7
Conclusão

Neste estudo, analisamos as imagens conceituais de alunos da 3ª série do Ensino Médio, a partir de registros falados e escritos, obtidos durante a realização de algumas atividades sobre os números reais. Esse tema está presente em grande parte do programa de Matemática do Ensino Médio e do Ensino Superior, porém é pouco explorado nas pesquisas em Educação Matemática, conforme destacamos na revisão bibliográfica, apresentada no capítulo 2.

As pesquisas que estudamos de Leviatan (2004 e 2006), Zazkis & Sirotic (2004) e a análise documental realizada foram fundamentais na elaboração das atividades, adaptadas para alunos do Ensino Médio. Além disso, a escolha da ferramenta teórica, imagem conceitual de Tall & Vinner (1981), foi fator determinante na delimitação do objeto de estudo.

Consideramos que a decisão de aplicar as atividades para os alunos em dupla, permitindo e incentivando o uso da calculadora, facilitou a expressão dos participantes que, motivados pela discussão nas duplas e pelas intervenções da pesquisadora, exteriorizaram descritores das suas imagens conceituais sobre os números reais.

Avaliamos que a escolha pelo método clínico, na coleta e na análise dos dados, favoreceu a identificação dos atributos presentes nas justificativas dos alunos. Esse método exigiu do pesquisador, no entanto, atenção permanente aos detalhes dos registros escritos e aos não ditos implícitos nas explicações colocadas pelos sujeitos. Com isso, foi possível desvendar elementos esclarecedores dos julgamentos que foram elaborados.

Vamos agora, neste texto final, fazer um breve histórico do percurso deste trabalho, reconhecendo obstáculos e apontando problemáticas que surgiram e como foram solucionadas e, principalmente, responder provisoriamente as questões levantadas nesta tese, tecendo considerações mais gerais. Por fim, objetivamos apontar sugestões e perspectivas para futuros estudos.

Breve histórico do percurso da tese

Na revisão bibliográfica e na análise documental expusemos e discutimos a problemática da circularidade da definição dos números reais contestada por Baldino (1997), Moreira (2004) e Lima et al.(2001), comumente presente nos livros didáticos do Ensino Médio e também, nos livros de cálculo, conforme expusemos no capítulo 2. Concluímos, portanto, que a atitude de apresentar e/ou definir o conjunto dos números reais como $R = Q \cup I$ não é exclusivo da matemática escolar, pois a identificamos também nas pesquisas de Cobianchi (2001), Dias (2002) e Moreira (2004).

Defendemos que apresentar o número real positivo como resultado de uma medição é imprescindível do ponto de vista didático, pois mostra aos alunos, entre outros aspectos, a não suficiência dos números racionais para essa função. Concordamos com Moreira (2004), no entanto, quando declara que em qualquer abordagem, ela terá a sua limitação e estará restrita a alguns casos. Na tentativa de minimizar essa questão, Lima et al. (2001) questionaram sobre como explicar o conceito de número real de forma correta e acessível aos alunos do Ensino Médio e sugeriram apresentar um número real como uma expressão decimal finita ou infinita. Além disso, os resultados das pesquisas de Sirotic & Zazkis (2007 e 2007b) e de Leviatan (2006) indicaram que os participantes, futuros professores, não relacionam números irracionais e reais com noções geométricas na resolução de atividades a eles propostas, bem como constataram falta de experiência algorítmica e necessidade de ampliar o repertório desses sujeitos com uma variedade de exemplos de números irracionais.

Durante a análise das três coleções didáticas do Ensino Médio, constatamos que a parte dedicada aos números reais não proporciona investigar questionamentos a respeito da natureza infinita da classe dos números reais, nem explora noções importantes como, por exemplo, a densidade. Avaliamos que depois da criação do PNLD, houve melhora em relação à abrangência do tema, à variedade de exercícios e à valorização do uso da calculadora. Ainda assim, os percursos didáticos, de um modo geral, são cristalizados e não favorecem a exploração das noções de densidade, incomensurabilidade, infinitude e completude dos números reais. Constatamos também que o algoritmo da divisão é muito pouco explorado, não possibilitando discussões acerca das diferentes naturezas das representações decimais obtidas nesse processo.

Nesse contexto, optamos por aplicar atividades não usuais que contemplaram e priorizaram o aspecto numérico e algébrico, para detectar descritores da imagem conceitual dos alunos. Dessa forma, valorizamos a representação decimal infinita e as operações entre números irracionais, noções que segundo Sirotic & Zazkis (2007b) estão estreitamente relacionadas com o currículo do ensino secundário. Utilizamos para isso, o algoritmo da divisão e as operações com as raízes quadradas irracionais. Avaliamos ao final desta tese, que essa escolha, coerente com nosso objetivo, favoreceu a coleta de dados sobre os descritores de imagens conceituais, pois exploramos aspectos que foram mais vivenciados pelos alunos na matemática escolar. Concluímos, portanto, que essa opção didática, valorizou aspectos mais conhecidos pelos participantes sobre o tema e levou-os a terem mais elementos para julgar e explicar suas escolhas.

Respondendo as questões da pesquisa

No Ensino Médio, a contagem é um processo interiorizado e automatizado, para a maioria dos alunos. Os números naturais já fazem parte de um conjunto de elementos que são manipulados sem precisar pensá-los e, por isso, são utilizados com "relativa habilidade" em diferentes contextos. Constatamos com os sujeitos da nossa pesquisa que, apesar de esse grupo já ter utilizado os números reais em muitos contextos, pois são alunos da 3ª série do Ensino Médio, essa "naturalidade" não acontece com os números racionais e menos ainda com os números irracionais. Percebemos isso pelas infinitas classes de números que não foram vislumbrados pelos alunos nas atividades P5, P6 e P7, apesar de o aspecto visual ter sido muito valorizado nessas questões.

Em relação à pergunta — Quais atributos relevantes e irrelevantes são expressos pelos alunos, relacionados aos números racionais e os irracionais, na realização das atividades? —, percebemos que as atividades, nas quais o aspecto visual foi mais valorizado, ou nas em que foi solicitada alguma categorização por parte dos alunos, proporcionaram uma maior facilidade na identificação de atributos relevantes e irrelevantes, possibilitando maior riqueza na análise da imagem conceitual relacionada de números racionais, principalmente, quando se tratou de dízimas periódicas e de números irracionais, com as expansões infinitas e não periódicas que apresentavam um padrão observável.

O grupo I de atividades, nesse sentido, proporcionou maior repertório de atributos relacionados aos números racionais e irracionais, visto que a maior parte das atividades foram trabalhadas, tanto no estudo preliminar quanto no estudo principal e, consequentemente, tivemos mais dados para análise. Além disso, a imagem conceitual dos participantes pesquisados possui um repertório maior de informações relacionadas às representações decimais, no grupo I, do que relacionadas às raízes quadradas irracionais do grupo II. Consideramos que o conjunto de atributos encontrados nas atividades, pode ser organizado em três categorias: um primeiro grupo que se referiu unicamente ao primeiro aspecto visual do número observado como, por exemplo, "finito", "infinito", "não está na raiz", "é uma divisão de números primos", "é uma raiz quadrada" e "não está na raiz"; um segundo grupo de atributos que já explicitam aspectos mais detalhados, tais como, "há seqüência" ou "apresenta período repetitivo", "apresenta várias casas decimais", "é possível prever o que vem depois" e "não termina e não segue padrão"; e uma terceira categoria, na qual os atributos carregam aspectos lógico-analíticos ou são definidores de um julgamento adequado, como " é representável na forma de fração", "é um decimal finito ou uma dízima periódica", "é uma dízima não periódica", "não pode ser escrito na forma de fração" e "é raiz quadrada de número primo".

Os atributos evocados indicam que o aspecto visual é o mais recorrente, apresentando descritores para as imagens que não são favoráveis aos julgamentos analíticos, no entanto, por meio dos conflitos surgidos durante as atividades, estes mesmos sujeitos desenvolveram julgamentos mais sofisticados, indicando que o tipo de julgamento tem um caráter local, remetendo-se prioritariamente aos aspectos específicos de cada atividade.

A identificação e a comparação dos atributos relevantes e irrelevantes destacados dos registros auxiliou-nos a concluir o tipo de julgamentos realizados, se prototípicos ou analíticos. A presença da calculadora, que serviu de ligação entre o verdadeiro e possível resultado de uma dada operação, e o que foi apresentado no visor, estimulou a discussão dos alunos, principalmente quando os participantes comparavam seus exemplares protótipos com os de outros, possibilitando a exteriorização de outros exemplos, não usuais, que se sobressaíram em relação aos protótipos.

Em relação à segunda questão da pesquisa — Que elementos das atividades caracterizam os julgamentos prototípicos e analíticos manifestados pelos alunos? —, os julgamentos foram identificados a partir da exposição dos atributos evocados nas explicações em forma de texto corrido, ou nos exemplos fornecidos, ou ainda nas etapas utilizadas durante um desenvolvimento matemático, como a resolução de uma inequação e a aplicação de uma propriedade. Citamos, por exemplo: ao considerar as aproximações racionais de um número irracional como sendo o próprio número irracional; ao afirmar que uma divisão de números inteiros possui, como representante decimal, uma dízima periódica, porque durante o processo de divisão houve repetição de algarismos no quociente; ou ao utilizar a falsa propriedade $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$. Esses foram alguns julgamentos que caracterizaram uma imagem conceitual incompleta em relação à respectiva noção envolvida. Por outro lado, alguns participantes, na exteriorização de seus julgamentos prototípicos ou analíticos, mostraram uma imagem conceitual completa (Hershkowitz, 1994), dentro do contexto em questão, ao afirmar, por exemplo, que uma expansão decimal infinita, mesmo apresentando alguma repetição, pode ser um número racional ou irracional, pois não é possível ter certeza dos dígitos que virão depois. O mesmo ocorreu ao não se deixarem levar pela representação decimal, resultado de uma divisão de inteiros (atividade P7), ao declararem que o número era racional, pois estava escrito na forma de fração, ou ainda, quando julgaram que o número 0,1234...$\underline{n}$ $\underline{n+1}$... era irracional, pois nenhuma fração poderia representá-lo, entre outros casos. Ainda tivemos exemplos de alunos que, na explicação de sua resolução, apresentaram tanto julgamentos adequados quanto inadequados. Os descritores, nesse caso, determinaram na nossa avaliação uma imagem conceitual parcial, conforme casos detalhados ao longo do capítulo 6.

Essa exposição já respondeu parte da pergunta — Que atividades favorecem a manifestação de exemplos protótipos que caracterizam a imagem conceitual do aluno em relação aos números racionais e irracionais? Percebemos, com esse grupo de alunos, que devemos evitar o uso de divisões muito simples que cristalizam e rotulam determinados números, conforme detalhamos na análise do grupo I de atividades, pois estas não favorecem a criação de outros exemplos protótipos. Também é importante elaborar atividades que possibilitem o surgimento de processos que envolvam a passagem ao infinito, principalmente, fazendo uso das sequências infinitas e convergentes e as divisões de números inteiros que geram as dízimas periódicas. Esses procedimentos precisam ser mais vivenciados, pois favorecem a formação de novos descritores de imagem conceitual que abrem caminhos para noções necessárias à matemática avançada.

Foi importante explorar atividades que necessitaram da aplicação da reversibilidade das implicações matemáticas. Por exemplo, observamos que a maioria dos alunos pesquisados manipulou com certa tranquilidade as implicações: *se o número é uma fração, então é número racional* e *se o número é decimal finito, então é número racional.* Já no que se refere à implicação: *se o número é uma dízima periódica, então é número racional*, esta se reduziu somente a casos de dízimas periódicas simples. Conjeturamos, no entanto, que essa deficiência na manipulação das dízimas periódicas e nas suas correspondentes frações tem relação direta com os livros didáticos, conforme verificado nas Coleções analisadas, que não as valorizam ou trabalham casos muito imediatos, não contribuindo para o aumento de descritores visuais e analíticos que fortaleçam a imagem conceitual completa dos números racionais e, como consequência, dos números reais.

Zazkis & Sirotic (2004) apontaram como uma possível barreira, no aprendizado dos alunos em relação aos números irracionais, a equivalência das duas definições apresentadas na matemática escolar: a inexistência de uma representação por meio de uma fração e a representação decimal infinita e não periódica. Em nossa pesquisa, destacamos que algumas duplas trabalharam bem a equivalência das três proposições: *x é número irracional*, *x não pode ser representado na forma de fração* e *x é uma expansão decimal infinita e não periódica.* Acreditamos que isso aconteceu pela sequência de atividades que foram trabalhadas, quando oferecemos números, tanto na forma decimal quanto na forma fracionária. Isso possibilitou o cruzamento das imagens vistas com os exemplos protótipos que os participantes foram desenvolvendo ao longo das resoluções. Avaliamos que tais atividades favoreceram a criação de novos exemplos para o repertório de descritores de imagem conceitual adequada para alunos do Ensino Médio.

Nesta pesquisa, observamos alguns alunos que articularam bem as representações decimal e fracionária, mas não exteriorizaram atributos relacionados aos números irracionais. Isso sugere a hipótese de que possivelmente não conhecem atributos para a identificação dos irracionais e de que há insuficiência de linguagem para tratar do assunto. Uma orientação que tiramos desse estudo é que os professores precisam oferecer aos seus alunos experiências didáticas que se utilizem das representações fracionária e decimal, por meio de ações que levem os alunos a verificarem sob que condições elas são equivalentes. Aqui queremos valorizar a escolha pelas representações decimais e também avaliar algumas atividades que poderiam ser mais bem exploradas, como foi detalhadamente exposto na análise de atividades do grupo II.

Na questão — Que significados atribuem às dízimas periódicas e não periódicas nas representações decimais infinitas? —, os exemplos protótipos obtidos nos registros, de certa forma, esclarecem os julgamentos inadequados que foram feitos. Como exemplos, citamos: olhar para as dez primeiras casas de um número decimal que não apresenta repetição e considerá-lo um número irracional; afirmar que números decimais que apresentam na parte decimal, dígitos ou conjuntos de dígitos, que se repetem três vezes são dízimas periódicas; observar um padrão e afirmar que é dízima periódica, ou que a falta de padronização caracteriza as dízimas não periódicas.

A "falta de percepção de ser uma dízima" e a "simples preguiça de terminar as contas", conforme apontou a aluna Thaíssa, são descritores de uma imagem conceitual que leva o aluno a acreditar que, se houvesse período, ele já deveria ter aparecido e que, portanto, a dízima é não periódica. Ou ainda "dá uma dízima enorme", como um julgamento estabelecido a partir dos exemplos protótipos de dízimas periódicas do repertório de imagens da aluna. Isso caracteriza a falta de familiaridade com as dízimas periódicas que possuem períodos com mais de três casas decimais.

Dessa forma, as análises realizadas levam-nos a concluir que há necessidade de um trabalho cauteloso a partir do algoritmo da divisão com todos os argumentos lógicos que derivam desse procedimento, isto é, que seja acompanhado dos resultados necessários, que levam ao bom entendimento de números racionais e das dízimas periódicas, pois, no grupo pesquisado, a escolha desse caminho contribuiu para o desenvolvimento do conceito de número irracional.

Como o uso da calculadora pode contribuir na busca de atributos relacionados à imagem conceitual dos números reais? Esta questão permite-nos tecer considerações sobre a importância do uso da calculadora pelos alunos na realização das atividades, ao estimulá-los e alertá-los a não fazerem afirmações precipitadas a partir do número identificado no visor, mas sim levantando possibilidades e investigando o problema. Isso foi vivenciado em vários momentos explicitados ao longo do capítulo 6. Citamos, como exemplos, que a maioria dos alunos interpretou os números do visor das atividades P5 e P6 como expansões decimais infinitas, pois entenderam que a condição de estarem na calculadora garantiria que os números fossem truncados ou aproximados. A presença da calculadora no enunciado da questão P7, confrontando a fração e sua correspondente representação decimal exibida no visor, estimulou a discussão dos alunos, pois possibilitou a comparação de atributos que foram exteriorizados a partir dos números das atividades P5 e P6.

Essa natureza didática do uso da calculadora, no entanto, enfatiza a necessidade das demonstrações matemáticas para as evidências visualizadas que, o público de alunos do Ensino Médio, consideram suficientes para fundamentar as conjeturas levantadas. Nas questões do grupo II, houve a tendência dos alunos a confirmar resultados de operações feitas com as raízes quadradas na calculadora, como a aluna Thaíssa, que confirmou a veracidade do resultado da operação $\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}=\sqrt{18}$, calculando o valor de $\sqrt{18}$ na calculadora. Para a aluna, o resultado do visor era a confirmação.

Esse descritor de imagem conceitual de número irracional caracteriza a necessidade de conceber o número irracional como um número, assim como é o número 2, por exemplo. Nesse caso, o uso da calculadora pode ser um limitador, pois a visualização da imagem 4,2426406871 — obtida na calculadora — como um número, tem mais significado do que a imagem $\sqrt{18}$. Concluímos em consonância com Vinner (1993, *apud* Costa 2002), que o aspecto visual, nesse caso, empobreceu a imagem conceitual.

Na pergunta — De que forma, o estudo das raízes quadradas irracionais e suas aproximações racionais podem contribuir para uma exposição dos atributos considerados relevantes para os alunos e seus exemplos protótipos?—, observamos que alguns alunos desta pesquisa entenderam as aproximações racionais dos irracionais como o próprio irracional, conforme já apontamos em vários momentos. Dessa forma, procuramos elaborar as atividades do grupo II, valorizando as propriedades relativas às operações com números irracionais, propiciando momentos de confronto nas manipulações algébricas aliadas ao uso de aproximações obtidas na calculadora ou na tabela do Excel que foi fornecida. Essa atitude permitiu ao aluno a discussão das estruturas dos algoritmos e buscou prevenir recorrentes manipulações algébricas inadequadas.

Consideramos que muitos descritores de imagem conceitual que "igualam" o irracional a uma de suas aproximações racionais se deve, em parte, pelo uso constante dessas igualdades nos livros didáticos e, por consequência, pelos professores. Indícios dessa afirmação são identificados nos livros didáticos, apresentados no capítulo 4 e nos recortes de registros analisados ao longo do capítulo 6. Concordamos com Palis (1994), quando ela enfatiza que é importante incluir na prática escolar o mais cedo possível a distinção entre soluções exatas e aproximadas. Nesse sentido, o uso da calculadora facultou, nas atividades que envolveram as raízes quadradas irracionais, investigar propriedades e superar dificuldades e conflitos. Como exemplo, os alunos Bruno e Celso, com a dupla estratégia de resolução, forneceram a resposta $\sqrt{3}.3\sqrt{3}=3.3=9\cong 8{,}999$ e até mostraram que $\sqrt{7}+\sqrt{13}\cong\sqrt{39}$, buscando um número irracional, fato raro, como aproximação da soma de dois irracionais, quando normalmente é apresentada uma aproximação racional. Isso deve-se à possibilidade de rapidez nos cálculos e à variedade de ferramentas disponibilizadas para a atividade.

Na última questão — Que ideias aparecem e como aparecem para as noções relacionadas ao número real, especificamente, densidade e infinito? —, consideramos que a maioria das atividades, dos grupos I e II, valorizaram o conceito de infinitude, principalmente, pelo excesso de uso das representações decimais infinitas, das dízimas periódicas e não periódicas. Percebemos que, mesmo que o aluno compreenda que o conjunto dos números naturais é infinito e que o conjunto dos números racionais também o é, o uso desses números não naturaliza essa idéia. A manipulação de números, que trazem em si um conjunto infinito de outros números que o traduzem, no entanto, requer cuidados e questionamentos ainda não considerados até então. Citamos, como exemplos, os julgamentos "não posso afirmar, pois não sei o que vem depois", "tentamos fazer à mão, impossível", "não vemos outro jeito simples de pensar essa soma senão o uso da calculadora", entre outros, que surgiram ao longo das análises realizadas nas atividades.

Ao avaliar as atividades, nas quais os alunos precisavam operar com as raízes quadradas irracionais, manipular inequações modulares, fornecer exemplos de racionais e irracionais, e aproximar números irracionais, percebemos a dificuldade de operar com radicais, problema que preferiram resolver com o uso de aproximações racionais, o que estimulou os sujeitos a pensarem nessas aproximações, contribuindo para a manipulação de números pertencentes a uma vizinhança mais próxima de racionais e irracionais. Avaliamos, conforme as análises feitas ao longo do capítulo 6, que essas atividades, aliadas às intervenções ocorridas, favoreceram o desenvolvimento das noções de densidade e de infinitude.

Considerações gerais da pesquisa

Observamos que o algoritmo da divisão possibilitou e consolidou descritores de imagem conceitual nos alunos, à medida que confrontaram atributos relevantes e irrelevantes na escolha de seus julgamentos e, com isso, aumentaram o repertório de exemplares protótipos em relação às representações decimais. O ambiente clínico estabelecido proporcionou igual atenção, tanto aos julgamentos adequados, quanto aos julgamentos inadequados feitos pelos alunos. Uma razão disso foi o fato de a pesquisadora, ao estar sempre atenta aos registros escritos e falados indicados no raciocínio do sujeito, ter realizado intervenções, tanto para destacar e valorizar aspectos dos julgamentos coerentes, quanto para discutir e buscar no grupo novos tipos de respostas que confrontassem os julgamentos incoerentes.

Concluímos que depende da natureza das atividades o fato de os sujeitos externalizarem mais, ou menos, seus raciocínios e o que está por trás deles. As atividades que exploraram o aspecto visual possibilitaram um leque maior de interpretações, talvez motivadas pelo impacto causado pela imagem, que mais facilmente resgataram aspectos semelhantes em outros conhecimentos prévios ou nos conceitos já vistos, diferente de uma atividade que valoriza um determinado procedimento algébrico.

O uso de diferentes representações de números reais e as operações com essas diferentes representações parecem estimular a criatividade acerca dos números reais, como foi o caso das atividades trabalhadas no grupo II, pois favoreceram o surgimento de outros descritores de imagem conceitual ainda não observados nas atividades do grupo I. O segundo grupo de atividades contemplou as raízes quadradas irracionais e suas aproximações decimais, que foram fornecidas pela calculadora e pelo Excel. Observamos, em nossa análise documental, feita no capítulo 4, que questões dessa natureza são muito pouco exploradas nos livros didáticos e, consequentemente, na sala de aula, e isso de alguma maneira interferiu em nossa análise, pois a quantidade de registros e a qualidade do teor desses registros obtidos diminuiu.

Quando tratamos de questões referentes ao processo de aprendizagem, as etapas que fazem parte do desenvolvimento das atividades são tão importantes, quanto os conteúdos envolvidos. Estes permitem-nos, ou não, ampliar as discussões, compreender as interpretações dos alunos e explicitar os caminhos não pensados anteriormente. O planejamento das tarefas foi orientado por um constante diálogo no desenvolvimento das atividades, favorecendo as análises clínicas do processo e possibilitando que os resultados desse estudo fossem obtidos a partir de uma abordagem qualitativa. Nesse sentido, os resultados não são genéricos, mas aplicáveis a contextos com características semelhantes.

Na comparação entre os julgamentos prototípicos e os analíticos, vivida num ambiente de discussão, avaliamos que os alunos explicitaram suas ideias com mais detalhes, para superarem dúvidas e para convencerem outros alunos sobre suas crenças. Esse aspecto possibilitou um confronto de descritores da imagem conceitual relacionados aos números reais, no que se relaciona à percepção e à diferença de padrões e à manipulação algébrica de forma mais natural, escapando de estranhamentos e preconceitos ainda existentes sobre os números.

Os dados obtidos durante a realização das atividades apresentaram um crescimento na atitude investigativa dos alunos, o que pode ser um indicador de aprendizado, pois os alunos passaram a desconfiar de alguns fatos e a perceber diferenças entre os padrões de respostas. Percebemos, nesse ambiente de debate com 12 alunos da 3ª série, exteriorizando ideias e dúvidas, uma "escapada" do lugar comum das frações e das dízimas periódicas simples, ampliando para o universo das dízimas periódicas com longos períodos e para as expansões decimais infinitas e não periódicas como, por exemplo, dos números que "continuam infinitamente com variados valores" como afirmou a aluna Isabel, ou ainda, dos que "continuam aleatoriamente", como declarou Clara.

Citamos algumas ações que foram valorizadas nesta pesquisa e que favoreceram as discussões entre os alunos: partir de situações conhecidas, elaborar atividades que explorassem o conceito, ampliar o número de exemplos e contraexemplos de números racionais e irracionais e possibilitar o uso de calculadoras e o trabalho em duplas. Descobrimos muitos atributos do conhecimento matemático dos alunos por meio do registro escrito e detectamos que uma das dificuldades estava relacionada à interpretação e à manipulação dos resultados matemáticos e à capacidade do aluno de transitar naqueles que são equivalentes.

É importante destacar a imprecisão da linguagem presente nas declarações de alguns alunos. Ela é decorrência do pouco uso e da pouca discussão desses atributos em sala de aula e, quando há a comunicação, normalmente acontece de maneira implícita e muitas vezes equivocada. Como exemplo, em vários momentos durante a análise, percebemos a confusão no uso do termo "dízima", significando dízima periódica, e do termo "número infinito", querendo expressar representação decimal infinita. Muitos desses termos são resultados de acordos de linguagem que acontecem na sala de aula, oriundos das falas dos professores, de alunos e dos termos utilizados nos livros didáticos, conforme destacamos no capítulo 6.

O livro didático, por ser a referência bibliográfica e didática no desenvolvimento do trabalho pedagógico, conduz implicitamente o currículo de Matemática da escola. Dessa forma, se o uso do livro didático ocorrer sem complementações, alterações ou intervenções, o professor tornar-se-á um mero coadjuvante do processo ensino-aprendizagem. A partir da análise documental realizada no capítulo 4, observamos que houve uma relação direta entre a avaliação de Lima et al. (2001) e as modificações que constatamos nas coleções de livros didáticos.

Perspectivas de pesquisas futuras

Nas pesquisas estudadas no capítulo 2, constatamos uma grande lacuna entre o que o futuro professor aprende e o que ele vai ensinar (Moreira, 2004 e Leviatan, 2004) em relação ao tema números reais. Dessa forma, é importante que o professor tenha acesso a abordagens adequadas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, tomando certos cuidados didáticos para desenvolver um bom trabalho com os números reais. Ao final do capítulo 4, apresentamos uma síntese de importantes obras matemáticas a que o professor precisa ter acesso, pois estas aprofundam o tema, ao resgatarem fatos históricos e ao apresentarem dificuldades matemáticas encontradas ao longo dessa longa jornada da construção do conceito de número real. Caso contrário, não será possível sair do lugar comum de definir número real como a união dos racionais com os irracionais, como acontece hoje no Ensino Médio e, assim, o problema da circularidade persistirá.

Como o conhecimento do assunto pelos professores é uma condição indispensável para o desenvolvimento da compreensão em seus alunos, seria de grande relevância acadêmica um levantamento das diferentes abordagens e estratégias didáticas sobre o ensino de números reais que acontecem nos cursos de formação inicial e continuada para professores de Matemática.

Nossa pesquisa constatou, por meio de diferentes autores, que nem professores, nem autores de livros didáticos, superaram essa difícil tarefa de fugir da circularidade do conceito de número real, e, conforme expusemos nas análises feitas, os participantes não apresentaram em seus registros descritores de sua imagem conceitual relacionados ao conceito de número real como resultado de medições. Dessa forma, cabe investigar por que o problema da circularidade persiste e, assim, propiciar intervenções didáticas, adequadas e possíveis, para o ensino da Matemática escolar e em cursos de formação continuada de professores de Matemática. Uma possibilidade, vislumbrada nesta tese, é partir do processo construtivo dos números reais de Leviatan (2006) e adaptar atividades que explorem os conceitos e os resultados necessários.

Um outro caminho possível e importante de ser explorado — pensado a partir da elaboração de material didático para o Colégio Pedro II, que teve a participação da pesquisadora, e que foi determinante na escolha do tema desta tese —, seria investigar possibilidades de abordagens em diferentes tópicos que utilizam o conceito de número real, no currículo de Matemática do Ensino Médio. Nesta tese, abordamos as sequências geométricas por meio de duas atividades que envolveram dízimas periódicas. Uma das conclusões obtidas é que os alunos desta pesquisa não relacionaram as dízimas periódicas com as sequências geométricas.

Mesmo tendo a consciência de que os resultados desta pesquisa auxiliarão a compreensão dos desafios que o conceito de número real apresenta aos alunos em todos os níveis de escolaridade, terminamos com a certeza de que lacunas foram deixadas, seja do ponto de vista dos dados que foram aqui apresentados e analisados, seja pelas lentes teóricas que nos propusemos a utilizar. Compreendemos, entretanto, que essa dinâmica faz parte do processo de construção do conhecimento.