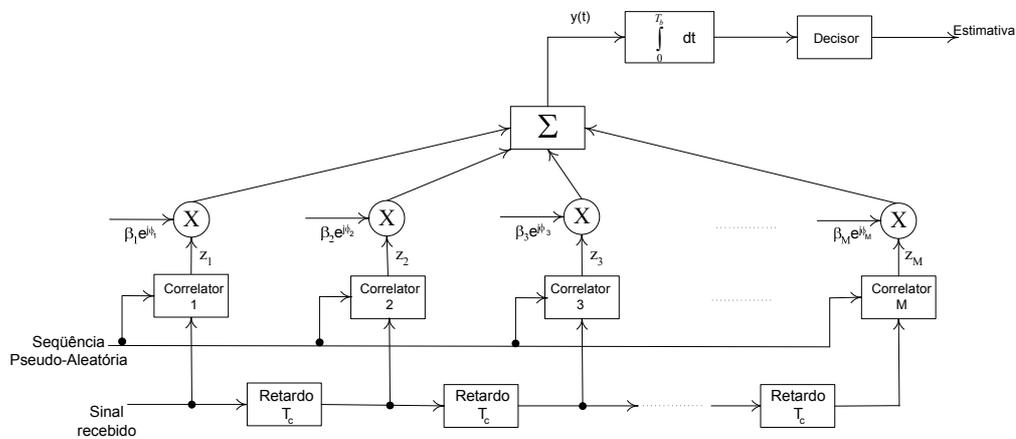


Figura 3.1: Diagrama em blocos do receptor RAKE.

A saída do combinador é dada por

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \beta_m z_m(t), \quad (3-1)$$

onde $z_m(t)$ é a saída do m -ésimo correlator.

3.3

Espalhamento temporal determinado pelo RAKE

Seja o receptor RAKE mostrado na Figura 3.1. Admite-se que os coeficientes complexos são estimados sem erro, sendo o coeficiente na m -ésima derivação do receptor resultado da combinação de todas as versões do sinal com valores de atraso no intervalo

$$\Delta_m = [\tau_0 + mT_c - T_c/2; \tau_0 + mT_c + T_c/2] , \quad (3-2)$$

onde τ_0 é o tempo de propagação do sinal em linha reta. Ou seja, com base no modelo de resposta de canal definido no Capítulo 2, pode-se escrever

$$\beta_m e^{j\phi_m} = \sum_{i=1}^{k_m} \alpha_i e^{j\theta_i} , \quad (3-3)$$

onde α_i e θ_i representam a amplitude e fase da i -ésima versão atrasada do sinal em Δ_m , e k_m é o número de percursos cujos valores de atraso pertencem a Δ_m . Admite-se portanto que as réplicas do sinal com valores de atraso no intervalo Δ_m não são distinguidos no receptor, mas a combinação destes resulta no complexo dado em (3-3), que pode ser estimado para cada derivação do RAKE.

Seja agora o parâmetro

$$\Pi_m = |\beta_m|^2 , \quad (3-4)$$

que representa a potência instantânea no intervalo de atrasos Δ_m de uma dada realização do canal. Com base em (3-3) e (3-4), o valor esperado de Π_m é dado por

$$\begin{aligned} E[\Pi_m] &= E \left[\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{j=1}^{k_m} \alpha_i \alpha_j e^{j(\theta_i - \theta_j)} \right] \\ &= E_{k_m} \left[E \left[\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{j=1}^{k_m} \alpha_i \alpha_j e^{j(\theta_i - \theta_j)} \middle| k_m \right] \right] , \end{aligned} \quad (3-5)$$

onde o valor esperado externo é calculado para a variável k_m . Admitindo-se que θ_i são variáveis iid (independentes e identicamente distribuídas), uniformes em $[0, 2\pi]$ e independentes de α_i , é fácil mostrar que a expressão acima resulta em

$$E[\Pi_m] = E_{k_m} \left[\sum_{i=1}^{k_m} E[\alpha_i^2] \right] . \quad (3-6)$$

Conforme mencionado na Seção 2.3.2, é razoável supor que α_i dependa basicamente da distância entre transmissor e receptor, e do grau de sombreamento sobre a região em que se localiza o terminal. A variação deste coeficiente em virtude de fatores aleatórios do meio em uma região localmente estacionária é extremamente reduzida, e portanto será considerado a seguir que α_i é variável determinística². Além disso, faz-se a aproximação $\alpha_i = \alpha$ para a faixa de valores de atraso coberta pelo RAKE ($[\tau_0, \tau_0 + MT_c + T_c/2]$), resultando em

$$E[\Pi_m] = \alpha^2 E[k_m] . \quad (3-7)$$

Considerando agora que os valores de atraso τ_i são variáveis iid, é fácil notar que, dado o número *total* de percursos proporcionados pelo canal, κ , a variável aleatória k_m tem distribuição binomial com valor esperado e variância dadas por

$$E[k_m | \kappa = K] = K p_m \quad (3-8)$$

$$\text{Var}[k_m | \kappa = K] = K p_m (1 - p_m) , \quad (3-9)$$

onde p_m é calculado por

$$p_m = \Pr(\tau \in \Delta_m) = \int_{x \in \Delta_m} f_\tau(x) dx , \quad (3-10)$$

sendo $f_\tau(\cdot)$ a fdp dos valores de atraso. Substituindo (3-8) em (3-7), e admitindo-se que κ é independente dos demais parâmetros, chega-se a

$$E[\Pi_m] = \alpha^2 E[\kappa] p_m . \quad (3-11)$$

Como α^2 e $E[\kappa]$ não dependem do intervalo Δ_m considerado no cálculo, pode-se finalmente escrever que

$$E[\Pi_m] \propto p_m = \int_{x \in \Delta_m} f_\tau(x) dx . \quad (3-12)$$

A expressão (3-12) mostra uma interessante relação entre a potência instantânea média do sinal processado em cada derivação do RAKE e $f_\tau(\cdot)$.

²É comum considerar que α tem estatística log-normal, porém a flutuação aleatória deste coeficiente é verificada quando o terminal desloca-se ao longo de um percurso com distância fixa até a base. Aqui, considera-se que o terminal está confinado a uma região localmente estacionária.

3.4

Estimativa de $E[\Pi]$

3.4.1

Definição e estatística do vetor γ

Seja o vetor aleatório $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]^T$ no qual a m -ésima componente é dada por

$$\gamma_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Pi_m^{(n)}, \quad (3-13)$$

onde $\Pi_m^{(n)}$ representa a potência instantânea do sinal recebido na m -ésima derivação do receptor RAKE, na n -ésima realização do canal. Admite-se que as amostras $\Pi_m^{(n)}$, ($n = 1, \dots, N$), são obtidas periodicamente com intervalo Δ_t maior que o tempo de coerência do canal, e que a resposta do canal móvel é estacionária em sentido amplo durante o intervalo $N\Delta_t$. Portanto, sob estas condições, as seguintes propriedades são válidas para $\Pi_m^{(n)}$ ($n = 1, \dots, N$):

- i) são mutuamente descorrelacionadas;
- ii) $E[\Pi_m^{(n1)}] = E[\Pi_m^{(n2)}] \quad ; \quad n1, n2 \in \{1, \dots, N\}$

Portanto, a variável γ_m representa uma estimativa não polarizada e consistente (quando $N \rightarrow \infty$) para a potência média $E[\Pi_m]$, obtida durante o intervalo de tempo $[t, t + N\Delta_t]$.

Supondo N suficientemente grande, admite-se, com base no Teorema do Limite Central [51], que γ_m é variável gaussiana. Na realidade, é fácil mostrar que as componentes de γ são conjuntamente gaussianas, e portanto γ é vetor gaussiano com parâmetros calculados a seguir:

Valor esperado de γ

De (3-13) segue imediatamente que

$$\mathbf{m}_\gamma = E[\gamma] = [E[\Pi_1], \dots, E[\Pi_M]]^T. \quad (3-14)$$

Matriz covariância de γ

Seja a matriz covariância

$$\mathbf{\Lambda} = E[(\gamma - \mathbf{m}_\gamma)(\gamma - \mathbf{m}_\gamma)^T], \quad (3-15)$$

cujo elemento (m, r) é dado por

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Lambda}]_{mr} &= \text{Cov}(\gamma_m, \gamma_r) = \frac{1}{N} \text{Cov}(\Pi_m, \Pi_r) \\ &= \frac{1}{N} (\text{E}[\Pi_m \Pi_r] - \text{E}[\Pi_m] \text{E}[\Pi_r]) \quad , \end{aligned} \quad (3-16)$$

onde $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ denota a covariância entre variáveis aleatórias e $m, r \in \{1, \dots, M\}$. A correlação entre Π_m e Π_r pode ser calculada condicionando-a inicialmente ao número de percursos em Δ_m e Δ_r :

$$\begin{aligned} \text{E}[\Pi_m \Pi_r | k_m = K_m, k_r = K_r] &= \text{E} \left[\sum_{i=1}^{K_m} \sum_{j=1}^{K_m} \sum_{p=1}^{K_r} \sum_{q=1}^{K_r} \alpha_{i,m} \alpha_{j,m} \alpha_{p,r} \alpha_{q,r} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{j(\theta_{i,m} - \theta_{j,m} + \theta_{p,r} - \theta_{q,r})} \right] \\ &= \alpha^4 \sum_{i=1}^{K_m} \sum_{j=1}^{K_m} \sum_{p=1}^{K_r} \sum_{q=1}^{K_r} \text{E} \left[e^{j(\theta_{i,m} - \theta_{j,m} + \theta_{p,r} - \theta_{q,r})} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3-17)$$

onde as variáveis $\alpha_{i,m}$ e $\theta_{i,m}$ representam respectivamente o coeficiente de atenuação e fase associados ao i -ésimo percurso com valor de atraso no intervalo Δ_m .

Para $m = r$, é fácil notar que as parcelas do somatório acima são diferentes de zero somente quando: i) $i = j$ e $p = q$; ou ii) $i = q$ e $j = p$. As condições i) ou ii) ocorrem em $2K_m^2 - K_m$ parcelas de (3-17). Portanto pode-se escrever que

$$\text{E}[\Pi_m^2 | k_m = K] = \alpha^4 (2K^2 - K) \quad , \quad (3-18)$$

ou seja,

$$\text{E}[\Pi_m^2] = \alpha^4 (2\text{E}[k_m^2] - \text{E}[k_m]) \quad . \quad (3-19)$$

Substituindo (3-19) e (3-7) em (3-16), para $m = r$, obtém-se

$$\text{Var}[\gamma_m] = \frac{\alpha^4}{N} (2\text{E}[k_m^2] - \text{E}^2[k_m] - \text{E}[k_m]) \quad . \quad (3-20)$$

Lembrando agora que dado κ (número total de percursos), k_m é uma variável binomial com média e variância dadas nas equações (3-8) e (3-9), e considerando κ independente dos demais parâmetros, segue da equação (3-20) que

$$\text{Var}[\gamma_m] = \frac{\alpha^4}{N} [2(E_\kappa p_m (1 - p_m) + E_\kappa^2 p_m^2) - E_\kappa^2 p_m^2 - E_\kappa p_m] \quad (3-21)$$

onde $E_\kappa = E[\kappa]$. Após algumas manipulações algébricas, obtém-se que

$$\text{Var}[\gamma_m] = \frac{\alpha^4 E_\kappa p_m}{N} (2(1 - p_m) + E_\kappa p_m - 1) . \quad (3-22)$$

Admitindo-se que $E_k \gg 2$, a expressão (3-22) pode ser simplificada para

$$\text{Var}[\gamma_m] \approx \frac{\alpha^4 E_\kappa p_m}{N} (1 + E_\kappa p_m) . \quad (3-23)$$

Para $m \neq r$, as parcelas do somatório em (3-17) são diferentes de zero somente quando $i = j$ e $p = q$. Esta condição ocorre para $K_m \cdot K_r$ termos de (3-17). Neste caso,

$$E[\Pi_m \Pi_r | k_m = K_m, k_r = K_r] = \alpha^4 K_m K_r , \quad (3-24)$$

e portanto

$$E[\Pi_m \Pi_r] = \alpha^4 E[k_m k_r] . \quad (3-25)$$

Observando-se agora que, dado κ , k_m e k_r ($m \neq r$) são variáveis multinomiais com correlação dada por

$$E[k_m k_r] = E_\kappa (E_\kappa - 1) p_m p_r , \quad (3-26)$$

resulta da equação (3-25):

$$\begin{aligned} E[\Pi_m \Pi_r] &= \alpha^4 E_\kappa (E_\kappa - 1) p_m p_r \\ &\approx \alpha^4 E_\kappa^2 p_m p_r . \end{aligned} \quad (3-27)$$

Substituindo (3-27) e (3-11) em (3-16) conclui-se que

$$\text{Cov}(\gamma_m, \gamma_r) = 0 , \quad (3-28)$$

para $m \neq r$.

Portanto, a matriz covariância de $\boldsymbol{\gamma}$ pode ser aproximada por uma matriz diagonal

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_M \end{bmatrix} , \quad (3-29)$$

em que os elementos Λ_m são dados por

$$\Lambda_m = \frac{\alpha^4 E_\kappa p_m}{N} (1 + E_\kappa p_m) . \quad (3-30)$$

3.4.2

Precisão na estimativa de $\mathbf{E}[\Pi]$

De acordo com o que foi comentado anteriormente, o vetor $\boldsymbol{\gamma}$ tem fdp dada por

$$f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\Lambda})} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}})^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}) \right\}, \quad (3-31)$$

onde $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}} = [\mathbf{E}[\Pi_1], \dots, \mathbf{E}[\Pi_M]]^T$ e $\det(\boldsymbol{\Lambda})$ é o determinante da matriz $\boldsymbol{\Lambda}$, dada por (3-29). O lugar geométrico em \mathbb{R}^M no qual a função acima tem valor constante é definido pela equação

$$(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}})^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}) = \rho, \quad (3-32)$$

onde ρ é uma constante que determina o tamanho da região envolvida pela superfície definida em (3-32). Esta superfície, no caso mais geral, é uma hiper-elipsóide de dimensão M .

A probabilidade de que $\boldsymbol{\gamma}$ esteja no interior do hiper-elipsóide pode ser interpretada como o *coeficiente de confiança* na estimativa de $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}$ [51], cujo cálculo é feito por

$$\epsilon = \int \cdots \int_R f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}) d\Gamma_1 \dots d\Gamma_M, \quad (3-33)$$

onde a região de integração acima é a *região de confiança* e é definida por

$$R = \{ \boldsymbol{\gamma} : (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}})^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}) \leq \rho \}. \quad (3-34)$$

Após algumas manipulações algébricas, é possível mostrar [13] que a probabilidade em (3-33) pode ser obtida pela expressão

$$\epsilon = \frac{M}{2^{\frac{M}{2}} \mathbb{G}(M/2 + 1)} \int_0^{\sqrt{\rho}} \beta^{M-1} \exp(-\beta^2/2) d\beta \quad (3-35)$$

onde $\mathbb{G}(\cdot)$ denota a função *gama*³.

No desenvolvimento acima mostra-se difícil definir a hiper-elipsóide em função da precisão que se deseja para a estimativa de $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}$. No entanto, como as componentes de $\boldsymbol{\gamma}$ são mutuamente independentes, é possível estabelecer uma relação entre ϵ (parametrizada por ρ) e a precisão de $\boldsymbol{\gamma}$, a partir de uma análise em separado para cada componente. Neste caso, define-se o

³ $\mathbb{G}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

intervalo de confiança ρ_m da forma

$$\Pr(|\gamma_m - \mathbb{E}[\Pi_m]| < \rho_m) = \epsilon_m, \quad (3-36)$$

onde ϵ_m é o *coeficiente de confiança* definido para a estimativa de $\mathbb{E}[\Pi_m]$. Como γ_m são independentes, observa-se que a expressão (3-36) sendo satisfeita para $m = 1, \dots, M$ é análoga à (3-33), fazendo $\epsilon_1 \times \dots \times \epsilon_M = \epsilon$ e considerando a região de integração um hiper-paralelepípedo de M dimensões, ao invés da região definida por (3-34).

Convém definir o intervalo de confiança *relativo* ao valor que se deseja estimar. Portanto, escreve-se

$$\rho_m = \xi \mathbb{E}[\Pi_m], \quad m = 1, \dots, M \quad (3-37)$$

onde ξ é uma constante entre 0 e 1 a ser arbitrada. Considerando (3-37) e lembrando que γ_m é gaussiana com média $\mathbb{E}[\Pi_m]$, a probabilidade em (3-36) pode ser calculada por

$$\Pr(|\gamma_m - \mathbb{E}[\Pi_m]| < \rho_m) = 1 - 2Q\left(\frac{\xi \mathbb{E}[\Pi_m]}{\sqrt{\text{Var}[\gamma_m]}}\right), \quad (3-38)$$

onde $Q(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$ representa a função distribuição cumulativa complementar de uma variável gaussiana normalizada e de média nula. Portanto, substituindo (3-11) e (3-23) em (3-38), obtém-se o coeficiente de confiança na estimativa de \mathbf{m}_γ em função do número N de observações para a obtenção de γ :

$$\epsilon = \prod_{m=1}^M \left[1 - Q\left(\xi \sqrt{\frac{N}{(E_{\kappa} p_m)^{-1} + 1}}\right) \right]. \quad (3-39)$$

Se $E_{\kappa} p_m \gg 1$, para todo m , a expressão acima simplifica para

$$\epsilon = (1 - 2Q(\xi \sqrt{N}))^M. \quad (3-40)$$

Explicitando para N a expressão acima, dado que se deseja uma confiança maior ou igual a ϵ , resulta

$$N \geq \left[\frac{Q^{-1}\left(\frac{1-\epsilon^{1/M}}{2}\right)}{\xi} \right]^2 = N^*, \quad (3-41)$$

pois $Q(\cdot)$ é função inversível e monótona decrescente.

Os gráficos abaixo mostram a relação entre N^* e ϵ para alguns valores de ξ . Considera-se $M = 3$ e $M = 4$, respectivamente, nas Figuras 3.2(a) e 3.2(b).

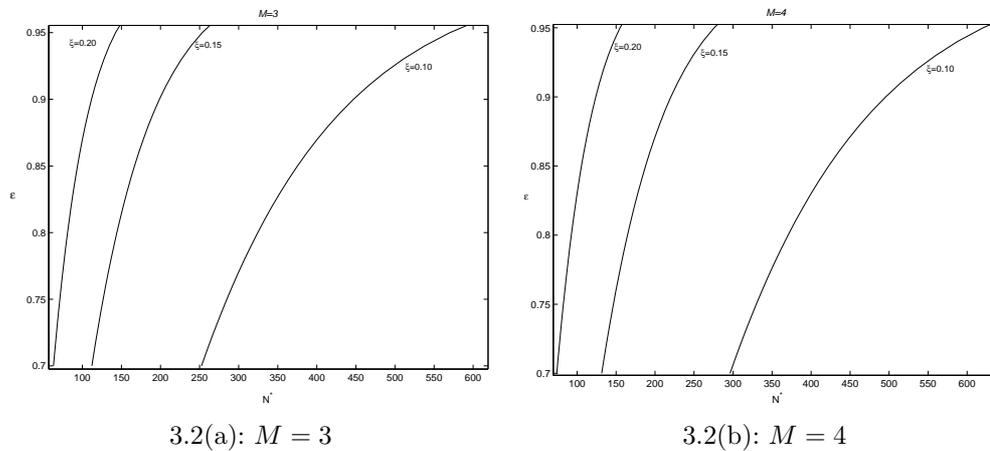


Figura 3.2: Gráfico de $N^* \times \epsilon$: (a) $M = 3$; (b) $M = 4$

3.4.3 Determinação de γ para o estado de NLOS

Considera-se agora a situação em que o receptor encontra-se sem linha de visada com o transmissor, devido à existência de anteparos próximos ao terminal móvel de grande altura relativa⁴. Neste caso, conforme visto na Seção 2.5, o sinal chega ao terminal com tempo de propagação significativamente maior do que o tempo correspondente ao estado de LOS (τ_0). Ou seja, o sinal é recebido após τ_0^* segundos de sua transmissão, onde $\tau_0^* = \tau_0 + \delta$, sendo δ um valor positivo que representa o acréscimo ao ToA devido ao estado de NLOS. Neste estado do canal, os coeficientes de atenuação do canal estimados no receptor RAKE são resultados das somas das cópias do sinal recebidos nos intervalos

$$\Delta_{m,\delta} = [\tau_0 + \delta + mT_c - T_c/2; \tau_0 + \delta + mT_c + T_c/2], \quad (3-42)$$

e admite-se que as variáveis de atraso continuam iid, mas a fdp correspondente passa a ser dada pela expressão

$$f_{\tau}^{NLOS}(\zeta) = \begin{cases} k f_{\tau}^{LOS}(\zeta) & , \zeta \geq \tau_0 + \delta \\ 0 & , \zeta < \tau_0 + \delta \end{cases} \quad (3-43)$$

⁴Anteparos *locais* ao terminal, conforme caracterização apresentada na Seção 2.5.

onde $f_{\tau}^{LOS}(\cdot)$ é a fdp associada aos valores de atraso se o canal estivesse em LOS, e k é uma constante de normalização⁵.

Neste caso a potência média percebida na m -ésima derivação do receptor RAKE é dada por

$$E[\Pi_m] = \alpha^2 E_{\kappa^*} p_{m,\delta}^* , \quad (3-44)$$

onde

$$p_{m,\delta}^* = \int_{x \in \Delta_{m,\delta}} f_{\tau}^{NLOS}(x) dx = k \int_{x \in \Delta_{m,\delta}} f_{\tau}^{LOS}(x) dx , \quad (3-45)$$

e

$$E_{\kappa^*} = E[\kappa^*] , \quad (3-46)$$

sendo κ^* o número de cópias do sinal que chegam ao receptor na condição de NLOS.

É fácil mostrar que $E_{\kappa^*} = E_{\kappa}/k$, portanto a expressão (3-44) pode ser simplificada para

$$E[\Pi_m] = \alpha^2 E_{\kappa} p_{m,\delta} , \quad (3-47)$$

onde

$$p_{m,\delta} = \int_{x \in \Delta_{m,\delta}} f_{\tau}^{LOS}(x) dx . \quad (3-48)$$

Ou seja, o vetor $\boldsymbol{\gamma}$, que foi definido como estimativa para $[E[\Pi_1], \dots, E[\Pi_M]]^T$, passa a ser função do acréscimo δ ao tempo de chegada. Admitindo-se que δ é aproximadamente constante durante o intervalo $(t, t + N\Delta_t)$ em que se obtém $\Pi_m^{(n)}$, o vetor $\boldsymbol{\gamma}$ definido em (3-13) tem média dada por

$$\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}} = \alpha^2 E_{\kappa} [p_{1,\delta}, \dots, p_{M,\delta}]^T , \quad (3-49)$$

e matriz covariância

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\alpha^4 E_{\kappa}}{N} \text{diag}([p_{1,\delta}(1 + E_{\kappa} p_{1,\delta}), \dots, p_{M,\delta}(1 + E_{\kappa} p_{M,\delta})]) \quad (3-50)$$

onde $\text{diag}(\mathbf{v})$ denota uma matriz quadrada cuja diagonal é dada pelo vetor \mathbf{v} e os demais elementos são iguais a zero.

⁵ $k = \left[\int_{\tau_0+\delta}^{\infty} f_{\tau}^{LOS}(\zeta) d\zeta \right]^{-1}$

3.5

Estimativa de δ

3.5.1

Cenário para estimação

As expressões (3-49) e (3-50) estabelecem uma relação entre as propriedades estatísticas do vetor de medidas $\boldsymbol{\gamma}$ e o espalhamento temporal do sinal recebido para o canal em NLOS. É possível agora, com base no que foi apresentado e discutido anteriormente, definir o problema de estimação para a mitigação do erro de NLOS δ nas medidas de ToA.

Considera-se um sistema de posicionamento baseado em medidas de ToA dos sinais transmitidos por L bases. Admite-se que as medidas obtidas de L^* bases ($L^* \leq L$) contêm erros de NLOS. Deseja-se estimar portanto os escalares

$$\delta_1, \dots, \delta_{L^*}, \quad (3-51)$$

onde δ_i é o acréscimo na medida de ToA para o sinal transmitido entre o terminal e a i -ésima base.

Admite-se que é possível obter os vetores $\boldsymbol{\gamma}_l$, $l = 1, \dots, L^*$, que representam as medidas obtidas no RAKE das potências médias dos sinais recebidos das L^* bases. Com base no que foi visto anteriormente, pode-se escrever estes vetores da forma

$$\boldsymbol{\gamma}_l = K_l \mathbf{g}(\underbrace{\delta_l, \sigma_1, \dots, \sigma_p}_{\boldsymbol{\eta}_l}) + \boldsymbol{\omega}_l, \quad (3-52)$$

para $l = 1, \dots, L^*$, onde:

- $\boldsymbol{\eta}_l = [\delta_l, \sigma_1, \dots, \sigma_p]$ é o vetor a ser estimado. É formado pelo escalar δ_l (parâmetro de interesse) e pelos parâmetros $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ que parametrizam a fdp $f_\tau(\cdot)$.
- \mathbf{g} é uma função vetorial ($\mathbf{g} : \mathbb{R}^{(1+p)} \rightarrow \mathbb{R}^M$), definida por

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_l) = [g_{1,l}, \dots, g_{M,l}]^T, \quad (3-53)$$

onde

$$g_{m,l} = \int_{x \in \Delta_{m,\delta_l}} f_\tau(x) dx = p_{m,\delta_l}. \quad (3-54)$$

Na expressão acima Δ_{m,δ_l} é o intervalo definido em (3-42). Por questões de clareza de notação, foram omitidos o sobre-escrito “LOS”

de f_τ , bem como a dependência desta função com os parâmetros $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$.

– K_l é uma constante escalar dada por

$$K_l = \alpha_l^2 E_\kappa . \quad (3-55)$$

– $\boldsymbol{\omega}_l \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}_l)$, ou seja, $\boldsymbol{\omega}_l$ tem distribuição gaussiana com vetor média nulo e matriz covariância

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_l &= \frac{\alpha_l^4 E_\kappa}{N} \text{diag}(p_{1,\delta_l}(1 + E_\kappa p_{1,\delta_l}), \dots, p_{M,\delta_l}(1 + E_\kappa p_{M,\delta_l})) \\ &= \frac{K^2}{N} \text{diag}(g_{1,l}^2(1 + (E_\kappa g_{1,l})^{-1}), \dots, g_{M,l}^2(1 + (E_\kappa g_{M,l})^{-1})) \end{aligned} \quad (3-56)$$

A Figura 3.3 ilustra esquematicamente o processo de estimação dos vetores $\boldsymbol{\eta}_l$ ($l = 1, \dots, L^*$) a partir da observação de $\boldsymbol{\gamma}_l$ ($l = 1, \dots, L^*$). Uma vez que o mapeamento probabilístico entre o *espaço de parâmetros* e o *espaço de observações* pode ser descrito pelas fdp's $f_{\boldsymbol{\gamma}_l|\boldsymbol{\eta}_l}$ (gaussianas com parâmetros $(K_l \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_l), \boldsymbol{\Lambda}_l)$), e assumindo que $M > 1 + p$, é possível construir uma regra de estimação apropriada para este problema. A expressão (3-52) tem significado importante, pois ela resume a relação entre o vetor de parâmetros que se deseja estimar, $\boldsymbol{\eta}_l$, e o vetor de observações disponível (vetor $\boldsymbol{\gamma}_l$).

Deve ser ressaltado que os L^* parâmetros $\delta_1, \dots, \delta_{L^*}$ são estimados separadamente, de forma desacoplada, como mostrado na Figura 3.3. Esta solução particionada é possível porque o conjunto $[\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \dots, \gamma_{M,l}]$, que representa a potência média estimada nas M derivações do RAKE para o sinal recebido da l -ésima base, contém informação somente de δ_l e dos parâmetros $[\sigma_1, \dots, \sigma_p]$.

Nas expressões desenvolvidas a seguir, o sub-escrito l será omitido para simplificar a notação utilizada. Fica implícito, portanto, que as grandezas envolvidas referem-se à estimativa do erro de NLOS entre o terminal e uma dada base.

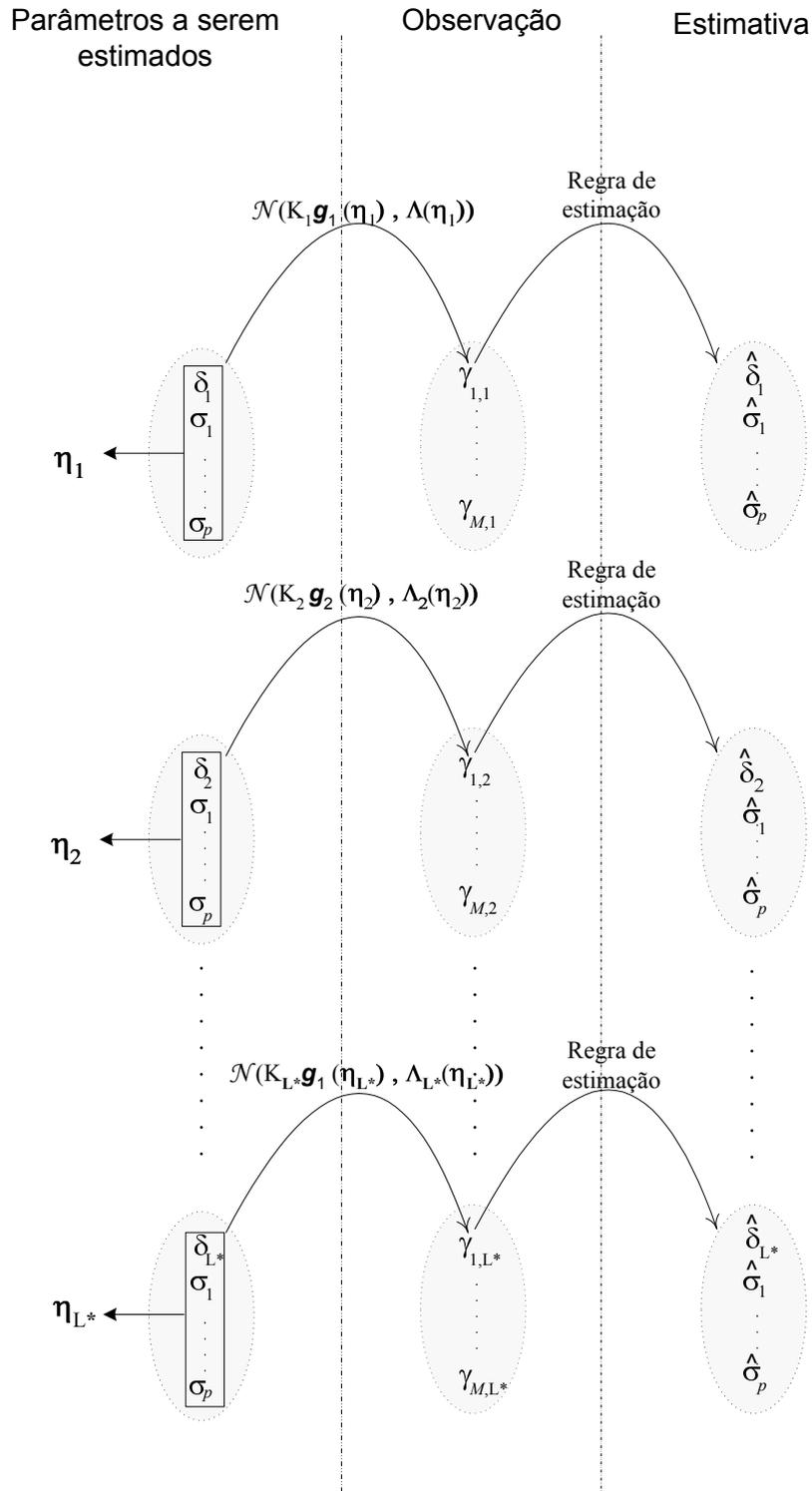


Figura 3.3: Estimação dos erros de NLOS $\delta_1, \dots, \delta_{L^*}$.

3.5.2

Limitante Inferior de Cramér-Rao

Seja $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\gamma})$ uma estimativa não polarizada de $\boldsymbol{\eta}$ com base no vetor de observações $\boldsymbol{\gamma}$. Dado que as condições de “regularidade”⁶ são atendidas por $f_{\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\eta}}$, é possível provar que o erro médio quadrático da estimativa do i -ésimo elemento do vetor $\boldsymbol{\eta}$ satisfaz [57][58]

$$\text{Var}[\eta_i] \geq [\boldsymbol{\Upsilon}^{-1}(\boldsymbol{\eta})]_{ii} , \quad (3-57)$$

onde $\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})$ é a matriz de informação de Fisher. Esta matriz é quadrada com dimensão $(L^* + p)$, e seu elemento (i, j) é dado por

$$[\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = -\text{E} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\eta}}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right] . \quad (3-58)$$

Na expressão acima, o valor esperado é calculado com relação a $\boldsymbol{\gamma}$, e as derivadas são obtidas para o valor *verdadeiro* do vetor $\boldsymbol{\eta}$. O parâmetro η_i refere-se ao i -ésimo elemento do vetor $\boldsymbol{\eta}$. Este resultado é conhecido como limitante inferior de Cramér-Rao (do inglês: *Cramér-Rao Lower Bound* (CRLB)), sendo válido para estimativas não polarizadas de $\boldsymbol{\eta}$.

O vetor de observações $\boldsymbol{\gamma}$ é gaussiano, portanto os elementos da matriz de informação de Fisher podem ser calculados através da seguinte expressão [58]

$$[\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = \left[\frac{\partial \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial \eta_i} \right]^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial \eta_j} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \eta_i} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \eta_j} \right] , \quad (3-59)$$

onde $\text{tr}[\mathbf{x}]$ representa a soma dos elementos da diagonal da matriz \mathbf{x} , e

$$\left[\frac{\partial \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial \eta_i} \right]_j = \frac{\partial [\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}]_j}{\partial \eta_i} \quad (3-60)$$

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \eta_i} \right]_{jk} = \frac{\partial [\boldsymbol{\Lambda}]_{jk}}{\partial \eta_i} . \quad (3-61)$$

Com $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}} = K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ e a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ dada por (3-56), obtém-se as seguintes expressões para a determinação de $\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})$:

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial \eta_i} = K \left[\frac{\partial g_1}{\partial \eta_i}, \dots, \frac{\partial g_M}{\partial \eta_i} \right]^T , \quad (3-62)$$

⁶Condições de regularidade: $\text{E} \left[\frac{\partial \ln f_{\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\eta}}}{\boldsymbol{\eta}} \right] = 0$, para todo $\boldsymbol{\eta}$

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{N}{K^2} \text{diag}(g_1^{-2}(1 + (E_\kappa g_1)^{-1})^{-1}, \dots, g_M^{-2}(1 + (E_\kappa g_M)^{-1})^{-1}) \quad (3-63)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \eta_i} = \frac{K^2}{N} \text{diag} \left[g_1(2 + (E_\kappa g_1)^{-1}) \frac{\partial g_1}{\partial \eta_i}, \dots, g_M(2 + (E_\kappa g_M)^{-1}) \frac{\partial g_M}{\partial \eta_i} \right] \quad (3-64)$$

Substituindo as expressões (3-62) a (3-64) em (3-59), e supondo conhecidos E_κ e $f_\tau(\cdot)$, é possível calcular a matriz de informação de Fisher em função do valor verdadeiro do vetor $\boldsymbol{\eta}$ para um dado valor de N .

Cabe observar que se $E_\kappa g_m \gg 1$, para todo m , a expressão para a matriz covariância $\mathbf{\Lambda}$ pode ser simplificada, e o cálculo da matriz $\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})$ é dado por

$$[\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = (N + 2) \sum_{m=1}^M \frac{\partial g_m}{\partial \eta_i} g_m^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial \eta_j} \quad (3-65)$$

3.5.3 Estimador de $\boldsymbol{\eta}$

Os critérios de *mínimos quadrados* (do inglês: *Least Squares* (LS)) e *mínimos quadrados ponderados* (do inglês: *Weighted Least Squares* (WLS)) serão utilizados para a estimativa do vetor $\boldsymbol{\eta}$. Na abordagem LS a estimativa é calculada por

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{LS}(\boldsymbol{\gamma}) = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} (\|\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})\|^2), \quad (3-66)$$

onde $\|\cdot\|$ denota norma euclideana. Na estimativa WLS o critério utilizado é

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}(\boldsymbol{\gamma}) = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} ((\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))^T \mathbf{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))), \quad (3-67)$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz covariância de $\boldsymbol{\gamma}$ definida em (3-56). A estimativa WLS definida acima apresenta, em princípio, desempenho melhor que a LS (no sentido do erro médio quadrático), pois atribui “maior peso” às componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}$ mais confiáveis, isto é, as que possuem menor variância. No entanto esta abordagem requer o conhecimento da matriz covariância $\mathbf{\Lambda}$.

As estimativas $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{LS}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$ são portanto obtidas resolvendo-se o problema de minimização das funções $J_{LS}(\boldsymbol{\eta})$ e $J_{WLS}(\boldsymbol{\eta})$, respectivamente, que são definidas por

$$J_{LS}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^M (\gamma_m - K g_m)^2, \quad (3-68)$$

e

$$J_{WLS}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{N}{K^2} \sum_{m=1}^M \frac{(\gamma_m - K g_m)^2}{g_m^2 (1 + (g_m E_\kappa)^{-1})}, \quad (3-69)$$

ou ainda,

$$J_{WLS}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^M \frac{(\gamma_m - K g_m)^2}{g_m^2 (1 + (g_m E_\kappa)^{-1})}, \quad (3-70)$$

pois a constante N/K^2 não altera os pontos de mínimo da função objetivo para a estimativa WLS. O escalar γ_m representa a potência média observada na m -ésima derivação do RAKE, para o sinal recebido pelo terminal de uma determinada base.

Nos desenvolvimentos a seguir, considera-se que a função objetivo é dada por

$$J(\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})), \quad (3-71)$$

onde \mathbf{W} é a matriz identidade se a estimativa for LS, ou, $\mathbf{W} = \frac{K^2}{N} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$, se o critério escolhido para estimar $\boldsymbol{\eta}$ for WLS.

Cabe aqui a observação de que a estimativa $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$ definida pela expressão (3-67) não corresponde à estimativa de *máxima verossimilhança* (do inglês: *maximum likelihood* (ML)) [57], pois a matriz covariância de $\boldsymbol{\omega}$ é função de $\boldsymbol{\eta}$. Embora a estimativa ML seja normalmente escolhida para problemas de estimação com parâmetros não aleatórios⁷, as estimativas WLS e LS mostram-se mais apropriadas para o problema definido em (3-52).

3.5.4

Considerações sobre a polarização e erro médio quadrático de $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{LS}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$

Deseja-se agora determinar o vetor polarização \mathbf{b} , a matriz covariância \mathbf{P} e a matriz de erro médio quadrático \mathbf{Q}_{EMQ} para as estimativas LS e WLS

⁷Em muitas aplicações a estimativa ML consegue, pelo menos assintoticamente, ser um estimador eficiente.

de $\boldsymbol{\eta}$ definidas anteriormente. Ou seja, pretende-se calcular

$$\mathbf{b} = \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\eta}}] - \boldsymbol{\eta}^\dagger, \quad (3-72)$$

$$\mathbf{P} = \mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\eta}}])(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\eta}}])^T], \quad (3-73)$$

$$\mathbf{Q}_{EMQ} = \mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^\dagger)(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^\dagger)^T]. \quad (3-74)$$

Nestas equações e nas expressões a seguir, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ corresponde às estimativas LS ou WLS definidas em (3-66) e (3-67), respectivamente, e $\boldsymbol{\eta}^\dagger$ é o valor *verdadeiro* do vetor $\boldsymbol{\eta}$.

Como a função $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ é não-linear em $\boldsymbol{\eta}$, uma abordagem conveniente para calcular a polarização e erro médio quadrático de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ é linearizar $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ por uma série de Taylor em torno de um dado ponto de seu domínio. Isto é feito a seguir, para uma vizinhança do ponto $\boldsymbol{\eta}^\dagger$:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \approx \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^\dagger), \quad (3-75)$$

onde foram mantidos apenas o 1º e 2º termos da série, e \mathbf{G} é uma matriz de dimensão $M \times (1 + p)$, cujo elemento (i, j) é dado por

$$[\mathbf{G}]_{ij} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial \eta_j} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^\dagger}. \quad (3-76)$$

onde g_i é o i -ésimo elemento do vetor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ definido em (3-53).

Deve ser ressaltado que a aproximação em (3-75) é válida se $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ estiver suficientemente próximo de $\boldsymbol{\eta}^\dagger$. Em outras palavras, se o mínimo da função objetivo $J(\boldsymbol{\eta})$ estiver próximo do valor verdadeiro de $\boldsymbol{\eta}$. Considerando a definição de $J(\boldsymbol{\eta})$ em (3-71), lembrando que $\mathbb{E}[\boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{K}\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger)$, e pela lei dos grandes números, é possível afirmar que para $N \rightarrow \infty$ a estimativa $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ estará, com probabilidade próxima de 1, em uma vizinhança suficientemente próxima de $\boldsymbol{\eta}^\dagger$. O desenvolvimento feito a seguir é portanto *válido* supondo N elevado, e os resultados obtidos são na realidade propriedades *assintóticas* dos estimadores LS e WLS definidos para o problema.

Supondo que $J(\boldsymbol{\eta})$ é contínua e diferenciável em $\boldsymbol{\eta}$, a estimativa $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ é ponto crítico de $J(\boldsymbol{\eta})$. Portanto:

$$\left. \frac{\partial J(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\hat{\boldsymbol{\eta}}} = 0, \quad j = 1, \dots, p + 1 \quad (3-77)$$

Substituindo (3-75) em (3-71) e considerando a condição (3-77),

resulta

$$\begin{aligned} [-2\mathbf{G}^T\mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}})]_j + (\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}})^T \frac{\partial\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_j} (\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}}) = 0 \\ j = 1, \dots, p+1 \end{aligned} \quad (3-78)$$

onde $[\cdot]_j$ denota o j -ésimo elemento do vetor, $\partial\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta})/\partial\eta_j$ é a matriz $M \times M$ com elemento (m, n) igual a $\partial[\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta})]_{mn}/\partial\eta_j$, e o vetor $\boldsymbol{\gamma}^*$ é dado por

$$\boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger) + K\mathbf{G}\boldsymbol{\eta}^\dagger . \quad (3-79)$$

Para $N \rightarrow \infty$, é possível afirmar que as componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}}$ convergem em probabilidade para zero, i.e.⁸,

$$\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}} \rightarrow \mathbf{0} . \quad (3-80)$$

Como a matriz $\partial\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta})/\partial\eta_j$ é diagonal, o segundo termo do lado esquerdo da equação (3-78) corresponde à soma ponderada dos elementos de $\boldsymbol{\gamma}^* - K\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\eta}}$ elevados ao quadrado. Com base em (3-80), e admitindo que os elementos da diagonal de $\partial\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta})/\partial\eta_j$ são da mesma ordem de grandeza dos elementos de $\mathbf{G}^T\mathbf{W}$, é possível afirmar que o 2º termo de (3-78) é desprezível com relação ao primeiro. Considerando esta aproximação, e admitindo-se que $\mathbf{G}^T\mathbf{W}\mathbf{G}$ é não-singular, obtém-se a seguinte expressão para $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ a partir da equação (3-78):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\gamma}) &= K^{-1}(\mathbf{G}^T\mathbf{W}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma}^* \\ &= \boldsymbol{\eta}^\dagger + K^{-1}(\mathbf{G}^T\mathbf{W}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger)) . \end{aligned} \quad (3-81)$$

Como $E[\boldsymbol{\gamma}] = K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger)$, vem que

$$E[\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\gamma})] = \boldsymbol{\eta}^\dagger . \quad (3-82)$$

Ou seja, a estimativa LS ou WLS é não polarizada para N elevado.

Dado que o vetor \mathbf{b} é nulo, as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q}_{EMQ} são iguais. A partir da equação (3-81), é fácil mostrar que estas matrizes para a estimativa WLS são dadas por

$$\mathbf{P}_{WLS} = \mathbf{Q}_{EMQ} = \frac{1}{K^2}(\mathbf{G}^T\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{G})^{-1} . \quad (3-83)$$

⁸Esta afirmação é feita com base na lei dos grandes números para (3-79), lembrando que $E[\boldsymbol{\gamma}] = K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}^\dagger)$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}} \approx \boldsymbol{\eta}^\dagger$ (quando $N \rightarrow \infty$).

Substituindo (3-56) na expressão acima, chega-se à expressão para o elemento (i, j) da matriz inversa de \mathbf{P}_{WLS} :

$$[\mathbf{P}_{WLS}^{-1}]_{ij} = N \sum_{m=1}^M \frac{\partial g_m}{\partial \eta_i} g_m^{-2} (1 + (E_{\kappa} g_m)^{-1})^{-1} \frac{\partial g_m}{\partial \eta_j} . \quad (3-84)$$

Se $E_{\kappa} g_m \gg 1, \forall m$, a matriz \mathbf{P}_{WLS}^{-1} pode ser dada por

$$[\mathbf{P}_{WLS}^{-1}]_{ij} = N \sum_{m=1}^M \frac{\partial g_m}{\partial \eta_i} g_m^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial \eta_j} . \quad (3-85)$$

Comparando (3-85) com (3-65), e dado que $N \gg 1$, chega-se ao interessante resultado de que a matriz covariância de $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$ converge para a matriz inversa da matriz de informação de Fisher. Em outras palavras, a estimativa WLS atinge o CRLB para o problema em questão, quando $N \rightarrow \infty$.

Por sua vez, o estimador LS tem matriz covariância dada por

$$\mathbf{P}_{LS} = \mathbf{Q}_{EMQ} = \frac{1}{K^2} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} ((\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T)^T . \quad (3-86)$$

Dada a matriz acima, observa-se que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{LS}$ é ótimo, ou seja, $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{P}_{LS}^{-1}$, se e somente se a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ for igual à matriz identidade multiplicada por um escalar qualquer (exceto 0).

3.5.5

Redução da dimensão do problema de minimização

Implementando-se um procedimento para a minimização das funções em (3-68) ou (3-70), é possível, a princípio, determinar respectivamente as estimativas LS ou WLS para o vetor $\boldsymbol{\eta}$. No entanto, a variável escalar K nestas expressões tem valor desconhecido, e que portanto deve, em uma primeira análise do problema, ser considerada como uma variável a ser determinada conjuntamente com $\boldsymbol{\eta}$ no procedimento de minimização. Neste caso, reescreve-se a função erro em (3-71) da forma

$$J(K, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\gamma} - K\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) , \quad (3-87)$$

que torna explícita a variável K como elemento do argumento da função objetivo J a ser minimizada.

É possível, entretanto, escrever K como função do vetor $\boldsymbol{\eta}$ e mostrar que os dois problemas são equivalentes. Esta abordagem reduz a dimensão

do problema de otimização, diminuindo o esforço computacional e o tempo de convergência do algoritmo na busca pelo ponto mínimo da função.

Observa-se inicialmente que o objetivo no problema de minimização é determinar o ponto

$$\boldsymbol{\vartheta} = (K^*, \delta_1^*, \dots, \delta_{L^*}^*, \sigma_1^*, \dots, \sigma_p^*) \equiv (K^*, \boldsymbol{\eta}^*) \quad , \quad (3-88)$$

tal que

$$J(\boldsymbol{\vartheta}) = \min J \quad . \quad (3-89)$$

De acordo com (3-89) e considerando $J(K, \boldsymbol{\eta})$ uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^{(p+1)}$, pode-se afirmar que $\boldsymbol{\vartheta}$ é ponto crítico. Conclui-se, portanto, que este ponto pertence ao conjunto Ω definido da seguinte forma

$$\Omega = \{ \boldsymbol{x} ; \left. \frac{\partial J(K, \boldsymbol{\eta})}{\partial K} \right|_{(K, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{x}} = 0 \} \quad . \quad (3-90)$$

Por sua vez, a derivada parcial de J com relação à variável K é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(K, \boldsymbol{\eta})}{\partial K} &= 2 \frac{\partial [(\boldsymbol{\gamma} - K \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))^T]}{\partial K} \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\gamma} - K \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) \\ &= -2 \mathbf{g}^T(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\gamma} - K \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) \end{aligned} \quad (3-91)$$

onde a notação $\partial \boldsymbol{v} / \partial z$ representa o vetor de derivadas parciais dos elementos de \boldsymbol{v} com relação a z . Portanto, de (3-90) e (3-91), pode-se afirmar que a coordenada K de $\boldsymbol{x} \in \Omega$ é tal que

$$K = \frac{\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{g}^T(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})} \triangleq h(\boldsymbol{\eta}) \quad , \quad (3-92)$$

e com isto o problema de minimização pode ser reformulado considerando agora a função erro com dimensão igual à do vetor $\boldsymbol{\eta}$:

$$\tilde{J}(\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\gamma} - h(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}))^T \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\gamma} - h(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) \quad . \quad (3-93)$$

A minimização da função $\tilde{J}(\boldsymbol{\eta})$ corresponde a minimizar a função $J(K, \boldsymbol{\eta})$ para o conjunto de pontos em Ω . Como $\boldsymbol{\vartheta} \in \Omega$, pode-se afirmar que os dois problemas são equivalentes.

3.6

Aplicação ao modelo de espalhamento gaussiano

Admitindo-se que o terminal móvel encontra-se em uma região com distribuição espacial de espalhadores *gaussiana*, e que as diversas réplicas produzidas pelo canal chegam ao terminal após uma reflexão (modelo *single-bounce*) em elementos próximos ao terminal, a fdp dos valores de atraso tem expressão dada por (2-27).

Observa-se que aquela expressão tem τ (valor de atraso) como argumento, e é parametrizada por τ_0 e σ_s , que representam, respectivamente, o tempo de propagação do sinal em linha reta e o desvio-padrão da concentração de espalhadores em torno do terminal.

Considera-se agora um sistema de localização que realiza a estimativa da posição do terminal com base em medidas de ToA. Seguindo o modelo definido na expressão (1-6), e supondo que o ruído de medida possa ser filtrado (por filtragem de Kalman por exemplo), tornando-se desprezível comparado a τ_0 , pode-se escrever

$$\tau_l^{KF} = \tau_{0,l} + \delta_l ; \quad l = 1, \dots, L \quad (3-94)$$

onde $\delta_l \geq 0$, $\tau_{0,l}$ é o tempo de propagação em linha reta do sinal entre o terminal e a l -ésima base, e τ_l^{KF} é o valor de ToA medido após ser filtrado.

Substituindo o resultado acima em (2-27), a fdp dos valores de atraso em um ambiente de espalhamento gaussiano, para o sinal transmitido pela l -ésima base, pode ser equivalentemente expressa por

$$f_\tau(\tau) = \frac{c^2(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2}{2\pi\sigma_s^2} \frac{\exp(-c^2\tau^2/(8\sigma_s^2))}{\sqrt{\tau^2 - (\tau_l^{KF} - \delta_l)^2}} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\tau^2}{(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2} - \text{sen}^2\theta \right] \times \exp\left(\frac{-c^2(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2\text{sen}^2\theta}{8\sigma_s^2}\right) \cosh\left(\frac{c^2\tau(\tau_l^{KF} - \delta_l)\text{sen}\theta}{4\sigma_s^2}\right) d\theta, \quad (3-95)$$

A expressão (3-95) torna explícita a dependência do espalhamento temporal com o erro de NLOS δ_l . Além disso, $f_\tau(\cdot)$ é parametrizada por σ_s , cujo valor em princípio é desconhecido e portanto é variável a ser estimada juntamente com δ_l , $l = 1, \dots, L^*$. Ou seja, os vetores $\boldsymbol{\eta}_l$ ($l = 1, \dots, L^*$) a serem determinados pela minimização da função erro em (3-93) são definidos por

$$\boldsymbol{\eta}_l = [\delta_l, \sigma_s]^T \quad (3-96)$$

sendo as coordenadas da imagem da função $g_l(\boldsymbol{\eta}_l)$ calculadas por

$$g_{m,l} = \int_{x \in \Delta_{m,\delta_l}} f_\tau(x) dx, \quad m = 1, \dots, M \quad (3-97)$$

$$l = 1, \dots, L^*$$

onde Δ_{m,δ_l} é o intervalo definido em (3-42). Observando que

$$\int_{x \in \Delta_{m,\delta_l}} f_\tau(x) dx = \int_{x \in \Delta_m} f_\tau(x + \delta_l) dx, \quad (3-98)$$

onde Δ_m é dado por (3-2), chega-se finalmente à definição de $g(\boldsymbol{\eta}_l)$ para a distribuição gaussiana de espalhadores:

$$g_{m,l} = \int_{x \in \Delta_m} \frac{c^2(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2}{2\pi\sigma_s^2} \frac{\exp(-c^2(x + \delta_l)^2/(8\sigma_s^2))}{\sqrt{(x + \delta_l)^2 - (\tau_l^{KF} - \delta_l)^2}} \times$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{(x + \delta_l)^2}{(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2} - \sin^2\theta \right] \exp\left(\frac{-c^2(\tau_l^{KF} - \delta_l)^2 \sin^2\theta}{8\sigma_s^2}\right) \times$$

$$\cosh\left(\frac{c^2(x + \delta_l)(\tau_l^{KF} - \delta_l) \sin\theta}{4\sigma_s^2}\right) d\theta dx. \quad (3-99)$$

Desempenho do estimador para espalhamento gaussiano

Com (3-99) em (3-65), e considerando somente uma base em NLOS com o terminal ($L^* = 1$), obtém-se as Figuras 3.4(a) e 3.4(b), que mostram gráficos de $\xi = c\sqrt{N \times CRLB_\delta}$ (dado em metros) em função de δ^\dagger , onde $CRLB_\delta$ é o limitante de Cramér-Rao para a estimativa de δ , δ^\dagger é o valor verdadeiro do parâmetro, N é o número de medidas na definição do vetor $\boldsymbol{\gamma}$ e c é a velocidade da luz. Os traçados foram obtidos para diferentes valores de distância D (500 e 1000 m) entre base e terminal e número de derivações do RAKE M (3 e 4). O valor do desvio padrão σ_s e largura das janelas T_c considerados foram respectivamente de 206 m⁹ e 0,81 μ s (padrão IS-95). A faixa de valores para δ^\dagger foi de 0,5 a 1,5 μ s, correspondendo, em metros, a erros de 150 a 450 m.

Dos gráficos pode-se observar que

- 1 - A distância D entre base e terminal tem limitada influência no valor de $CRLB_\delta$.
- 2 - Um número maior de derivações do receptor RAKE envolvidos na estimativa de $\boldsymbol{\gamma}$ aumenta significativamente a precisão de $\hat{\delta}$. Além disso,

⁹Este valor para σ_s , segundo a equação (2-30), corresponde a um valor de espalhamento de atrasos RMS de 900 nseg.

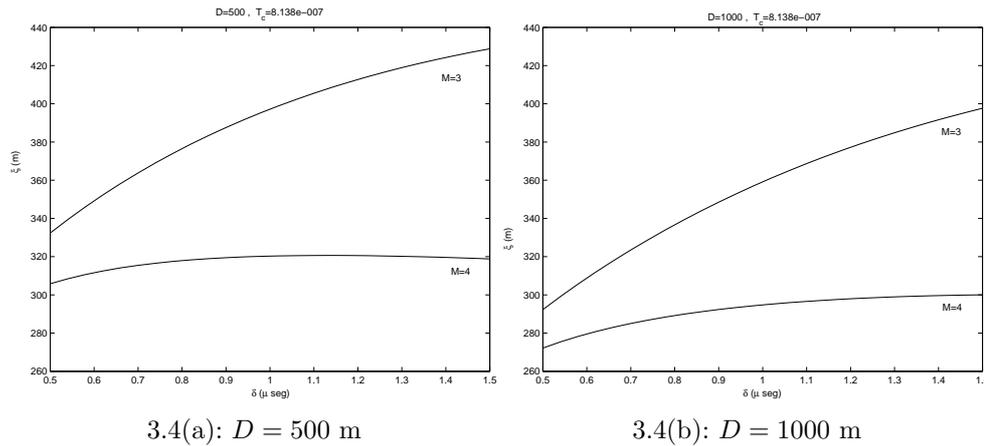


Figura 3.4: Gráfico de $\xi = c\sqrt{N \times CRLB_{\delta}}$ para $T_c = 0,81 \mu s$. (a) $D = 500$ m; (b) $D = 1000$ m .

observa-se que $M = 4$ torna ξ aproximadamente independente de δ^{\dagger} .

3 - Considerando, por exemplo, $\sqrt{N} = 8$, as figuras mostram que o desvio padrão da estimativa (considerando que $\hat{\eta}$ atinge o CRLB) tem valor máximo igual a $430 \div 8 \approx 53$ m, obtido em $\delta^{\dagger} = 1,5 \mu s$. Este valor corresponde a apenas $53 / (1,5 \times 10^{-6} \times c) \approx 11\%$ do valor verdadeiro do erro de NLOS.

3.7

Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentado um estimador para o erro de NLOS em medidas de ToA. A estimativa é feita com base em observações da potência instantânea do sinal recebido em um receptor RAKE.

Inicialmente foi mostrada a relação entre potência média (estocástica) do sinal processado em cada derivação do RAKE com as propriedades de espalhamento temporal do canal. Na prática, esta potência média pode ser obtida pela média temporal γ mostrada em (3-13), dado que as condições de estacionariedade do canal e independência entre medidas sejam satisfeitas. As propriedades estatísticas bem como a precisão do vetor γ são calculadas, e dependem fundamentalmente da quantidade N de medidas realizadas para a estimativa da potência.

Na situação em que há erros nas medidas de ToA provocados pelo estado de NLOS, admite-se que a fdp dos valores de atraso é dada por (3-43), e o problema de estimação pode ser construído como mostra a expressão (3-52), em que γ é o vetor disponível de observações e η é o

vetor a ser estimado. Para a estimativa de $\boldsymbol{\eta}$, foi calculado o limitante de Cramér-Rao, e escolhendo-se um critério LS ou WLS, é possível mostrar que a estimativa resultante é despolarizada, dado que N é suficientemente grande. Foi demonstrado também que o erro médio quadrático de $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$ converge assintoticamente para o CRLB.

A princípio as estimativas $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{LS}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{WLS}$ são determinadas pela minimização das funções dadas em (3-70) e (3-68), respectivamente. No entanto, demonstrou-se que estas estimativas podem ser encontradas pela minimização de $\tilde{J}(\boldsymbol{\eta})$ em (3-93), que apresenta dimensão menor do que as funções-objetivo originais.

Admitindo-se que os elementos espalhadores do sinal têm distribuição gaussiana em torno do terminal, o vetor $\boldsymbol{\eta}$ a ser estimado é dado por (3-96), e as coordenadas da imagem de $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ são definidas por (3-99). Gráficos do CRLB em função do erro de NLOS a ser estimado mostram que a precisão da estimativa aumenta com o uso de um maior número de derivações do RAKE para a medida do espalhamento da potência. Em um cenário típico, com $N = 64$, no pior caso o valor verificado para o desvio padrão da estimativa de δ foi de 53 m, representando 11 % do valor verdadeiro do erro de NLOS.