

6

Análise das atividades: as imagens conceituais dos alunos

Neste capítulo apresentamos a análise dos grupos de atividades indicados no final do capítulo anterior, levando-se em consideração que “é preciso que a análise não se restrinja ao que está explícito no material, mas procure ir mais a fundo, desvelando imagens implícitas, dimensões contraditórias e temas sistematicamente ‘silenciados’.” (Lüdke, 1986, p. 48).

Esclarecemos que, na maioria das atividades, pedimos aos alunos que justificassem suas respostas⁷⁸, que, dependendo da situação, poderiam sofrer interferências por parte da pesquisadora, postura prevista pelo método escolhido. Dessa forma, o aluno foi colocado em uma situação de atenção e de responsabilidade na resolução das questões, para pensar em exemplos e contraexemplos, fazer relações, conjecturar e expor o raciocínio usado em seu julgamento. Em consonância com o método clínico:

À medida que o sujeito vai dando explicações, que podem ser mais ou menos incompletas, o experimentador procura esclarecer o máximo possível as razões do sujeito e, inclusive, provoca outras situações que possam esclarecer, completar ou contradizer as explicações que o sujeito lhe dá. (Delval, 2002, p. 72)

Conforme avançamos nos trabalhos, apresentamos situações que levaram os alunos a analisarem suas respostas com mais cuidado e a pensarem com mais atenção antes de respondê-las. A pesquisadora procurava, a cada encontro, conscientizar os alunos de que eles eram os principais agentes do seu conhecimento e, dessa forma, era necessário que exteriorizassem suas dúvidas e suas crenças, por mais simples que elas pudessem parecer. Duas estratégias didáticas que parecem ter favorecido o desenvolvimento das atividades foram a organização do grupo em duplas e o uso constante da calculadora. Com isso, o ambiente de investigação estabelecido nos encontros foi propício para que eles se sentissem à vontade.

Antes de iniciar as análises das atividades, é importante esclarecer algumas premissas. Quando mencionamos o termo *fração*, estamos nos referindo aos números escritos da forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros e q não nulo.

⁷⁸ Para isso, utilizamos frases do tipo: *O que se pode afirmar? Por quê? Justifique sua resposta.*

Observamos, em algumas pesquisas acadêmicas e em livros didáticos de Matemática, expressões fracionárias do tipo $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que são chamadas de fração. Nesses casos, entendemos que os autores denominam por fração qualquer razão entre dois números, com o denominador não nulo. Não vamos estabelecer uma discussão, sobre o que é certo ou errado, pois consideramos que são definições tomadas pelos autores nos seus textos e, dessa forma, é importante sabê-las.

Em relação à expressão *dízima*, que aparece muito ao longo das falas dos alunos, constatamos, pelos contextos, que o termo se refere às dízimas periódicas. Na consulta às coleções analisadas, observamos que as coleções I e II não usam a palavra *dízima*, apenas fazendo referência aos termos *dízimas periódicas* e *dízimas não periódicas*. Já a coleção III, em alguns momentos, utiliza-se dos termos *dízima periódica* e, em outros, somente *dízima*, com o significado de *dízima periódica*. Neste trabalho, utilizamos o termo *dízima* com o seu significado denotativo. Dessa forma, nas análises das atividades esclarecemos, com base nos registros dos alunos, sempre que possível, se o significado atribuído pelo aluno é de *dízima periódica* ou qualquer *dízima*.

Solicitamos dos alunos, ao longo dos encontros que utilizassem termos adequados a fim de evitar ambiguidades nas interpretações da pesquisadora, mas enfatizamos que, nas transcrições das gravações, o termo *dízima* apareceu bastante, significando *dízima periódica*. De um modo geral, referiremo-nos às *dízimas não periódicas* como aquelas expressões decimais infinitas e não periódicas.

6.1

Contexto inicial

A pesquisadora, no primeiro encontro, antes de iniciar os trabalhos distribuindo a ficha de atividade, passou um breve questionário com perguntas específicas sobre o perfil dos alunos. Uma das perguntas⁷⁹ teve o objetivo de identificar a importância e o que eles conheciam sobre os números reais. Eis algumas das respostas obtidas:

⁷⁹ Para que servem os números reais?

E (Artur): São as bases da Matemática. Sem a mínima compreensão deles não há como estudar Matemática.

E (Bruno): Para resolver todos os problemas que dependem de qualquer tipo de solução que envolva matemática, e é claro, para continuar guiando o desenvolvimento tecnológico já que todas as áreas tecnológicas fazem uso da Matemática.

E (Clara): Honestamente, para minha área não há uma utilidade específica.

E (Carla): Os números reais servem como um instrumento de organização para quaisquer situações por que o ser humano está sujeito a passar.

E (Thaíssa): Para entender a dimensão da Matemática, é um dos conjuntos mais abrangentes (é o que eu acho, posso estar enganada).

E (Fernando): Na vida, não tem nenhuma utilidade, ou seja, uma pessoa consegue viver sem saber o que são números reais. Porém, para uma pessoa que pretende trabalhar com números durante a vida, os números reais tem uma certa importância, pois, em alguns casos, esses números podem ser encontrados como respostas em alguns problemas, e se essa pessoa não tiver um conhecimento básico sobre números reais, não conseguirá resolver o problema.

E (Denise): Nos números reais são incluídos números importantes que facilitam, agilizam e automatizam muitos cálculos mais complicados como π , $\sqrt{2}$, entre outros.

E (Eduardo): Para representar medidas.

Analisando essas respostas, percebemos que, para esse grupo de alunos, os números reais são utilizados na matemática escolar sem significado e desconhecem sua verdadeira importância. A maioria dos alunos acredita na relevância deste conteúdo para a Matemática, porém suas justificativas são as mais variadas possíveis e seu significado mais forte aproxima-se de um instrumento que resolve problemas na Matemática.

Nesse contexto, a pesquisadora iniciou os trabalhos com uma breve explanação, partindo do universo dos números naturais, que servem para contar, para o conjunto dos números racionais, pela necessidade das medições, visto que o objetivo de nossa pesquisa não passa pela introdução do conceito de número real, mas sim pelo reconhecimento e pela manipulação desses números. A seguir, desenhou uma reta numérica no quadro negro e com a ajuda de alguns alunos, localizou exemplos de números, alguns expressos na forma de fração, outros na forma decimal. As dízimas periódicas usadas como exemplares foram as mais simples, as que normalmente são utilizadas nos livros didáticos. Os exemplos de frações foram $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{22}{7}$, $-\frac{15}{4}$ e $-\frac{17}{5}$. Na representação decimal, os exemplares foram 0,75; 2,2; -0,3; -0,33; $0,\bar{3}$ e $2,\bar{1}$.

A seguir, a pesquisadora solicitou aos alunos que calculassem duas medidas: a diagonal do quadrado de lado 1 e a altura do triângulo equilátero de lado 2 e que localizassem esses dois números na mesma reta numérica. É importante esclarecer que esta ação inicial foi feita sem uma intervenção direta no sentido de explicar o desenvolvimento das questões, mas com o objetivo tão somente de recuperar de forma superficial o contexto inicial da pesquisa.

Terminada essa breve introdução, explicou aos participantes sua função como pesquisadora nos encontros e a necessidade da coleta de dados, e conversou brevemente sobre seus objetivos em relação às aplicações das atividades. Além disso, ressaltou que seria muito importante para a pesquisa que todos expusessem suas justificativas e suas ideias utilizadas nas atividades, procurando esclarecer as etapas do seu raciocínio. No caso de dúvidas no enunciado, eles poderiam solicitar explicações, visto que, no método clínico, é permitido fazer intervenções para desvendar os significados dados pelos sujeitos em relação às suas capacidades mentais (Delval, 2002). Por fim, a ficha com as atividades correspondentes ao primeiro encontro foi distribuída, marcando o início da coleta de registros oriundos dos sujeitos pesquisados.

6.2

Atividades do Grupo I

Conforme o já exposto, o conjunto de atividades desse grupo tem como objetivo partir dos números racionais e de suas representações decimais, possibilitando o reconhecimento de um grupo de números reais a partir do algoritmo da divisão, que são os racionais. Na atividade, todas as outras representações decimais infinitas não obtidas por esse processo — divisão de números inteiros — são os números reais não racionais, os chamados números irracionais. O grupo de atividades com essa estratégia didática, sugerida por Lima et al. (2001)⁸⁰ na avaliação de livros didáticos, possibilitou nossa investigação, a partir da identificação dos atributos relevantes e irrelevantes dados pelos alunos ao responder aos questionamentos por meio das suas justificativas.

⁸⁰“(…) número real é uma expressão decimal (finita ou infinita). Quando tal expressão é finita ou periódica, tem-se um número racional. Em caso contrário, tem-se um número irracional.” (Lima et al., 2001, p.107)

6.2.1

Aspectos gerais

As questões desse grupo trazem as expressões decimais finitas e infinitas como exemplares dos números reais. Iniciamos com o algoritmo da divisão, pois o entendimento desse processo lógico, nos casos finito e infinito, relaciona o ensino de números racionais no Ensino Fundamental ao ensino dos números reais no Ensino Médio. Para isso, elegemos as seguintes ações didáticas a fim de realizar o conjunto de atividades:

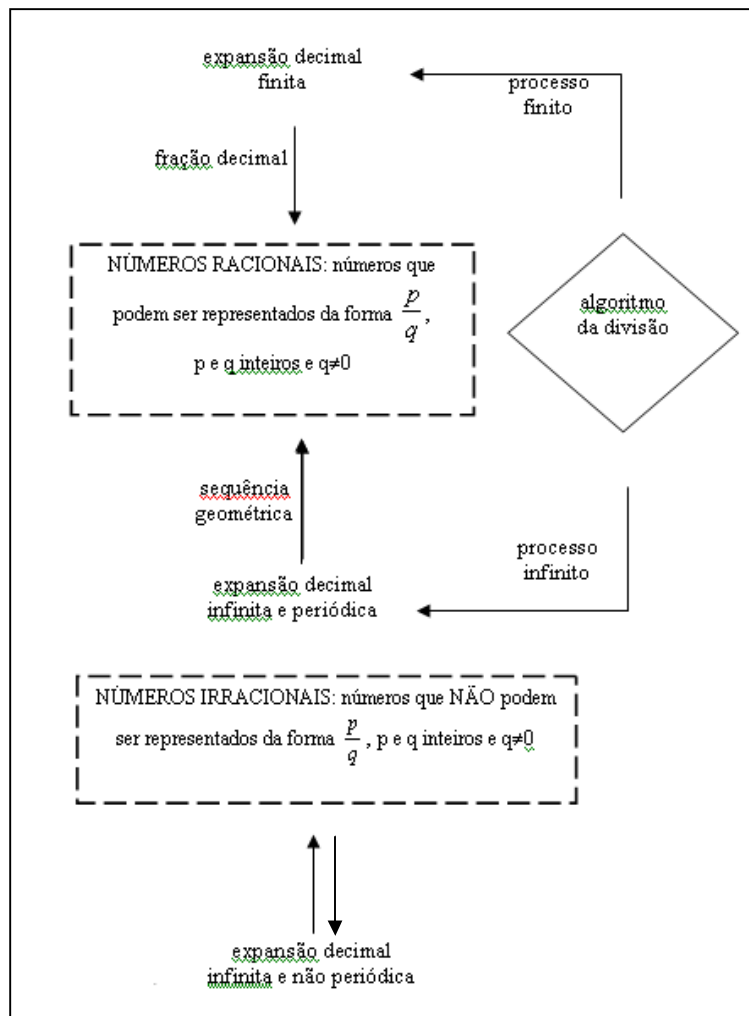
- converter fração em decimal e vice-versa;
- utilizar o algoritmo da divisão para mostrar as diferentes naturezas, finita e infinita, e consequentemente os números decimais obtidos;
- relacionar as expressões decimais infinitas periódicas, com sequências geométricas infinitas e a fração geratriz;
- apresentar expressões decimais infinitas e não periódicas com algum padrão de formação e possibilitar ao aluno, a criação de outras expressões dessa natureza;
- compreender as expressões decimais infinitas e não periódicas como números que não são obtidos pela divisão de dois inteiros;

Para isso, utilizamos os seguintes conteúdos: fração, número decimal, algoritmo da divisão, dízimas periódicas, fração geratriz, sequência, progressão geométrica, expressões decimais finitas e infinitas. As atividades realizadas e discutidas no grupo I possibilitaram-nos enunciar os seguintes resultados matemáticos:

- Toda divisão de números inteiros, na qual o divisor não é zero, resulta em número inteiro ou decimal finito ou dízima periódica;
- Uma fração $\frac{p}{q}$, em que p e q são inteiros e $q \neq 0$, é expressa por um decimal finito se e somente se $q = 2^n \cdot 5^m$, onde n e m são naturais, isto é, q só possui somente como fatores primos 2 ou 5;
- Para determinarmos a fração geratriz de uma dízima periódica composta, decompomos essa expressão decimal em soma de decimais finitos, observamos a sequência geométrica infinita que está envolvida, calculamos o limite da soma desses termos e o adicionamos às parcelas que não fazem parte da PG obtida na decomposição.

O esquema, representado pela Figura 12, ilustra a dinâmica que foi trabalhada com o conjunto de atividades do grupo I e que acabamos de apresentar.

Figura 12: Esquema didático do grupo I



6.2.2

Análise das atividades

Esclarecemos novamente que as análises que serão feitas aqui tratam do reconhecimento do repertório de imagens conceituais dos alunos relacionadas aos números racionais e irracionais, a partir, principalmente, das representações decimais. Analisaremos 10 atividades, sendo que as seis primeiras — P2, P5, P6, P7, P8 e P12 — foram trabalhadas tanto no estudo preliminar exploratório quanto no estudo principal com o método clínico. As outras quatro — A1, F1, F2 e F3 —

foram aplicadas somente no estudo principal, com um grupo menor de alunos, conforme detalhamos no capítulo 5.

6.2.2.1

Atividade P2: a natureza finita e infinita do algoritmo da divisão

Iniciaremos a análise com a atividade P2, que foi aplicada tanto no questionário do estudo preliminar quanto na ficha de atividade do 1º encontro do estudo principal. A dificuldade maior dessa questão, apresentada pelos alunos, deu-se na finalização do item b. Observamos, nos dois itens que o uso do algoritmo da divisão não foi um complicador na atividade.

No estudo preliminar

A Tabela 16 mostra o estudo prévio que realizamos na questão P2.

Tabela 16: Estudo preliminar da questão P2

PERGUNTA			
Escreva a representação decimal dos números a seguir, fazendo a divisão passo a passo, sem utilizar a calculadora.			
a) $\frac{1}{8}$	b) $\frac{50}{7} =$	1	8 50 7
RESPOSTA			
a) 0,125	b) $7,1\overline{42857}$		
1 0 2 0 4 0 0 8 0,125	5 0 1 0 3 0 2 0 6 0 4 0 5 0 1 0 ... 7 7,1428571...		
OBJETIVO			
a) Verificar se o aluno tem domínio do algoritmo da divisão e representar a partir desse processo uma fração na forma decimal.			
b) Verificar o domínio do algoritmo da divisão quando o processo é infinito. Observar se o aluno identificou na expansão decimal infinita a periodicidade e soube representá-la por meio da dízima periódica.			
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM A			
	A	I	B
nº alunos	64	6	0
percentual	91,4 %	8,6%	0%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM B			
	A	I	B
nº alunos	49	20	1
percentual	70,0%	28,6%	1,4%
A – adequada I – inadequada B – em branco			

O índice de acertos nessa questão foi alto. Dos seis alunos que não responderam adequadamente, dois não apresentaram justificativa e três deram como resposta o número 0,10205, demonstrando que ainda não dominam o algoritmo.

Do percentual de alunos que acertaram a questão, todos utilizaram adequadamente o algoritmo da divisão, mas 39 desses alunos não souberam finalizá-la adequadamente, pois não apresentaram adequadamente o período. Destacamos alguns exemplos de respostas: $7,14285\dots$; $7,142857\dots$; $7,142857142\dots$ e $7,\overline{14285}$. Classificamos a resposta $7,142857142\dots$ como adequada, apesar de o período não ser simbolizado. Dentre os 19 alunos que erraram a questão, oito responderam com números aproximados. Os resultados referentes à questão sinalizam que o algoritmo da divisão é dominado pela maioria dos alunos desse grupo, porém o reconhecimento de dízimas periódicas ainda é um tema que provoca dificuldades, mesmo para os que se afirmam conhecedores do assunto. Consideramos essa questão motivadora tanto para o ensino das expressões decimais infinitas como para o ensino de números irracionais.

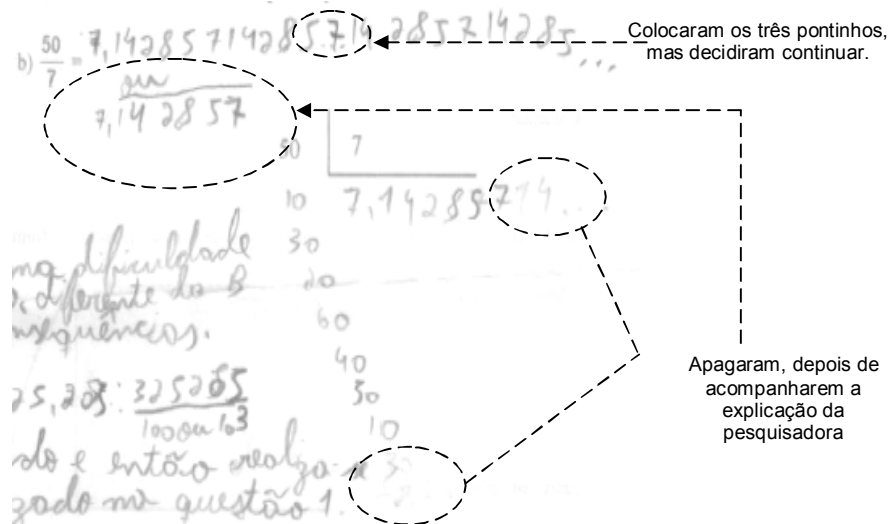
No estudo principal

As condições dadas na atividade para fazer a divisão passo a passo e sem calculadora exigiram dos alunos a utilização do algoritmo da divisão, um dos objetivos desse exercício, que foi considerado fácil pelos participantes. A divisão referente ao item *a*, envolveu um processo finito e não houve erros, nem dúvidas. Em relação ao item *b*, apesar de utilizarem adequadamente o algoritmo da divisão, tiveram dificuldades em expressar o número decimal em questão, resultado de um processo infinito. Esse item gerou bastante discussão e observamos que os alunos tiveram muitas dúvidas em relação às dízimas periódicas.

A resposta adequada desse item era $7,\overline{142857}$, porém aceitamos respostas que, de alguma maneira, caracterizaram a resposta como uma dízima periódica, com o período 142857. As diferentes respostas obtidas foram as seguintes: $7,\overline{14285}$; $7,142857142\dots$; $7,14285714285714285714285\dots$; $7,\overline{14285}$; $7,142857142857\dots$; e $7,\overline{14285}$.

Destacamos, na Figura 13, o item *b* feito pela dupla Bruno-Celso, em que eles reconheceram o padrão de repetição contudo, ficaram inseguros no momento

Figura 13: Algoritmo relacionado ao item b feito pela dupla Bruno-Celso



E (Bruno-Celso) - A letra **a** sem dificuldade, pois dá pra prever o resultado, diferente da **letra b** que te leva às últimas consequências.

E (Fernando-Eduardo) - Só o traço em cima da dízima que é pegadinha!

A expressão “pegadinha”, utilizada pela dupla Fernando-Eduardo, caracteriza bem a confusão que os alunos fizeram quando utilizaram de forma errada a notação da barra para representar o período.

E (Thaíssa-Clara) - A letra a é fácil, **mas a letra b deve ter tido muito erro, por falta de percepção de ser uma dízima ou por simples preguiça de terminar as contas.**

E (Denise-Artur) - Fazendo passo a passo fica bem fácil, **ficamos em dúvida em como representar o período...**

Vale lembrar que os erros a que a dupla Thaíssa-Clara se referem estão relacionados à tabulação dos dados obtidos no estudo preliminar que eles receberam no primeiro encontro. A “falta de percepção de ser uma dízima” e a “simples preguiça de terminar as contas” são descritores de uma imagem conceitual que leva o aluno a acreditar que, se houvesse período, ele já deveria ter aparecido. Consideramos que um dos fatores que resultou em 39 dos 70 alunos do estudo preliminar não finalizarem adequadamente a representação decimal $7,\overline{142857}$ é a falta de uso, nos livros didáticos e nas salas de aulas, das dízimas periódicas que possuem mais de três algarismos no período. Outro motivo está relacionado ao fato de o último algarismo do período coincidir com a parte inteira do número decimal. Isso ficou bem caracterizado pela fala da dupla Denise-Artur, quando declararam: “ficamos em dúvida em como representar o período”. Destacamos, a seguir, fragmentos referentes a esse episódio.

G (Pesquisadora) - O que aconteceu com o número cinquenta sétimos?

G (Thaíssa) - **Dá uma dízima enorme!** Na tabulação, a maioria teve resposta incompleta, eu imaginei, **por preguiça de terminar a conta.**

Destacamos a expressão da aluna Thaíssa “dá uma dízima enorme” como um julgamento estabelecido a partir dos exemplos protótipos de dízimas periódicas do repertório de imagens da aluna. É um aspecto interessante de sua imagem conceitual que caracteriza a falta de familiaridade com as dízimas periódicas que possuem períodos com mais de três casas decimais.

Acrescentamos aqui, a partir de registros do diário de campo, que a pesquisadora efetuou a divisão no quadro, com a participação dos alunos e chamou a atenção para o fato de o algarismo 7, que apareceu no período, coincidir com o 7 da parte inteira. Afirmou que pode ter sido um complicador no reconhecimento do período e, possivelmente, foi o motivo de muitos terem respondido $7,\overline{14285}$ ao invés do número correto $7,\overline{142857}$.

A seguir destacamos trechos de gravação que exemplificam a análise que acabamos de apresentar.

G (Thaíssa) - Por preguiça, tem gente que acha que vai pro infinito e sai escrevendo...

G (Denise) – A gente não botou a barra, ficamos querendo botar a barra no primeiro sete $\overline{7,14285}$, aí botamos os três pontinhos...

G (Thaíssa) – Ou repete três vezes, ou coloca a barra.

A justificativa de Denise no esclarecimento da resposta incompleta dada pela sua dupla, ao dizer “botamos os três pontinhos”, pois não sabiam como indicar o período da dízima, possibilitou discutir com os alunos o significado de cada notação⁸¹, de acordo com Palis (1999), e os cuidados que devem ser tomados para a representação adequada do número em questão. Outro descritor de imagem conceitual importante foi a fala da Thaíssa quando afirmou “ou repete três vezes, ou coloca a barra”. Aqui identificamos um atributo irrelevante da dízima periódica que cristaliza uma imagem conceitual desfavorável: números decimais que apresentam na parte decimal um número que se repete três vezes são dízimas periódicas.

As intervenções da pesquisadora na finalização do item b, em relação às dúvidas surgidas na representação da dízima periódica, deram-se com o objetivo de tornar mais claro o que está ocorrendo e de possibilitar a exploração de novos caminhos para descobrir aspectos ainda desconhecidos (Delval, 2002).

6.2.2.2

Atividade P5: observando números reais na calculadora

Essa atividade mostra os números reais 1,35353535 e 2,12345678 e informa que estes são os resultados indicados numa calculadora após a realização de uma operação. A questão informa também que a calculadora utilizada possui nove dígitos. Essa questão foi aplicada no questionário do estudo preliminar e também no 1º encontro do estudo principal e foi elaborada a partir de um questionamento feito na pesquisa de Leviatan (2004)⁸². Ficamos atentos para

⁸¹ Estamos nos referindo às diferenças de significado, por exemplo, em relação aos números, $1,2323...$; $1,232\overline{3}$ e $1,2\overline{3}$.

⁸² O questionamento foi apresentado no capítulo 2 e sua pergunta no original é: “Your calculator’s screen (limited to 9 digits) shows 1.35353535 (alternatively 2.12345678, or 3.14159265). Can you tell if your number is rational?”

verificar, nas justificativas dadas pelos alunos, indícios de interpretação sobre a natureza finita e infinita dos números observados, bem como os possíveis padrões de formação desses números, e sobre conhecimentos de resultados matemáticos no conjunto dos números reais.

No estudo preliminar

A Tabela 17 apresenta o mapa de estudo prévio da questão P5.

Tabela 17: Mapa de estudo prévio da questão P5

PERGUNTA			
Duas determinadas operações feitas com números, numa calculadora de 9 dígitos, mostrou como resultado no visor os números 1,35353535 e 2,12345678. O que se pode afirmar sobre esses números? Eles são racionais ou irracionais? Por quê?			
RESPOSTA			
<i>Nada podemos afirmar, pois não temos conhecimento das operações que foram feitas. O limite de dígitos na calculadora impede-nos de afirmar se os padrões observados continuam ou não, pois apenas conhecemos os oito primeiros dígitos da parte decimal. Caso continuassem infinitamente segundo o padrão sugerido, o primeiro número seria classificado como racional, pois apresenta o período 35 na parte decimal e o segundo seria irracional, visto que a sequência envolvida é crescente e nunca apresentaria período.</i>			
OBJETIVO			
Verificar se o aluno critica a limitação de casas decimais existente nas calculadoras. Identificar, pelas respostas, como o aluno compreende os números dados, se são finitos ou infinitos, se seguem algum padrão, e o que os leva a classificar números como racional ou irracional.			
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS			
	A	I	B
nº alunos	17	40	13
percentual	24,3%	57,1%	18,6%
A - adequada I – inadequada B – em branco			

Nenhum aluno questionou o número de dígitos da calculadora e não obtivemos nenhuma resposta semelhante à que fornecemos na tabela. Uma resposta foi considerada adequada, se a classificação estivesse condizente com a natureza finita ou infinita da expansão decimal e também se a justificativa estivesse adequada para a classificação escolhida.

Se considerarmos os números observados no visor, teremos números racionais ou aproximações racionais de números reais. Sendo assim, os dois números observados são racionais. No caso infinito, supondo que o padrão “sugerido” continua para sempre, o primeiro número seria $1,\overline{35}$, tratando-se de uma dízima periódica de período 35. Nesse caso, esse número poderia ser representado pela fração $\frac{134}{99}$. Já o segundo número seria 2,123456789101112..., em que a expansão decimal é formada pela sequência crescente e infinita dos

números naturais e, assim, não pode ser obtido de uma divisão de números inteiros, sendo classificado como um número irracional. Esse tipo de encaminhamento na resposta demonstra para nós um adequado conhecimento de números reais para o Ensino Médio.

Por isso, fizemos dois gabaritos, um para o caso finito e o outro para o caso infinito. Apenas 24% dos alunos responderam com coerência essa questão. Observando todas as respostas dadas, que estão apresentadas no anexo 11, percebemos a potencialidade desse exercício, pelas diferentes justificativas obtidas. A maioria dos alunos interpretou os números do visor como expansões decimais infinitas, pois entenderam que, pelo fato de estarem na calculadora, os números teriam sido truncados ou aproximados.

Analisando todos os dados do anexo 11, verificamos que grande parte das justificativas adequadas usadas para classificar o número como racional apresentou os atributos relevantes: decimal finito, dízima periódica e possibilidade de representação na forma de fração. Para essa atividade, julgamos importante elaborar duas tabelas que contivessem os atributos relevantes e irrelevantes que encontramos nas respostas fornecidas à questão P5. A Tabela 18 fornece a lista de atributos dos números racionais.

Tabela18: Atributos de números racionais para os números 1,35353535 e 2,12345678.

NÚMEROS RACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Decimal finito; - Dízima periódica / seus números repetem-se em sequência / possui período; - <u>Pode ser representado na forma de fração (razão de inteiros);</u> - Por mais que haja uma grande sequência de números decimais, não se repetem e, além disso, o número termina.	- Apresenta padrão / sabemos qual será a sequência; - Há uma sequência; - São infinitos, porém podemos prever; - Dízima, pois segue um padrão; - Decimal infinito.

O atributo “não possui dízima”, que foi apresentado por quatro alunos, não foi incluído na tabela, pois está inconsistente tanto do ponto de vista da definição formal de dízima, quanto do uso da palavra dízima na matemática escolar, significando dízima periódica. Como o número apresentado possui dízima, analisamos outras respostas dadas pelos alunos e observamos que o significado que dois alunos atribuíram ao termo dízima foi de número decimal infinito.

O único atributo apresentado que caracteriza um julgamento analítico está sublinhado na Tabela 18 e este foi utilizado por dez dentre os 70 alunos. Todos os

demais indicados na tabela são atributos de julgamentos prototípicos (Hershkowitz, 1994). Somente cinco alunos apresentaram atributos irrelevantes nas suas explicações; eles basearam-se no fato de os números apresentarem uma sequência ou uma sequência que apresenta padrão, com a ideia de que é possível prever “o que vem depois”. Apesar de muitos números racionais apresentarem essas características, também há infinitos exemplares de números irracionais que as contemplam. Esses julgamentos prototípicos fundamentaram-se em atributos dos protótipos do repertório de imagens desse grupo de alunos, que associam qualquer padrão à racionalidade. Essa constatação também ocorreu em Zazkis & Sirotic (2004). O exemplar protótipo utilizado aqui foram as dízimas periódicas que possuem o padrão de repetição.

Convém destacar três respostas:

- “apesar de apresentarem várias casas decimais, existe um final, um algarismo que finaliza” — Esta justificativa foi utilizado pelo aluno quando afirmou que 2,12345678 é um número racional. Nesse julgamento prototípico, o aluno ilustra um atributo irrelevante (apresentar várias casas decimais), seguido de um relevante (existe um final);
- “número infinito, porém não se pode afirmar que é dízima periódica” — O aluno utilizou estes argumentos para explicar por que o número 2,12345678 é racional. Ele apresentou um atributo irrelevante para racionais (decimal infinito), seguido de um atributo relevante para racionais (dízima periódica). Talvez aqui haja uma troca de significado entre os termos racional e irracional, pois o aluno afirmou que “não se pode afirmar que é dízima periódica” e mesmo assim o classificou como racional. É importante esclarecer a inadequação do uso da expressão “números infinitos” no registro do aluno, quando se refere às representações decimais infinitas.
- “parece ser uma dízima periódica, mas não possui reticências ou algo assim. Possuem o mesmo número de casas decimais. Podem ser escritos na forma de fração” — Neste registro, identificamos dois atributos relevantes para números racionais: “dízima periódica” e “mesmo número de casas decimais”, este com o significado de decimal finito, seguido de outro atributo relevante, “podem ser escritos na forma de fração”, que o aluno utiliza para fechar a explicação. Nessa justificativa, o aluno utilizou

tanto o julgamento prototípico, com dois atributos relevantes e suficientes que definem um número racional — ser dízima periódica ou decimal finito —, quanto o julgamento analítico, possuir representação na forma de fração.

A Tabela 19 apresenta todos os atributos relevantes e irrelevantes utilizados nas respostas dos alunos para classificar os números como irracionais.

Tabela19: Atributos de números irracionais para os números 1,35353535 e 2,12345678.

NÚMEROS IRRACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Decimal infinito / seus algarismos são infinitos - Não é dízima⁸³ / não tem período / Não apresenta sequência repetitiva; - Não termina e não segue um padrão; número infinito onde não há repetição do período; - Não apresenta forma fracionária / Não é possível obtê-lo através de uma divisão;	- Apresenta dízima periódica / repete um número (sequência) nas casas decimais; - Não possui uma sequência; - Há uma sequência de números crescentes.

O atributo “não é dízima” foi considerado relevante, pois como já mencionado, dízima significa dízima periódica. Dessa forma, estamos interpretando que se trata de números decimais infinitos. Dos 70 alunos, 15 classificaram o número 1,35353535 como irracional, justificando se tratar de uma dízima periódica. E oito alunos utilizaram esta mesma justificativa para classificar o número 2,12345678 como irracional. Ser dízima periódica não é atributo dos números irracionais, mas é atributo do número racional 1,35353535... de período 35. Os alunos fizeram um julgamento prototípico fundamentado no aspecto visual do número 1,35353535 que não se observa em 2,12345678. Temos aqui duas possibilidades: ou se trata de uma questão de confusão de nomes, ou esses alunos não consideraram as dízimas periódicas como números racionais, o que avaliamos como o mais provável. A mesma análise se aplica ao atributo decimal finito.

Cada um dos atributos relevantes “não termina e não segue um padrão”, “número infinito onde não há repetição do período” e “não é possível obtê-lo através de uma divisão” definem qualquer número irracional. Desses, os dois primeiros apresentam julgamento prototípico, enquanto, no terceiro, o julgamento é analítico. Como os atributos “decimal infinito” e “não apresenta sequência repetitiva” não são suficientes para definir a irracionalidade de um número, foram categorizados como irrelevantes e foram considerados julgamentos prototípicos.

Analisando todas as respostas da atividade P5, para alguns alunos, o

⁸³ Com o significado de dízima periódica.

atributo irrelevante “o número apresentar padrão” foi utilizado em seus julgamentos para classificar um número racional. Já o atributo relevante, “ser um decimal infinito”, para muitos alunos, é garantia da irracionalidade de um número. A presença da calculadora no enunciado, servindo como uma ferramenta intermediária entre o real resultado da operação realizada e o que foi apresentado no visor, estimulou a discussão dos alunos, pois possibilitou a exteriorização de atributos que foram resultados dos aspectos visuais observados nos números 1,35353535 e 2,12345678.

No estudo principal

A questão P5 fomentou algumas considerações e também alguns questionamentos que não foram respondidos pela limitação do instrumento usado no estudo preliminar, por isso, essa questão foi retomada no estudo principal. A seguir vamos apresentar a análise clínica dessa atividade. Iniciamos com a justificativa bem sucinta da dupla Fernando-Eduardo. Estes alunos também responderam ao questionário no estudo exploratório.

E (Fernando-Eduardo) - Racionais porque têm dízima.

Essa resposta da dupla indica que os alunos reconheceram os resultados do visor como números decimais infinitos, pois utilizaram como justificativa ter dízima⁸⁴. O número 1,35353535, que a dupla observou no visor, foi visualizado como $1,3\overline{5}$, porém não podemos apurar como eles perceberam o número 2,12345678, pois não houve repetição de dígitos nas casas decimais que foram apresentadas. Como essa resposta necessitava de mais esclarecimentos, resgatamos do estudo preliminar, a resposta do aluno Fernando. No questionário, ele respondeu “irracional, pois não dá dízima” quando se referia ao número 2,12345678, resposta diferente da obtida na ficha de atividade. Cruzamos também com um trecho das gravações e conseguimos elementos que nos auxiliaram na análise dessas diferentes respostas dadas por Fernando e o possível significado que deu para o atributo dízima. A seguir, apresentamos uma explicação, retirada das gravações referente às discussões da atividade P5, fornecida por Fernando em relação ao número 2,12345678.

⁸⁴ Novamente, o termo dízima significando dízima periódica.

G (Pesquisadora): Então, qual a resposta dessa questão? Fernando pensou que poderia ir até o 9 e repetir depois tudo de novo, fala pro grupo Fernando, como vocês pensaram.

G (Fernando): É, por exemplo, 2,12345678901234567890...,

Esse confronto dos diferentes registros fez que sua resposta em relação ao número 2,12345678 também estivesse adequada, quando responderam “rationais porque tem dízima”. A dupla, quando observou os dois números, imaginou as dízimas periódicas $1,3\overline{5}$ e $2,1234567890\overline{}$. Observamos que Fernando colocou o dígito 0 após o 9, esse aspecto indica que estava atento ao uso da calculadora nas hipóteses colocadas no enunciado da questão.

Um dos motivos de resgatarmos esses números da pesquisa de Leviatan (2004) foi a amplitude de possibilidades que a visualização desses números geram, pois podem ser relacionados a diferentes protótipos que cada sujeito possui. O número pensado pela dupla Fernando-Eduardo, por exemplo, não havia nos ocorrido ainda, por isso, o pesquisador deve estar atento aos registros que indicam o raciocínio do sujeito, pois no método clínico a “capacidade para explorar caminhos que o sujeito percorre em suas explicações nos ajuda a encontrar novos tipos de respostas que nem sequer imaginávamos ao iniciar a pesquisa” (Delval, 2002, p. 80).

A dupla⁸⁵ Vinicius-Isabel forneceram mais elementos nas justificativas de suas respostas e levou em conta a hipótese do problema, de que os números apresentados na calculadora eram resultado de uma operação que foi realizada.

E (Vinicius): **Ambos racionais, se pensar que o 2º é um número finito.** Se for infinito, **teremos o primeiro racional** e o 2º irracional.

Se fosse 2,12345677... a calculadora considera como 2,12345678.

(Destacamos a seguir as igualdades matemáticas escritas por Vinicius na ficha)

$$\frac{212345678}{100000000} = \frac{106172839}{50000000} \text{ e } 1,3\overline{5} = \frac{135-1}{99} = \frac{134}{99}$$

E (Isabel): **O primeiro número pode ser colocado na forma de**

fração como $\frac{134}{99}$, assim como o segundo, logo os dois são racionais.

⁸⁵Vinicius e Isabel entregaram nesse encontro dois registros de atividades, apesar de terem realizado a atividade em conjunto, por isso, apresentamos os dois.

Por estar em uma calculadora, o segundo pode ser infinito e, portanto, irracional. **Essa questão exige mais atenção pelo fato de a resposta ser conceitual.** (Isabel fez o cálculo a seguir na sua ficha de atividade)

$$\begin{array}{r} 100x = 135,353535 \\ - x = 1,353535 \\ \hline 99x = 134,000000 \rightarrow x = \frac{134}{99} \end{array}$$

Nos registros de Vinícius e Isabel, as afirmações “teremos o primeiro racional” e “o primeiro número pode ser colocado na forma de fração” enfatizam a ideia de que o número decimal 1,35353535 é um exemplo protótipo de número racional para esses alunos. Mesmo no caso desse número ter infinitas casas decimais, nenhuma das explicações dadas por Vinícius ou Isabel considerou que o número 1,35353535 pudesse ser uma aproximação de um número irracional resultado de uma operação. É importante esclarecer que, no cálculo exposto acima, o registro de Isabel não está correto, pois se $x=1,35353535$, então $100x=135,353535$ e como consequência $99x=135,353535-1,35353535=133,99999965$. Essa estratégia só é válida, se assumirmos que x é a dízima periódica $1,3\overline{5}$.

Quando Vinícius declarou que “Ambos racionais, se pensar que o 2º é um número finito”, ele não destacou em sua afirmação o fato de o primeiro número ser finito ou não, pois na sua concepção em qualquer um desses casos trata-se de um número racional. Esclarecemos que o atributo “ser finito” é relevante para afirmar que os dois números observados no visor são racionais, porém sozinho não forma um conjunto de atributos mínimos que determine todos os números racionais.

Tomando como hipótese que, nos dois casos, os números decimais têm representação decimal infinita, a afirmação de Vinícius “se for infinito, teremos o primeiro racional e o 2º irracional”, não está adequada, pois não temos conhecimento das operações realizadas e nem dos próximos dígitos das expansões decimais em questão. Acreditamos que sua afirmação tenha se baseado em uma visualização “padrão” do primeiro número como sendo a dízima periódica $1,3\overline{5}$ e do segundo mantendo o padrão de crescimento apresentado. Dessa forma, interpretamos que esses números fazem parte dos exemplares protótipos do repertório de imagens de Vinícius, respectivamente, para os números racionais e irracionais.

Essa questão foi bem discutida por Vinícius, pois ele também levantou a

possibilidade de esse número ser a dízima periódica $2,1234567777\dots$, que por estar numa calculadora, foi arredondado para o número racional $2,12345678$. Consideramos que Vinícius forneceu alguns exemplares dos números racionais, mostrando um rico repertório que vai além dos exemplos decimais protótipos de um número racional, apresentados por seus colegas. Afirmamos isso, pois o número racional $2,12345678$ está mais associado visualmente à imagem de um número irracional do que à de um número racional. Mesmo assim, Vinícius não se deixou levar pela forte imagem da não periodicidade apresentada.

O extrato a seguir da dupla Bruno-Celso ilustra uma troca de nomes na classificação dos números reais como racionais ou irracionais:

E (Bruno-Celso): 1- Irracional: pois se observa um **padrão de repetição infinito**. 2- Racional: pois não apresentou, até agora, um padrão de repetição. **Através do padrão de repetição é possível deduzir sua irracionalidade**, ao contrário do segundo número.

A expressão “padrão de repetição infinito”, fornecida na justificativa da dupla, reúne dois atributos — “decimal infinito” e “periodicidade” —, que juntos se tornam um conjunto de atributos relevantes que define qualquer número racional, porém a dupla utilizou esses atributos para classificar o número $1,35353535$ como irracional. Os registros indicam que eles consideraram os dois números como decimais infinitos, considerado um atributo irrelevante para a racionalidade, mas relevante para a irracionalidade. Vale destacar que a justificativa “pois não apresentou, até agora, um padrão de repetição”, quando se refere ao número $2,12345678$, nos indica um entendimento da dupla de que, caso houvesse algum padrão de repetição, este já deveria ter aparecido. Esse julgamento prototípico mostra o universo restrito de dízimas periódicas que a dupla possui pois, para Bruno-Celso, não havia a possibilidade de este número ser uma dízima periódica.

Isso nos chamou atenção e como esse sentimento se mostrou recorrente, nesse grupo de alunos, voltamos às coleções didáticas analisadas a fim de observar os exemplares dados para as dízimas periódicas. Constatamos nas três coleções que as dízimas periódicas que apresentam o maior período possuem dois algarismos no período, tais como $2,5\overline{30}$, $0,11\overline{45}$ e $0,17\overline{8}$. Essa verificação ilustra os exemplares que são comumente visualizados pelos alunos e explica o porquê da certeza da dupla em relação ao número $2,12345678$, mesmo com infinitas casas decimais, não

ter a possibilidade de apresentar a partir de algum momento um padrão de repetição infinito. Esse fato, de certa forma, justifica os exemplos protótipos das dízimas periódicas que fazem parte da imagem conceitual desses alunos.

Os registros das duplas Thaíssa-Clara e Denise-Artur fortalecem ainda mais o que acabamos de afirmar, pois têm argumentações claras e justificativas que poderiam ser consideradas adequadas no caso das dízimas periódicas, com base no julgamento prototípico causado pela visualização da repetição do 35 no número 1,35353535.

E (Thaíssa-Clara): O primeiro é uma dízima, portanto racional. O segundo não há como afirmar por não saber se é finito ou não... necessita raciocínio e o conhecimento do conceito de números racionais e irracionais (coisa pouco trabalhada)

E (Denise-Artur): O 1º é racional, pois pode ser escrito em forma de fração por ser dízima periódica. O 2º pode ser racional por coincidência de ter 8 casas decimais exatas ou por ser uma dízima com período maior que 8 casas. Ou ser irracional, já que não apresenta período.

Ressaltamos que a dupla Denise-Artur apresenta um julgamento analítico quando afirma que o primeiro pode ser escrito em forma de fração porque é uma dízima periódica. Questionamos se o decimal finito 1,35353535 representa para essa dupla uma dízima periódica, pois eles exteriorizaram a dupla possibilidade do segundo número ser finito ou não, mas não o fizeram para este número.

Nenhuma das duas duplas visualizou a possibilidade de o primeiro número ser dízima não periódica. Isso ficou claro nas afirmativas “o primeiro é uma dízima, portanto racional” e “o 1º é racional, pois pode ser escrito em forma de fração por ser dízima periódica”. Vale destacar a explicação da dupla Denise-Artur, que foi bem abrangente ao apresentar as possibilidades de resultados para o número 2,12345678; isso é um indicador de que a dupla levanta possibilidades de exemplos protótipos não usuais, se comparados com os apresentados pelos colegas.

Thaíssa e Clara complementaram sua resposta, acrescentando que a explicação para este item “necessita raciocínio e o conhecimento do conceito de números racionais e irracionais (coisa pouco trabalhada)”, destacando que esse tema é pouco valorizado na matemática escolar, aspectos já indicados por Leviatan (2004) e Moreira (2005). A seguir destacamos trechos dos registros escritos pela dupla Antônio-Otávio⁸⁶.

⁸⁶ O aluno Otávio só esteve presente no primeiro encontro.

E (Antônio-Otávio): Se o número de casas decimais for exatamente o apresentado (oito casas decimais), o segundo número será racional, representado pela fração $\frac{212345678}{100000000}$ ou; **quanto ao 1º número, se a sequência decimal mantiver-se em repetições do número 35, ele será racional**, visto que poderá ser representado por uma fração composta por números inteiros (no numerador e no denominador); **se o 1º número tiver as casas decimais finitas, ainda assim será racional**, representado pela fração $\frac{135353535}{100000000}$.

Eles levantaram suposições sobre a finitude ou a infinitude das representações decimais dos números apresentados no visor. Apresentaram as correspondentes frações no caso de serem decimais finitos, demonstrando na prática seu julgamento analítico em relação à definição formal que possuem de número racional. A declaração — “quanto ao 1º número, se a sequência decimal mantiver-se em repetições do número 35, ele será racional” — mostra que a dupla não visualizou uma única possibilidade para o número, como as duplas anteriores, que afirmaram unicamente se tratar do número $1,3\overline{5}$. Já em relação ao segundo número, a dupla não manifestou a possibilidade de o número apresentado ser um decimal infinito.

Consideramos que essa dupla forneceu atributos relevantes para o conceito de número racional, articulando bem as representações decimal e fracionária, porém não exteriorizou nenhum atributo relacionado aos números irracionais. Isso sugere a hipótese de que possivelmente, não conhecem atributos para a identificação dos irracionais e de que há insuficiência de linguagem para tratar do assunto. Se o processo de aprendizagem não desenvolveu exemplos positivos e negativos para esses números, provavelmente, eles só trabalharam os que se referem aos números racionais. Os exemplos de números irracionais, portanto, foram obtidos por exclusão, tal como os resultados encontrados por Lima (2001), Moreira (2004) e Baldino (1997), que evidenciam uma circularidade na abordagem dos números irracionais em sala de aula.

O recorte que apresentamos a seguir aconteceu durante o fechamento das atividades do 1º encontro. As duplas foram incentivadas a colocar suas respostas para o grupo e a pesquisadora fez as devidas ponderações e encaminhamentos necessários do método clínico surgidos no debate.

G (Vinícius): No primeiro é fato que ele é um racional, só que no segundo, por não mostrar uma sequência, a gente não sabe se ele é

uma sequência ou se ele é um número finito.

G (Pesquisadora): E por que o primeiro número é racional?

G (Vinícius): O primeiro,..., é uma dízima.

G (Pesquisadora): E por que é uma dízima?⁸⁷

G (Thaíssa): Porque repete três vezes, **eu aprendi que quando mostrava repetindo três vezes era uma dízima!**

Vinícius continuou firme em seu julgamento da racionalidade do número 1,35353535, pois afirmou que “no primeiro é fato que ele é um racional” e quando a pesquisadora insistiu para ele justificar o porquê dessa convicção, Thaíssa mostrou como costuma identificar uma dízima periódica, “eu aprendi que quando mostrava repetindo três vezes era uma dízima”. Esta fala da aluna caracteriza um julgamento prototípico para dízimas periódicas, apenas com base na imagem visual do número, ao apresentar o atributo irrelevante associado à repetição do período três vezes. Esse julgamento da aluna é um indicador de acordos de linguagem que acontecem na sala de aula, oriundos das representações das dízimas periódicas nos livros e nos materiais didáticos. Como esse modelo prototípico não carrega um atributo relevante para números racionais, esse julgamento não favorece a construção da imagem conceitual de número real. No caso de Thaíssa, ela afirmou que aprendeu dessa forma; no caso dos outros alunos, a razão pode ser essa, como também a de uma construção individual, pela visualização constante desse modelo nos livros didáticos.

Esta dúvida levou-nos aos livros já analisados, para verificar como os autores apresentam as dízimas periódicas. Na coleção I, encontramos somente um exemplo de dízima periódica com a notação da barra; já na coleção II, grande parte das dízimas periódicas está com a notação da barra e em alguns exemplares com o código dos três pontinhos. A coleção III, assim como a II, utiliza os dois códigos, porém, valoriza mais a notação dos três pontinhos.

Ao apresentar, por exemplo, o número 0, 26666..., o autor do livro didático espera que o aluno o identifique com a dízima periódica $0,2\overline{6}$, mas esclarecemos que a única afirmação que podemos fazer sobre esse número decimal infinito, é que conhecemos apenas as seis primeiras casas decimais. Qualquer outra interpretação a respeito do número deve ser acrescentada. Para dar mais legitimidade a essa discussão, destacamos na Tabela 20, exercícios propostos em cada uma das três coleções.

⁸⁷ Lembrando que dízima aqui se refere à dízima periódica.

Tabela 20: Exemplos de exercícios que envolvem dízimas periódicas.

COLEÇÃO I	COLEÇÃO II	COLEÇÃO III
Efetue as operações indicadas em cada expressão: a) $0,666... - 0,6$ b) $0,23 : 0,2333...$ c) $-0,1777... + 1,7$ d) $0,161616... : 0,4777...$	Qual é o valor de $y = \sqrt{0,111...} + \frac{14}{0,777...} ?$	Identifique como decimal exata (finita), decimal infinita periódica ou decimal infinita não periódica cada um dos números a seguir: a) 0,555 b) 0,11454545... c) 0,1231251271291211... d) 0,26666... e) 0,020020002... e) 0,789145

Fonte: (Smole e Diniz, vol 1, 2004, p. 24; Iezzi et al., Vol 1, 2004, p. 16; Dante, vol 1, 2004, p. 29)

Consideramos importante que o aluno faça uso da notação da barra, apesar da ausência de destaque para essa questão nos livros didáticos e embora muitos professores valorizem nas salas de aula a simbologia dos três pontinhos. É preciso esclarecer ao aluno que existe um período na expressão decimal infinita, caso contrário nada poderá ser dito sobre a respectiva expansão, se esta possui período ou não. Da mesma forma, não podemos afirmar que o número $0,020020002...$ é irracional, já que a informação dada nesta representação se restringe a um número decimal infinito que possui os nove primeiros dígitos da parte decimal iguais a 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0 e 2, nesta ordem. Para garantir a irracionalidade desse número é necessário que haja alguma informação que garanta o padrão visual sugerido, que não é periódico, ou algum outro atributo relevante. Essa discussão relacionada às diferentes notações de expansões decimais é feita em Palis (1999).

Essa constatação possibilitou-nos identificar que a falta de cuidado com as representações das dízimas periódicas propiciou o surgimento de atributos irrelevantes, baseados unicamente na visualização dos exemplos protótipos, não favorecendo julgamentos analíticos. Isso indica que não há um tratamento lógico para a ampliação do campo numérico dos racionais para os reais a partir da representação decimal infinita e, possivelmente, não são fornecidos aos alunos critérios para que formem seus julgamentos, baseados nas ideias que constroem os significados para essa ampliação.

Existe muita confusão na utilização do termo dízima e do termo infinito. Observamos que conceitos como os de densidade, de vizinhança, de reais como medida, não são evocados pelos alunos, o que sugere que não são trabalhados nesse processo de ampliação. Os significados evocados remetem quase que exclusivamente à visualização da representação decimal, o que sugere que são elas as valorizadas no trabalho em sala de aula.

Apresentamos a seguir, a insistência da pesquisadora com os alunos em

relação à certeza da racionalidade do número 1,35353535... Essa característica do método clínico busca, além dos diferentes níveis de respostas, obter detalhes ainda não ditos que esclareçam os julgamentos feitos pelos alunos, por meio dos atributos exteriorizados nas tentativas de explicação.

G (Pesquisadora): Vinícius, por que você acha que no primeiro número, a nona casa decimal é 3 e a décima é 5 e continua para sempre nessa repetição? A conta feita pode ter dado exatamente isso, por exemplo,...⁸⁸

G (Pesquisadora): Para você, este número é uma dízima periódica?⁸⁹

G (Vinícius): Não, é um decimal finito.

G (Pesquisadora): Olha, não sabemos que conta foi feita. É impossível a décima casa ser um número diferente de 3 e a seguinte diferente de 5? Esse número de qualquer maneira será racional?

G (Bruno): **Do jeito que foi enunciado, dá a entender que continua infinitamente..., com o padrão apresentado.**

G (Pesquisadora): Se esse número continua com esse padrão, e esse outro continua com esse outro padrão, pensando desta maneira, como decimais infinitos, o primeiro seria...?

G (Thaíssa): Racional, o número 134 sobre 99.

G (Pesquisadora): Correto, vocês lembram como chegar nesse número?

A intenção da pesquisadora com seus questionamentos é fazer que várias possibilidades para esses números sejam identificadas nas falas dos alunos e também tentar desequilibrar as imagens construídas por eles. A fala de Bruno “do jeito que foi enunciado, dá a entender que continua infinitamente..., com o padrão apresentado” é muito esclarecedora, pois explicita novamente, no pensamento comum desses alunos, o fenômeno prototípico da repetição que é associado às dízimas periódicas. Essas imagens possivelmente são frutos dos acordos feitos na sala de aula e refletem a pouca variedade de representações na abordagem dos números reais, que já é considerada pelo PCNEM (Brasil 2000) adequada para o nível médio de ensino. A seguir apresentamos a colocação da aluna Thaíssa, quando procurou de esgotar todas as suas visualizações para o número 2,12345678.

G (Pesquisadora): E o que se pode afirmar sobre o segundo número?

G (Thaíssa): Esse não sei, pois **ele pode vir 12345678 e virar uma dízima ou uma vez seguindo esse padrão eternamente e ser um número irracional.**

⁸⁸ Nesse momento, Artur forneceu o número $\frac{135353535}{100000000}$ como exemplo.

⁸⁹ A pesquisadora se referiu ao número apresentado por Artur.

[...]

G (Thaíssa): mas se terminar no 8 é racional, mas **poderia também ser 123456788888, ou 123456787878 ou ainda 12345678678678**

G (Pesquisadora): Você estaria certa se a calculadora fizesse truncamento nos números, mas ela aproxima e em todos esses exemplos que você deu, ela mostraria no visor 2,12345679.

As possibilidades sugeridas pelos alunos na discussão final dessa atividade foram aumentando, conforme os alunos exteriorizavam suas visualizações com mais quantidades diferentes para os números racionais. Uma das poucas explicações para a possibilidade do número 2,12345678 ser irracional foi dada pela aluna Thaíssa, quando declarou “uma vez seguindo esse padrão eternamente e ser um número irracional”. Isto constata mais uma vez a pouca bagagem de imagem conceitual que esses alunos tinham de número irracional. A pesquisadora insistiu com mais perguntas para os alunos, objetivando um fechamento para a atividade.

G (Pesquisadora): Quando vocês olham pra esse número (o número 2,123456789), isso diz mais alguma coisa pra vocês ou não?

G (Vinícius): Poderia ser também 2,12345677777.... e a calculadora aproximou para 2,12345678

G (Isabel): Ahhh, é verdade..

G (Pesquisadora): Se os números fossem conforme se apresentam no visor, o que daríamos como resposta?

G (Vinícius): Racional.

G (Pesquisadora): Vamos concluir então a resposta adequada? **Qual seria a resposta, se fosse uma questão de vestibular?**

G (Vinícius): Não se pode afirmar.

Vinícius forneceu mais uma hipótese para o número 2,12345678, e Isabel concordou. Isso mostrou que estes alunos se envolveram na abertura que a questão proporcionou e ficaram motivados buscando várias possibilidades de números reais que podiam ter aquela representação do visor. Essa exposição de exemplos por parte dos alunos, num momento coletivo do encontro, possibilitou a troca de conhecimentos e de experiências visuais de cada um, relacionando exemplos protótipos, contribuindo para a construção de suas redes e estruturando a imagem conceitual de número real.

A estratégia da pesquisadora, quando mencionou o vestibular e solicitou aos alunos maior atenção, preocupação e envolvimento para o fechamento da questão, elucida hábitos da docência no Ensino Médio que valoriza a importância de um concurso na vida dos alunos. Dessa forma, apelou para o pensamento comum que, se era para o vestibular, não podiam falhar.

No trecho a seguir, a pesquisadora levantou a hipótese do primeiro número ser irracional, lembrando que esses números foram resultados de operações realizadas na calculadora⁹⁰.

G (Pesquisadora): A gente não pode afirmar sobre os números que motivaram os cálculos na calculadora, pois não sabemos que conta foi feita. A correspondente ao primeiro número pode tanto parar ali como pode continuar com aquele padrão, mas também pode mudar de padrão, pode ser um número irracional, não pode?

G (Denise): Não, é dízima...

G (Pesquisadora): Mas como você sabe que é dízima?

G (Isabel): Porque **tá repetindo o 35 durante um tempão!**

G (Pesquisadora): Por que você acha que aquele número apresentará sempre a repetição do 35?

G (Vinícius): Mas **se um número foi dividido e deu 3 e depois deu 5 e repetiu, não vai mudar de padrão...**

Observamos que a representação $1,35353535$ é muito automática para os alunos, é um exemplo protótipo de número racional que os levam à única dedução de ser uma dízima periódica, pelas razões já expostas nos registros. Isabel declarou “tá repetindo o 35 durante um tempão” e Vinícius complementou com a reveladora, importante e equivocada justificativa “se um número foi dividido e deu 3 e depois deu 5 e repetiu, não vai mudar de padrão...”. Ele não acreditou na possibilidade de os quocientes obtidos na divisão mudarem de padrão, pois algumas repetições já aconteceram.

Essa justificativa dada por Vinícius apresenta um aspecto que não foi exteriorizado nesta pesquisa por nenhum outro aluno e indica que a única operação pensada pelo aluno foi a divisão, o que tornaria o número racional. Observando o número $1,35353535$ como resultado de operação, a repetição do número 35 caracterizaria uma divisão pois, baseado na sua experiência escolar, não haveria nenhuma outra operação que geraria uma imagem semelhante a este número. Em outras palavras, o aluno não supôs que poderia ter sido realizada, por exemplo, uma radiciação, visto que se faz pouco uso dessa operação na calculadora. Ressaltamos, no entanto, que há, na explicação de Vinícius, uma tentativa de julgamento analítico, pois o aluno buscou um argumento lógico que fundamentasse seu pensamento.

Nesse momento, a pesquisadora esclareceu à turma que o surgimento do

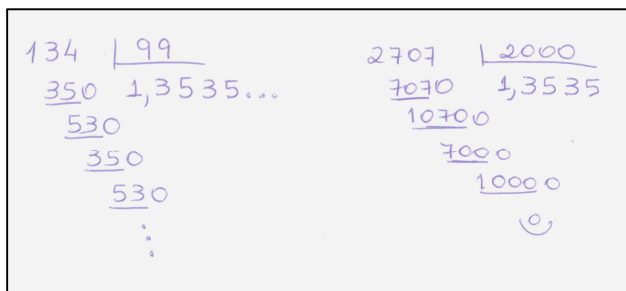
⁹⁰ Os números que aparecem no visor são racionais. No que diz respeito aos números que geraram estes, nada podemos afirmar, pois desconhecemos a operação realizada.

período se deu pela repetição nos restos da divisão e não pela repetição dos algarismos no quociente. Para ajudar a desconstruir o julgamento feito por Vinícius, ela efetuou as divisões no quadro correspondentes aos números: $\frac{134}{99}$ e

$$\frac{13535}{10000} = \frac{2707}{2000}.$$

Enfatizou a repetição que aconteceu no primeiro algoritmo, cujo processo é infinito, mas não aconteceu no segundo, pois deu resto zero. A Figura 14 mostra os dois algoritmos correspondentes. A primeira divisão gerou uma dízima periódica de período 35, pois os restos 35 e 53 se repetiram. No segundo algoritmo, não aconteceu repetição de nenhum resto, mas os quatro primeiros dígitos decimais do quociente foram iguais ao da dízima periódica.

Figura 14: Algoritmos feitos no quadro pela pesquisadora.



Fonte: Extrato do diário de campo, abril de 2008.

A seguir, a aluna Thaíssa emitiu uma opinião sobre o que ocorre quando os alunos estão realizando as atividades: concentram-se em algumas informações e abandonam outras.

G (Thaíssa): a gente acaba não prestando atenção no fato de que o problema tem uma calculadora que foi usada. A gente lê e tudo, mas na hora **olhamos só para o número** e esquecemos a história da calculadora.

A expressão “olhamos só para o número” indica a maior importância de determinados aspectos sobre outros. Thaíssa afirmou que algumas hipóteses foram deixadas de lado. Dessa forma, os exemplos protótipos da imagem conceitual foram resgatados, sem levar em conta todas as informações dadas. Essa rápida conexão de imagens faz que os alunos emitam seus julgamentos, às vezes de forma precipitada, levando-os a cometerem equívocos. O trecho a seguir mostra a pesquisadora solicitando aos alunos que exteriorizassem uma definição de número racional.

G (Pesquisadora): O que é número racional?

G (Fernando): **Racional... tudo que se pode expressar... em forma de fração ou em número decimal.**

G (Pesquisadora): Qualquer número decimal?

G (Fernando): Não.

G (Thaíssa): **Não, qualquer decimal não, em forma de fração. Por exemplo, o número 2,12345678910... não é racional.**

Fernando ao dar a resposta “Racional... tudo que se pode expressar... em forma de fração ou em número decimal” exteriorizou julgamentos prototípicos e analíticos na tentativa de definir um número racional qualquer. Sua imagem conceitual de número racional, apesar de ter um atributo relevante, ainda carrega atributos irrelevantes. Dessa forma, sua imagem conceitual de número racional é parcial, pois não contempla todos os atributos relevantes de número racional.

Por outro lado, apesar da linguagem pouco formal, Thaíssa mostrou-se segura nas suas afirmações e foi bem incisiva quando expressou “não, qualquer decimal não”. A aluna em sua fala apontou que nem todos os números decimais são racionais e definiu-os “em forma de fração”. Consideramos, a partir das falas anteriores de Thaíssa, que o significado dado à sua declaração foi em relação à todos os números decimais que podem ser escritos na forma de fração. Isso foi esclarecido quando ela mesma forneceu um exemplo para Fernando de número decimal que não é racional. Trata-se do número 2,12345678910..., que pelo contexto em questão, refere-se ao número decimal infinito que continua com esse padrão de formação crescente dos números naturais. Dessa forma, a aluna exterioriza atributos relevantes de sua imagem conceitual que se apresenta num estágio mais elaborado do conceito, apesar do exemplo numérico não estabelecer por si só, o número pensado por Thaíssa.

Essa questão mostrou-nos a dificuldade que os alunos têm na identificação de números racionais e irracionais e na elaboração de suas justificativas, nem sempre em consonância com a classificação. Consideramos que essa atividade facultou investigar, a partir da identificação de atributos relevantes e irrelevantes, e dos respectivos julgamentos feitos pelos alunos, que alguns exemplos protótipos reduzem o universo dos números reais.

A discussão final da atividade com todos os alunos contribuiu para que fossem criados novos exemplos protótipos e fossem elaborados novos julgamentos. Alguns justificados por atributos que apresentaram na atividade feita, outros por atributos formulados durante essa interação final com a

pesquisadora. A aparição de novos julgamentos está prevista no método clínico, uma vez que as perguntas do pesquisador visam a desequilibrar aquilo que os alunos utilizam como atributo relevante na escolha dos exemplares positivos.

Um outro aspecto importante que surgiu nessa atividade e vale destacar é referente ao método de pesquisa; diz respeito à dúvida de alguns alunos sobre como obter a fração geratriz de uma dízima periódica. Nesse caso, a pesquisadora confirmou a fração geratriz apresentada por Thaíssa, mas optou por não dar explicações no momento da coleta dos dados, visto que o método tem como objetivo interrogar para obter novos dados e não fornecê-los. Dessa forma, prontificou-se a tirar dúvidas de alguns alunos, em outro momento, fora da pesquisa.

Ressaltamos que, em todos os registros referentes ao número 1,35353535, a possibilidade de este número ser uma aproximação de um número irracional não existiu para nenhum aluno. Isso reflete o quanto é forte a presença de uma repetição de dígitos na expressão decimal de um número real. Dessa forma, apresentou um descritor de imagem conceitual bastante resistente e não favorável, que induziu todos os alunos a vê-lo como uma dízima periódica, pois o imaginavam mantendo o padrão de repetição infinitamente, o que os levou a classificarem-no como um número racional.

6.2.2.3

Atividade P6: sobre o número irracional 0,121221222...

O número irracional 1,121221222..., em que o número de algarismos 2 aumenta de quantidade entre os algarismos 1, foi utilizado nas pesquisas realizadas por Fischbein et al. (1995) e Zazkis & Sirotic (2004), já apresentadas no capítulo 2 desta tese. Esta questão foi aplicada no estudo preliminar e escolhida também para o estudo principal. O enunciado garante que este número tem representação decimal infinita e esclarece o padrão de formação dos algarismos que compõem a dízima. Esses aspectos diferenciam esta atividade da atividade P5.

No estudo preliminar

A Tabela 21 mostra o estudo prévio que realizamos na questão P6. Consideramos adequadas somente as respostas dadas com justificativa.

Tabela 21: Estudo prévio da questão P6

Pergunta			
O número 0,121221222... é um decimal infinito cujas casas decimais só têm os algarismos 1 e 2 conforme um padrão: aumenta-se em um a quantidade de algarismos 2, separados pelo algarismo 1. Esse número é racional ou irracional? Justifique sua resposta.			
Resposta			
<i>Irracional. Trata-se de uma expansão decimal infinita e não periódica e, portanto, este número não pode ser representado na forma de fração.</i>			
Objetivo			
Detectar as concepções que os alunos trazem sobre números que possuem expansão decimal infinita com dízima não periódica. Identificar nas justificativas os aspectos (adequados ou não) que levam o aluno a classificar um número como racional ou irracional.			
Tabulação das respostas			
	A	I	B
nº alunos	18	40	12
percentual	25,7%	57,1%	17,2%
A - adequada I – inadequada B – em branco			

Dos 70 sujeitos nessa etapa da pesquisa, 41 classificaram o número 0,121221222... como irracional e, dentre estes, 18 alunos apresentaram justificativas adequadas. Consideramos esse resultado relevante, pois é um indicador de que números com a representação decimal infinita e não periódica garantida por um padrão de formação sejam exemplos protótipos para números irracionais. As justificativas “não é dízima”, utilizadas para explicar por que 1,121221222... é irracional, foram consideradas, por entendermos que o significado dado, neste caso, é “não é dízima periódica”, embora em alguns poucos casos isso pode não ser verdadeiro.

É perceptível a quantidade de dúvidas relacionadas às justificativas utilizadas nas classificações desse número real como racional ou irracional. Algumas podem refletir apenas uma confusão de nomes, mas grande parte das respostas aponta que há questões a serem discutidas e sanadas. O anexo 12 contém todas as 70 respostas obtidas nessa questão. A partir das análises feitas nessas respostas, identificamos atributos relacionados aos números racionais e irracionais, quando o aluno observou o número 0,121221222... e emitiu seu julgamento. Esses atributos estão listados na Tabela 22.

Tabela 22: Atributos de números racionais ao observar o número 0,121221222...

NÚMEROS RACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Seu período mantido / é dízima⁹¹. - Pode ser colocado em forma de fração.	- Tem uma lógica. - Segue um padrão. - Podemos prever os outros números. - Se repete em alguma ordem seqüencial. - Não está na raiz.

Os atributos relevantes e irrelevantes, destacados para os racionais, foram apresentados nas 18 respostas dos alunos que classificaram inadequadamente o número 0,121221222... como racional. Na coluna de atributos relevantes, o aluno, no primeiro caso, identificou um período, o que mostra que ele possivelmente achou que ter período é ter alguma regularidade. No segundo caso, como o número tem representação decimal infinita, dizer que pode ser colocado na forma de fração recai na primeira, já que somente os decimais infinitos e periódicos teriam esse atributo, portanto, a dúvida, provavelmente seja a mesma.

Não consideramos como atributos de racionais as justificativas “não é possível extrair fração” e “não apresenta dízima periódica”. Consideramos, nesse caso, que há uma confusão na compreensão dos nomes racional e irracional, e que “ser ou não ser possível extrair fração”⁹² e “apresentar ou não dízima periódica” são questionamentos coerentes com essa atividade e com a classificação de um número irracional. Dessa forma, os alunos demonstraram conhecimentos dos atributos que devem ser observados.

A maior parte dos atributos fornecidos nas justificativas deles são oriundos da imagem que o número 0,121221222... carrega e não dos atributos dos números racionais. O fato de identificarem a presença de um padrão nessa imagem foi suficiente para formarem seu julgamento.

Os atributos “tem uma lógica”, “segue um padrão”, “podemos prever os outros números” e “se repete em alguma ordem sequencial” poderiam todos se remeter à categoria dízima periódica. Os alunos possivelmente tomaram o que seria um padrão como período, como no primeiro caso, porém os atributos enunciados não fazem menção específica a isso. Seria possível considerar que, nesses casos, os alunos não possuiriam vocabulário para dizer o que “viram”, ficando seu julgamento fortemente remetido à imagem de um padrão. Esclarecemos, porém, que essa forma de defini-los não é adequada para o Ensino Médio.

⁹¹ Significando dízima periódica.

⁹² O termo extrair fração para o aluno significa representar na forma de fração.

O atributo “não está na raiz”⁹³, apresentado por um aluno, ilustra o exemplo protótipo de número irracional. Como o número 0,121221222... não está numa raiz quadrada, o aluno o classificou como racional. A Tabela 23 lista os atributos encontrados nas justificativas dos alunos, quando classificaram o número 0,1212221222... como número irracional.

Tabela 23: Atributos de números irracionais ao observar o número 0,121221222...

NÚMEROS IRRACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Não é dízima⁹⁴ / É uma dízima não periódica. / É um número infinito sem período. - Não pode ser colocado na forma de fração. / Não pode ser escrito na forma de fração, pois não é periódico, nem finito. - Após a vírgula, sua sequência de decimais aumenta, mas não em sequência repetitiva. - Sua continuação deriva de uma sequência, de um 2 a n(...) 2. - Infinito. / Não possui uma resposta exata.	- Há uma sequência lógica (dízima). - Obedece a uma sequência.

Os atributos relevantes “não é dízima periódica” e “não pode ser colocado na forma de fração” caracterizam qualquer número irracional e tal julgamento foi feito por 15 dos 41 alunos que usaram a classificação irracional. Destes, sete apresentaram o julgamento prototípico “não é dízima periódica” e oito alunos fizeram o julgamento analítico, com o atributo “não pode ser escrito na forma de fração”. Destacamos algumas das justificativas apresentadas que não foram incluídas na Tabela 23.

- “é dízima” e “números racionais não possuem dízimas” — Estas duas respostas afirmam que o número 0,121221222... é irracional pois é uma dízima. Como, de um modo geral, o uso da palavra tem o significado de dízima periódica e, portanto, de uma expansão decimal com dois atributos “ser infinita” e “ser periódica”, consideramos duas possíveis análises para esse julgamento. Se o significado da palavra dízima, para estes alunos, foi de dízima periódica, então eles associaram inadequadamente periodicidade com a regularidade; porém, se apenas consideraram que o número decimal apresentado tem representação infinita, o julgamento foi baseado num atributo relevante para os números irracionais, que nesse caso, seria suficiente, visto que o número 0,121221222..., conforme foi definido, nunca apresentará periodicidade na parte decimal.
- “sendo uma dízima infinita não pode ser escrito na forma de fração se

⁹³ Com o significado de raiz quadrada.

⁹⁴ Dízima significando dízima periódica.

usarmos apenas números inteiros no numerador e denominador” — Esta foi a única resposta dessa atividade que apresentou a expressão “dízima infinita”. Esse fato pode ser um indicador de que esse aluno possivelmente utilizou a palavra dízima no seu real significado e, sendo assim, esse atributo é relevante para números irracionais. No caso de o significado ser dízima periódica, esse atributo, fornecido pelo aluno, não pertence ao conjunto de atributos de números irracionais. Esse mesmo aluno ainda utilizou o atributo relevante “não pode ser escrito na forma de fração”, que é suficiente para definir qualquer número irracional. Tal atitude demonstra a necessidade de o vocabulário ser adequadamente utilizado na matemática escolar.

- “além de ser infinito, não pertence aos padrões dos números racionais” — Esta resposta apresenta o atributo relevante “além de ser infinito” para números irracionais acompanhado de uma expressão não esclarecedora, o que nos fez classificá-la como inadequada.

No estudo principal

Pela quantidade e pela qualidade dos atributos apresentados e também pelas dúvidas que tivemos no estudo prévio dessa atividade, decidimos aplicá-la no estudo principal, pois o método clínico nos permite a aproximação da compreensão dos alunos na exteriorização de seus argumentos.

Os extratos obtidos das fichas de atividade foram separados. O primeiro grupo de respostas apresentou a classificação e a justificava adequadas e os demais contiveram a classificação adequada, mas a justificativa inadequada. Nenhum dos alunos do estudo principal classificou o número $0,121221222\dots$ como racional, sinalizando, nesse grupo de alunos, que esse número é um bom exemplar para os números irracionais.

E (Antônio-Otávio): Irracional, pois apresenta uma dízima não periódica e não tem forma de representá-lo na forma fracionária.

E (Denise-Artur): É irracional por ser dízima sem período.

E (Thaíssa-Clara): Irracional, como o número é infinito e não se repete (não é dízima) ele não pode ser escrito na forma de fração (irracional). **O problema está na justificativa pelo pouco conhecimento dos conceitos.**

E (Fernando-Eduardo): Irracional, pois não tem um período que se repete.

Todas as quatro duplas apresentaram o julgamento prototípico da dízima não periódica. Além disso, as duplas Antônio-Otávio e Thaíssa-Clara complementaram com o julgamento analítico “não pode ser representado na forma de fração”. Consideramos que as justificativas dadas por essas duplas trabalham bem com a equivalência das proposições p , q e r , que são as seguintes:

- p : x é número irracional
- q : x não pode ser representado na forma de fração
- r : x é uma expansão decimal infinita e não periódica

Ilustramos a seguir, os registros da dupla Vinícius-Isabel que apresentou descritores de uma imagem conceitual parcial de número irracional, pois o relaciona apenas com o atributo relevante “ser número decimal infinito”.

E (Vinícius-Isabel): Irracional, pois é impossível, por ser infinito, representá-lo como uma fração.

Esclarecemos que esse julgamento com fundamento nos exemplos protótipos que contêm somente esse atributo, também ocorreu em Igliori & Silva (2001) e em Zazkis & Sirotic (2004). Já a justificativa dada pela dupla Bruno-Celso apresentou o atributo “padrão de repetição diferente”, que não é a de repetição de um certo número formado (o período), mas de repetição de algarismos intercalados em que um dos algarismos aumenta de um em um. Essa imagem visual diferenciou-a de uma dízima periódica e, por isso, levou a dupla a classificar o número como irracional. É importante mais uma vez assinalar a insuficiência de linguagem para falar sobre o conceito.

E (Bruno-Celso): Irracional. **Apresenta um padrão de repetição diferente.** Esse padrão de repetição é diferente, pois apesar de apresentar os mesmos algarismos 1 e 2, possui um padrão de intercalamento dos algarismos 2 com 1.

Esse julgamento prototípico tem base na comparação dos atributos próprios do protótipo da dízima periódica. Nesse caso, a comparação entre os exemplos protótipos foi feita e não foi correspondida (Hershkowitz, 1994).

Destacamos a seguir, o trecho da gravação do momento em que Thaíssa argumenta com Clara sobre a atividade. A aluna classifica o número 0.121221222... estabelecendo comparações com os números 1,35353535; 2,12345678, trabalhados na atividade P5.

G (Thaíssa): Só que esse aqui primeiro se confunde quando ela fala o número, que vai aumentando 2. Eu acho que é mais complicada. **Essa aqui, já repete, acabou! Essa aqui você não tem como saber, muita gente deve ter considerado só o número 2,12345678.** Só que esse aqui, primeiro muita gente se confunde quando ela define o que que é o número, que vai aumentando o número de 2, muita gente não consegue justificar, **muita gente diz que é irracional e ponto**, mas não justifica.

Esclarecemos que o comentário “muita gente diz que é irracional e ponto”, feito por Thaíssa, se refere à tabulação dos dados do estudo preliminar, a que esse grupo teve acesso. A aluna está observando e analisando as respostas dadas nas duas questões P5 e P6. É uma das alunas desse grupo que consideramos possuir uma imagem conceitual satisfatória de números racionais e irracionais, porém apresenta ainda alguns atributos que precisam ser discutidos.

Em relação ao número 1,35353535, ela atribui: “essa aqui, já repete, acabou”, indicando ainda o mesmo atributo irrelevante, que apresentou na atividade P5. Esse descritor de imagem conceitual associa dízimas periódicas a expansões decimais que apresentam repetição de dígitos. O julgamento prototípico utilizado tem como sistema de referência a imagem visual da dízima periódica que a aluna está acostumada a ver nos livros didáticos e na sala de aula. Como não sabemos o que vem depois das oito casas decimais e nem a operação que foi realizada na calculadora, não podemos afirmar a natureza finita e infinita do número e o aspecto periódico da expansão, no caso de esta ser infinita.

Já com o número 2,12345678, a aluna ficou insegura, quando afirmou “essa aqui você não tem como saber, muita gente deve ter considerado só o número 2,12345678”. Thaíssa considerou-o terminado e, portanto, racional, mostrando que possuía uma imagem conceitual completa para o caso de ser um número decimal finito. Vale destacar que os dígitos diferentes na parte decimal não fizeram com que a aluna apresentasse atributos irrelevantes e de alguma forma mudasse seu julgamento para número irracional.

Thaíssa acreditou que a explicação do padrão de formação do número 0,121221222... já era um indicador da sua irracionalidade, o que faz muito sentido, confirmado por sua afirmação: “muita gente se confunde quando ela define o que que é o número, que vai aumentando o número de 2, muita gente não consegue justificar, muita gente diz que é irracional e ponto”.

Antes de entregar aos alunos a ficha relativa ao segundo encontro, a

pesquisadora retomou a questão, e todos concordaram com a irracionalidade do número $1,12122122212222\dots$, conforme o padrão descrito na questão. Quanto à justificativa, a maioria dos alunos respondeu que não poderia ser representado por uma fração, ou então que não se tratava de uma dízima periódica.

A pesquisadora questionou o grupo sobre o que garantiria o fato de uma fração (divisão de inteiros) não ter um representante decimal com aquele padrão indicado. É importante ressaltar que a pesquisadora, se, por um lado, articula seu saber com sua prática docente (André, 2002), buscando conexões lógicas dos alunos, por meio da discussão e da mediação com outras perguntas, por outro, está sendo coerente com a metodologia escolhida. Tal atitude fundamenta-se no método clínico que se propõe a descobrir novos aspectos do objeto, comuns e não individuais. As perguntas devem provocar, portanto, reações para investigar como os sujeitos percebem as relações que estão sendo estabelecidas, na situação que foi criada entre o pesquisador e o sujeito pesquisado na sua interação com o objeto (Delval, 2002).

Voltando-se a questão apresentada, o grupo não soube responde-la, então a pesquisadora elaborou novas perguntas: “Que respostas possíveis podemos ter quando dividimos dois números inteiros? O que se pode dizer em relação ao resto obtido na divisão?” (extrato do diário de campo, abril de 2008). A partir dessas perguntas, de exemplos e de observações feitas no primeiro encontro, alguns alunos arriscaram que toda divisão de números inteiros resulta ou em número inteiro, ou em decimal finito, ou em dízima periódica.

Estes questionamentos foram retomados em outras atividades que serão analisadas mais adiante, ainda nesse grupo de atividades. Com isso, a pesquisadora deseja que os alunos cheguem à conclusão: “Como qualquer número racional, quando representado na forma decimal, só pode apresentar representações decimais finitas ou infinitas e periódicas, as expansões decimais infinitas, tal como $0,121221222\dots$, que nunca apresentarão períodos, são números reais que não são racionais”.

6.2.2.4

Atividade P7: o número $\frac{53}{83}$ e sua representação decimal na calculadora

A atividade P7 foi a primeira a ser trabalhada no segundo encontro. Esclarecemos que a ficha de atividades foi distribuída após uma retomada das questões P5 e P6 do primeiro encontro. Essa questão gerou dúvidas quanto à sua resposta, pois alguns alunos se deixaram levar pelo resultado apresentado no visor da calculadora, levando-os à uma situação de conflito. O diferencial dessa questão é que a operação — no caso, a divisão de dois números inteiros — agora é conhecida. Essa pergunta também foi aplicada na pesquisa de Zazkis & Sirotic (2004), na qual mais de 30% dos futuros professores falharam ou forneceram justificativas inadequadas no reconhecimento do número $\frac{53}{83}$ como um número racional.

No estudo preliminar

A Tabela 24 mostra o estudo prévio realizado na questão P7.

Tabela 24: Estudo prévio da questão P7

PERGUNTA			
Utilize a calculadora e dê a representação decimal do número $M = \frac{53}{83}$.			
a) Que número aparece no visor?			
b) O número M é racional ou irracional? Justifique sua resposta.			
RESPOSTA			
a) <i>Aqui depende do número de dígitos da calculadora de que o aluno dispõe. Pode ser 0,6385542 ou 0,63855422 ou ainda 0,638554217.</i>			
b) <i>Racional, pois $\frac{53}{83}$ é uma fração.</i>			
OBJETIVO			
a) Utilizar a representação decimal deste número para verificar possíveis imagens que o induzem ao erro no item b.			
b) Verificar se o número apresentado no visor, resultado de divisão feita na calculadora, provoca equívocos na classificação do número racional $\frac{53}{83}$. Detectar atributos relacionados aos números racionais e irracionais nas justificativas apresentadas.			
TABULAÇÃO DA QUESTÃO –ITEM A			
	A	I	B
nº alunos	59	6	5
percentual	84,3%	8,6%	7,1%
TABULAÇÃO DA QUESTÃO –ITEM B			
	A	I	B
nº alunos	11	50	9
percentual	15,7%	71,4%	12,9%
A – adequada I – inadequada B – em branco			

Dos 61 alunos que responderam a esta questão, 33 afirmaram se tratar de um número racional e, destes, 11 justificaram adequadamente. Dentre os alunos que forneceram respostas inadequadas, 28 responderam que $\frac{53}{83}$ é irracional.

Consideramos inadequadas as respostas: “pois ele pode ser dividido”, “pois obtemos em sua divisão um número finito que pode ser escrito por meio de fração” e “é finito e pode ser escrito em fração”. Estas foram baseadas no número apresentado no visor, mas mesmo nesse caso, não se pode afirmar que o número é finito. Essa análise também já foi realizada na atividade P5. Muitos alunos abandonaram a fração que gerou o número do visor e utilizaram para seu julgamento somente o número obtido no item *a*, o que nos possibilitou identificar, por meio dos atributos utilizados, como eles classificaram os números decimais como racionais e irracionais. Essa constatação sugere que o atributo “ser fração” não é o mais utilizado por eles para decidir pela racionalidade ou não de um número.

Consideramos essa questão mais elaborada do que as duas anteriores, pois ela apresenta uma operação — divisão de 53 por 83 — a ser feita na calculadora, e o aluno, ao observar as duas representações, a fracionária e a decimal, que é uma aproximação, precisa julgar se o número é racional ou irracional. Essas questões também remetem às atividades P5 e P6.

O número visualizado pelo aluno mostrou imagens muito significativas. Uma delas é a impressão de que não haverá período, possivelmente porque seus exemplos protótipos de dízimas periódicas possuem período com um ou dois dígitos. Outra imagem é a falta de padronização, possivelmente porque o exemplar protótipo exibe padrões e não foram trabalhados exemplos negativos. Além disso, existe a dúvida se a representação decimal para ali ou se continua, suspeita essa já demonstrada nas questões P5 e P6; aqui, entretanto, tem-se o conhecimento de que a operação efetuada é conhecida.

Os alunos que utilizaram uma calculadora com sete casas decimais associaram a imagem visualizada do número 0,6385542 obtido a algum exemplo protótipo de número irracional. Mas como isso foi possível, se esse número foi obtido a partir de uma divisão de inteiros? E como seria possível chegar à fração $\frac{53}{83}$ partindo do número exibido no visor? Detectar nas respostas indicações do pensamento do aluno, por meio dos atributos usados, ajudou a caracterizar a

imagem conceitual do sujeito em relação aos números racionais e irracionais.

As respostas obtidas nessa questão estão no anexo 13. Destas, separamos todas as justificativas usadas, quando o aluno classificou o número M de racional, e montamos a Tabela 25, que categoriza esses atributos em relevantes ou irrelevantes.

Tabela 25: Atributos de números racionais identificados nas respostas da atividade P7.

NÚMEROS RACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Está em forma de fração. / Ele pode ser dividido. / Pode ser obtido através de uma divisão. - Tem resposta exata. / É um número finito. / Não há resultado infinito. - É dízima. (significando dízima periódica)	- Não está na raiz. - Estamos dividindo dois primos.

Interpretamos os atributos “ele pode ser dividido” e “pode ser obtido através de uma divisão” como “o número pode ser expresso como uma divisão de inteiros”. Dessa forma, eles foram considerados relevantes, apesar de termos classificado as respostas correspondentes como inadequadas. Esclarecemos que há abusos de linguagem nos atributos “tem resposta exata”, “é um número finito” e “não há resultado infinito”, quando o termo adequado a ser utilizado é “a parte decimal do número é finita” ou “o número apresenta um número finito de casas decimais”.

Cabe ressaltar que essas respostas se basearam exclusivamente no número que apareceu como resultado da divisão. Os alunos não utilizaram em seu julgamento o fato de ser uma fração. Nesse caso, não perceberam que se tratava de uma dízima periódica, portanto, um decimal infinito. Isso possivelmente ocorreu, por utilizarem como protótipo de dízima periódica, a que tem período de um ou dois dígitos. Consideraram, também, que a divisão era exata e que, portanto, o número que a calculadora fornecesse, seria sempre um decimal finito.

Os dois atributos irrelevantes para números racionais encontrados nas respostas são resultados de um julgamento prototípico baseado em aspectos de percepção visual, como, por exemplo, os números irracionais da forma $\sqrt{n}$. Em relação à resposta do aluno que fez alusão aos números primos, possivelmente, isso ocorreu devido a uma percepção muito particular de que as dízimas periódicas são obtidas a partir da divisão de inteiros diferentes de 10, seus múltiplos, divisores e múltiplos de seus divisores. A observação do aluno, embora

inadequada, provavelmente, deve funcionar nos casos prototípicos. Destacamos algumas justificativas referentes aos números racionais que não foram incluídas na Tabela 25.

- “pois não tem dízima” — Esta foi apresentada por seis alunos e não a acrescentamos na tabela de atributos, porque a analisamos de duas formas diferentes. Se por um lado, admitindo o significado que os alunos geralmente atribuem à palavra dízima, consideramos essa justificativa incoerente, por outro, os alunos podem ter decidido que o número do visor é um decimal finito, pois reconhecem uma dízima como um número decimal infinito e periódico e, sendo assim, não identificaram nem uma coisa, nem outra.
- “pois ao ser colocada em decimal, conseguimos obter um número” — Apesar de o atributo “ser número” pertencer aos racionais, destacamos essa justificativa, pois ela sinaliza a possibilidade de o sujeito não reconhecer uma fração como um número.
- “porque a resposta é certa e exata” — Aqui o aluno apresenta dois atributos “resposta certa” e “resposta exata”. É possível que este aluno admita que a calculadora é um instrumento utilizado somente para resolver cálculos com exatidão, e por isso, as respostas obtidas são adequadas e exatas. Assim, o sujeito visualiza um número decimal finito e, por ser este o número que ele está classificando, o número $M = \frac{53}{83}$ não foi considerado em seu julgamento, cujo exemplo protótipo seria um decimal finito.
- “pois não é um algarismo infinito⁹⁵ e não possui dízima” — Aqui nos chamou a atenção, o fato de os dois atributos estarem juntos, visto que não ser um decimal infinito já garante que não é dízima periódica. Levantamos a hipótese de que, para esse aluno, uma dízima periódica pode ser um decimal finito com repetição nos dígitos, como por exemplo, o número 2,121212.
- “pois obtemos em sua divisão um número finito que pode ser escrito por meio de fração” — Esta resposta, dada por dois alunos, inclui dois atributos relevantes para número racional, sendo que o segundo é uma definição formal baseada num julgamento analítico. Essa justificativa chamou-nos a

⁹⁵ Foi cometido novamente um abuso de linguagem.

atenção, pois os alunos partiram de uma fração, foram para a calculadora, observaram a representação decimal, concluíram de forma precipitada se tratar de um decimal finito e o classificaram como racional, pois ele “pode ser escrito por meio de fração”. A análise dessa resposta identifica que os alunos abandonaram a operação que foi realizada a partir de uma representação fracionária, que, de forma não esclarecida, foi também utilizada por mais sete alunos. Identificamos a possibilidade de o número $M = \frac{53}{83}$ ainda não ser entendido como número também nessa situação.

Elaboramos a Tabela 26, que mostra nossa identificação dos atributos relevantes e irrelevantes, agora para os números irracionais.

Tabela 26 Atributos de números irracionais identificados nas respostas da atividade P7.

NÚMEROS IRRACIONAIS	
ATRIBUTOS RELEVANTES	ATRIBUTOS IRRELEVANTES
- Não é dízima. / Não há repetição de períodos. / Não possui um período fixo. - Infinito. / Seu decimal é infinito, apesar de não aparecer na calculadora que só apresenta alguns dígitos. / Ao multiplicar 0,63855422 com 83 (fazendo a prova real) o resultado é aproximado, o que indica que a divisão seria infinita.	- Não obedece a uma sequência. / Não há uma sequência, repetição do número. - Não posso prever quais serão os próximos números, não possui um padrão. - Não possui um final.

O primeiro atributo relevante para números irracionais, “não possui dízima periódica”, descrito na tabela com respostas diferentes, foi apresentado por onze alunos. Isso é um indicador para esse grupo de alunos de que, se houvesse período, este já teria aparecido. A imagem 0,6385542, obtida no visor após realizar a operação $53 \div 83$, apresenta uma variedade de dígitos que não aponta para uma repetição, por isso, essa representação não está no repertório desses alunos como um possível número racional. Novamente, o protótipo da dízima periódica com período de poucos dígitos é ratificado.

O segundo atributo relevante para irracionais identificado nas respostas foi “ter representação decimal infinita”, o qual foi atribuído por seis alunos. Para eles, a calculadora realizou uma aproximação do número decimal, resultado da operação feita.

Em ambos os casos citados, o fato de ser uma fração não foi considerado, tampouco a operação realizada.

Dois alunos tentaram justificar tal fato quando acrescentaram em suas respostas “apesar de não aparecer na calculadora que só apresenta alguns dígitos”

e “ao multiplicar 0,63855422 com 83 (fazendo a prova real) o resultado é aproximado, o que indica que a divisão seria infinita”. Nenhuma das duas respostas garante que a expressão decimal em questão é infinita, porém estes alunos estão mais atentos ao instrumento utilizado, que realiza aproximações e, portanto, julgam que é mais provável que isso tenha acontecido. A segunda justificativa explícita com mais detalhes, como está estruturado o conhecimento desse aluno, visto que uma etapa a mais foi verificada quando ele utiliza a operação inversa e o resultado não dá 83.

Os aspectos levantados nessa análise dos atributos relevantes para números irracionais apontam algumas relações que esses alunos fizeram com as informações recebidas na atividade e são indicadores das falhas que existem no processo de ensino dos números reais na escola. Consideramos que esses sujeitos apresentam uma imagem conceitual parcial para números irracionais, pois utilizaram atributos relevantes nas justificativas, porém a imagem conceitual para números racionais é inadequada, pois não consideraram a divisão de números inteiros que foi realizada na calculadora. É importante ainda ressaltar a pouca formação de exemplos protótipos que sejam criados a partir do trabalho com exemplos negativos, tanto para os racionais, quanto para os irracionais.

Na coluna dos atributos irrelevantes, a idéia de sequência para o aluno que respondeu “não obedece a uma sequência” é a de que ela deve apresentar algum padrão. Para esse aluno, os números 6, 3, 8, 5, 5, 4, 2, nesta ordem, não formam uma sequência. Esse fato deve estar associado a exemplos protótipos que ele elegeu para caracterizar um número irracional. Categorizamos as outras respostas, “não posso prever quais serão os próximos números, não possui um padrão” e “não possui um final” como atributos irrelevantes para irracionais, pois todas se remetem à falta de padrão, caracterizando também para estes alunos que o número $0,6385542$ é irracional e que ambos abandonaram na sua justificativa o número $\frac{53}{83}$ fornecido na atividade.

Consideramos que as respostas listadas a seguir contêm atributos que não são pertencentes aos números irracionais e, por isso, não foram incluídas na Tabela 26.

- “é um decimal infinito que não segue um padrão” — A justificativa apresenta o atributo relevante “decimal infinito” para irracionais, e o

atributo “não segue um padrão”, irrelevante para os irracionais, apesar de juntos formarem uma justificativa adequada, se o número M fosse um número irracional. Há infinitos números irracionais que não apresentam padrão na parte decimal, mas há outros infinitos que apresentam padrão. Isso caracteriza uma imagem conceitual parcial de números irracionais. Consideramos que esse aluno, ao observar a parte decimal e não encontrar um padrão de repetição, imaginou que tal ocorrência não fosse mais possível. Isso aconteceu pelos poucos exemplares numéricos trabalhados na matemática escolar.

- “porque sua sequência periódica não é a mesma” — A resposta apresenta atributos que se contradizem, pois numa sequência periódica, o período é sempre o mesmo. Talvez, o aluno não tenha expressado adequadamente sua ideia, quando gostaria de esclarecer que não há período no número apresentado.

- “porque 53 não é divisível por 83” — A explicação sobre a racionalidade de um número não passa por essa discussão foi coerente. Consideramos que o aluno ou não pensou na justificativa que estava dando, ou pensou em alguns exemplos protótipos, como por exemplo, o número $\frac{2}{3}$. Neste, a divisão não é representada por um decimal finito.

Possivelmente, por comparação, ele não o classificou como irracional. Nesse caso, o sujeito julga que os racionais, quando escritos na forma decimal, são resultados de divisões exatas. O julgamento prototípico utilizado foi baseado na percepção visual.

- “pois o resultado da fração dá um número irracional” — A resposta indica a confusão que as duas representações geram na mente do aluno. Também mostra o desconhecimento de que toda fração é um número racional. Além disso, utiliza na justificativa da afirmação a própria afirmação, o que mostra também um erro lógico.

- “pois pode ser representado por fração” — Esta afirmação possivelmente indica uma confusão de nomes na classificação de um número como racional ou irracional. Se essa afirmação foi elaborada com convicção, ela mostra que o aluno aceita que o número do visor pode ser representado por uma fração.

- “porque se multiplicar o número 0,6385542 por 83 não dá exatamente 53 (pois ele é uma dízima)” — Nesta justificativa, o aluno afirma que a representação decimal de M é uma dízima, significando dízima periódica, mas classifica-o como irracional. Para ele, dízima periódica é atributo de irracionalidade.
- “pois não dá um número exato, a dízima não tem uma razão” — Nesta declaração, consideramos que a expressão “a dízima não tem uma razão” significa para esse aluno que essa dízima não pode ser convertida numa fração, que ele chama de razão. Faltou reversibilidade em seu pensamento.

No estudo principal

A decisão de incluirmos a atividade P7 no estudo principal nos propiciou-nos inferir mais detalhes na análise. Nesse momento, com o grupo menor, o método clínico-qualitativo favoreceu aproximações dos aspectos estruturais do conhecimento dos alunos que ainda não tinham sido exteriorizados nas suas respostas.

Esse primeiro grupo de respostas obtidas na atividade, ilustra quais respostas consideramos com abordagens adequadas para o Ensino Médio, apesar de alguns “excessos” no uso da linguagem, cometidos pela dupla Thaíssa-Clara.

E (Antônio): Racional, pois **é uma divisão de números inteiros, portanto possui um número finito de restos ao realizarmos a divisão.**

E (Thaíssa-Clara): Racional, está na forma de fração (o que define o racional: **pode ser escrito na forma de fração**). Comentário: Se for olhar só o resultado na calculadora é complicado afirmar algo, tem números de algarismos limitados.

E (Carla-Fernando): Racional, pois **pode ser representado na forma de fração.**

E (Isabel): Racional, pois **pode ser escrito na forma de fração.** Comentário: A presença de muitos números pode ser a justificativa para os erros desta questão, já que envolve atenção e memorização dos números. Os erros podem estar relacionados à forma decimal deste número que tem o período muito grande, **confundindo alguns alunos que não possuem o conceito muito claro.**

Uma primeira impressão que percebemos, fruto da análise dessas questões iniciais, é que esses seis alunos estavam seguros das suas respostas, já que não se desviaram da hipótese de que o número apresentado foi resultado de uma divisão de inteiros e, portanto, trata-se de um número racional. Esse fato demonstra um

descriptor de imagem conceitual favorável de número racional. Os comentários além das justificativas, apresentados pela dupla Thaíssa-Clara e a pela aluna Isabel são esclarecedores, pois, de certa forma, explicam os erros na classificação do número e as justificativas contraditórias obtidas no estudo preliminar.

A justificativa do aluno Antônio, “possui um número finito de restos ao realizarmos a divisão”, indica uma amplitude no seu repertório de atributos relevantes, que até agora não havia aparecido nas respostas. Antônio, em sua breve justificativa, quis dizer que não há como, na divisão de 53 por 83, a representação decimal ser infinita e não periódica, já que há possibilidade, numa divisão por 82, de aparecerem 83 restos, que são os inteiros do 0 (zero) até o número 82. Avaliamos que essa conclusão foi fruto das discussões recentes ocorridas nas intervenções da pesquisadora, no fechamento das atividades P5 e P6. De qualquer forma, somente Antônio exteriorizou este atributo. Destacamos a seguir, extratos dos registros da dupla Vinícius-Eduardo que também classificou o número M como racional, mas apresentou uma justificativa inadequada, influenciada pela imagem do número apresentado no visor.

E (Vinícius-Eduardo): **Racional**, porque tem período, porque **começa com 6 e termina com 6**, o início do período.

A dupla afirmou que o número era racional, pois o número decimal observado no visor foi 0,638554216, no qual a parte decimal “começa com 6 e termina com 6”. Por isso, eles concluíram equivocadamente que a representação decimal do número $\frac{53}{83}$ é a dízima periódica $0,\overline{63855421}$. Avaliamos que essa justificativa tem um significado que devemos levar em consideração. Sabemos que o período é caracterizado pela repetição dos restos, porém a dupla não deixou de perceber algo nesse sentido, e possivelmente buscou essa percepção nos dígitos da expansão decimal. Além disso, a calculadora da dupla contribuiu para o julgamento final. Ao não exibir o 10º dígito, favoreceu a decisão inadequada que, ao observar a nona casa decimal, concluiu, a partir da repetição do algarismo 6, que ali iniciava o período.

As outras cinco duplas não poderiam utilizar tal justificativa, pois suas calculadoras tinham somente sete dígitos. Na discussão das respostas com todos os sujeitos da pesquisa, a dupla Denise-Artur derrubou esse argumento, pois a

calculadora da dupla, com 14 dígitos, exibiu no visor o resultado 0,6385542168675. O uso de diferentes calculadoras, o ambiente que possibilitou a exposição das respostas e a discussão sobre as dúvidas com eventuais intervenções da pesquisadora foram fatores determinantes para a desconstrução das argumentações equivocadas sobre o resultado 0,638554216, apresentado na calculadora da dupla Vinícius-Eduardo. Sem essa visualização fornecida pela dupla Denise-Artur, as discussões seriam mais demoradas, visto que o argumento central da questão é a divisão do número 53 por 83, que exige um longo processo até a obtenção do período da dízima periódica correspondente.

Dessa forma, criaram-se mais oportunidades de conexões dos atributos utilizados pelos alunos e foi possível que discutissem mais o assunto, enriquecendo o aprendizado e favorecendo a construção de novos atributos relevantes, assim como a desconstrução dos atributos irrelevantes. Esse processo contribui para a formação de uma imagem conceitual completa de número racional e consequentemente de número irracional que, de acordo com Hershkowitz (1994), é uma imagem que possui todos os aspectos incluídos na definição do conceito, que é formada por um conjunto mínimo de atributos relevantes. Destacamos a seguir, as considerações da dupla Denise-Artur, a qual apresentou duas possíveis situações que poderiam acontecer na continuidade ou não da expansão decimal, levando-os a uma impossibilidade de julgamento. Utilizaram como justificativa os limites que toda calculadora possui.

E (Denise-Artur): É impossível dizer já que a conta pode parar aí, **o período pode começar** depois das casas que uma calculadora suporta. As pessoas podem esquecer que a calculadora tem número limitado de casas e achar que o número acaba aí.

Convém observar que as duas alternativas dadas pela dupla carregam atributos relevantes somente para números racionais, pois a própria dupla falou “o período pode começar”, pondo em dúvida a ocorrência de uma dízima não periódica. Consideramos que a dupla Denise-Artur atentou somente para o número observado no visor e, analisando desse ponto de vista, sem o contexto inicial, a resposta da dupla, ainda sim, não estaria adequada, pois não considerou o fato de a expansão ser infinita e não periódica.

Outro motivo que nos chamou a atenção para essa resposta foi que na questão P5, essa mesma dupla considerou a possibilidade da irracionalidade da

expansão decimal do número 2,12345678. Observamos, então, duas possibilidades de análise. A dupla pode ter pensado na não periodicidade e não ter registrado na resposta, ou a dupla se dividiu em dois momentos durante a argumentação — primeiro não se desviaram do número $\frac{53}{83}$, que gerou a expansão apresentada no visor, e sabiam que uma divisão gera somente decimais finitos ou dízimas periódicas — e, numa segunda etapa, abandonaram o número e fixaram-se somente na representação observada, como resultado de uma operação desconhecida.

Eis um exemplo, novamente, que ilustra a dificuldade dos alunos em capturar a questão como um todo, pois há uma dispersão ao longo da questão, deixando de lado os pressupostos envolvidos na atividade e priorizando apenas a ação didática mais próxima. A dupla Bruno-Celso apresentou alguns aspectos intuitivos ao observar o número no visor.

E (Bruno-Celso): Ao descobrir esse número, desconfia-se a presença de repetição, dando a sensação de erro. Irracional. Dividindo o número sem o uso da calculadora, observou-se a repetição. Comentário: É uma questão que só pode ser resolvida se o aluno possuir grande habilidade na divisão de números irracionais.

Ainda utilizaram atributos da racionalidade de um número para classificá-lo como irracional, porém, ao afirmarem “ao descobrir esse número, desconfia-se a presença de repetição, dando a sensação de erro”, eles indicam a sensação de que algo deu errado, pois desconfiaram do surgimento de um período, que não apareceu na calculadora. Analisamos aqui, no entanto, um avanço desses alunos, pois já aceitaram uma dízima periódica, como resultado de uma divisão de números inteiros e, por isso, realizaram a conta sem o uso da calculadora, na certeza de encontrar um período.

Concluimos que esses alunos já relacionavam o número em forma de fração com sua correspondente expressão decimal que deverá ser finita ou uma dízima periódica, mas ainda não classificavam como racionais, esses mesmos números. O comentário da dupla novamente mostra a confusão de nomes, tão comum entre eles. Possivelmente, a equivalência $p \leftrightarrow q$, cujas proposições p e q estão apresentadas a seguir, não esteja entendida para essa dupla.

- $p: x = \frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$
- $q: x$ tem expansão decimal finita ou x é infinita e periódica (dízima periódica)

A implicação lógica $p \rightarrow q$, conforme já foi dito, parece-nos que foi assimilada pela dupla, mas, analisando suas justificativas, vemos que ela está insegura quanto à recíproca $q \rightarrow p$, pois talvez não saibam como uma dízima periódica de período relativamente grande ou um decimal finito com muitas casas decimais podem ser convertidos na fração $\frac{53}{83}$. Em se tratando da afirmação da dupla “dividindo o número sem o uso da calculadora observou-se a repetição”, é muito provável que eles tenham cometido equívocos de cálculo, ou pararam a conta no dígito 6, que se repete na nona casa decimal. É importante lembrar que o período dessa dízima periódica, escolhida com muita cautela pelas pesquisadoras Zazkis & Sirotic (2004), contém 41 dígitos. O trecho de gravação a seguir é parte da discussão da dupla Thaíssa-Clara, quando estavam resolvendo a atividade P7.

G (Thaíssa): Agora tem o número 53 sobre 83. É racional ou irracional?

(começou a rir e a seguir houve um silêncio na gravação)

G (Clara): Irracional.

G (Thaíssa): É Racional, óbvio, tá escrito na forma de fração!

G (Clara): Tá vendo, eu confundo!

Thaíssa, quando começou a rir, passou-nos a sensação, de que a pergunta era muito fácil e logo em seguida afirmou com convicção, “racional, óbvio, tá escrito na forma de fração!”. A aluna, nesse momento, apresenta um descritor de uma imagem conceitual completa em relação à representação do número racional em forma de fração, pois não se deixou levar pela imagem do número indicado no visor. Por outro lado, com a aluna Clara aconteceu o contrário. Ela se prendeu na visualização do número 0,638554216 apresentado no visor da calculadora e respondeu “irracional”. Mostrou descontentamento com a certeza de Thaíssa quanto à racionalidade do número M , quando declarou “tá vendo, eu confundo!”. Avaliamos que, assim como a dupla Bruno-Celso, Clara não compreendeu como aquela expressão decimal pôde ser convertida na fração $\frac{53}{83}$, portanto apresentou um descritor de imagem conceitual parcial, pois “não possui todos os aspectos

incluídos na definição do conceito” (Hershkowitz, 1994, p. 62), o que a impediu de identificar alguns exemplos positivos de número racional.

Retomando Zazkis & Sirotic (2004, p. 502), as pesquisadoras analisaram uma entrevista, na qual o participante acredita que “se o número é racional ou irracional depende da forma como está escrito, ou seja, uma fração comum representa um número racional, mas a sua representação decimal equivalente pode ser irracional⁹⁶”.

Essa questão possibilitou-nos identificar se os atributos que fazem parte dos descritores de imagem conceitual dos alunos são suficientes para defender suas crenças a respeito dos números racionais e de sua representação decimal. Percebemos que indicar atributos relevantes tanto para os racionais quanto para os irracionais não garante a classificação adequada de um número como racional ou irracional. Por outro lado, utilizar julgamentos analíticos, isto é, com fundamentos lógicos, também não garante a compreensão total do conceito em questão, podendo levar o aluno em alguns casos, dependendo do exemplo, a cometer equívocos.

6.2.2.5.

Atividades P8 e P12: dízima periódica e fração geratriz

As atividades P8 e P12 fizeram parte do questionário no estudo preliminar, e, dentre estas, escolhemos a atividade P8 que também foi trabalhada no estudo principal. Essas atividades têm como objetivo chegar à fração geratriz de uma determinada dízima periódica. A questão P8 fornece a dízima e pede ao aluno que a represente na forma de fração. É uma questão aberta, pois deixa o aluno livre na busca da solução do problema. Aqui o sujeito coloca livremente o conteúdo de sua resposta. A questão P12 encaminha a resolução por meio das sequências geométricas. Trata-se de uma questão direcionada, na qual o aluno deve resolver a questão pelo caminho estabelecido, ou melhor, o sujeito deve ater-se às condições fornecidas pelo pesquisador.

Observando os livros didáticos da escola básica, constatamos que as dízimas periódicas e as correspondentes frações geratrizes são abordadas,

⁹⁶ No original: “whether the number is rational or irrational depends on how it is written; that is, a common fraction represents a rational number, but its equivalent decimal representation could be irrational”.

normalmente, no atual 8º ano do Ensino Fundamental, e na 2ª série do Ensino Médio. No 8º ano, a determinação da fração geratriz é feita, estrategicamente, utilizando equações do 1º grau. Já na 2ª série do Ensino Médio, isso acontece durante o estudo das sequências geométricas.

Nosso objetivo na questão P8 foi identificar como o aluno relaciona as dízimas periódicas com as frações. Esclarecemos que, nas atividades anteriores, alguns alunos utilizaram o atributo relevante “é possível representar na forma de fração”, ao classificar uma dízima periódica como um número racional. Nas atividades P8 e P12, o aluno deveria apresentar um processo que possibilitasse representar uma dízima periódica por meio de uma divisão de números inteiros. Essas atividades favoreceram a percepção das estratégias de cálculos, dos resultados utilizados e das habilidades nas operações com as frações e com os números decimais, utilizadas por esses alunos, sujeitos desta pesquisa.

Dessa forma, investigamos aspectos visuais relacionados à forma de conduzir e manipular as dízimas periódicas e as frações, analisando como estes aspectos interferem na formação da imagem conceitual de número racional e, conseqüentemente, na de número irracional. Decidimos primeiramente apresentar as duas questões, com seus respectivos estudos prévios. Em seguida justificamos nossa escolha pela atividade P8 para o estudo principal, dando continuidade com a análise da questão.

No estudo preliminar

A Tabela 27 mostra o estudo prévio que realizamos na questão P8, a partir das respostas obtidas nessa atividade, que constam no anexo 14.

Tabela 27: Estudo prévio da questão P8

PERGUNTA
Escreva a dízima periódica $5,\overline{4} = 5,44444\dots$ na forma de fração. Apresente as etapas do raciocínio que você utilizou.
RESPOSTA
<i>As soluções 1 e 2 são encontradas nos livros didáticos do Ensino Médio. A solução 3 é a matematicamente correta..</i>
<u>Solução 1)</u> $5,\overline{4} = 5 + 0,\overline{4} = 5 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots =$
<i>A soma infinita $\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots$ é a soma de infinitos elementos de uma sequência</i>

geométrica, em que o primeiro termo é $\frac{4}{10}$ e a razão é $\frac{1}{10}$. Esta soma infinita é calculada por

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}. \quad \text{Portanto, } 5,\bar{4} = 5 + 0,\bar{4} = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$$

Solução 2) $5,\bar{4} = 5 + 0,\bar{4}$ Representando $0,\bar{4}$ em forma de fração, temos:

$$x = 0,\bar{4} \therefore 10x = 4,\bar{4} \therefore 10x - x = 4,\bar{4} - 0,\bar{4} = 4 \therefore 9x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$5,\bar{4} = 5 + 0,\bar{4} = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$$

Solução 3) Seja a sequência infinita $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ descrita a seguir.

$$S_1 = 5 + 0,4 = 5,4; \quad S_2 = 5 + 0,4 + 0,04 = 5,44; \quad S_3 = 5 + 0,4 + 0,04 + 0,004 = 5,444$$

$$\dots \quad S_n = 5 + 0,4 + 0,04 + \dots + \frac{4}{10^n} = 5 + \frac{0,4(0,1^n - 1)}{0,1 - 1}$$

$$\text{Quando } n \text{ tende a infinito, } S_n \text{ tende a } 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,4(0,1^n - 1)}{0,1 - 1} = 5 + \frac{0,4}{1 - 0,1} = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$$

OBJETIVO

Verificar se o aluno sabe determinar a fração geratriz de uma dízima periódica e identificar qual o procedimento e os resultados utilizados.

TABULAÇÃO DA QUESTÃO

	A	I	B
nº alunos	28	18	24
Percentual	40,0%	25,7%	34,3%
A-adequada I - inadequada B – em branco			

Inicialmente, consideramos como resposta adequada, as questões que apresentavam a solução 1 ou a 2, porém, analisando o enunciado da questão que solicita que o aluno apresente as etapas do raciocínio utilizado, foi necessário repensar nosso critério inicial. Dessa forma, todas as questões que incluíram algum tipo de explicação que conduzisse à resposta certa foram consideradas adequadas. Nas 28 respostas adequadas, somente três foram justificadas utilizando PG, que é a solução 1 apresentada da Tabela 27, e apenas cinco alunos justificaram usando a estratégia exibida na solução 2 dessa mesma tabela. Esclarecemos que consideramos adequadas três soluções apresentadas que utilizaram a estratégia da equação, porém utilizaram dízimas finitas na resolução. Todos os outros participantes que acertaram a questão não apresentaram uma justificativa matemática, apenas mostraram a expressão $5 + \frac{4}{9}$ ou o cálculo

$$\frac{54 - 5}{9} = \frac{49}{9}.$$

Os dez alunos que utilizaram a expressão $5 + \frac{4}{9}$ nas suas respostas,

possivelmente, associaram a dízima periódica $0,\bar{4}$ à sua representação fracionária $\frac{4}{9}$. Trata-se de uma dízima periódica simples e, provavelmente, o número $0,\bar{4}$ deve ser um exemplar protótipo das dízimas, assim como a dízima periódica $0,\bar{3}$, que é o exemplar mais utilizado nos livros didáticos e, conseqüentemente, na sala de aula. Isto, talvez justifique o fato de os alunos julgarem que não há necessidade de mostrar que $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$. Já o cálculo $\frac{54-5}{9} = \frac{49}{9}$, apresentado por dez alunos, remete a uma regra que converte dízimas periódicas em frações. Concluímos que, possivelmente, grande parte dos participantes utilizou esta regra naturalmente, porém não entendeu o porquê da sua validade. Essa memorização exige a necessidade de uma variedade de exemplos protótipos, pois podemos ter dízimas periódicas simples ou compostas. Ilustramos a seguir, na Figura 15, a explicação dada por três alunos na utilização da regra sem obter sucesso na fração obtida.

Figura 15: Três tentativas de aplicação da regra para obter a fração geratriz.

$\frac{54}{9}$ quantidade de algarismos 0 para na frente da vírgula 9 para a quantidade de algarismos depois da vírgula	$\frac{54}{9}$ 1° → número sem repetição (numerador) 2° → quantidade de números que se repetem 9 (denominador)	Todo numeral até o período → 54 sobre 9 (1 vez) pois o período possui 1 algarismo $\frac{54}{9}$
---	--	--

Apesar de o contexto das frações geratrizes ser um dos mais exemplificados no conteúdo das sequências geométricas, poucos alunos utilizaram sequências para justificar sua resposta e 24 alunos deixaram a questão em branco, indicando que talvez esse contexto não tenha sido valorizado na sala de aula. Dos 46 alunos que não deixaram a questão em branco, sete apresentaram expressões fracionárias em suas respostas. São elas: $\frac{54444\bar{4}}{1000000}$, $\frac{544444\bar{4}}{100000}$, $\frac{5,4443}{99}$, $\frac{5,\bar{4}}{10} = \frac{54444}{10000}$, $\frac{5,4}{90}$, $\frac{5,4}{9}$ e $\frac{\sqrt{\pi}}{7}$. Consideramos que, para esses alunos, escrever na forma de fração significa exibir dois números e o traço de fração entre eles, isto é, qualquer representação fracionária. Os participantes não consideram, como atributos relevantes de uma fração, o numerador e o denominador serem números inteiros. Como nessa fase exploratória, não há interferências do pesquisador, não

podemos afirmar aqui, se esses alunos saberiam encontrar dois números inteiros p e q , de forma que a divisão do número p pelo número q fosse representada pela dízima $5,\bar{4}$.

Um outro aspecto observado é que alguns alunos utilizaram o símbolo da barra, que indica o período da dízima periódica, de forma inadequada. Uma possível interpretação para tal fato é que consideraram somente, como atributo de uma dízima periódica, a “repetição infinita” e criaram códigos a partir das suas percepções, sem se preocuparem com o abuso de linguagem cometido. O aluno que apresentou a razão $\frac{\sqrt{\pi}}{7}$ não teve o cuidado de verificar se este número estaria próximo a $5,\bar{4}$. O mais provável é que tenha apresentado uma resposta qualquer para não deixar a questão em branco. A Tabela 28 apresenta o estudo prévio elaborado a partir das respostas obtidas na questão P12 e que estão expostas no anexo 15.

Tabela 28: Estudo prévio da questão P12

PERGUNTA
Seja a sequência infinita (0,4; 0,04; 0,004;...) de termo geral $a_n = \frac{4}{10^n}$. Agora, considere uma nova sequência infinita ($S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$), em que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. a) Encontre os quatro primeiros termos de S_n . b) Qual o limite de S_n quando n tende a infinito? Apresente uma justificativa.
RESPOSTA
$S_1 = a_1 = \frac{4}{10^1} = 0,4$ $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} = 0,4 + 0,04 = 0,44$ a) $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} = 0,4 + 0,04 + 0,004 = 0,444$ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} = 0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 = 0,4444$ b) Solução 1) Encontrada nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Trata-se de uma soma infinita de termos que estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo igual a $\frac{4}{10}$. $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$ Solução 2) $S_1 = \frac{4}{10^1}$; $S_2 = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2}$; $S_3 = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3}$; ...;

$S_n = \frac{4}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots + \frac{4}{10^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{10} \left(\frac{1}{10}^n - 1 \right)}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{4}{9}$			
OBJETIVO			
a) Verificar se o aluno faz a leitura das duas seqüências, a formada pelos termos da PG e a formada pela soma desses termos, e se utiliza adequadamente a seqüência solicitada, apresentando os quatro primeiros elementos. Este item encaminha o item b. b) Verificar se o aluno utiliza conhecimentos de seqüência geométrica para obter a fração geratriz da dízima periódica em questão.			
TABULAÇÃO DA QUESTÃO – ITEM A			
	A	I	B
nº alunos	23	15	32
percentual	32,9%	21,4%	45,7%
TABULAÇÃO DA QUESTÃO – ITEM B			
	A	I	B
nº alunos	3	14	53
percentual	4,3%	20,0%	75,7%
A - adequada I - inadequada B - em branco			

Em princípio, ao elaborar o questionário, imaginávamos que essa questão seria de fácil entendimento para os sujeitos da pesquisa, pois já estavam concluindo a 2ª série do Ensino Médio. Os resultados mostraram que 75% dos alunos deixaram o item *b* em branco e quase a metade dos alunos não escreveu nada no item *a*. Este item solicita que o aluno interprete as leis das duas seqüências e apresente os quatro primeiros termos de seqüência que determina a soma dos termos.

Avaliamos que o questionário formado por 13 questões foi cansativo para alguns alunos e talvez, por isso, algumas questões foram deixadas em branco. O fato de haver duas seqüências envolvidas na questão, também pode ter contribuído para a dificuldade da leitura, pois alguns alunos desistem de certas questões que necessitam de mais atenção no enunciado, por julgarem antecipadamente que são questões mais difíceis.

No item *a*, das 23 questões consideradas adequadas, 13 apresentaram os quatro primeiros termos da seqüência pedida e dez dos alunos apresentaram somente o quarto termo. Cinco alunos apresentaram inadequadamente os quatro primeiros termos da seqüência a_n , ao invés da seqüência S_n , conforme foi solicitado. Isso ilustra a dificuldade que ocorreu na leitura das seqüências e do comando da questão. Avaliamos aqui que a quantidade de informações que a atividade possuía facultou uma variedade de interpretações e confusões de imagens. É possível que o aluno tenha se envolvido com a imagem que mais se

destacou e de mais fácil manipulação.

Apesar de os alunos terem estudado sequências nesse mesmo ano, conforme informamos, poucos associaram essa atividade com sequência geométrica. Apenas quatro alunos utilizaram a fórmula da soma de uma PG infinita, sendo que somente dois acertaram o item *b* dessa questão. O terceiro aluno, que teve sua resposta considerada adequada, apenas escreveu que $0,4444... = \frac{4}{9}$.

Quatro alunos responderam inadequadamente, que o limite da sequência dada tende a infinito. Esse tipo de resposta é esperada, pela concepção espontânea do conjunto dos números naturais, de que aumentando o número de parcelas, a soma aumenta, então é “natural” pensar que esta soma será cada vez maior tendendo a infinito. Três participantes responderam que não teria limite. Avaliamos que, apesar de as respostas serem diferentes, o significado de “não teria limite” é no sentido da soma não se aproximar de nenhum número e, portanto, dispara, tendendo a infinito. Dois alunos afirmaram que tendia a zero e um único aluno respondeu que tendia a 1. Consideramos, nesse caso, há a possibilidade de estes alunos terem percebido que a razão, sendo um número entre 0 e 1, a soma se aproximaria de um número, talvez resgatando alguma imagem relacionada a soma dos infinitos termos de uma PG.

Após essa análise inicial, escolhemos a questão P8 para ser trabalhada no estudo principal, pois o fato de não ser direcionada e de a linguagem estar mais acessível contribuiu para a maior exteriorização de imagens e procedimentos utilizados pelos alunos para elaborar seus julgamentos relacionados às dízimas periódicas e suas correspondentes frações.

No estudo principal

Nenhuma das justificativas apresentadas na atividade P8 no estudo principal utilizou progressões geométricas. A que mais se aproximou de uma justificativa matemática, foi dada pela dupla Vinícius-Isabel, pois se trata da estratégia utilizada no Ensino Fundamental, já mencionada, que a pesquisadora chamou de resolução por equação⁹⁷. Esclarecemos que apenas a resposta do aluno

⁹⁷ Lembramos que esta é a solução 2, apresentada na Tabela 27.

Antônio, $5 + \frac{4}{9}$, diferiu das demais apresentadas que foi $\frac{54-5}{9}$. Apresentamos as justificativas fornecidas pelas duplas, além da resolução dada na realização dessa questão.

E (Thaíssa-Clara): Achamos que esse método é justificativo.

E (Denise-Artur): Muitos não lembram da fórmula. Só é possível fazer com a fórmula.

E (Fernando-Carla): Apesar de não sabermos a fórmula para descobrir a fração de dízimas periódicas, nós fizemos por raciocínio lógico.

E (Bruno-Celso): Pegamos a dízima e transformamo-la em uma fração com denominador relacionado ao número de casas decimais e numerador relacionado ao período.

E (Vinícius-Isabel): **Multiplica-se por 10 e subtrai o período que não se repete sobre o número de nove correspondentes aos períodos.**

Das quatro duplas, Thaíssa-Clara, Denise-Artur, Fernando-Carla e Bruno-Celso, que apresentaram a resposta $\frac{54-5}{9} = \frac{49}{9}$, apenas a dupla Bruno-Celso registrou em texto o que haviam descrito matematicamente. As justificativas das demais duplas procuraram explicar que esse tipo de resolução já contém uma justificativa que é a fórmula utilizada. Os alunos insistiram na discussão de que, ao utilizar uma fórmula, já estariam justificando a questão.

A pesquisadora pronunciou-se, declarando que nenhum dos alunos desse grupo havia justificado adequadamente. Também afirmou que a fórmula resolveu o problema imediato, mas não houve a explicação de porque esta fórmula, e não outra, solucionou a questão. Na realidade o que a pesquisadora queria obter era o encaminhamento que se usa para chegar à fórmula e que nenhum dos alunos utilizou. O fato de terem insistido quanto à fórmula bastar como justificativa também denota acordos anteriores fixados nas aulas de matemática. Mostra o pouco valor que se dá às demonstrações ou às justificativas para as decisões tomadas pelos alunos na resolução de problemas.

Clara, ao observar a tabulação dessa questão, que foi distribuída para os alunos junto com a ficha, manifestou surpresa ao verificar que três alunos fizeram por PG.

G (Clara): Olha por PG. Alguém fez isso? Três pessoas fizeram por PG. Eu tenho uma vaga lembrança disso na sétima série, acho que foi na sétima série, essa coisa dos conjuntos...

G (Thaíssa): Justificativa por PG, por equação,..., eu aprendi assim?

Avaliamos que, nesse grupo, não há exemplos protótipos de sequências geométricas, que estejam relacionados com as dízimas periódicas. Por outro lado, a imagem da regra prática, que os alunos chamaram de fórmula, foi muito forte, pois a maioria dos alunos a utilizou. Nesse caso, não houve julgamento analítico na obtenção da fração geratriz $\frac{49}{9}$ e sim o uso do exemplar protótipo da regra e de fração $\frac{4}{9}$ para representar a dízima periódica $0,\bar{4}$. A seguir, exibimos trechos da gravação da dupla Thaíssa-Clara durante a resolução dessa atividade.

G (Clara): Para dar dízima tem que dividir por nove?

G (Thaíssa): Faz 50 sobre nove e vê se dá certo⁹⁸.

G (Clara): Não é isso não, é 5,555556... Eu não sei é **alguma coisa dividido por nove**.

G (Thaíssa): 555556 na calculadora é dízima, a calculadora aproxima a dízima.

G (Clara): Mas por que arredonda o cinco?

G (Thaíssa): Ele pula pro próximo... Ah deixa eu pensar...Eu não lembro como faz, ..., **sei que tem dois procedimentos**,... eu sempre achei que fosse, você pega aqui... Ahh, claro, claro, claro, é isso aqui, 54 menos 5 sobre nove, que vai dar 49 sobre nove⁹⁹.

Observamos que Clara associou de imediato o algarismo nove à dízima periódica, pelo questionamento feito “Para dar dízima tem que dividir por nove?”. Essa pergunta de Clara ilustra a característica principal das dízimas periódicas, que apresentam o algarismo nove no denominador. Ressaltamos a possibilidade de que, se apresentarmos o número $\frac{2}{3}$, talvez alguns alunos não o reconheçam como uma fração, cujo representante decimal seja uma dízima periódica. Um outro aspecto é que também é provável que alguns reconheçam que a representação decimal do número $\frac{3564}{99}$ seja uma dízima periódica, quando este número é igual a 36.

Thaíssa fez uma boa estimativa quando chutou 50 sobre 9, mas a calculadora foi determinante para fazê-la rapidamente buscar outra divisão de inteiros. A aluna teve convicção no reconhecimento do algarismo seis que apareceu na calculadora como sendo o cinco da dízima que sofreu aproximação, pois declara “555556 na calculadora é dízima, a calculadora aproxima a dízima”.

⁹⁸ Clara fez 50 dividido por nove na calculadora.

⁹⁹ Thaíssa dá muitas risadas, fica satisfeita, pois confirmou sua solução na calculadora.

No comentário de Thaíssa sobre sua lembrança em relação a dois procedimentos para encontrar a fração geratriz, possivelmente, a aluna quis referir-se aos métodos de resolução por equações ou por sequências geométricas. A seguir Thaíssa explica para Clara o procedimento para usar a regra que determina a fração geratriz.

G (Clara): Como é que você fez isso?

G (Thaíssa): Você pega, ignora a vírgula, você vai até o período, como se **fosse esse número aqui 3,149149149** seria 3149-3 sobre... aí fica...

G (Clara): Sobre nove.

G (Thaíssa): não, não, não, o número de noves é igual ao número de dígitos que tem o período.

G (Clara): Eu não lembro nada disso, nada, nada...¹⁰⁰

G (Clara): acho meio complicado porque a gente aprendeu isso há muito tempo, lembrar disso agora. É bom até lembrar disso, que **pode cair no vestibular**, senão vou me considerar idiota por não saber fazer... **básico do básico do básico...**

Nesse trecho de gravação, percebemos que os exemplares protótipos de Thaíssa são desconhecidos por Clara, porém todos os julgamentos de Thaíssa remetem-se aos atributos relevantes do uso da fórmula, tais como, o número de noves do denominador, a formação do numerador, ou ainda, a subtração do número formado pelo número que vem antes da vírgula. Associamos esses aspectos ao uso da calculadora, que a fez reformular respostas inadequadas, buscando onde a memória falhou.

Percebemos, a partir das declarações dessas alunas, que a imagem conceitual de Thaíssa é parcial em relação à obtenção da dízima periódica, pois ainda não reconhece que o simples uso da fórmula não lhe dá autonomia para driblar eventuais conflitos na manipulação das dízimas periódicas, como por exemplo, as dízimas periódicas compostas.

A aluna Clara possui uma imagem conceitual incorreta, quase inexistente de imagens em relação à obtenção da fração geratriz. Nos extratos que seguem, Thaíssa insiste com Clara, escolhendo mais um exemplo para Clara encontrar a fração geratriz.

¹⁰⁰ Clara efetua a conta $\frac{3149 - 3}{999}$ na calculadora e confere o resultado 3,149149149, que vê como

a dízima periódica $3,149$. Tece alguns comentários sobre não lembrar mais de um assunto que considera básico e se preocupa com o vestibular, fato que é uma constante nesse grupo.

G (Thaíssa): Vamos supor um **número assim 1, 23444...**

G (Clara): Ah pra achar a fração disso? Não sei.

G (Thaíssa): **1234-123 sobre 9 porque só tem um número no período, entendeu?**

Nesse último exemplo criado por Thaíssa, para treinar novamente a explicação com Clara, a aluna não conferiu a conta na calculadora, caso contrário, teria encontrado o número 123,444... que é diferente do proposto 1,23444... É um exemplar de uma dízima periódica composta, ou seja, a regra lembrada por Thaíssa fornece uma fração geratriz que não representa a dízima dada. A pesquisadora pôde perceber esse equívoco antes do próximo encontro, pois como era de costume, ouvia as gravações antes de continuar com a próxima ficha de atividade.

No encontro seguinte, quando a pesquisadora retomou o fechamento dessas atividades, a questão foi feita no quadro para todos os alunos. Vale ressaltar aqui a importância de observar os dados obtidos a cada encontro, para que obstáculos e decisões sejam ultrapassados de forma mais adequada. Há, no entanto, necessidade de cautela, pois o método clínico não faculta interferências que possam alterar as respostas dos sujeitos, a não ser nos casos em que o próprio sujeito não esclarece bem seus julgamentos.

Na percepção da pesquisadora, a fração geratriz correspondente ao exemplo $1,23\bar{4}$, dado por Thaíssa, deveria ser corrigida e comentada. Nesse momento, a pesquisadora retomou os exemplos e contraexemplos para confrontar os aspectos matemáticos abordados na atividade e formalizou a questão das dízimas periódicas, decompondo-as e relacionando os termos da soma com os termos de uma PG. Resgatou para os alunos a expressão que determina a soma dos n primeiros termos da PG finita e exemplificou sequências infinitas, algumas com somas convergentes e outras com somas divergentes.

“Mostrou¹⁰¹” que, para $0 < |q| < 1$, quando n é muito grande, q^n tende a 0 e escreveu no quadro: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Explicou porque a soma finita é determinada

por $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ e quando $n \rightarrow \infty$ esse valor é dado por $S = \frac{a_1}{1 - q}$. Esse resultado

foi exemplificado por meio das dízimas periódicas, simples ou compostas, sempre

¹⁰¹ Não se trata de uma demonstração formal, mas uma demonstração que os alunos aceitam e aparentemente, entendem.

destacando a sequência geométrica relacionada ao exemplo escolhido. A pesquisadora calculou a soma desses n termos, n tendendo a infinito, chegando à fração geratriz e, para finalizar realizou uma soma de frações, obtendo a fração correspondente à dízima periódica. Na Figura 16, mostramos um desses exemplos, em que a dízima periódica é $4,3\overline{15}$ e sua fração geratriz é $\frac{3884}{900}$.

Figura 16: Obtendo a fração geratriz

$$\begin{aligned}
 4,3\overline{15} &= 4,31 + 0,0\overline{5} = 4,31 + (0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots) \\
 (0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots) &\rightarrow \text{Os termos dessa soma formam uma PG de primeiro termo} \\
 0,005 \text{ e razão } q &= 0,1. \quad (0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots) = S = \frac{0,005}{1 - 0,1} = \frac{0,005}{0,9} = \frac{5}{900} \\
 4,3\overline{15} &= 4,31 + 0,0\overline{5} = \frac{431}{100} + \frac{5}{900} = \frac{3879 + 5}{900} = \frac{3884}{900} = \frac{971}{225}
 \end{aligned}$$

Fonte: Extrato do diário de campo, maio 2008.

Decidimos, para o terceiro encontro, preparar atividades com as frações para consolidar os resultados que foram discutidos até o segundo encontro, principalmente a respeito da dupla natureza do processo da divisão de números inteiros. A natureza finita da representação, gerando os decimais finitos, e a natureza infinita, gerando as dízimas periódicas.

Ao final do segundo encontro, surgiu a discussão sobre como saber se a expressão decimal correspondente de uma fração é finita ou infinita e periódica, observando somente a fração, sem precisar efetuar a divisão. Atendendo a uma solicitação dos alunos, a pesquisadora apresentou as frações $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{15}{32}$ e $\frac{70}{55}$ e perguntou-lhes se esses números eram racionais ou irracionais. Os alunos afirmaram que todos eram números racionais, pois estavam representados na forma de fração.

A pesquisadora então retrucou: “Como são racionais, digam-me se esses números são decimais finitos ou dízimas periódicas.” (extrato do diário de campo, abril 2008). Numa rápida consulta aos alunos, observou que todos responderam adequadamente à pergunta. A pesquisadora escreveu no quadro negro as correspondentes representações decimais das frações dadas que foram: $\frac{7}{20} = 0,35$;

$$\frac{11}{36} = 0,30\overline{5}; \quad \frac{15}{32} = 0,46875; \quad \text{e} \quad \frac{70}{55} = 1,2\overline{72}.$$

A seguir perguntou aos alunos se havia alguma indicação na fração que possibilitasse, de forma mais rápida, afirmar se a representação decimal seria finita ou infinita. Nenhum aluno respondeu, então, pediu que escrevessem os quatro decimais na forma de fração sem simplificar, e, com a participação dos alunos, expôs no quadro negro as correspondentes frações, ilustradas na Figura 17.

Figura 17: Quatro exemplos de números decimais e suas correspondentes frações

$$\begin{aligned} 1) 0,35 &= \frac{35}{100} & 2) 0,30\overline{5} &= 0,30 + 0,00\overline{5} = \frac{3}{10} + \frac{5/9}{100} = \frac{30}{100} + \frac{5}{900} = \frac{275}{900} \\ 3) 0,46875 &= \frac{46875}{100000} \\ 4) 1,2\overline{72} &= 1,2 + 0,0\overline{72} = \frac{12}{10} + \frac{72/99}{10} = \frac{12}{10} + \frac{72}{990} = \frac{12 \times 99 + 72}{990} = \frac{1188}{990} \end{aligned}$$

Fonte: Extrato do diário de campo, abril 2008.

A partir das representações fracionárias obtidas, perguntou novamente se, apenas visualizando essas novas frações, seria possível pensar em alguma condição que garantisse que sua representação decimal fosse finita ou infinita e periódica. Thaíssa, Vinícius, Clara, Denise e Artur responderam que os decimais finitos possuem no denominador potência de 10 e as dízimas periódicas além das potências de 10 continham o algarismo 9. A pesquisadora valorizou a observação dos alunos sobre as potências de 10, acrescentou que qualquer potência de 10 possui somente os fatores primos 2 e 5 e enunciou o resultado matemático indicado na Figura 18.

Figura 18: Resultado matemático sobre decimais finitos

Uma fração $\frac{p}{q}$, em que p e q são inteiros e $q \neq 0$ é expressa por um decimal finito se e somente se $q = 2^n \cdot 5^m$, onde n e m são naturais, isto é, q só possui os fatores primos 2 ou 5.

Depois de escrevê-lo no quadro negro, fez alguns comentários e respondeu perguntas dos alunos sobre o correspondente resultado. A pesquisadora propôs novos questionamentos e aprofundamentos de questões matemáticas, porém não podia distanciar-se do método escolhido para coleta e análise dos dados.

Esclarecemos que são possíveis, no método clínico-qualitativo, intervenções

do professor-pesquisador conduzindo a pesquisa, desde que, durante a coleta dos dados, ao registrar os detalhes do raciocínio do sujeito, não faça correções ou interfira nas respostas. E ainda, na necessidade de dar seguimento, com outra pergunta que não faça parte de seu repertório original, o pesquisador pode utilizar-se de explicações aos participantes sobre o tema da investigação, que possam ser observadas, manipuladas e julgadas por estes. Em função desse resultado, no terceiro encontro, foi proposta a atividade A1 que será analisada a seguir.

6.2.2.6

Atividade A1: a natureza finita e infinita das representações decimais das frações

Essa questão foi trabalhada somente no estudo principal. Nessa atividade, diferente das atividades P8 e P12, os alunos precisaram, além de encontrar a representação decimal do número apresentado em forma de fração, classificá-lo em decimal finito ou decimal infinito e periódico. O uso da calculadora ficou a critério do aluno, no entanto, esclarecemos que, em dois itens dessa atividade, a utilização somente da calculadora não resolveria a questão. A limitação de casas decimais não permitiria reconhecer as dízimas periódicas, pois essas possuíam 15 e 18 dígitos. Com o contexto matemático esclarecido, apresentamos a atividade A1 ilustrada na Tabela 29.

Tabela 29: Atividade A1 – 3º encontro

PERGUNTA	
Observe as frações a seguir, escreva cada uma na sua forma decimal usando calculadora ou o algoritmo da divisão e diga se correspondem a decimais finitos ou dízimas periódicas. Apresente seus argumentos.	
a) $\frac{17}{40}$	b) $\frac{39}{140}$ c) $\frac{50}{19}$ d) $\frac{129}{2480}$
RESPOSTA	
a) É um decimal finito, pois o denominador $40 = 2^3 \cdot 5$, só possui os fatores primos 2 e 5 e $\frac{17}{40} = 0,425$. b) É uma dízima periódica, pois na decomposição do denominador $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, aparece o fator primo 7 que é diferente de 2 e de 5. $\frac{39}{140} = 0,27857142$. Para usar uma calculadora com menos de 10 dígitos, podemos desmembrar a fração original da seguinte forma: $\frac{39}{140} = \frac{39}{10 \times 2 \times 7} = \frac{39 \times 5}{10 \times 2 \times 5 \times 7} = \frac{195}{100 \times 7} = \frac{1}{100} \cdot \frac{195}{7} = \frac{1}{100} \cdot 27 + \frac{6}{7} = 0,27 + \frac{1}{100} \cdot \frac{6}{7} = 0,27 + \frac{1}{100} \cdot 0,857142 = 0,27 + 0,00857142 = 0,27857142$	

c) É uma dízima periódica, pois na decomposição do denominador 19 aparece somente o fator primo 19 que é diferente de 2 e de 5. $\frac{50}{19} = 2,631578947368421052$. O período desta dízima periódica possui 18 algarismos. Aqui há a necessidade de o aluno fazer a divisão com lápis e papel, pois o limite de dígitos da calculadora não fornecerá o período desta dízima.

d) É uma dízima periódica, pois na decomposição do denominador $2480 = 2^4 \cdot 5 \cdot 31$ aparece o fator primo 31 que é diferente de 2 e de 5.

$$\frac{129}{2480} = 0,0520161290322580645 \dots$$

Podemos desmembrar a fração $\frac{129}{2480}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{129}{2480} &= \frac{129}{10 \times 2^3 \times 31} = \frac{129 \times 5^3}{10 \times 2^3 \times 5^3 \times 31} = \frac{16125}{10^4 \times 31} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{16125}{31} = \frac{1}{10^4} \cdot 520 + \frac{5}{31} = \\ &0,0520 + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{5}{31} = 0,0520 + \frac{1}{10^4} \cdot 0,161290322580645 = 0,052161290322580645 \end{aligned}$$

Da mesma forma que o item c, o período desta dízima periódica não aparece no visor de uma calculadora comum. Por isso, a necessidade de fazer o algoritmo da divisão.

OBJETIVO

Identificar o caminho escolhido para obter a dízima correspondente. Perceber atributos relevantes e irrelevantes relacionados aos números envolvidos na atividade e aos processos utilizados.

Na Tabela 30 expomos os registros dos alunos obtidos na resolução dos itens b, c e d dessa questão. O item a foi adequadamente classificado por todas as cinco duplas como decimal finito. Duas duplas encontraram a dízima 0,425 correspondente à fração $\frac{17}{40}$ pelo algoritmo da divisão e as outras três duplas obtiveram o resultado da divisão $17 \div 40$ na calculadora.

Destacamos a afirmação “ $\frac{17}{40} = 0,425$ é um decimal finito porque o denominador é produto de potências de 2 e 5”, dada pela dupla Denise-Artur. Essa justificativa foi utilizada somente para o item a e trata-se de um julgamento de natureza analítica, o mesmo resultado apresentado aos sujeitos da pesquisa ao final do encontro anterior.

Tabela 30: Respostas dos itens b, c e d da atividade A1.

DUPLA	CLASSIFICAÇÃO E JUSTIFICATIVA REFERENTE AO ITEM B: A FRAÇÃO $\frac{39}{140}$
Antônio-Clara	Dízima periódica - 0,2785714 “foi feito o cálculo e achada a dízima periódica 0,2785714278. Os tens b, c e d foram feitos na calculadora, e as respostas foram aproximadas.”
Denise-Artur	Não classificou - 0,2785714285714 “Não é possível afirmar se é decimal finito ou dízima periódica, já que o período não é apresentado”
Thaíssa-Vinicius	Dízima periódica - “0,2785714” (A dupla fez pelo algoritmo da divisão.)

Carla-Isabel	Dízima periódica - $0,\overline{27857142}$ $\frac{multp.3}{mult.5}$ (A dupla fez a divisão pelo algoritmo, apresentando este resultado no quociente.)
Bruno-Celso	Dízima-periódica - “0,2785714...” Pois apresenta período. (A dupla fez o algoritmo da divisão no verso da ficha.)
DUPLA	CLASSIFICAÇÃO E JUSTIFICATIVA REFERENTE AO ITEM C: A FRAÇÃO $\frac{50}{19}$
Antônio-Clara	Dízima periódica indefinida - 2,6315789 “os tens b, c e d foram feitos na calculadora, e as respostas foram aproximadas.”
Denise-Artur	Não classificou - 2,6315789473684 “Não é possível afirmar se é decimal finito ou dízima periódica, já que o período não é apresentado.”
Thaíssa-Vinicius	Dízima periódica - $2,\overline{631578947368921052}$
Carla-Isabel	Não classificou - 2,6315789953 $\frac{multp.3}{mult.5}$ (A dupla fez a divisão pelo algoritmo e o quociente apresentou o número acima.)
Bruno-Celso	Dízima-periódica - 2,6315789...
DUPLA	CLASSIFICAÇÃO E JUSTIFICATIVA REFERENTE AO ITEM D: A FRAÇÃO $\frac{129}{2480}$
Antônio-Clara	Dízima periódica – “0,0520161 “não é potência de 2 e 5 (o denominador), portanto a dízima é periódica” (A dupla exibiu a fatoração do número 2480.) “os tens b, c e d foram feitos na calculadora, e as respostas foram aproximadas.”
Denise-Artur	Não classificou – 0,05020161290323 “Não é possível afirmar se é decimal finito ou dízima periódica, já que o período não é apresentado.”
Thaíssa-Vinicius	Dízima periódica - $0,\overline{0520161290322580645}$ (A dupla apresentou todo o processo em folha separada da ficha.)
Carla-Isabel	Dízima periódica - $0,\overline{05201612903201}$ $\frac{multp.3}{mult.5}$ (A dupla fez a divisão pelo algoritmo e no quociente apresentaram a dízima acima)
Bruno-Celso	Dízima-periódica – 0,0520161... “pois apresenta uma conta imensa e tem período (A dupla apresentou todo o processo realizado no verso da ficha de atividade.)

Esclarecemos que todas as expressões decimais, obtidas nas respostas das duplas Antônio-Clara e Denise-Artur, foram encontradas utilizando a calculadora. As outras três duplas forneceram suas representações decimais após realizarem o algoritmo da divisão, passo a passo.

Nenhuma das cinco duplas determinou adequadamente a dízima periódica $0,\overline{27857142}$ correspondente à fração $\frac{39}{140}$ do item b. A dupla Denise-Artur, que utilizou somente a calculadora em todos os itens da atividade A1, poderia perceber que esta fração se tratava de uma dízima periódica, pois a calculadora utilizada por eles apresentava 13 casas decimais. Além disso, o número que a dupla indicou como aproximação decimal da fração dada, exibiu a repetição do período da dízima.

Inferimos que o repertório de imagens de dízimas para esta dupla tenha,

para exemplos protótipos, dízimas periódicas com períodos contendo poucas casas decimais, como já havia sido conjecturado anteriormente. Nas respostas fornecidas nos itens *b*, *c* e *d*, a dupla utilizou a mesma justificativa, de não ser possível classificar as frações em decimais finitos ou dízimas periódicas, “já que o período não é apresentado”. Nesse caso, somente pela observação dos dígitos, a explicação da dupla já estaria adequada.

Durante as discussões da atividade A1, a pesquisadora perguntou à dupla Denise-Artur, por que não utilizaram, nos outros itens, o resultado apresentado no item *a*. A aluna Denise declarou: “sabíamos que quando os denominadores é produto de 2 e 5, o resultado é decimal finito, mas não sabíamos que tendo outro fator, se poderia dar resultado finito ou não” (extrato do diário de campo, abril 2008). Esclarecemos aqui que esse resultado é uma equivalência matemática, porém a dupla utilizou apenas uma das implicações, caracterizando a falta do rigor lógico na utilização do resultado matemático, o que caracteriza a falta de compreensão do significado da equivalência.

As três duplas que realizaram a divisão passo a passo pelo “método da chave”¹⁰², ou cometeram equívocos nas contas, ou não observaram com atenção o momento em que o processo iniciou a repetição dos restos.

A dupla Bruno-Celso encontrou no processo infinito da divisão correspondente à fração $\frac{39}{140}$, o quociente 0,2785714228142... Destacou, circulando a lápis, os dígitos 1 e 4, como se o período começasse ali — ver anexo 16. A repetição dos restos, no entanto, já havia surgido antes dos dígitos circulados pela dupla. Consideramos que esses alunos utilizaram, nesse caso, um atributo irrelevante para dízimas periódicas, que é a repetição de dígitos no quociente conforme observado na atividade P7.

A dupla Carla-Isabel também investiu bastante na realização da atividade, contudo cometeram alguns equívocos, que estão destacados em um extrato da ficha de atividade, na Figura 19. Percebe-se a interrupção do processo pela dupla, no momento em que ocorreu a repetição do primeiro resto.

Dessa forma, esses alunos utilizaram o atributo relevante da repetição de algarismos no quociente, a partir da primeira repetição de um resto já ocorrido. Essa ação adequada diferiu do procedimento da dupla Bruno-Celso.

¹⁰² Este nome refere-se ao algoritmo da divisão.

Figura 19: Algoritmos feitos pela dupla Carla-Isabel.

Identificou a repetição do resto, porém indicou o período errado.

Identificou a repetição do resto, mas o erro de conta fez que indicassem o período equivocadamente.

Identificou a repetição do resto, mas o erro de conta fez que indicassem o período equivocadamente.

Fonte: Ficha de atividade do 3º encontro.

O uso do atributo relevante não foi suficiente para evitar os equívocos realizados pela dupla, destacados na Figura 19. O algoritmo relacionado ao item b foi feito adequadamente, mas a indicação do período não foi adequada. No item d , a dupla cometeu um erro de conta que acarretou uma repetição de restos, levando a dupla a finalizar a divisão e identificar automaticamente o período. Já nos itens c e d , a mesma dupla registrou a expressão “ $\frac{\text{multp.3}}{\text{multp.5}}$ ”, o que indica o uso de um atributo irrelevante na caracterização da natureza finita ou infinita da dízima. Esse atributo foi considerado relevante pela dupla, pois contribuiu para o julgamento feito sobre a natureza infinita da expansão decimal em questão.

Thaíssa e Vinícius realizaram as contas do item b adequadamente, mas, ao representar o período da dízima periódica, utilizaram o símbolo da barra de forma inadequada. A dupla escreveu a representação $0,2785714$ quando o número correto é $0,27857142$, indicando que é possível que Thaíssa e Vinícius não tivessem percebido a relação que existe entre a repetição do resto com o correspondente quociente. Nos itens c e d , a dupla indicou adequadamente as dízimas periódicas e, por isso, consideramos que pode ter ocorrido falta de atenção na apresentação do resultado no item b .

Somente as duplas Antônio-Clara e Denise-Artur usaram o resultado enunciado no final do segundo encontro, que associa a natureza finita e infinita da dízima aos fatores primos que compõem o denominador da fração. Antônio e Clara utilizaram-no somente no item *d*, quando afirmaram que a fração $\frac{129}{2480}$ possui como representação decimal uma dízima periódica, pois o denominador “não é potência de 2 e 5” (extrato do diário de campo, abril 2008). Esta mesma dupla no item *c* classificou a fração $\frac{50}{19}$ como “dízima periódica indefinida”. É possível, que o significado de indefinida não abranja o fato de ser periódica ou não. Consideramos, nesse caso, que a dupla possivelmente utilizou o mesmo resultado, mas não o registrou, pois o denominador 19 não precisou ser fatorado como o denominador 2480 do item *d*.

A dupla Thaíssa-Vinícius fez todos os cálculos com lápis e papel, por isso tiveram muito trabalho na realização da atividade —ver anexo 17. Além de serem muitas etapas até o acontecimento da repetição do resto, algumas vezes a dupla errou os cálculos. Como a aluna Thaíssa já havia mostrado nas atividades anteriores uma imagem conceitual completa sobre as possíveis expressões decimais que podem ser convertidas em fração e vice-versa, esta insistiu com Vinícius para que investissem na questão até encontrarem os longos períodos das dízimas periódicas correspondentes aos itens *c* e *d*. Dessa forma, concluíram adequadamente a atividade ao fornecerem a dízima periódica. Esta foi a única dupla que acertou esses itens.

Os trechos a seguir ilustram, na realização da atividade C1, a dificuldade e o “desespero” de Thaíssa ao errar as contas. A aluna ficou tão envolvida e ansiosa, que chegou a questionar se uma divisão de inteiros é número racional ou irracional, estabelecendo então uma situação de conflito, conforme consta em Giraldo (2004).

G (Thaíssa): Eu desisto! Acho que eu errei tudo. É eu errei alguma coisa, **tá me dando aflição**, espera aí, **eu não posso errar isso tudo!** 6387. Professoraaaaa,, cansei de fazer conta!

G (Pesquisadora): Você está fazendo pelo algoritmo, não é? Você já sabe se é uma dízima periódica?

G (Thaíssa): Ahh, **é só isso que é pra falar!** É pra fazer até achar uma dízima?

G (Pesquisadora): Não, não, não falei isso. Estou apenas perguntando se você já decidiu se é um decimal finito ou dízima periódica.

G (Thaíssa): Não, esse eu não sei, a não ser que eu tenha errado em conta.

G (Pesquisadora): Por quê? Você acha que pode ser uma dízima não periódica?

G (Thaíssa): Pode.

G (Pesquisadora): Qual dos itens você está verificando?

G (Thaíssa): A letra c, 50 dividido por 19.

G (Thaíssa): Cinquenta dividido por 19 é número racional ou irracional?

G (Pesquisadora): Você acha que dá resto zero ou não?

G (Thaíssa): Eu acho que ele não para.

G (Pesquisadora): Mas você tem como argumentar?

G (Thaíssa): Professora, olha só! Se você está dividindo por 19, quantos restos pode ter?

G (Pesquisadora): Você sabe disso!

G (Thaíssa): Contando com o resto zero,..., dezenove, Dezoito. Eu vou refazer...

Thaíssa é uma aluna que sabe que uma divisão de inteiros só pode dar resto zero ou repetir os restos em algum momento, pois exteriorizou esse atributo relevante em sua fala, destacada ao final do extrato de gravação e também nas atividades anteriores. Sob pressão, porém, ao não concluir o processo da divisão, isto é, ao não observar a repetição de algum resto que já ocorreu, deixou-se levar pela dificuldade que estava enfrentando e perguntou equivocadamente, “Cinquenta dividido por 19 é número racional ou irracional?”. Consideramos que a forte imagem da expansão decimal visualizada pela aluna e o erro de conta ocorrido durante o procedimento, por não apresentar repetição de restos, fez que, por alguns momentos, a aluna duvidasse da racionalidade do número $\frac{50}{19}$. O desconforto causado pela quantidade de dígitos na parte decimal chegou a levar Thaíssa a um julgamento prototípico inadequado quando cogitou a irracionalidade. Esse julgamento, no entanto, foi logo modificado por um julgamento analítico, a forte imagem da fração que indica uma divisão de inteiros, e, portanto, o número de restos distintos obtidos no processo de divisão seria finito. Essa situação de conflito foi retomada e acertada e, assim, a aluna caminhou para a solução adequada da questão. É importante também lembrar que esse atributo para identificação de exemplares positivos dos números racionais foi trabalhado pouco antes pela pesquisadora, o que também pode justificar a insegurança da aluna.

Consideramos que essa atividade envolveu a maioria dos alunos. O exemplo da aluna Thaíssa investindo na divisão 50 por 19, mostra como uma dificuldade se torna favorável quando possibilita confrontos de julgamentos prototípicos com analíticos. Quando os alunos se deparam com dificuldades e as enfrentam, mesmo

não chegando à solução adequada, estão realizando conexões com seus exemplos protótipos e os resultados conhecidos. Isso favorece o aprendizado, pois possivelmente sua imagem conceitual será ampliada.

Julgamos a atividade produtiva tanto do ponto de vista operacional como estrutural, mas, avaliando depois a questão e suas respostas, consideramos que o enunciado poderia ter sido aberto. Isso propiciaria liberdade ao aluno para classificar a expressão decimal em finita ou infinita e periódica ou ainda infinita e não periódica. Talvez, se na classificação das dízimas houvesse, também, a opção infinita e não periódica, mais atributos poderiam ser manifestados.

A certeza da estrutura do processo, que termina com resto zero ou algum resto que se repete, levou mais da metade dos alunos a finalizar o algoritmo da divisão, o que caracterizou o amadurecimento em relação ao conceito de número racional.

6.2.2.7

Atividades F1, F2 e F3: retomando questões

As atividades que seguem finalizam o grupo I e foram aplicadas individualmente no último encontro. Nesse encontro não gravamos os alunos e, por isso, os dados obtidos são todos registros escritos, originários das fichas de atividades e do diário de campo. Nossa intenção com essa questão foi perceber como os alunos realizam seus julgamentos, após terem experimentado as diferentes possibilidades de resultados oriundos das divisões de números inteiros, feitas nas atividades anteriores.

A atividade F1, apresentada na Tabela 31, explora diferentes aspectos visuais das representações decimais relacionadas aos números reais. Esclarecemos que os itens *e* e *f* foram retirados nesse momento, para serem analisados no grupo II, pois são referentes aos números irracionais da forma $\sqrt{n}$.

Tabela 31: Questão F1 do estudo principal

PERGUNTA	
Decida sobre a racionalidade ou a irracionalidade dos números a seguir. Cada decisão deve ser justificada.	
a) 0,1234	b) $0,\overline{1234}$
c) 0,1234...	d) 0,1234... $\underline{n}$ $\underline{n+1}$...onde n é natural
e) 2, 35674126578923	

RESPOSTA
a) O número é racional, pois se trata de um decimal finito que pode ser representado pela fração $\frac{1234}{10000}$. b) O número é racional, pois se trata de uma dízima periódica, de período 1234 que pode ser representada pela fração $\frac{1234}{9999}$. c) Nada podemos afirmar sobre esta dízima infinita, pois não temos conhecimento do que acontece depois das quatro primeiras casas decimais. d) O número é irracional, pois esta dízima infinita é não periódica, visto que o padrão de formação anunciado na parte decimal é crescente e infinito. Sendo assim, nenhuma fração pode ser representante deste número. g) O número é racional, pois se trata de um decimal finito.
OBJETIVO
Reconhecer atributos relevantes e irrelevantes dos números racionais e irracionais após terem sido realizadas as atividades P5, P6 e P7 em dupla.

Nessa etapa final de análises do grupo de atividades I, consideramos importante apresentar todas as respostas fornecidas pelos alunos no texto da tese. Essas respostas serão ilustradas por meio de tabelas. É importante enfatizar que, ao longo dos encontros, a pesquisadora adotou e valorizou nas discussões as convenções indicadas nos capítulos 2 e 3, a respeito das notações e da simbologia das diferentes naturezas de uma expressão decimal, principalmente levantada por Palis (1999). Nos itens *a*, *b*, *c* e *d* da atividade F1, utilizamos diferentes representações decimais obtidas a partir do número 0,1234. A Tabela 32 apresenta as respostas obtidas no item a, relacionado ao número 0,1234.

Tabela 32: Respostas obtidas no item a: o número 0,1234.

ALUNO	RACIONAL OU IRRACIONAL	JUSTIFICATIVA
Fernando	Racional	Pode ser representado em forma de fração = $\frac{1234}{10000}$.
Artur	Racional	Racional finito, porque é = $\frac{1234}{10000}$.
Clara	Racional	Pode ser representado em forma de fração.
Eduardo	Racional	Representável por fração.
Carla	Racional	Pode ser representado em forma de fração.
Bruno	Racional	Pode ser representado em forma de número finito $\frac{1234}{10000}$.
Antônio	Racional	Em fração: $\frac{1234}{10000}$.
Isabel	Racional	Pode ser escrito na forma de fração, que consiste na divisão de dois números inteiros.
Denise	Racional	Pode ser representado por fração de inteiros.
Vinicius	Racional	É um número finito com representatividade em forma de fração.

No item *a*, todos os alunos classificaram o número 0,1234 como racional e alguns apresentaram a fração correspondente $\frac{1234}{10000}$. O uso inadequado da expressão “número finito” ainda foi utilizado por Bruno e Vinícius. O julgamento utilizado por todos os dez alunos na classificação do número como racional foi analítico. Avaliamos com base nessa atividade e nas anteriores que, para esse grupo pesquisado, os decimais finitos com poucas casas decimais fazem parte do repertório de exemplos protótipos de números racionais. O item *b*, que apresenta o número $0,\overline{1234}$, utiliza a imagem da barra representando uma dízima periódica. As respostas obtidas nesse item estão ilustradas na Tabela 33.

Tabela 33: Respostas obtidas no item b: o número $0,\overline{1234}$.

ALUNO	RACIONAL OU IRRACIONAL	JUSTIFICATIVA
Fernando	Racional	Pode ser representado em forma de fração.
Artur	Racional	Racional infinito, dízima periódica.
Clara	Racional	Pode ser representado em forma de fração.
Eduardo	Irracional	Tem dízima.
Carla	Racional	Pois é uma dízima periódica.
Bruno	Racional	Dízima periódica.
Antônio	Racional	$0,12341234$ dízima periódica.
Isabel	Racional	Mesmo sendo um decimal infinito, é uma dízima e pode ser escrito na forma de fração.
Denise	Racional	Porque é dízima que pode ser representado por fração de inteiros.
Vinícius	Racional	Apesar de ser um decimal infinito, sua representatividade em forma de fração o torna racional.

No item *b*, apenas Eduardo classificou o número $0,\overline{1234}$ como irracional, e justificou que se trata de uma dízima. Talvez Eduardo ainda não visualize uma fração que gere esse número decimal e, por isso, seus exemplos protótipos não são suficientes para fazer julgamentos prototípicos adequados. Cinco alunos utilizaram o julgamento analítico de que é possível representar o número $0,\overline{1234}$ na forma de fração. Seis alunos apresentaram um julgamento prototípico com base nas características da imagem da dízima periódica; já Isabel e Denise empregaram os dois julgamentos.

Destacamos, respectivamente, as respostas dadas por Vinícius e Isabel: “racional, apesar de ser decimal infinito, sua representatividade em forma de fração o torna racional” e “racional, porque mesmo sendo racional infinito, é uma dízima que pode ser escrita na forma de fração”. Apesar de destacarem o atributo

relevante, mas não suficiente, para números irracionais — a infinitude da dízima —, afirmaram que o número $0,1\overline{234}$ é racional pela possibilidade de representá-lo na forma de fração. Indiretamente, Vinícius e Isabel evocaram um descritor de imagem conceitual adequado para número irracional, pois mesmo enfatizando o fato de o número ser decimal infinito, não o classificaram como irracional, pois pautaram seu julgamento na condição da existência de uma fração que representa o número $0,1\overline{234}$. O julgamento final desses dois alunos foi uma conjunção do julgamento prototípico com o analítico.

O item *c* apresenta a dízima infinita $0,1234\dots$, sem qualquer explicação sobre a continuidade dos dígitos. Nesse item, procuramos nas justificativas dos alunos atributos que apontassem aspectos da imagem conceitual relacionados aos números reais. A seguir, mostramos na Tabela 34 todos os dados obtidos no item *c* da atividade F1.

Tabela 34: Respostas obtidas no item c: o número $0,1234\dots$

ALUNO	RACIONAL OU IRRACIONAL	JUSTIFICATIVA
Fernando	Não se pode afirmar	
Artur	Indefinido	Pois não mostra período e nem prova que não terá período.
Clara	Não há como decidir	Pois não sabemos se o n^o continuará em dízima ou aleatoriamente.
Eduardo	Não se pode afirmar	
Carla	Irracional	Pois é uma dízima não periódica.
Bruno	Indefinido	Pois não define qual o seu período.
Antônio	Depende	Irracional, se a sequência se mantiver em $56\dots n \ n+1 \dots$ Racional, se os próximos algarismos o transformarem numa dízima periódica.
Isabel	Não se pode afirmar	Por não saber se é uma dízima ou se continua infinitamente com variados valores.
Denise	Não posso dizer	Por não saber como continua, se tem período ou não, ou se acaba.
Vinícius	Irracional	Não há um resultado exato de tal número, assim como não possui representação na forma de fração.

Em relação ao item *c*, oito dos dez alunos participantes responderam adequadamente que não se pode afirmar sobre a racionalidade ou a irracionalidade do número indicado. Somente Carla e Vinícius classificaram-no como número irracional. Suas justificativas associaram $0,1234\dots$ à dízima infinita que apresenta seus dígitos no padrão crescente, implícito na imagem do número dado. Essa consideração verifica-se quando estes alunos expressaram em suas respostas: “pois é uma dízima não periódica” e “não possui representação na forma de fração”. Esses atributos relevantes para números irracionais são coerentes com a

classificação dada, porém a visualização do número 0,1234... limitou-se a um único caso e não pensaram nas infinitas possibilidades que a notação dos três pontinhos oferece. Tal atitude caracteriza uma imagem conceitual parcial, e é um indicador de que esse número foi para Carla e Vinícius um forte exemplar protótipo de número irracional, o que, não possibilitou a visualização de outros.

Consideramos que a resposta de Carla, quando afirmou que o número 0,1234... é irracional, está relacionada à representação “transparente”, a que Zazkis & Sirotic (2004) se referem em sua pesquisa, e, acrescentamos que possivelmente isso ocorre pois o número 0,1234... é um forte exemplar protótipo dos números irracionais. Esse julgamento aconteceu de forma diferente para os outros alunos que afirmaram que a racionalidade ou a irracionalidade não estava garantida apenas com a descrição do número 0,1234...

Destacamos algumas explicações que elucidam estes julgamentos: “por não saber como continua, se tem período ou não”; “não sabemos se o número continuará em dízima ou aleatoriamente”; “não mostra período e nem prova que não terá período”; “por não saber se é uma dízima ou se continuará infinitamente com variados valores” e “irracional se a sequência se mantiver em ...5, 6... n, n+1, ...racional se os próximos números o transformarem numa dízima periódica”. Essas explicações adequadas são diferentes formas de expressar que não se pode dizer se o decimal infinito se trata de um número racional ou irracional. Consideramos pertinente apresentá-las, para ilustrar diferentes formas de falar sobre o conceito.

Bruno, quando justifica, “indefinido, pois não define qual o seu período”, baseou-se apenas no aspecto do período que não foi apresentado, portanto, não é possível afirmar se é ou não uma dízima periódica. Dessa forma, seu julgamento para classificar um número real como racional ou irracional fundamenta-se no julgamento prototípico de visualizar ou não um período.

As expressões usadas por Isabel e por Clara, como atributos de número irracional, que foram, respectivamente, “aleatoriamente” e “variados valores”, são manifestações verbais de como estas alunas percebem os números irracionais. Consideramos essas qualidades como atributos irrelevantes para números irracionais, porém, estes aspectos, de certa forma, favoreceram a formação da imagem conceitual que essas alunas possuem de número irracional.

Destacamos, da resposta de Vinícius, o recorte “irracional, não há um

resultado exato de tal número”, pois o número $0,1234\dots$ representa para ele a imagem do que seja um número irracional, caracterizando sua forma de conceber esse tipo de número, por meio do atributo “não há um resultado exato”. Essa expressão esclarece muito bem a dificuldade de muitos alunos em reconhecer os números irracionais como um número, diferente do que acontece com os números naturais, que possuem estatuto de número (Moreira, 2004). Esse atributo fornecido por Vinícius explicita o aspecto operacional causado pela representação do número $0,1234\dots$, que anuncia a ideia de processo infinito, sempre em andamento, que não captura a categorização de número exato, conforme declara Vinícius. Essa característica evocada pelo aluno indica uma imagem conceitual parcial das representações decimais dos números reais.

O número $0,1234\dots \underline{n} \underline{n+1}\dots$, indicado no item *d*, informa na própria imagem um único número real, pois na sua representação explicita todos os dígitos da dízima em questão. Os atributos — infinito e estritamente crescente — da sequência apresentada são aspectos determinantes da sua irracionalidade. As respostas obtidas nesse item estão apresentadas na Tabela 35.

Tabela 35: Respostas obtidas no item *d*: o número $0,1234\dots \underline{n} \underline{n+1}\dots$

ALUNO	RACIONAL OU IRRACIONAL	JUSTIFICATIVA
Fernando	Racional	Pois tem uma lógica.
Artur	Irracional	Pois não tem período.
Clara	Irracional	Pois é infinito sem ser uma dízima.
Eduardo	Não se pode afirmar	
Carla	Irracional	Pois é uma dízima não periódica.
Bruno	Irracional	Pois não apresentará período.
Antônio	Irracional	Dízima não periódica.
Isabel	Irracional	Pois em suas casas decimais há uma sequência (PA) de razão 1 que continua infinitamente, impossibilitando a representação em forma de fração.
Denise	Irracional	Por não ter período e não poder ser representado por fração de inteiros.
Vinícius	Irracional	Por mais que os números sigam um padrão, ele não possui “fim”, nem um resultado exato, o que o afirma como irracional.

Fernando foi o único aluno que classificou, inadequadamente, o número $0,1234\dots \underline{n} \underline{n+1}\dots$ como racional, utilizando o atributo “pois tem uma lógica”. Esse atributo é irrelevante tanto para os racionais¹⁰³ quanto para os irracionais¹⁰⁴. Talvez o aluno esteja relacionando a imagem desse número com os exemplares

¹⁰³ Como exemplo dessa irrelevância, basta pegarmos um decimal finito com uma variedade de números que juntos não explicitam qualquer lógica. Por exemplo, 2,1539847.

¹⁰⁴ Por exemplo, o número π .

protótipos de dízimas periódicas, pois todos apresentam um padrão de repetição. Com isso, Fernando apropriou-se somente do aspecto padronizado do atributo, não considerando a característica da repetição. Seu julgamento protótipo fundamentou-se em apenas um atributo do número apresentado — o padrão — e, para ele, isso foi o suficiente para associá-lo às imagens das dízimas periódicas.

O aluno Eduardo mais uma vez não justificou seu julgamento, o de não poder classificar o número $0,1234...\underline{n} \underline{n+1}...$, assim como não o fez para o número $0,1234...$. Dessa forma, não temos dados para caracterizar aspectos de sua imagem conceitual a respeito dessa classe infinita de números reais. A ficha de atividade utilizada nesse último encontro era individual, não tivemos a oportunidade de intervir para obter esclarecimentos a respeito de algumas respostas que não ofereceram justificativas, ou que apresentaram explicações de difícil entendimento. Avaliamos que, nesse caso, nosso instrumento não propiciou achar o caminho pelo qual Eduardo chegou ao seu julgamento, porém, como o método clínico não enfoca o sujeito, mas sim a forma como indivíduos com determinadas características resolvem uma situação, é possível descartar “sujeitos que apresentem características peculiares ou características que não se manifestem com clareza ao longo da entrevista” (Delval, 2002, p. 71).

Dos oito alunos que classificaram como irracional o número apresentado, cinco utilizaram julgamento prototípico relacionado a exemplares de dízimas não periódicas. Isabel e Denise, assim como nos itens *a* e *b*, apresentaram os julgamentos prototípico e analítico. Apenas Vinícius, apesar de ter classificado o número como irracional, forneceu uma justificativa inadequada. Na sua resposta, “por mais que os números sigam um padrão, ele não possui ‘fim’, nem um resultado exato, o que o afirma como irracional”, Vinícius destacou três atributos: “seguir padrão”, “não possuir um fim” e “não possuir um resultado exato”. O atributo “seguir padrão” foi utilizado para enfatizar uma característica que ele possivelmente considera como sendo atributo dos números racionais. Analisamos dessa forma, pois em sua resposta, ele utilizou a expressão “**por mais que** os números sigam um padrão ...” (grifo nosso), como se valorizasse um aspecto pouco usual nos irracionais, e tal fato não é verdadeiro. Ao perceber, entretanto, outros dois atributos para números irracionais, o relevante, “expressão decimal infinita”, e o irrelevante, “não possui representante exato”, em seu julgamento possivelmente baseado nos seus exemplares protótipos, classificou-o como irracional.

Consideramos que essas respostas nos possibilitam conjecturar que a implicação “se é uma dízima não periódica, então é número irracional”, quando os dígitos decimais anunciam uma sequência de padrão não repetitivo, foi assimilada pela maioria do grupo pesquisado. É um indicador de que se trata de um forte exemplo protótipo de números irracionais, pelos atributos determinantes que este número elucida. Para Fernando, ter um padrão, ainda está relacionado à racionalidade e, para Eduardo, a visualização do padrão não repetitivo não o remeteu a nenhuma imagem que garantisse a racionalidade ou a irracionalidade. O julgamento desses dois alunos possivelmente revela que seus repertórios de imagens prototípicas não possuem exemplares com tais características.

O número escolhido para o próximo item não tem relação com os anteriores. Aqui optamos por um número decimal finito que apresentasse muitas casas decimais, com o objetivo de verificar se há, no raciocínio dos alunos, algum atributo que provoque uma resposta inadequada. A Tabela 36 mostra as respostas dadas pelos alunos referentes ao número 2,35674126578923 do item g da atividade A1.

Tabela 36: Respostas obtidas no item g: o número 2,35674126578923.

ALUNO	CLASSIFICAÇÃO	JUSTIFICATIVA
Fernando	Racional	$\frac{235674126578923}{10^{14}}$.
Artur	Racional finito	Idem ao item a.
Clara	Não é possível classificar	Pois se tratando de uma calculadora, não há como saber se o número continua além do que aparece no visor.
Eduardo	Racional	Representável por fração.
Carla	Racional	Pois é um decimal finito (pode ser representado em forma de fração).
Bruno	Racional	Pode ser representado como $\frac{235674126578923}{100000000000000}$. N° finito.
Antônio	Racional	Pode ser escrito sob a forma de fração.
Isabel	Racional	Pois é finito e, portanto, pode ser escrito na forma de fração.
Denise	Não posso dizer	Idem ao “c”. Preenche o número de casas decimais encontradas por calculadora.
Vinícius	Racional	O número possui muitas casas decimais, porém pode ser representado na forma de fração como um número irredutível.

A maioria dos alunos respondeu adequadamente que o número 2,35674126578923 é racional, e a fração decimal correspondente foi fornecida pelos alunos Fernando e Bruno. Os julgamentos desses alunos foram todos analíticos, utilizando o atributo relevante para os racionais de que é possível representar tal número na forma de fração.

Somente Clara e Denise não responderam essa questão de forma adequada, e

suas respostas foram dadas supondo o uso de uma calculadora, que não foi mencionada em nenhum momento da atividade, nem durante a realização dessa ficha pelos alunos. As alunas manifestaram em suas respostas que a limitação do número de casas decimais, impostas pela calculadora, as impedia de avaliar a sequência de dígitos do número decimal em questão. É possível que as mesmas tenham associado essa atividade à atividade P5, em cujo enunciado havia por hipótese uma operação que foi realizada na calculadora. Ou ainda, consideramos que o fato do número ter 14 casas decimais, pode ter sido decisivo no julgamento, pois a tabela feita a partir do Excel, que os alunos receberam no 4º e no 5º encontros continha as aproximações decimais de números irracionais com 14 dígitos, que é o limite de casas decimais do Excel.

A partir das respostas obtidas nessa atividade, percebemos que a implicação “se o número possui representação decimal finita então esse número é racional” faz parte do repertório de imagens desse grupo de alunos. Incluímos nesse grupo, as alunas Denise e Clara, que só não responderam adequadamente, pois cogitaram a hipótese da continuidade de dígitos na parte decimal. Consideramos também que essa atividade, da forma como foi encaminhada, pode ter induzido o aluno a perceber atributos comuns na visualização dos números $0,1234$, $0,\overline{1234}$; $0,1234\dots$ e $0,1234\dots\underline{n} \underline{n+1}\dots$. A identificação e a comparação desses atributos possivelmente colaboraram para a classificação desses números com racional ou irracional.

Com a atividade F2 apresentada na Tabela 37, procuramos interpretar de que modo o aluno percebeu as diferentes naturezas finita e infinita do processo de divisão de números inteiros.

Tabela 37: Questão F2 do estudo principal

PERGUNTA
Quando dividimos dois números inteiros p e q , $q \neq 0$, e escrevemos o resultado na forma decimal, que resultados possíveis podemos obter?
RESPOSTA
<i>Podemos obter um número inteiro, um número decimal finito ou uma dízima periódica.</i>
OBJETIVO
Identificar nas respostas dos alunos, aspectos gerais sobre o processo da divisão de dois números inteiros e suas correspondentes representações decimais.

As respostas obtidas nessa atividade, expostas na Tabela 38, mostram as diferentes interpretações dadas pelos alunos ao lerem o enunciado proposto.

Tabela 38: Respostas obtidas na atividade F2

ALUNO	JUSTIFICATIVA
Fernando	Números racionais, pois podem ser escritos na forma de fração.
Artur	
Clara	Infinitos resultados já que $q \neq 0$.
Eduardo	Positivo, negativo e com dízima.
Carla	Podemos obter um decimal finito ou uma dízima periódica.
Bruno	
Antônio	Um número inteiro, um decimal finito ou uma dízima periódica.
Isabel	Sendo ambos inteiros e o denominador diferente de zero o resultado poderia ser um número inteiro ou uma dízima periódica, caso suas bases, ao serem fatoradas, sejam diferentes de zero.
Denise	Número inteiro, decimal finito ou dízima periódica.
Vinícius	O fato do número q ser diferente de zero, não determina as casas decimais; se q for 10^{957} o número tenderá a zero.

A resposta “números racionais” dada por Fernando está adequada, porém ele não se ateve a um detalhamento da forma decimal, conforme explicitado no enunciado. A condição $q \neq 0$ contida na pergunta levou Vinicius e Clara a considerarem outros aspectos relacionados aos números decimais obtidos. Clara fixou-se somente ao atributo quantitativo, e nada disse a respeito das qualidades dos atributos dos números decimais obtidos. O aluno Vinicius valorizou a condição do problema — $q \neq 0$ — e priorizou um exemplo de divisão de dois números, cujo resultado tende a zero, porém não impôs condição ao numerador, levando-o a um argumento falso, pois o numerador poderia ser maior que o denominador.

Se por um lado, Artur e Bruno não responderam à questão e, nesse caso, não sabemos se foi por falta de entendimento do enunciado, por outro, Carla e Antônio responderam adequadamente. Talvez isso indique que Artur e Bruno ainda não elaboraram julgamentos analíticos, por não terem em sua imagem conceitual exemplos protótipos suficientes para generalizar essa determinada situação. Uma possibilidade também é que as atividades utilizadas nesses encontros não foram suficientemente estimuladoras na construção de um pensamento analítico para esses alunos (Herskowitz, 1994, p.20). Dessa forma, consideramos que o processo de abstração de Artur e Bruno necessita de mais exemplos protótipos e de exemplos negativos que os conduzam a categorizações adequadas dos elementos envolvidos. Os alunos Eduardo e Isabel não mencionaram os decimais finitos nas suas explicações. Isabel exemplificou os números inteiros e Eduardo incluiu os positivos e os negativos.

Enfatizamos a necessidade de a pesquisadora investigar todas as respostas dadas pelos alunos na realização das questões. Sejam elas exemplos positivos e

negativos do conceito ou ainda aspectos inadequados à atividade, pois estes últimos podem estar associados ao não entendimento, tanto do enunciado como um todo, como de uma ou de mais hipóteses envolvidas. Esses “erros” dos alunos, quando analisados, podem elucidar no pesquisador exemplos negativos relevantes para sua pesquisa e conseqüentemente para o ensino daquele conceito (Herskowitz, 1994).

Esses aspectos favorecem um melhor entendimento dos elementos da imagem conceitual que o sujeito possui. Dessa forma, avaliamos que a pergunta poderia ter sido mais bem formulada, visto que as respostas não convergiram para o objetivo que fundamentou sua elaboração. Concluimos que a questão deveria ser mais aberta e explorar mais o uso da calculadora. Além disso, a substituição do termo “diferentes resultados” por “diferentes números” seria mais adequada, pois o termo resultado, quando se refere a uma fração, imprime a ideia de que a fração ainda não é um número. Esse termo muito utilizado na escola básica é desfavorável para a construção do conceito de número real e deve ser evitado nos livros didáticos e nas falas dos professores. O uso do termo é tão comum que, inclusive, fez parte do enunciado utilizado pela pesquisadora.

A última questão desse grupo de atividades, apresentada na Tabela 39, refere-se ao mesmo tipo de questão que os alunos trabalharam em dupla na atividade A1.

Tabela 39: Questão F3 do estudo principal

PERGUNTA		
Identifique se os números racionais correspondem a decimais finitos ou a dízimas periódicas.		
a) $\frac{15}{154}$	b) $\frac{1387}{80}$	c) $\frac{1}{17}$
RESPOSTA		
<i>a) É dízima periódica, pois o denominador $154=2 \times 7 \times 11$ possui fatores primos diferentes de 2 e 5. b) É decimal finito, pois o denominador $80=2^4 \times 5$ não possui fatores primos diferentes de 2 e de 5. c) O denominador 17 é um número primo diferente de 2 e de 5, então a representação decimal é uma dízima periódica.</i>		
OBJETIVO		
Identificar atributos utilizados nas justificativas dos alunos e comparar com os que foram dados na atividade A1.		

Analisando os registros obtidos nessa atividade, também decidimos dispô-los em forma de tabela para a melhor visualização dos atributos e o confronto de justificativas, a fim de compararmos os descritores das imagens conceituais dos alunos, evocados durante a resolução. Os dados obtidos no item a estão ilustrados na Tabela 40.

Tabela 40: Tabulação das respostas obtidas no item a; sobre a fração $\frac{15}{154}$.

ALUNO	CLASSIFICAÇÃO	JUSTIFICATIVA
Carla	Não é possível determinar	0,0974026
Bruno	Dízima periódica	Pois $154=2 \times 7 \times 11$.
Antônio	Dízima periódica	Não é potência de 2 ou 5.
Isabel	Dízima periódica	Pois quando fatorado, possui bases diferentes de 2 e 5.
Denise	Decimal finito	0,097403, feito na calculadora.
Vinicius	Dízima	0,09745..
Fernando	Não finito	Pois a divisão na calculadora deu dízima
Artur	Dízima periódica	Pois $154=2 \times 7 \times 11$.
Clara	Dízima periódica	0,0974025974026, a calculadora aproximou, mas é uma dízima: $0,097402\overline{5}$. (Clara circulou o 6, último algarismo exibido na calculadora)
Eduardo	Não se pode afirmar	

Apesar de o comando da questão apenas solicitar a classificação em decimal finito ou dízima periódica, cinco alunos realizaram a divisão da calculadora e emitiram seus julgamentos com base no número observado. Somente dois alunos afirmaram não ser possível classificar, sendo que Carla apresentou o decimal obtido no visor e Eduardo mais uma vez não apresentou justificativa.

Denise realizou a mesma ação de Carla, quando apresentou como representante decimal o número 0,097403, obtido na calculadora, porém o classificou de decimal finito. Possivelmente, a quantidade “pequena” de dígitos na calculadora de Denise não a fez cogitar na continuidade dos dígitos, assim como fez no item g da atividade F1, em que o número apresentava 14 casas decimais e esta mesma aluna declarou não ser possível classificar tal número.

Sete alunos classificaram o decimal correspondente à fração $\frac{15}{154}$ como dízima periódica e quatro destes alunos utilizaram o julgamento analítico, quando citaram o resultado que se refere à composição dos fatores primos do denominador. Vinicius, Fernando e Clara apresentaram o mesmo julgamento prototípico com base na repetição que ocorre nas dízimas periódicas. Vinicius representou uma dízima periódica que não corresponde à fração dada. O erro ocorreu na sexta casa decimal, isso mostra que provavelmente houve falta de atenção na leitura e na escrita da dízima. Fernando simplesmente afirmou tratar-se de uma dízima, pois não exibiu o resultado que visualizou na calculadora. Clara foi a única aluna desse grupo que apresentou a dízima periódica $0,097402\overline{5}$ adequadamente. As respostas dos alunos referentes à indicação da natureza decimal do número $\frac{1387}{80}$ estão na Tabela 41.

Tabela 41: Tabulação das respostas obtidas no item b; sobre a fração $\frac{1387}{80}$.

ALUNO	CLASSIFICAÇÃO	JUSTIFICATIVA
Carla	Decimal finito	17,3345.
Bruno	Decimal finito	_____.
Antônio	Decimal finito	17,3345.
Isabel	Decimal finito	Pois seu denominador só tem bases 2 e 5.
Denise	Decimal finito	17,3345, feito na calculadora.
Vinicius	Decimal finito	17,3345, feito na calculadora.
Fernando	Finito	Pois na calculadora, não deu dízima.
Artur	Decimal finito	_____.
Clara	Decimal finito	17,3345.
Eduardo	Decimal finito	_____.

Todos os alunos responderam adequadamente a natureza finita da dízima correspondente à fração $\frac{1387}{80}$. Dos alunos que justificaram suas respostas, Isabel foi a única que não utilizou a calculadora na sua explicação: seu julgamento foi analítico em função do denominador ter somente os fatores 2 ou 5.

Dos três alunos que não justificaram suas escolhas, consideramos que Artur utilizou o mesmo resultado que Isabel, pois observamos que ele empregou este resultado no item a. Observamos também, nos registros de Antônio, a fatoração do denominador 80 na ficha de atividade, apesar de ele não ter utilizado este resultado no espaço indicado para a justificativa.

Consideramos que a fração escolhida nesse item favoreceu os seis alunos que se valeram de julgamentos prototípicos com base na imagem do visor, pois a dízima em questão apresentava somente quatro casas decimais e, sendo assim, não preencheu todas as casas possíveis da calculadora. Nesse caso, ficamos sem a possibilidade de analisar o julgamento dos alunos, por exemplo, sobre a expressão decimal finita ultrapassar o limite de casas decimais de uma calculadora.

No item c, a dízima em questão é periódica, o que já provocou em alguns alunos dúvidas sobre a natureza finita e infinita da expansão decimal em questão, pois todas as casas decimais da calculadora foram utilizadas e não foi possível identificar um padrão repetitivo. As respostas obtidas sobre a fração $\frac{1}{17}$ estão indicadas na Tabela 42.

Tabela 42: Tabulação das respostas obtidas no item c; sobre a fração $\frac{1}{17}$.

ALUNO	CLASSIFICAÇÃO	JUSTIFICATIVA
Carla	Não é possível determinar	0,0588235.
Bruno	Dízima periódica	
Antônio	Dízima periódica	17 é número primo (não é potência de 2 ou 5).
Isabel	Dízima periódica	Quando fatorado, possui bases diferentes de 2 e 5.
Denise	Não dá pra dizer se é finito ou não	Não posso afirmar que não é dízima, porque o período ainda pode aparecer.
Vinicius	Dízima	
Fernando	Não finito	Pois 17 é primo e 1 não é múltiplo de 17.
Artur	Dízima periódica	
Clara	Não há como dizer se é decimal finito ou infinito	0,0588235294118 não é uma dízima.
Emanuel	Dízima periódica	

Carla, Denise e Clara declararam não ser possível afirmar a natureza finita ou infinita da dízima. Seus julgamentos foram baseados na observação da dízima indicada no visor da calculadora e essa imagem provocou nesses alunos o mesmo julgamento, porém com explicações que nos conduziram a diferentes análises.

Carla simplesmente apresentou o número decimal 0,0588235 e, assim, não forneceu detalhes de sua imagem conceitual. Denise explicitou sua dúvida na declaração “não dá pra dizer se é finito ou não, mas não posso afirmar que não é dízima porque o período ainda pode aparecer”. Esta aluna fez o algoritmo da divisão em sua ficha de atividade, porém o processo da divisão parou na sétima etapa e, para a aluna concluir a questão, precisava proceder até a 16ª etapa, pois o período dessa dízima periódica contém 16 casas decimais¹⁰⁵.

Denise, na atividade A1 em dupla com Artur, utilizou o resultado que indica se a dízima é finita ou não, mas nessa atividade não utilizou tal resultado em nenhum dos itens. Isso indica que o resultado ainda não se tornou um elemento significativo na sua imagem conceitual. Dessa forma, na falta de conhecimentos analíticos, Denise utilizou somente exemplos protótipos e não pôde responder à questão adequadamente. Para isso, era necessário que a aluna fizesse o algoritmo da divisão.

A aluna Clara, na afirmação “0,0588235294118 não é uma dízima”, possivelmente também considerou a irracionalidade do número $\frac{1}{17}$, influenciada pela imagem “aleatória” do número observado no visor. Provavelmente essa imagem está relacionada aos seus exemplos protótipos de número irracional,

¹⁰⁵ Pois a dízima periódica correspondente ao número $\frac{1}{17}$ é $0,0588235294117647$.

conforme a própria aluna declarou no item c da atividade F1.

Seis alunos afirmaram que o número $\frac{1}{17}$ é representado por uma dízima periódica. Destes, quatro não justificaram e somente Antônio e Isabel utilizaram o julgamento analítico a respeito do reconhecimento dos fatores primos no denominador. Fernando declarou que o número “não é finito” pois “17 é primo e 1 não é múltiplo de 17”, um julgamento muito particular, levando em conta somente divisões exatas, no caso de o numerador ser múltiplo do denominador. Consideramos que, provavelmente, o aluno fez a divisão de 1 por 17 na calculadora, pois ele a utilizou nos itens anteriores e, buscando uma justificativa, utilizou-se de uma explicação baseada na “forte” imagem que o número primo representava para ele.

É importante destacar os argumentos dos alunos que observaram ao longo da atividade F3, o resultado obtido no visor da calculadora e declararam que não há como afirmar. Se por um lado, esse julgamento é um indicador que reflete o aumento de exemplos protótipos de números decimais, tanto de racionais quanto de irracionais, por outro, manifesta uma imagem conceitual parcial, ainda carente de aspectos analíticos, que, associados com os exemplos protótipos, possibilitarão julgamentos adequados sobre as representações decimais das frações. Em outras palavras, apesar de os sujeitos reconhecerem mais possibilidades de expressões decimais, em alguns casos, demonstraram ainda não possuir descritores na sua imagem conceitual que possibilitariam deduzir a natureza dessas representações, se finita ou infinita e periódica. Em alguns casos, isso gerou, equivocadamente, a dúvida em relação à racionalidade.

6.2.3

Análise geral do grupo

Os registros evocados pelos alunos nesse grupo de atividade possibilitaram-nos identificar descritores de imagem conceitual relacionados aos números reais, especificamente em se tratando das representações decimais, foco principal de exploração desse bloco didático de atividades.

Os equívocos já aparecem desde o algoritmo da divisão, principalmente se este for longo. Nesse caso, já há desconfiança da possível natureza do processo

finito e até da racionalidade da expressão decimal obtida. Avaliamos que o grupo pesquisado, apesar de cometer erros no algoritmo da divisão, não apontou dificuldades em relação ao procedimento.

A partir daí, decidir se o número decimal é finito ou não, foi inicialmente uma questão que valorizou o aspecto visual na observação da existência de repetições, tanto nos restos como também nos quocientes obtidos do algoritmo da divisão. Isso fez que alguns alunos cometessem equívocos nas representações das expansões decimais.

O fato de saber quando o processo da divisão de inteiros será infinito ou não, se não entendido, induz a inadequações, como a de achar que o número $1,35353535\dots$ é, obrigatoriamente, uma dízima periódica, conforme aconteceu no nosso estudo. Detectamos, nesse caso, um descritor de imagem conceitual que não considera a possibilidade de infinitos números que apresentam os oito primeiro dígitos decimais igual a 35353535.

As atividades P5, P6 e P7 informaram que a falta de entendimento das implicações lógicas estão relacionadas às muitas dúvidas e falhas cometidas no desenvolvimento das tarefas e na tomada de decisão. Isso ocorreu, principalmente, na implicação, “se dízima periódica, então é número racional”, no caso em que o período apresentou muitas casas decimais. Os alunos também ficaram confusos com a aleatoriedade dos dígitos na parte decimal de um número e apresentaram descritores de imagem conceitual que deram indícios de esse número ser classificado como irracional. Consideramos que o grupo formado pelas questões 5, 6 e 7 compõe uma sequência rica de atividades, por conta das diferentes possibilidades de respostas vindas dos alunos. Elas esclarecem noções acerca dos números reais e, por isso, tornam-se um grupo de questões que, quando respondidas e compreendidas, cobrem grande parte do conceito de número real que se trabalha no Ensino Médio.

Por outro lado, partindo das respostas obtidas nas atividades P6, A1 e F1, conjecturamos que a implicação “se o número é uma expansão decimal infinita e não periódica então é número irracional”, é um fator determinante que auxilia na formação de uma imagem conceitual favorável para número irracional, principalmente quando a parte decimal da expansão decimal anuncia um padrão de formação que não apresenta qualquer padrão de repetição.

Nossa decisão pela realização das atividades em dupla e com o uso da

calculadora foi importante, pois criou situações em que os alunos externaram suas imagens conceituais, conseguiram exemplos com maior rapidez e discutiram sobre eles, levantando hipóteses. Com o auxílio da professora-pesquisadora também enunciaram resultados, compararam respostas e corrigiram falhas.

Percebemos nas atividades que o uso da calculadora deve ser realizado com os devidos cuidados e a utilização da igualdade deve ser feita cuidadosamente, somente quando os números se referirem a diferentes representações de um mesmo número real. Concordamos com Dias (2002, p. 168), quando a pesquisadora declara que “(...) o uso da calculadora ou medições empíricas pode produzir uma imagem conceitual de identificação de números distintos, a igualdade de um número com uma aproximação deste.”.

A questão P7 inicia com a fração $\frac{53}{83}$ que, ao ser levada para a calculadora, apresenta no visor o número 0,6385542169. Essa imagem causa instabilidade e favorece o surgimento de descritores de imagem conceitual que levam os alunos a classificar como irracional o resultado obtido. Conjeturamos que, caso esses números fossem apresentados separadamente, sem relação aparente, os alunos classificariam-no como racionais, porém quando eles visualizaram a parte decimal do número 0,6385542169, a possibilidade do aleatório e da variedade do que poderia vir depois, entrou em conexão com números que não apresentaram padrão de repetição e o fator do limite do número de casas decimais da calculadora. Isso fez que alguns alunos o classificassem como irracional, como fez Clara, ou que não pudessem afirmar se era racional ou não, como respondeu a dupla Denise-Artur.

Avaliamos que essa questão desestabilizou e gerou alguns conflitos, pois o processo da divisão de dois números inteiros ainda não está com uma imagem conceitual completa em relação a todas as possibilidades de representação e, consequentemente, a correspondente compreensão de cada caso, tanto o finito como o infinito. Além disso, as respostas dadas, respectivamente, por Vinícius e Isabel — “racional, pois apesar de ser decimal infinito, sua representatividade em forma de fração o torna racional” e “racional, se os próximos números o transformarem numa dízima periódica” —, ao classificarem o número $0,\overline{1234}$, faz-nos pensar, numa dimensão ainda em processo do número racional.

Destacamos alguns descritores de imagem conceitual, que foram evocados nas atividades propostas, que consideramos não favoráveis para a construção de uma imagem conceitual completa das representações decimais de um número real para alunos do Ensino Médio:

- as dízimas periódicas estão associadas aos números decimais que exibem períodos que nossos olhos podem ver, de preferência na calculadora;
- as dízimas periódicas de períodos longos ou as compostas mais elaboradas não estão facilmente relacionadas às frações. É difícil para alguns alunos entender que um número dessa natureza possa ser representado por uma fração;
- a notação dos três pontinhos, significando que algum padrão de repetição dado irá acontecer para sempre;
- as representações decimais que possuem na parte decimal um número que se repete três vezes são dízimas periódicas;
- a repetição de dígito no quociente, durante a realização do algoritmo da divisão, caracteriza o início do período de uma expansão decimal periódica.

Foi importante para nossa pesquisa partir de fatos familiares dos alunos, como o algoritmo da divisão e as representações decimais. Essas atitudes favoreceram, nas atividades P5, P6 e P7, o surgimento de vários questionamentos, que possibilitaram uma gama de exemplos e contraexemplos e, também, a necessidade de estabelecer notações e de enunciar sem formalidade até rudimentos de teoremas. Percebemos esses aspectos principalmente na atividade F1, do último encontro.

Observamos que o mesmo aluno lança mão de diferentes tipos de julgamento, dependendo da atividade. Por isso, concluímos previamente, pela análise das atividades feitas até aqui, que o tipo de julgamento tem relação direta com a atividade e/ou com o exemplo utilizado na questão.

6.3

Atividades do Grupo II

O conjunto de atividades deste grupo teve como objetivo utilizar os números irracionais da forma $\sqrt{n}$ para possibilitar ao aluno o trabalho com aproximações racionais, com graus de precisão diferentes e com o uso da calculadora. Esta é uma das recomendações apontadas na análise documental feita no capítulo 3, que entre outras, sugere que se utilize com mais frequência estas raízes quadradas (Brasil, 1998). Assim como Fischbein et al. (1995) e Zazkis & Sirotic (2007), ressaltamos que os números irracionais são encontrados em conexão com poucos exemplos, como o número π ou os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Dessa forma, decidimos explorar esse conjunto numérico associando-o às operações elementares, tornando possível ao aluno vivenciar a dificuldade de somar números irracionais, visto que a representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica. Esta é uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e truncamento que favorece o uso da calculadora. As atividades escolhidas envolveram as noções de densidade, intervalo, aproximação, erro e as operações, soma e multiplicação.

6.3.1

Aspectos gerais

Destacamos, novamente, que o objetivo desta pesquisa não foi trabalhar o conceito de número real associado às medições, mas consideramos necessário, pelas discussões já realizadas, debater com os alunos que qualquer medida é expressa por um número real. Por isso, a primeira atividade desse grupo relaciona duas ideias importantes do conjunto dos números reais: a questão da medida e a infinidade de seus elementos. Essa atividade utiliza implicitamente o Teorema de Pitágoras, que fornece medidas irracionais, construídas com régua e compasso, encaminhando assim o processo infinito de contagem dos números irracionais da forma $\sqrt{n}$.

Além disso, a pesquisadora apresentou aos alunos a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, enunciando os resultados necessários e esclarecendo que uma forma de dizer que um número é irracional é demonstrando que ele não é

racional. Essa atitude é valorizada por Lima et al. (2001) e considerada como adequada para alunos do Ensino Médio.

Esses objetivos foram revertidos em atividades, que incentivaram o uso da calculadora, exceto a atividade da demonstração. As ações escolhidas para trabalhar esse grupo de atividades foram as seguintes:

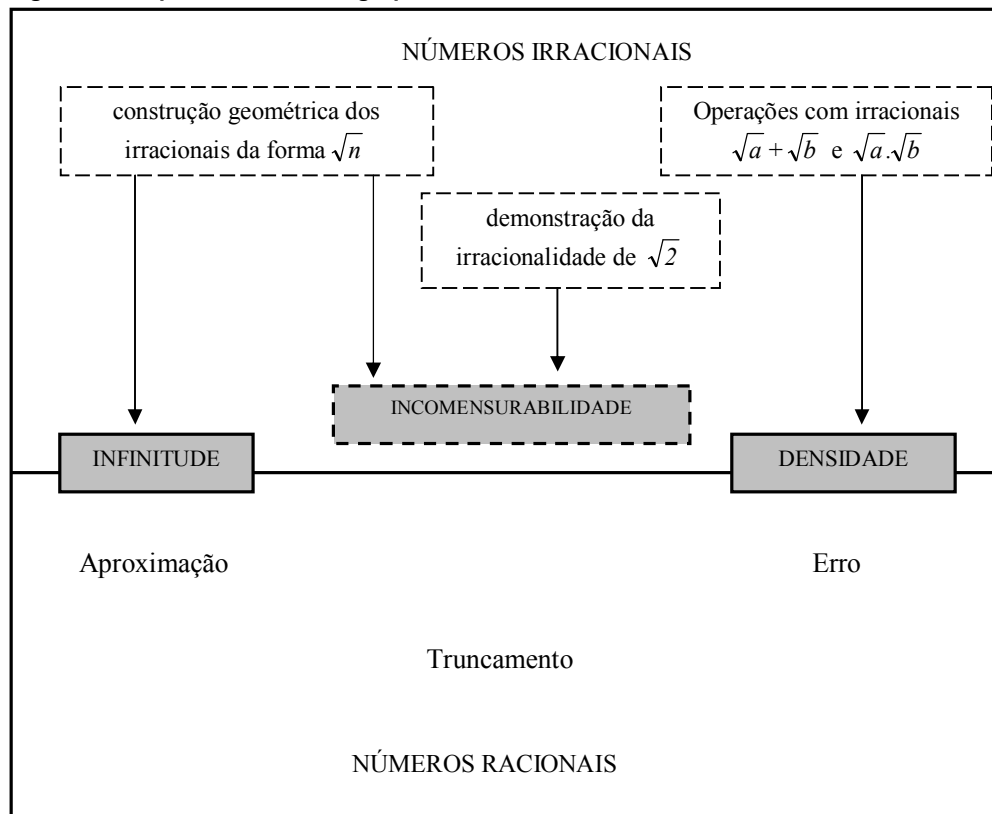
- Obter os irracionais da forma $\sqrt{n}$ pela construção geométrica;
- Propor a contagem dos números irracionais existentes entre dois números inteiros;
- Somar dois números irracionais com erro de aproximação menor que um valor fixado;
- Realizar aproximações racionais para um determinado número irracional;
- Explorar o conceito de densidade no conjunto dos números reais;
- Apresentar a demonstração que $\sqrt{2}$ é irracional.

Para isso, foram levados em consideração nessas atividades os seguintes conteúdos matemáticos: teorema de Pitágoras, localização dos números irracionais da forma $\sqrt{n}$ na reta, distância entre dois números, aproximação e erro, algumas propriedades dos números reais e resultados sobre paridade. Essas atividades possibilitaram discutir aspectos relacionados, principalmente, à infinitude e à densidade dos irracionais da forma $\sqrt{n}$, relembrar alguns resultados e enunciar outros, menos utilizados no Ensino Médio, tais como:

- 1) A distância entre dois números reais x e a é dada por $|x - a|$;
- 2) Dado um número real a , b é uma aproximação de a com erro menor que ε , $\varepsilon > 0$, se a distância entre b e a é menor que ε . Em linguagem matemática: a distância entre b e a é menor que $\varepsilon \leftrightarrow |b - a| < \varepsilon$;
- 3) Sendo a e b números positivos ou nulos temos: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$;
- 4) Sendo a e b números positivos ou nulos temos: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$;
- 5) A desigualdade modular: $|x - a| < b$, se e somente se, $-b < x - a < b$;
- 6) Se n é par, então $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 7) Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 8) A contra-positiva: Se p , então q é equivalente a, se $\sim q$, então $\sim p$;
- 9) A equivalência: n^2 é par, se e somente se, n é par.

O esquema da Figura 20 mostra a dinâmica do estudo realizado.

Figura 20: Esquema didático do grupo II



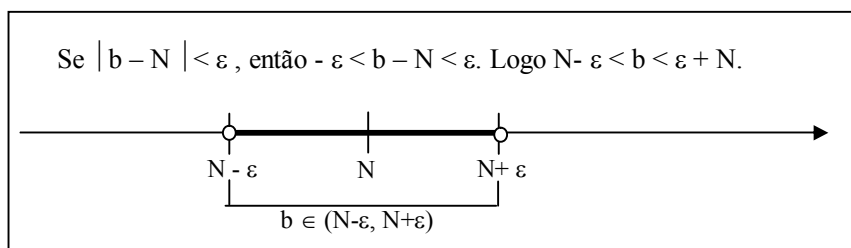
O esquema acima reflete o panorama de estudo desse grupo de atividades, destacando os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais e explicitando as diferentes naturezas das atividades trabalhadas: os números irracionais da forma $\sqrt{n}$, apresentando a construção dessa infinita classe de números; as operações entre esses números irracionais; a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Destacamos os conceitos de aproximação, truncamento e erro que, foram trabalhados, exclusivamente, com as expressões decimais finitas e, por isso, os alocamos no esquema na parte referente ao conjunto dos números racionais. Nos quadros sombreados, indicamos as propriedades da infinitude e da densidade, que foram tangenciadas nas atividades trabalhadas nesse grupo e que são propriedades dos dois conjuntos, e por isso, estão sobre a linha divisória do esquema. Incluímos também a propriedade da incomensurabilidade, específica do conjunto dos números irracionais, pois esta, apesar de não valorizada, foi discutida com o grupo de alunos, principalmente nas atividades P9 e E4.

Nesse grupo de atividades, a pesquisadora precisou recorrer com mais frequência a momentos de exposição do que no grupo anterior, pois alguns

resultados precisaram ser enunciados e exemplificados, e alguns até demonstrados, pelo desconhecimento, pela solicitação e pelo interesse dos alunos. Mesmo nestes momentos os alunos foram incentivados a falar sobre seus pontos de vista sobre o assunto.

As propriedades 5 e 6 dos radicais, apesar de serem conhecidas pela maioria dos alunos desta pesquisa, foram utilizadas equivocadamente por alguns. Os resultados 5, de inequação modular e os 6 e 7, de paridade, foram mais fáceis de resgatar, pois algumas imagens relacionadas ao conceito de distância e números pares e ímpares foram lembradas por alguns alunos. Os resultados 2, 8 e 9, porém, precisaram de um tempo maior de explicação, pois eram desconhecidos no grupo dos sujeitos pesquisados. Os resultados 1 e 2, conforme registrado em diário, foram apresentados geometricamente. A Figura 21 ilustra como foram expostos, no quadro negro, para os alunos.

Figura 21: Representação geométrica da inequação $|b - N| < \varepsilon$



Fonte: Diário de campo, junho de 2008.

Convém lembrar que, no método clínico, é permitido fazer intervenções com o objetivo de esclarecer situações que ocorrem com o sujeito e favorecer a descoberta de novos caminhos, visando a desvendar aspectos — imagens conceituais — ainda desconhecidos. O pesquisador, diante do sujeito, estabelece uma interação de forma que:

Coloca-se esse sujeito numa situação problemática que ele tem de resolver, ou explicar e observa-se o que acontece. Enquanto se produz uma conduta do sujeito (que, insistimos, pode consistir em simples ações, em palavras ou em uma combinação de ambas as coisas), o experimentador procura analisar o que está acontecendo e esclarecer seu significado. (Delval, 2002, p. 68)

Acreditamos que as explicações e perguntas devem provocar no sujeito reações para investigar como as relações estão acontecendo na nova situação que foi estabelecida entre o pesquisador e o aluno na sua interação com o objeto estudado.

6.3.2

Análise das atividades

Nesse grupo foram realizadas seis atividades envolvendo os aspectos descritos, sendo que uma delas se diferenciava das demais, pois o enunciado convidava o aluno a acompanhar o desenvolvimento de uma demonstração¹⁰⁶ feita no quadro pela pesquisadora. Somente as atividades P9 e P13 foram aplicadas no estudo preliminar e no estudo principal.

6.3.2.1

Atividade P9: os números irracionais da forma $\sqrt{n}$

Essa atividade, aplicada nas duas etapas da pesquisa, associa o estudo dos números reais com a geometria. Esclarecemos que o contexto visual da questão é geométrico, apesar de o desenvolvimento da questão valorizar o aspecto aritmético¹⁰⁷.

De acordo com os PCN, é importante que o aluno “conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso” (Brasil, 1998, p. 106). Tal ação não foi necessária com o grupo de alunos pesquisados, pois essas construções já compõem o currículo regular da disciplina Desenho Geométrico, que está presente em todo o Ensino Fundamental e Médio do Colégio Pedro II e, além disso, não faz parte dos objetivos desta pesquisa.

Essa questão relaciona medidas com os números irracionais da forma $\sqrt{n}$ e, para isso, apresenta um processo infinito de construção desses números irracionais. Para isso, a atividade ilustra uma forma de construir geometricamente os números $1=\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2=\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$, por meio de uma figura. A partir dessa visualização e das duas primeiras perguntas da atividade, os alunos são orientados a perceber a sequência indicada e a responder quantos números irracionais da forma $\sqrt{n}$ existem, até o número 100, com o propósito de conceber a infinidade de números que podem ser obtidos, no caso da sequência continuar para sempre.

¹⁰⁶ A prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

¹⁰⁷ Caso o professor considere pertinente uma abordagem geométrica, sugerimos que a questão incentive a construção das hipotenusas com régua e compasso.

No estudo preliminar

O objetivo dessa atividade foi verificar se o aluno, por meio da figura dada, visualizou e percebeu como se constroem os números da forma $\sqrt{n}$. A Tabela 43 mostra o estudo prévio que realizamos na questão P9.

Tabela 43: Estudo prévio da questão P9

PERGUNTA			
Observe a figura a seguir, na qual se mostra a construção dos números da forma $\sqrt{n}$, onde n é natural positivo. Entre os inteiros 1 e 2, temos os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. a) Entre os inteiros 2 e 3, temos os números _____ b) Entre os inteiros 3 e 4, temos os números _____ c) Entre os inteiros 1 e 100, quantos números não inteiros da forma $\sqrt{n}$ existem? Apresente seu raciocínio.			
RESPOSTA			
<u>1º modo:</u> a) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ e $\sqrt{15}$ c) Entre os inteiros 1 e 2 temos 2 números não inteiros da forma $\sqrt{n}$. Entre os inteiros 2 e 3 temos 4 números não inteiros da forma $\sqrt{n}$. Entre os inteiros 3 e 4 temos 6 números não inteiros da forma $\sqrt{n}$. O número de elementos aumenta numa PA de razão 2, logo precisamos calcular a soma $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 198$. A soma dos elementos que estão numa PA é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Neste caso, teremos $S_{99} = \frac{(2 + 198) \cdot 99}{2} = 9900 \text{ números não inteiros da forma } \sqrt{n} \text{ entre os inteiros 1 e 100.}$ <u>2º modo:</u> De 1 a 100, temos a sequência $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ..., $\sqrt{9999}$ e $\sqrt{10000}$. Esta sequência possui 10.000 números, desses, 100 são números inteiros e todos os outros são números irracionais. Total: $10000 - 100 = 9900$.			
OBJETIVO			
a) Verificar se o aluno percebeu o processo de construção da sequência dos números $\sqrt{n}$, a partir do exemplo feito entre os inteiros 1 e 2. b) Verificar se, com mais esta etapa o aluno visualiza um padrão de aumento dos números da forma $\sqrt{n}$ entre os números inteiros. c) Observar se o aluno identificou o padrão de aumento dos números irracionais da forma $\sqrt{n}$ e como procedeu no processo de contagem desses números, sendo n natural entre 1 e 100.			
TABULAÇÃO DA QUESTÃO - ITEM A			
	A	I	B
nº alunos	39	25	6
percentual	55,7%	35,7%	8,6%
TABULAÇÃO DA QUESTÃO - ITEM B			
	A	I	B
nº alunos	36	25	9
percentual	51,4%	35,7%	12,9%
TABULAÇÃO DA QUESTÃO - ITEM C			
	A	I	B
nº alunos	10	26	34
percentual	14,3%	37,1%	48,6%
A - adequada I - inadequada B - em branco			

Todas as respostas obtidas nessa atividade constam no anexo 18. Os itens a e b dessa questão foram respondidos por quase 90% dos alunos. Destes, mais de 50% responderam adequadamente os dois itens, porém 22 alunos responderam inadequadamente fornecendo somente dois números nos itens a e b. Estes alunos, possivelmente, repetiram a mesma quantidade do exemplo feito, nos itens a e b. Além disso, após efetuadas as análises, concluímos que o enunciado dos itens não tornou explícito para o aluno que apresentasse todos os números entre os números inteiros fornecidos, o que pode ter sido um complicador na resolução da questão.

Dez alunos apresentaram, nas respostas dos itens a ou b, os números inteiros $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ ou $\sqrt{16}$. É provável que esses alunos tenham associado o símbolo da raiz quadrada como um atributo relevante para números irracionais e, por isso, os indicaram como exemplos de irracionais e não perceberam que são números racionais.

Das respostas que consideramos adequadas, somente um aluno, no item a, incluiu na resposta o número $\sqrt{4}$ e apenas dois alunos incluíram, no item b, os números $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$. Todos os demais alunos responderam corretamente.

Apenas um aluno utilizou a calculadora e obteve aproximações racionais para os números irracionais da forma $\sqrt{n}$, mesmo assim, a questão foi respondida adequadamente. Dois alunos que também fizeram corretamente os itens a e b, utilizaram como estratégia a construção dos números $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, na figura indicada.

Somente quatro dos dez alunos que acertaram o item c utilizaram conhecimentos de sequência aritmética. Os demais resolveram esse item pela segunda resposta apresentada na tabela do estudo prévio. Quase 50 % dos alunos deixaram o item c em branco. Dezesesseis alunos que fizeram corretamente os itens a e b não souberam encaminhar o item c, indicando que processos que levam à generalização desse procedimento, possivelmente, não fazem parte do repertório desses participantes.

No estudo principal

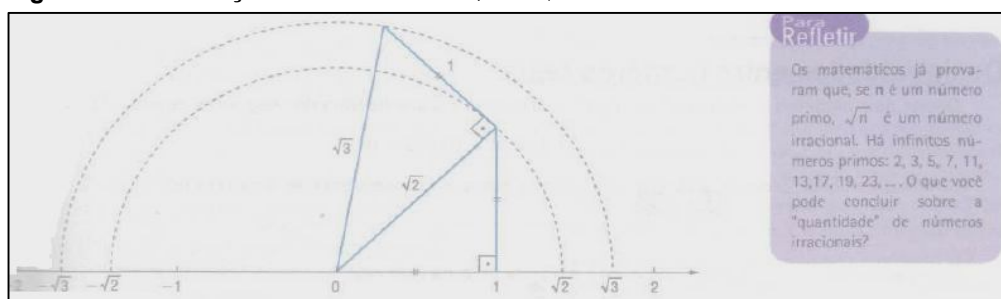
Optamos por trabalhar essa questão no estudo principal, por ser a única desta tese que relaciona os números reais com geometria e, portanto, seria o momento de perceber as medidas sendo representadas por números irracionais.

Avaliamos que o envolvimento dos alunos foi mais significativo no estudo principal, pois houve uma boa finalização da questão, fato que não ocorreu no estudo preliminar.

Os itens a e b foram corretamente resolvidos por todos. Uma única dupla não percebeu o padrão de aumento da contagem dos números irracionais para resolver o item c e, por isso, deixou o item em branco. A pesquisadora, durante a realização da atividade, perguntou a essa dupla, por que não haviam feito aquele item e responderam: “não sabemos pensar no enunciado” (extrato do diário de campo, abril de 2008). Identificamos uma situação semelhante a esta no estudo preliminar: os alunos não fornecem descritores de imagem conceitual, pois, provavelmente, não adquiriram na matemática escolar estratégias que os levassem a abstrações e generalizações.

O objetivo do resgate dessa questão foi apresentar o número irracional como resultado de um processo de medição e mostrar aos alunos a possibilidade de uma medida determinada por régua e compasso ser expressa por um número que possui uma representação decimal infinita e não periódica. Isso foi feito ao término do segundo encontro, durante a discussão sobre as atividades. Acrescentamos que a pesquisadora foi ao quadro negro e apresentou uma outra forma da construção desses irracionais. Este processo é conhecido como “modelo do caracol”, semelhante ao ilustrado na Figura 22, retirado da Coleção II.

Figura 22: Construção dos irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.



Fonte: Dante, 2004, p. 27, vol 1, 2004.

Esclarecemos que esta foi a única das três coleções que fez essa construção geométrica para os irracionais da forma $\sqrt{n}$. Consideramos este processo bem ilustrativo e amplo, já que, ao traçar as semicircunferências com o compasso, o autor localiza também os números irracionais negativos. Além disso, nesse

mesmo recorte é enunciado o resultado “se n é um número primo, então $\sqrt{n}$ é um número irracional”.

Apresentamos registros que ilustram como os alunos procederam na contagem desses irracionais entre os números 1 e 100.

E (Denise-Artur): $1 = \sqrt{1}$ e $10 = \sqrt{100}$
 $2.1+2.2+2.3+2.4+2.5+2.6+ \dots +2.99=2(1+2+3+\dots+99) = 100^2 - 100 =$
 $10000 - 100 = 9900$ $2[(99+1).49+50]=9900$
 Esquecemos como pensar nesse somatório de forma mais simples
 acabamos descobrindo outra forma de resolvê-lo.

A dupla Denise-Artur fez a contagem dos números irracionais semelhantes às respostas apresentadas no estudo prévio da atividade P9 e demonstraram habilidade na contagem dos termos de uma sequência aritmética por meio do cálculo $2[(99+1).49+50]=9900$. Consideramos que o atributo relevante das somas constantes dos termos a_p e a_{n-p} faz parte do repertório de imagens desses alunos. A resolução a seguir, da dupla Bruno-Celso foi baseada na sequência aritmética correta, porém o número de termos não é 198, mas 99. Além disso, foi finalizada com um raciocínio não adequado, quando dividiu a soma obtida por 99. Consideramos que, nesta última ação — dividir por 99 —, a dupla, possivelmente, utilizou um julgamento prototípico que se remete à média aritmética dos termos, por se tratar de uma sequência aritmética.

E (Bruno-Celso): Nota-se que embora o intervalo numérico seja o mesmo, ao aumentarmos o valor dos números, aumenta-se o número de raízes dentro desse intervalo.

$$S_n = (a_1 + a_{99}) \cdot \frac{198}{2} \qquad S_n = (2+198)99 = 200.99 = 19800$$

$$19800 \div 99 = 200 \qquad R: 200 \text{ raízes.}$$

As alunas Thaíssa e Clara, no início da atividade, estavam fazendo a contagem dos números irracionais da forma $\sqrt{n}$, obtendo na calculadora os valores aproximados dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, quando perceberam que não poderiam fazer isso até o 100, pois seria um processo muito demorado. Dessa forma, mudaram de estratégia e chegaram ao resultado correto. Isso provocou em Thaíssa uma expressão de alegria, que foi exteriorizada no extrato que segue, pela palavra “adoramos”.

E (Thaíssa-Clara): Fizemos de maneira diferente (conta por conta),
dessa vez usamos um método prático e rápido.

$2 = \sqrt{4}$; $3 = \sqrt{9}$ todas as raízes entre essas, $1 = \sqrt{1}$ e $100 = \sqrt{10000}$
100 raízes exatas 9900 números não inteiros
(10000-100 raízes exatas), adoramos.

Na afirmação da dupla “fizemos de maneira diferente (conta por conta)”, as alunas referem-se aos valores aproximados obtidos na calculadora para os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. A imagem conceitual que Thaíssa e Clara estão exteriorizando sobre esses números, no atributo ‘conta por conta’, é a de que se referem a esses números como operações que precisam ser resolvidas. Trata-se talvez, de um julgamento prototípico baseado no símbolo da raiz quadrada, indicando uma operação, assim como aprenderam com os números naturais no Ensino Fundamental.

O uso de aproximações para os números irracionais é um hábito muito utilizado nos livros didáticos, que pode ser prejudicial em contextos matemáticos, pois os alunos acabam transformando, por exemplo, as falsas igualdades $\pi = 3,14$, $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$ em exemplos prototípicos. E “naturalmente” utilizam a aproximação racional em substituição ao número irracional, sem o rigor em esclarecer que se trata de uma aproximação. O uso constante dessas aproximações como igualdades faz que os alunos passem a tê-las como exemplos protótipos, constituindo uma imagem conceitual incorreta de número irracional. Essa atitude da dupla foi importante para a pesquisadora explicar ao grupo de alunos o cuidado que se deve ter no uso das aproximações, conforme sugere Palis (1999). Os alunos Antônio, Fernando e Clara fizeram a contagem utilizando a estratégia do 2º modo de solução, apresentado na Tabela 43, porém, equivocadamente, só realizaram a contagem entre 1 e 10. Ilustramos a solução apresentada por Antônio para exemplificar esse caso.

E (Antônio): $1 < \sqrt{n} < 100$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$
1-100= 100 números Não inteiros= 100- inteiros
 $1^2 = 1$; $10^2 = 100$ 10 inteiros e 90 não inteiros.

Ao finalizar a atividade, após entender que havia considerado somente até o dez, Antônio perguntou sobre a contagem das raízes cúbicas de n e observou que o crescimento dos números irracionais da forma $\sqrt[3]{n}$, entre naturais, é dado

pela soma dos 100 primeiros números da sequência (6, 18, 36, ...). Esta é uma progressão aritmética de segunda ordem de razão 6. Consideramos que a atividade P9 contribuiu para que Antônio pensasse num outro subconjunto infinito de irracionais, as raízes cúbicas de n . O aluno percebeu o padrão de aumento e associou de forma adequada outros exemplares ao contexto vivenciado. Esse mesmo aluno deduziu que o número de irracionais da forma $\sqrt[3]{n}$, entre os inteiros 1 e 100 é 999900. Calculou esse número fazendo $1000000 - 100 = 999900$. Esta situação foi exposta por Antônio para todos os outros sujeitos da pesquisa.

Consideramos essa atividade motivadora, pois além de possibilitar descritores para a análise, também contextualizou os números irracionais no estudo das sequências e da Geometria.

6.3.2.2.

Atividades P13, C1 e C2: os números irracionais da forma $\sqrt{n}$ e as noções de aproximações racionais e densidade

As atividades 11 e 13, que foram aplicadas somente no estudo preliminar, abordaram a densidade dos números racionais e irracionais e objetivou perceber o universo numérico dos participantes, por meio das representações mais utilizadas por eles. A questão 11 limitou-se a solicitar números reais pertencentes ao intervalo (0, 1]; já a questão 13 investigou as vizinhanças do número $N = 2,314$. Analisaremos a atividade 13, que utilizou enunciados equivalentes, por meio das inequações simples e das inequações modulares.

No estudo preliminar

O objetivo dessa atividade foi identificar, nas respostas, exemplos protótipos de números reais pertencentes ao intervalo dado. Cada intervalo é uma vizinhança cada vez mais próxima do número racional $N = 2,314$. Esclarecemos que as duplas de itens a e c , b e d , e e f referem-se ao mesmo intervalo, diferindo apenas no enunciado pela linguagem matemática utilizada. A Tabela 44 mostra o estudo prévio relacionado à questão P13, com base nas respostas dos 70 alunos, que estão listadas no anexo 19.

Tabela 44: Estudo prévio da questão P13

PERGUNTA			
Considere $N = 2,314$. Encontre dois valores para b , que satisfaçam as desigualdades em cada caso:			
a) $N - 0,1 < b < N + 0,1$	b) $N - 0,01 < b < N + 0,01$	c) $ b - N < 0,1$	
d) $ b - N < 0,01$	e) $N - 0,00001 < b < N + 0,00001$	f) $ b - N < 0,00001$	
RESPOSTA			
a) Qualquer número real b que satisfaça a inequação $2,214 < b < 2,414$. São infinitos números que atendem a essa condição. Por exemplo, 2,215 e 2,216 ou 2,3 e 2,4. b) Qualquer número real b que satisfaça a inequação $2,304 < b < 2,324$. São infinitos números que atendem a essa condição. c) Basta observar que $b - N < 0,1 \leftrightarrow N - 0,1 < b < N + 0,1$. Mesma resposta do item (a) d) Basta observar que $b - N < 0,01 \leftrightarrow N - 0,01 < b < N + 0,01$ Mesma resposta do item (b) e) $2,314 - 0,00001 < b < 2,314 + 0,00001 \leftrightarrow 2,31399 < b < 2,31401$ Qualquer número real b que satisfaça a inequação $2,31399 < b < 2,31401$. f) Basta observar que: $b - N < 0,00001$ é equivalente a $N - 0,00001 < b < N + 0,00001$. Mesma resposta do item (e)			
OBJETIVO			
Observar de que maneira os alunos manipulam as desigualdades, se é passando por todas as etapas da resolução da inequação após substituir o valor de N , ou por tentativas, na observação de truncamentos na casa decimal correspondente.			
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM A			
	A	I	B
nº alunos	39	16	15
percentual	55,7%	22,9%	21,4%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM B			
	A	I	B
nº alunos	34	17	19
percentual	48,6%	24,3%	27,1%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM C			
	A	I	B
nº alunos	21	23	26
percentual	30,0%	32,9%	37,1%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM D			
	A	I	B
nº alunos	21	23	26
percentual	30,0%	32,9%	37,1%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM E			
	A	I	B
nº alunos	17	24	29
percentual	24,3%	34,3%	41,4%
TABULAÇÃO DAS RESPOSTAS – ITEM F			
	A	I	B
nº alunos	8	29	33
percentual	11,4%	41,4%	47,2%
A – adequada I – inadequada B – em branco			

Exploramos a noção de densidade, com uma vizinhança do N cada vez menor, buscando, nas respostas apresentadas, inferências a respeito do universo numérico do aluno. Consideramos como respostas adequadas somente aquelas que apresentaram dois exemplos, conforme foi solicitado no enunciado. Dos 39 alunos que responderam adequadamente o item *a*, 26 apresentaram como resposta todos os possíveis valores de b por meio da inequação $2,214 < b < 2,414$. Analisando as

16 respostas que consideramos inadequadas, percebemos que 11 também indicaram a inequação corretamente. Isso implica que mais de 50% dos sujeitos pesquisados reconheceram o intervalo de possíveis valores para o número real b .

Dos exemplos obtidos nos itens a e c , apenas doze alunos forneceram, em algum deles, pelo menos um dentre os dois possíveis valores de b com exatamente uma casa decimal, que são os números 2,3 e 2,4. Considerando as respostas adequadas nesses itens, a maioria dos alunos exemplificou o número N com três casas decimais. Somente três participantes indicaram números com quatro casas decimais e não obtivemos exemplos com mais de quatro dígitos decimais. Os exemplos protótipos obtidos nos registros referentes a esses dois itens foram os números 2,215, 2,216, 2,311, 2,312, 2,313, 2,314, 2,412 e 2,413. Todos caracterizam a ideia equivocada de sucessor de um número decimal. Tal fato também ocorreu em Iglioni & Silva (1998).

O número de respostas adequadas diminuiu quase 50% do item a para o item c — itens de enunciados equivalentes —, indicando a pouca habilidade dos alunos em inequações modulares. Possivelmente, é um tema pouco valorizado no Ensino Médio e, por isso, os alunos depararam-se com dificuldades. Dos 21 alunos que responderam adequadamente o item c , nove resolveram a inequação sem considerar o módulo, isto é, levaram em conta somente que $b - 2314 < 0,1$. Cinco alunos que utilizaram a mesma estratégia deram como exemplos respostas inadequadas, tais como: 0;1; 1,5; 2; 2,2 e 2,212.

É importante ressaltar que 11 dos 16 participantes que responderam de forma inadequada o item a , chegaram à desigualdade correta, isto é, $2,214 < b < 2,414$. No item c , somente um dos 23 alunos teve esse mesmo desempenho e seis deles forneceram somente o limite superior $b < 2,414$. Isso é um indicador de que não reconheceram o item c como sendo a mesma inequação do item a . Esclarecemos que a maioria desses alunos não concluiu satisfatoriamente a questão, ou por não fornecerem exemplos, ou por responderem com apenas um exemplo. Isso aponta que a leitura do comando da questão não foi completa.

Comparando as questões e e f , percebemos as mesmas características em relação à dupla de itens a e c e b e d . Das respostas certas obtidas, no entanto, algumas tiveram destaque como, por exemplo, os números: 2,3140000000101; 2,31400000000002; 2,313999999999. Avaliamos que estes alunos se destacaram, pois, ao fornecerem exemplos bem mais próximos de N , indicaram maior

percepção da propriedade da densidade no conjunto dos números racionais.

Consideramos que o encaminhamento da questão e a condição numérica do número N , como um decimal finito, limitaram o campo numérico dos exemplos obtidos, pois não foram fornecidas nas resoluções exemplares, tais como, as dízimas periódicas e os números irracionais. Além disso, os exemplos protótipos dos números decimais finitos que foram respondidos continham poucos dígitos na parte decimal, o que caracteriza uma imagem conceitual parcial da propriedade da densidade no conjunto dos números reais.

No estudo principal

Optamos por não trabalhar a questão 13 no estudo principal, pois consideramos que seu enunciado, ao utilizar um número decimal finito como referência, fez que as respostas dos alunos fossem da mesma natureza, pois, como já observamos, só foram obtidos números decimais finitos nas respostas. Além disso, a quantidade de dados obtidos foi satisfatória para a análise que acabamos de apresentar.

As atividades C1 e C2, que analisaremos a seguir, foram as questões 1 e 2 trabalhadas no 5º encontro do estudo principal¹⁰⁸. Elas aproximam-se do enunciado da questão 13, pois também exploram a propriedade da densidade, porém os números fixados como referência nessas atividades são números irracionais. A atividade C1, apresentada na Tabela 45, utiliza o número irracional $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ e solicita que os alunos forneçam aproximações deste número que se restrinjam a uma determinada vizinhança, cada vez mais fina, indicada em cada item. O estudo de Leviatan (2006) estimulou-nos na escolha desta questão que adaptamos para alunos do Ensino Médio.

Esclarecemos que os alunos receberam, juntamente com a ficha correspondente a essa atividade, uma tabela preparada no Excel contendo as raízes quadradas de N , em que $0 \leq N \leq 50$. Esta tabela encontra-se no anexo 20.

¹⁰⁸ A ficha correspondente a essa atividade encontra-se no anexo 9.

Tabela 45: Atividade C1 - 5º encontro

PERGUNTA			
Dê uma aproximação para $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, com erro menor que:			
a) 10^{-1}	b) 10^{-2}	c) 10^{-4}	d) 10^{-6}
RESPOSTA			
A solução que contempla todas as respostas dos itens dessa atividade são fornecidas a partir de uma inequação, obtida após se utilizar o conceito de erro de uma aproximação. Consideramos relevante apresentar nesse espaço uma solução geral, mesmo que esse não tenha sido o objetivo da atividade.			
Se o erro for um número real ε , qualquer $b \in \mathbb{R}$ que satisfaça a inequação $ b - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) < \varepsilon$ é uma aproximação de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ com erro menor que ε . Desenvolvendo, temos:			
$-\varepsilon < b - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) < \varepsilon \quad \therefore \quad -\varepsilon + \sqrt{3} + \sqrt{5} < b < \varepsilon + \sqrt{3} + \sqrt{5}$			
a) $-0,1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} < b < 0,1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad \therefore \quad 3,8681187850... < b < 4,0681187850...$			
b) $-0,01 + \sqrt{3} + \sqrt{5} < b < 0,01 + \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad \therefore \quad 3,9581187850... < b < 3,9781187850...$			
c) $-0,0001 + \sqrt{3} + \sqrt{5} < b < 0,0001 + \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad \therefore \quad 3,9680187850... < b < 3,9682187850...$			
d) $-0,000001 + \sqrt{3} + \sqrt{5} < b < 0,000001 + \sqrt{3} + \sqrt{5} \quad \therefore \quad 3,9681177850... < b < 3,9681197850...$			
OBJETIVO			
Identificar nas respostas a forma como encaminharam a questão e observar nas aproximações fornecidas, quais são os exemplos prototípicos desse grupo de alunos.			

Concluimos que os conceitos de aproximação e de erro presentes no comando da questão C1, na qual estão relacionados, possivelmente, não fazem parte do repertório de atividades vistas pelos alunos no Ensino Médio, pois provocaram uma sensação nos alunos de “não saber fazer”. Esclarecemos que, inicialmente, os alunos ficaram livres para responder as questões, mas a falta de vivência com esse tipo de atividade os fez recorrer à pesquisadora com a questão: “como assim, professora, com erro menor que, o que quer dizer?” (Pergunta de Clara, extrato de diário de campo, maio de 2008).

A pesquisadora então apresentou alguns exemplos para os alunos, enfatizando a noção de distância. Também resgatou exemplos de aproximações que eles utilizam ao longo do Ensino Médio, quando consultam as tabelas trigonométricas e logarítmicas, nas aulas de Física e até mesmo, nas aproximações de valores observados numa calculadora. Por fim, a partir de dois exemplos numéricos, solicitou dos alunos uma aproximação para cada número e mostrou como se faz para calcular o erro da aproximação realizada. A Figura 23 ilustra os dois exemplos utilizados.

Figura 23: Intervenção da pesquisadora: ideias de erro e aproximação.

Os números foram 3,703 e π e as correspondentes aproximações foram 3,7 e 3,1415.

a) $3,703 - 3,7 = 0,003$
 Aproximamos 3,703 por 3,7 e isto corresponde a um erro de 0,003, então dizemos que o erro dessa aproximação que é $\frac{3}{1000}$ é maior que $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ e menor que $\frac{1}{100} = 10^{-2}$.

b) $\pi - 3,1415 =$
 Nesse caso, consultamos o número π na calculadora e usamos a representação 3,14159265... $3,14159265... - 3,1415 = 0,00009265...$
 Esse número está entre $0,00001 = 10^{-5}$ e $0,0001 = 10^{-4}$.
 Logo essa aproximação possui erro menor que 10^{-4} .

Fonte: Extrato de diário, junho de 2008

As intervenções feitas pela pesquisadora procuram estimular ações por parte dos alunos na conexão de exemplos e ideias. De acordo com Delval (2002, p. 70), “a conversa com o sujeito serve para dar-lhe instruções e nos ajuda a interpretar o sentido que ele faz”. A Tabela 46 apresenta as respostas obtidas dos alunos na questão C1.

Tabela 46: Respostas obtidas pelas duplas na questão C1.

ALUNO	ITEM A	ITEM B	ITEM C	ITEM D
Fernando e Eduardo	3,9	3,96	3,968	3,968117
Artur e Denise	3,9	3,96	3,9681	3,968118
Thaíssa e Clara	3,9	3,96	3,9681	= 3,968118
Antônio e Carla	$1,7 + 2,2 = 3,9$	$1,73 + 2,23 = 3,96$	$1,7320 + 2,2360 = 3,9680$	$1,732050 + 2,236067 = 3,968117$
Isabel e Vinícius	$1,7 + 2,2 = 3,9$	$1,73 + 2,23 = 3,96$	$1,7320 + 2,2360 = 3,9680$	$1,732050 + 2,236067 = 3,968117$

A maioria dos alunos buscou na tabela recebida, feita no Excel, truncamentos para os números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, efetuou a soma desses truncamentos e forneceu o resultado ilustrado na Tabela 46 como resposta. Nos itens *a* e *b*, todos os alunos responderam, respectivamente, 3,9 e 3,96. No item *c*, as respostas foram 3,9680 e 3,9681, esta última fornecida pelas duplas Denise-Artur e Thaíssa-Clara, que também responderam 3,968118, diferente das demais duplas com o número 3,968117. Essas diferentes respostas foram importantes para mostrar aos alunos a diferença entre aproximação e truncamento.

Observamos nas fichas que as diferentes respostas aconteceram de duas formas: fazer os truncamentos de $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ na tabela do Excel e depois somá-los; ou utilizar a calculadora e buscar uma aproximação para a soma $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. Por

exemplo, as duplas Denise-Artur e Thaíssa-Clara forneceram suas respostas realizando truncamentos da soma $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, a partir do número 3,9681187850687, obtido pelas duplas na calculadora, isto é, eles partiram de uma aproximação da soma $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ para fazer a questão. As outras duplas fizeram truncamentos nos números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ antes de obter um valor aproximado para $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Apresentamos a Tabela 47 que ilustra e organiza essas duas estratégias utilizadas pelos alunos. Trabalhamos com o número racional 3,9681187850686698993662, que é um truncamento com 23 dígitos da soma $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, como referência para elaborar a tabela. A partir desse número, sombreamos na tabela os números racionais que são aproximações para $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, mas que não são truncamentos. Convém esclarecer que os valores apresentados na tabela ora são truncamentos, ora são aproximações dos números irracionais em questão.

Tabela 47: Comparando os valores obtidos na atividade para $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

casa decimal	TRUNCAMENTO	TRUNCAMENTO	DENISE-ARTUR	OUTRAS DUPLAS
	raiz(3) 1,73205080756	raiz(5) 2,236067977	raiz(3)+raiz(5) 3,9681187850687	somando os truncamentos
1ª	1,7	2,2	3,9	3,9
2ª	1,73	2,23	3,96	3,96
3ª	1,732	2,236	3,968	3,968
4ª	1,7320	2,2360	3,9681	3,9680
5ª	1,73205	2,23606	3,96811	3,96811
6ª	1,732050	2,236067	3,968118	3,968117
7ª	1,7320508	2,2360679	3,9681187	3,9681187
8ª	1,73205080	2,23606797	3,96811878	3,96811877
9ª	1,32050807	2,236067977	3,968118785	3,968118784

Observamos que a maioria dos alunos não respondeu adequadamente os itens *c* e *d*, quando forneceu a soma dos truncamentos, pois ao calcularem $\sqrt{3} + \sqrt{5} \cong 1,7320 + 2,2360 = 3,9680$, encontraram como resposta um número que dá um erro de 0,000118..., que é maior do que 10^{-4} . O mesmo aconteceu no item *d*. Essas comparações foram expostas e debatidas ao final do encontro, quando a pesquisadora, além de apresentar para o grupo as duas diferentes estratégias que os alunos usaram na resolução, explicou o porquê de o erro ter ocorrido, na estratégia que utiliza os truncamentos.

Convém ressaltar que o estudo feito por Leviatan (2006) foi fundamental e

bastante esclarecedor na condução e na análise dessa atividade. Apesar de a pergunta dessa atividade ser aberta, pois os alunos poderiam ter fornecido várias respostas diferentes, surgiram somente duas soluções distintas. Concluímos que a intervenção da pesquisadora, ao esclarecer o conceito de erro por meio de exemplos, está diretamente ligada a esse fato.

Nesse sentido, apesar de, em consonância com Hershkowitz (1994), entendermos a visualização como parte integrante do processo de desenvolvimento dos conceitos matemáticos, nesse caso específico da atividade C1, concordamos com Vinner (1993, *apud* Costa 2002), ao afirmar que os elementos visuais podem empobrecer a imagem conceitual.

Por isso, como a intervenção foi feita com base em exemplos que utilizaram truncamentos na expansão decimal do número irracional, os alunos reproduziram o procedimento apresentado pela pesquisadora na realização da atividade. Avaliamos que, se ao invés de um exemplo, fossem solicitados dois exemplos na atividade, e, se pelo menos um dos exemplos solicitados fosse um número irracional, caracterizaríamos melhor a imagem conceitual dos alunos relacionada à densidade e às possíveis representações de números irracionais que surgiriam nos exemplos protótipos.

A atividade C2, apresentada na Tabela 48, é semelhante à atividade P13, sendo que, na atividade C2, o número N é irracional. Muitos alunos deixaram em branco, no estudo preliminar, os itens que envolviam módulo. O enunciado dessa questão não foi relacionado pelos alunos com a questão anterior, apesar de as duas atividades se referirem ao mesmo conceito. A linguagem utilizada nessa atividade é mais formal e não vivenciada na sala de aula.

Tabela 48: Atividade C2 - 5º encontro

PERGUNTA
Considere $N = \sqrt{11}$. Encontre os valores de b , que satisfazem as desigualdades em cada caso. a) $ b - N < 10^{-2}$ b) $ b - N < 10^{-5}$
RESPOSTA
$\sqrt{11} = 3,316624790355399849114932736670...$ a) $ b - \sqrt{11} < 10^{-2}$ $-0,01 < b - \sqrt{11} < 0,01$ $-0,01 + \sqrt{11} < b < 0,01 + \sqrt{11}$ <i>qualquer b real que satisfaça a inequação: $3,30662479... < b < 3,32662479...$</i> b) $ b - \sqrt{11} < 10^{-5}$ $-0,00001 < b - \sqrt{11} < 0,00001$ $-0,00001 + \sqrt{11} < b < 0,00001 + \sqrt{11}$ <i>qualquer b real que satisfaça a inequação: $3,31661479... < b < 3,31663479...$</i>
OBJETIVO
Identificar nas respostas como manipularam a inequação, se forneceram respostas com infinitos resultados ou somente exemplos prototípicos.

A notação modular e o número irracional $\sqrt{11}$ dificultaram o desenvolvimento da atividade. Uma primeira atitude dos alunos foi substituir $\sqrt{11}$ por uma aproximação racional. Essa aproximação foi obtida na tabela recebida, feita no Excel, ou por meio da calculadora.

Decidimos optar novamente por esta simbologia utilizando módulo, visto que os sujeitos da pesquisa são alunos do Ensino Médio e que, teoricamente, as equações e inequações modulares fazem parte do programa de Matemática deste segmento de ensino. Um outro aspecto relevante, que diz respeito aos objetivos da pesquisa, foi buscar respostas para uma de nossas perguntas, que visa a detectar quais atividades favorecem a manifestação de protótipos, com a finalidade de caracterizar a imagem conceitual do aluno. Assim, foi pertinente aplicar atividades de diferentes naturezas para perceber como esses sujeitos as manipulam. Também é importante destacar que concordamos com Palis (1999) quando defende uma familiarização com o emprego da simbologia de valor absoluto nas situações de aproximação, ainda na matemática escolar. Além desses fatores, queríamos avaliar se, com um grupo reduzido de alunos, sob a perspectiva do método clínico, obteríamos mais detalhes na análise das respostas em comparação com a questão P13 trabalhada no estudo preliminar.

No item *a*, solicitamos valores próximos de N , com erro menor que 10^{-2} ; já no item *b* esse erro tem que ser menor que 10^{-5} . Os alunos trabalharam durante a resolução desta questão sem a ajuda da pesquisadora, pois já havia ocorrido uma intervenção. Objetivamos assim, reconhecer como manipularam as inequações em conexão com o número irracional e como interpretaram o que estava acontecendo na evolução dos cálculos. Apresentamos a seguir a Figura 24 que ilustra a resolução feita pela dupla Denise-Artur; vamos compará-la com o desenvolvimento apresentado pela dupla Carla-Antônio, apresentado na Figura 25.

Figura 24: Atividade C2 feita pela dupla Denise-Artur

a) $ b - N < 10^{-2}$	b) $ b - N < 10^{-5}$
$ b - \sqrt{11} < 10^{-2}$	$ b - \sqrt{11} < 0,00001$
$b < 0,01 + 3,31$	$b < 0,00001 + 3,31662$
$b < 3,32$	$b < 3,31663$

As duas duplas trabalharam somente com o limite superior da inequação, o que é equivalente a resolver a inequação simples, isto é, ignoraram a operação modular presente na atividade. Dessa forma, as duplas apresentaram respostas incompletas. Denise e Artur substituíram o número irracional $N = \sqrt{11}$, nos itens *a* e *b* da atividade, respectivamente, pelos truncamentos 3,31 e 3,31662. No item *a*, o truncamento foi feito na segunda casa decimal e no item *b*, na quinta casa decimal. A Figura 25 mostra o registro da dupla Carla-Antônio que utilizou o truncamento 3,316 nos dois itens.

Figura 25: Atividade C2 feita por Carla-Antônio

2) Considere $N = \sqrt{11}$. Encontre os valores de b , que satisfazem as desigualdades em cada caso.

a) $|b - N| < 10^{-2}$ / 0,01

$b < 0,01 + 3,316$

$b < 3,326$

b) $|b - N| < 10^{-5}$ / 0,00001

$b < 0,000001 + 3,316$

$b < 3,31601$

As duas duplas forneceram como respostas conjuntos que tanto incluíam infinitos elementos que não atendiam a inequação, como também deixaram de acrescentar infinitos elementos que contemplavam a mesma inequação dada. Ao comparar as diferentes respostas dadas pelas duas duplas, mas considerando somente o limite superior, observamos que a dupla Carla-Antônio no item *a*, apresentou na solução $b < 3,326$ elementos que a dupla Denise-Artur, com a solução $b < 3,32$, não contemplou. No item *b*, no entanto, a dupla Denise-Artur teve um desempenho melhor com a solução $b < 3,31663$ do que a dupla Carla-Antônio com a solução $b < 3,31601$.

Tais fatos ocorreram em função do truncamento realizado. A forma de resolução que destacamos foi utilizada pela maioria dos alunos. Os alunos Vinícius e Bruno, apesar de terem chegado ao mesmo resultado da maioria, cometeram equívocos ao longo da resolução: primeiro, ao elevar a inequação ao quadrado, de forma incorreta, depois ao extrair a raiz quadrada, conforme mostra a Figura 26.

Figura 26: Atividade C2 feita por Vinícius-Bruno

a) $|b - N| < 10^{-2}$

$b^2 - 11 < 10^{-4}$

$b^2 < 10^{-4} + 11$

$b < 10^{-2} + \sqrt{11}$

b) $|b - N| < 10^{-5}$

$b^2 - 11 < 10^{-10}$

$b^2 < 10^{-10} + 11$

$b < 3,31662 + 0,00001$

$b < 3,31663$

Consideramos que esses procedimentos inadequados foram provocados por uma necessidade de se livrar da raiz quadrada, ou também é possível que eles tenham relacionado o módulo com raiz quadrada, em consequência do estudo de números complexos e vetores que eles vivenciaram nas aulas regulares da 3ª série.

A ação de elevar ao quadrado é bastante observada no dia a dia da sala de aula, durante a resolução de equações e, normalmente, acontece sem a necessidade de utilizá-la. Destacamos também a falsa propriedade aplicada ao desenvolver o quadrado da diferença de dois números. Essa dupla usou equivocadamente que $(b - \sqrt{N})^2 = b^2 - N$, uma falha muito comum na matemática escolar.

A dupla Clara-Isabel também não contemplou na resposta fornecida todas as soluções, porém o desempenho foi melhor do que o das outras duplas. As alunas iniciaram a questão efetuando um truncamento na primeira casa decimal em N e procederam conforme as outras duplas, no entanto, atenderam ao limite inferior necessário que a questão exigiu. O desenvolvimento dessa atividade feita por essa dupla está ilustrado na Figura 27.

Figura 27: Atividade C2 feita por Clara-Isabel.

2) Considere $N = \sqrt{11}$. Encontre os valores de b, que satisfazem as desigualdades em cada caso.

a) $|b - N| < 10^{-2}$
 $|b - \sqrt{11}| < 10^{-2}$
 $|b - 3,31| < 10^{-2}$
 $b < 10^{-2} + 3,31$
 $b < 3,32$
 $3,31 < b < 3,32$

b) $|b - N| < 10^{-5}$
 $|b - \sqrt{11}| < 10^{-5}$
 $|b - 3,31662| < 10^{-5}$
 $b < 10^{-5} + 3,31662$
 $3,31662 < b < 3,31663$ 0.00001

Ao retornar as gravações, concluímos que a dupla realizou tal condição por tentativa, atribuindo valores e levando em conta as hipóteses do problema, porém não desenvolveu a resolução algébrica da atividade. Julgamos pertinente apresentar os trechos da gravação que elucidaram a estratégia usada pela dupla Clara-Isabel, o que as levou a realizar a questão de forma mais abrangente, pois não consideraram somente o intervalo à direita do N, mas também à esquerda de N. Isso foi um diferencial em relação às outras duplas.

G (Clara): 338?

G (Isabel): 318.

G (Clara): Ahh, menos 3,31...,

G (Isabel): É dá 0,008.

G (Clara): Então é de 3,31 até 3,32.

G (Isabel): b tá entre 3,31 e 3,32.

G (Clara): Como é que você pensou nisso? Foi pensando em todos os valores?

G (Isabel): Não, tava pensando que tanto pro positivo quanto pro negativo, os valores tão ligados a 0,01, 0,02, aí eu pensei que tem que ser alguma coisa entre.

G (Clara): Uma coisa mais quebrada, né?

G (Isabel): Põe que b está entre, sabe tipo daquele jeito?

G (Clara): Como assim?

G (Isabel): Aquele jeito lá, aqueles...

G (Clara): Ah tá, é pode ser, sei lá, tipo um conjunto b?

G (Isabel): Não põe tipo b... põe assim olha.

Esta atividade possibilitou às alunas Clara e Isabel exteriorizarem descritores de imagem conceitual associados à densidade, na tentativa de sistematização desse pensamento, para realizar o registro escrito, apresentado na Figura 27. A dupla Felipe-Eduardo só respondeu o item *a* dessa questão. No item *b*, apenas substituíram 10^{-5} por 0,00001. A figura 28 mostra o desenvolvimento do item *a*, realizado, inicialmente, da mesma forma que as outras duplas.

Figura 28: Atividade C2 feita por Fernando-Eduardo.

2) Considere $N = \sqrt{11}$. Encontre os valores de b , que satisfazem o caso.

a) $|b - N| < 10^{-2}$

$N = 3,31662473035590$

$b < 10^{-2} + N$

$]00; -3,326[\cup]3,326; 3326$

Observamos que a dupla buscou o valor de N na tabela do Excel, que fornece uma aproximação para o número irracional $\sqrt{11}$ e realizou um truncamento na terceira casa decimal, para utilizar na resolução da atividade. Percebemos uma tentativa da dupla em responder formalmente a questão, utilizando a linguagem de intervalos. Felipe e Eduardo complicaram a escrita da solução, mas responderam de forma coerente com a inequação que finalizou a questão.

Quando escolhemos a atividade C2 semelhante à P13, optamos por utilizar um número irracional, no caso $\sqrt{11}$, ao invés de uma representação decimal finita, como aconteceu na atividade P13. Isso porque queríamos observar se, ao mudarmos o número apresentado para irracional, as respostas obtidas também seriam números irracionais. Constatamos que isso não alterou os dados, pois todos

os alunos substituíram $\sqrt{11}$ por uma aproximação racional.

Essa atividade não usual mostrou novamente que a falta de habilidade e de entendimento na resolução de inequações modulares é um indicador que esse tópico, para ser explorado, necessita de atividades anteriores que explorem o conceito de distância. As diferentes soluções que foram obtidas, mesmo inadequadas, favoreceram as discussões sobre vizinhanças com comprimentos cada vez menores e sobre como poderíamos nos aproximar cada vez mais da solução correta. Observamos o uso de falsas propriedades muito recorrentes na matemática escolar.

6.3.2.3

Atividades D3 e F4: operando com as raízes quadradas

Essa questão foi trabalhada somente no estudo principal. A Tabela 49 mostra a atividade que apresenta a soma dos irracionais, por meio do exemplo $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, feito na atividade C1. A escolha dessa atividade também foi motivada pelas pesquisas realizadas por Palis (1999) e Leviatan (2004 e 2006) quando questionam qual o significado da soma de números irracionais, visto que o algoritmo da soma de números é um processo finito feito da direita para a esquerda e que, portanto, é necessário pensarmos na última casa decimal. O problema ocorre quanto a realizar tal operação no caso dos números irracionais, pois esses números, quando representados na forma decimal, não possuem a última casa decimal.

Tabela 49: Atividade D3 – 6º encontro

PERGUNTA			
Encontre os resultados dos itens a seguir e comente sobre cada operação realizada, destacando facilidades e dificuldades.			
a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$	b) $\sqrt{7} + \sqrt{13}$	c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$
RESPOSTA			
a) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ou $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ - esta operação precisa ser realizada por meio da sequência formada pelas somas parciais, onde cada termo é obtido pelas respectivas somas dos truncamentos de $\sqrt{7}$ e $\sqrt{13}$. Deve-se ficar atento a cada dígito obtido, pois este pode ser alterado em função do truncamento realizado. $\sqrt{7} = 2,64575131106459...$ $\sqrt{13} = 3,60555127546398...$ $S_1 = 2,6 + 3,6 = 6,2$ o 1º dígito decimal está correto $S_2 = 2,64 + 3,60 = 6,24$ o 2º dígito decimal não é 4, pois ele foi alterado na soma do terceiro dígito $S_3 = 2,645 + 3,605 = 6,250$ o 3º dígito decimal está correto			

$S_4 = 2,6457 + 3,6055 = 6,2512...$ o 4º dígito decimal foi alterado $S_5 = 2,64575 + 3,60555 = 6,25130$ o 5º dígito decimal está correto $S_6 = 2,645751 + 3,605551 = 6,251302$ o 6º dígito decimal não podemos afirmar, é preciso ver o próximo termo ... A sequência infinita de racionais que converge para o número $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ é (6,2; 6,25; 6,251; 6,2513; 6,25130; ...)
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$ d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{225} = 15$
OBJETIVO
Verificar se os alunos manipulam algumas propriedades possíveis de serem usadas nos itens a, c e d. Perceber como a operação do item b é realizada. Mostrar a dificuldade de somar e multiplicar números irracionais.

Os alunos conduziram os exercícios de forma variada. Decidimos analisar uma questão de cada vez, para comparar aspectos comuns e distintos utilizados na realização da atividade. No item *a*, todos chegaram à resposta $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, mas é importante esclarecer que os alunos acrescentaram em todos os itens, além da resposta adequada, uma resposta aproximada. Destacamos a seguir as resoluções apresentadas pelas duplas Antônio-Thaíssa e Bruno-Celso.

E (Antônio-Thaíssa): $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad 4,24264068711929 \cong \sqrt{18}$

Fácil, pensei no $\sqrt{18}$ logo, **mas fiz a conta para ter certeza, confirmação.**

E (Bruno-Celso): $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cong 4,242 \cong \sqrt{18}$

Antônio e Thaíssa somaram os números irracionais adequadamente, porém tiveram a necessidade de confirmar o resultado $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ na tabela do Excel. Para isso, realizaram a operação $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ com valores obtidos na tabela e o resultado obtido diferiu do correspondente na tabela ao número $\sqrt{18}$, somente na última casa decimal informada. Essa ênfase que a dupla atribuiu à confirmação na tabela caracteriza a força que a representação decimal tem para essa dupla e também indica que o número $3\sqrt{2}$ não foi suficiente para convencê-los de ser essa a resposta correta. A dupla Bruno-Celso procedeu da mesma forma. Convém destacar o sinal de aproximação corretamente utilizado por esses alunos, caracterizando um descritor de imagem conceitual mais rigoroso em relação aos cuidados que se deve ter com a simbologia utilizada.

Vinícius, na sua resolução, não apresentou qualquer tipo de aproximação, demonstrando uma imagem conceitual favorável, visto que não se deixou levar pelas aproximações racionais da tabela.

E (Vinícius):

$$\sqrt{2} + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = \sqrt{2} + (\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Sua facilidade é a existência de uma raiz comum entre elas.

As respostas destacadas a seguir apresentaram como resposta $3\sqrt{2}$, mas também foram feitas utilizando diferentes aproximações. Essas diferentes resoluções, dadas pelos alunos, valorizam a infinidade de respostas possíveis que são obtidas por aproximações racionais. Tais registros sinalizam um destaque positivo dessa atividade, na qual é possível explorar com os alunos a ideia de densidade, porém enfatiza um descritor de imagem conceitual que sinaliza os números irracionais da forma $\sqrt{n}$ como processos ainda não terminados.

E (Denise-Artur): $3\sqrt{2}$ 4,2426406871193... **Com calculadora é fácil.**

E (Felipe): $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 4,2426406871193

Somente somei os valores da tabela do Excel.

E (Carla): $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 1,4142 + 2,8284 = 4,2426

E (Clara-Isabel): $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \rightarrow$ valor exato, aproximando: **3.1,41=4,23**.

Carla não explicitou em sua resposta¹⁰⁹ que os números decimais utilizados se tratavam de aproximações para os números irracionais, pois não empregou o sinal de aproximação. Durante a discussão das questões, esclarecemos para o grupo que a aproximação da dupla Clara-Isabel, feita na segunda casa decimal, com o resultado **3.1,41=4,23**, não forneceu o valor correto da 2ª casa decimal nem seguiu um critério de aproximação pela 3ª casa decimal. Aproveitamos a solução aproximada fornecida por Felipe, o número 4,2426406871193, que mostrou o valor correto da segunda casa decimal, porém não pudemos afirmar o mesmo sobre o último dígito decimal da sua resposta, pois não tivemos conhecimento do das próximas casas decimais, pela limitação do número de dígitos da calculadora. Essa discussão possibilitou introduzir a ideia de sequências infinitas formadas por aproximações racionais de um dado número irracional e explorar a densidade dos números racionais.

Em relação ao item *b*, as respostas foram bem apropriadas para o debate de ideias a respeito das operações entre os números irracionais, além disso, forneceram descritores que elucidaram a imagem conceitual incorreta e parcial de alguns participantes e completa de outros, em relação à soma de números

¹⁰⁹ Um truncamento feito na 4ª casa decimal.

irracionais. A dupla Bruno-Celso e a aluna Carla realizaram a tarefa, usando a mesma estratégia. Os alunos encontraram um valor aproximado para a soma $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ e, a seguir, buscaram na tabela do Excel recebida, o número irracional, cuja aproximação fosse a mais próxima possível do número racional obtido na soma, que no caso de Carla foi o número 6,2512¹¹⁰ e no caso da dupla Bruno-Celso foi 6,251¹¹¹, conforme ilustramos a seguir.

$$\text{E (Bruno-Celso): } \sqrt{7} + \sqrt{13} \cong 6,251 \cong \sqrt{39}.$$

$$\text{E (Carla): } 2,6457 + 3,6055 = 6,2512 \cong \sqrt{39}.$$

Dessa forma, esses alunos concluíram que $\sqrt{7} + \sqrt{13} \cong \sqrt{39}$. Consideramos essa resposta adequada, porém esclarecemos aos alunos que eles forneceram uma aproximação irracional para uma soma de números irracionais, com erro menor que 10^{-2} , pois $|\sqrt{39} - (\sqrt{7} + \sqrt{13})| = |-0,006304\dots| < 10^{-2}$. Avaliamos que essa foi uma solução inovadora e possível de ser elaborada, porque os alunos tiveram acesso às informações das aproximações racionais destas raízes quadradas, obtidas por meio da tabela do Excel, que a pesquisadora disponibilizou. É importante destacar que as resoluções apresentadas por Bruno, Celso e Carla propiciaram uma breve discussão sobre a densidade dos irracionais, um fato raro ocorrido neste estudo. A dupla Clara-Isabel e o aluno Vinícius apresentaram como resultado da operação $\sqrt{7} + \sqrt{13}$, esta mesma representação, chamada pelas alunas Clara e Isabel de representação exata.

E (Clara-Isabel): $\sqrt{7} + \sqrt{13} \cong 2,64 + 3,60 \cong 6,24$ Não existe outra representação para esse valor, $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ é a representação exata.

E (Vinicius): $\sqrt{7} + \sqrt{13}$. Em contraposição ao exemplo anterior, a inexistência de uma raiz comum representa uma maior dificuldade com sua transformação para números decimais. Caso não haja uma tabela, a “procura” do número que o melhor satisfaça, feita sem uso de calculadora é a parte mais difícil da operação.

É importante destacar que a dupla apresentou uma aproximação para a soma, diferente de Vinícius que, como no item *a*, não aproximou o irracional. Avaliamos aqui que, mesmo a dupla tendo fornecido uma aproximação para a

¹¹⁰ Esse número não é um truncamento do número $\sqrt{7} + \sqrt{13} = 6,2513027865285\dots$, trata-se de uma aproximação com erro menor que 10^{-3} .

¹¹¹ Trata-se de um truncamento do número $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ feito na 3ª casa decimal.

soma $\sqrt{7} + \sqrt{13}$, eles utilizaram o mesmo julgamento de Vinícius quando não fez uso de aproximações. Categorizamos esse julgamento como analítico, pois esses alunos resistiram na utilização das aproximações racionais. Talvez eles não concebessem uma representação decimal que traduzisse completamente todas as informações numéricas contidas na operação $\sqrt{7} + \sqrt{13}$, isto é, para eles não havia representante decimal que substituísse o significado do número irracional $\sqrt{7} + \sqrt{13}$. A álgebra, por meio desses símbolos, ao traduzir esse conjunto de números irracionais — dos números irracionais da forma $\sqrt{n}$ —, de certa forma, faz que Vinícius, Clara e Isabel se sintam contemplados. Consideramos que esse julgamento explicita uma imagem conceitual completa em relação a essa classe de números irracionais, em se tratando de alunos do Ensino Médio.

A solução da dupla Thaíssa-Fernando foi obtida após realizar a soma das aproximações de $\sqrt{7}$ e $\sqrt{13}$ obtidas na tabela do Excel. Observamos que a dupla forneceu como resposta um número decimal finito, com 14 casas decimais, exatamente o número de dígitos utilizados na tabela. A pesquisadora questionou esses alunos sobre tal atitude e eles explicaram que, quando utilizaram todos os dígitos da tabela, eles trabalharam como se fosse uma igualdade, porém quando o número de dígitos foi menor eles entenderam que se tratava de uma aproximação (anotações do diário de campo, maio de 2008).

E (Thaíssa-Fernando): 6,25130258653858. Chata, tivemos que fazer a conta (à mão) porque **não há raiz equivalente**.

E (Denise-Artur): 6,2513025865286... não vemos outro jeito simples de pensar essa soma se não o uso da calculadora. **Com calculadora é fácil.**

A dupla Denise-Artur não pensou em outra saída para efetuar a soma dos números irracionais, a não ser pelo uso da calculadora. Consideramos essa questão difícil de conduzir no Ensino Médio, mas importante como disparadora na discussão sobre o significado da soma de números irracionais. Afinal, o que é o número $\sqrt{7} + \sqrt{13}$? A resposta para esta pergunta abre espaço para um futuro estudo que aprofunda as idéias de densidade e infinitude, utilizando as sequências infinitas convergentes e suas aproximações e arredondamentos. A pesquisadora teceu alguns comentários, baseados nas aproximações dadas pelos alunos, sobre a sequência infinita formada pelas somas dos truncamentos dos números $\sqrt{7}$ e $\sqrt{13}$,

comparando com a sequência infinita formada pelos truncamentos da soma $\sqrt{7} + \sqrt{13}$. Os casos em que ocorreu alteração de dígito foram destacados para os alunos, conforme o que ilustramos nas respostas a esse item, apresentadas na Tabela 49.

No item *c*, todas as duplas apresentaram adequadamente a resposta 9, mas justificaram de formas diferentes. Os desenvolvimentos que surgiram nas respostas para o número $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ foram:

- $\sqrt{81} = 9$;
- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^2} = 3 \cdot 3 = 9$;
- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$
- $\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$

A dupla Bruno-Celso, além de apresentar o último caso que acabamos de listar, resolveu a operação utilizando a aproximação 1,732 para $\sqrt{3}$ e chegou à resposta aproximada 8,999, fazendo $1,732 \times 3 \times 1,732$, utilizando a calculadora.

E (Bruno-Celso): $\sqrt{3} \cdot 3 \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9 \cong 8,999$.

E (Thaíssa-Fernando): $\sqrt{81} = 9$ **Tentamos fazer na mão, impossível!**

A dupla Thaíssa-Fernando tentou realizar o cálculo $1,73205080756888 \times 5,19615242270663$ à mão, num processo muito longo e demorado, e que concluíram ser impossível. No item *d*, todos os alunos apresentaram a resolução $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{225} = 15$, porém destacamos das respostas das duplas Bruno-Celso e Thaíssa-Fernando as expressões “partimos do raciocínio básico” e “princípio da racionalização” ao se referirem à propriedade $(\sqrt{15})^2 = 15$.

E (Bruno-Celso): $\sqrt{225} = 15 \cong 14,99 \cong \sqrt{224} \dots$ **Partimos do raciocínio básico** e achamos uma resposta, havendo logo depois o uso da calculadora.

E (Thaíssa-Fernando): $\sqrt{225} = 15$ Nem tentamos fazer à mão, é **como o princípio da racionalização** (multiplica pela mesma raiz, para tirá-la).

A pesquisadora indagou à dupla Bruno-Celso os cálculos realizados, que levaram à afirmação $\sqrt{225} \cong \sqrt{224}$, pois ela queria entender qual o significado que eles atribuíram ao número $\sqrt{224}$, ou qual o objetivo de deduzir tal declaração.

Bruno explicou que, durante a resolução da atividade C2, ele resolvia manipulando os radicais e o Celso confirmava os resultados por meio das operações feitas com as aproximações escolhidas.

Essas atividades foram importantes, pois possibilitaram aos alunos resolver as operações com números irracionais de duas formas diferentes: com os próprios irracionais, utilizando propriedades quando foi possível, emitindo julgamentos analíticos; ou com as aproximações racionais e, neste caso, percebemos que algumas duplas, mesmo tendo alcançado resultados ditos por eles como satisfatórios, confirmaram com cálculos envolvendo as aproximações racionais, destacando o julgamento prototípico de igualar um número irracional a uma dada aproximação. Os demais alunos já trabalhavam mais tranquilamente com as aproximações racionais do que com os próprios irracionais.

Consideramos que essas descobertas dos alunos foram possíveis, por conta do uso da calculadora, associado à tabela recebida do Excel. Essas respostas obtidas na atividade C2 possibilitaram discussões relevantes do ponto de vista da operacionalidade do número real, pois ilustraram uma variedade de resoluções, na manipulação das propriedades de radicais.

6.3.2.4

Atividade E4: demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Essa atividade é diferente das outras, pois se trata de uma demonstração matemática que é conduzida pela pesquisadora. Consideramos essa atitude como uma intervenção necessária para alunos do Ensino Médio, quando o que se está estudando é o conjunto dos números reais. Concordamos com Lima et al. (2001) quando afirmam que se perde, no Ensino Médio, uma importante oportunidade de mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Julgamos pertinente, no entanto, verificar com os sujeitos de nossa pesquisa, se a declaração dos autores, que consideram essa demonstração simples, esclarecedora e que é suficiente acrescentar alguns recursos de aritmética, é pertinente.

A Tabela 50 apresenta a atividade E4, a resposta que foi conduzida pela pesquisadora aos participantes e o objetivo da questão. Lembramos que a questão foi aplicada somente no estudo principal.

Tabela 50: Atividade E4 – 7º encontro

Pergunta
Agora, juntos, vamos demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
Resposta
<i>Esta demonstração é chamada de Demonstração por Absurdo¹¹².</i> <i>Supõe-se que $\sqrt{2}$ é racional, logo, existe uma fração irredutível que é representante deste número. Portanto, podemos escrever que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde $\text{mdc}(a,b) = 1$.</i> <i>Elevando-se os dois membros da equação ao quadrado, tem-se $2 = \frac{a^2}{b^2}$, logo $a^2 = 2b^2$ (equação I)</i> <i>Concluimos que a^2 é par, pois é o dobro de um número, e, portanto a é par¹¹³.</i> <i>Se a é par, então $a = 2k$, onde k é número inteiro.</i> <i>Substituindo $a = 2k$ na equação I, obtemos a equação: $2b^2 = 4k^2 \therefore b^2 = 2k^2$.</i> <i>Concluimos que b^2 é par, pois é o dobro de um número e, portanto, b é par.</i> <i>$\frac{a}{b}$ não é irredutível, pois se provou que a e b são números pares $\therefore \sqrt{2}$ não é racional.</i>
Objetivo
Perceber, durante a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, atributos que caracterizam aspectos da imagem conceitual dos elementos discutidos na intervenção da pesquisadora.

Nessa atividade, apesar de a atitude do aluno ser passiva, pois o objetivo é entender cada passo de uma demonstração matemática, a pesquisadora solicitou aos alunos que assumissem, durante a demonstração, uma posição crítica e não passiva, questionando etapas que não fossem entendidas, buscando assim, uma compreensão no desenvolvimento. Inicialmente, a pesquisadora explicou que é necessária uma demonstração matemática para garantir a irracionalidade de um número real e que uma das maneiras de fazer isso, é provar que o número não é racional. Destacamos a seguir um extrato de gravação.

G (Pesquisadora): Por que raiz quadrada de 2 é um número irracional?

G (Eduardo): Não existe raiz quadrada cujo resultado é um número decimal.

G (Pesquisadora): Vocês concordam com a explicação de Eduardo?

G (Isabel): Existem sim. A raiz de 0,01 é 0,1.

G (Eduardo): É verdade...

G (Denise): Raiz de 2 não pode ser escrito em forma de fração.

Apesar do julgamento prototípico inadequado de Eduardo, observamos em sua resposta uma crença na ideia de que $\sqrt{2}$ é um número decimal e se, para ele, número decimal pode ser representado por fração, conjecturamos talvez que o

¹¹² Demonstração por absurdo: é uma demonstração que supõe uma afirmativa que conjecturamos ser verdadeira e, após realizar algumas implicações matematicamente verdadeiras, chega-se a uma contradição em relação ao que foi suposto, portanto, o que foi suposto é falso.

¹¹³ A proposição — se a^2 é par, então a é par — se prova pela contra-positiva da proposição — se a é ímpar, então a^2 é ímpar.

aluno, no uso inadequado da linguagem, quisesse expressar o mesmo que Denise respondeu, adequadamente. Esse questionamento inicial da pesquisadora gerou uma breve troca de ideias que foi importante para o início da demonstração. O extrato a seguir ilustra parte deste início.

G (Pesquisadora): Vamos supor, por absurdo, que raiz quadrada de 2 é um número racional.

G (Fernando): Mas qual fração professora?¹¹⁴

G (Fernando): Qual a fração que representa raiz de 2 professora?

G (Pesquisadora): Fernando, estamos supondo que existe alguma fração que represente a raiz quadrada de 2, por isso, escrevemos $\frac{a}{b}$.

G (Fernando): Mas se existe, que fração é esta?

Essa insistência de Fernando ilustra a dificuldade para alguns alunos de raciocinar abstratamente, pois na matemática escolar, poucos teoremas são demonstrados. Dessa forma, poucas estratégias de demonstrações são vivenciadas. A técnica de demonstração por absurdo, quando é feita no Ensino Médio, é justamente na demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, nada mais é dito sobre essa forma de demonstração. De acordo com Polya (1995, p.56):

Encontrar uma demonstração não muito óbvia constitui um grande sucesso intelectual, mas para aprender essa demonstração, ou mesmo para compreendê-la perfeitamente, é necessário um certo esforço mental. É bastante natural que desejamos obter algum lucro de nosso esforço e, para isso, é claro, aquilo que ficar retido em nossa memória deverá ser verdadeiro e correto, não falso ou absurdo.

Resumindo a afirmação de Polya (1995) com o que foi vivenciado pela pesquisadora durante a demonstração por absurdo, consideramos que esta estratégia, apesar de importante, não é simples e nem esclarecedora para alunos do Ensino Médio, conforme defende Lima et al. (2001). Na evolução da demonstração, são exigidos conhecimentos de lógica, tal como a validade da contra positiva de uma proposição, porém este não é o aspecto que dificulta a demonstração, apesar de exigir um tempo maior de explicação. O que mais dificulta seu entendimento é a abstração necessária e a certeza de que uma demonstração foi feita, pois ao chegar ao fim da demonstração, os alunos não ficam convencidos de que se trata de uma prova.

¹¹⁴ A pesquisadora escreveu no quadro negro a fração $\frac{a}{b}$.

Avaliamos que mesmo que a demonstração completa não tenha alcançado e motivado alguns alunos, algumas partes da demonstração foram bem aceitas e discutidas.

Os resultados sobre paridade agradaram os alunos. Mesmo apontando as dificuldades, consideramos essa atividade importante, pois apresenta ao aluno o raciocínio dedutivo necessário nas demonstrações e enfatiza o rigor matemático necessário para afirmarmos que uma determinada sentença é verdadeira.

6.3.2.5.

Atividade F1: julgando os números irracionais da forma $\sqrt{n}$

Essa atividade foi realizada no último encontro. É importante lembrar que as atividades desse encontro foram feitas individualmente sem a intervenção da pesquisadora. Os itens *a*, *b*, *c* e *d* foram analisados no grupo I de atividades, pois referem-se às representações decimais dos números reais. Julgamos coerente analisar separadamente esses dois itens, nesse grupo de atividades, pois podemos avaliar se a demonstração feita na atividade E4 exerceu alguma influência nos julgamentos dos alunos.

Tabela 51: Atividade F1 – 8º encontro

PERGUNTA	
Decida sobre a racionalidade ou a irracionalidade dos números a seguir. Cada decisão deve ser justificada.	
e) $\sqrt{3}$	f) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$
RESPOSTA	
e) Número irracional, pois $\sqrt{3}$ não pode ser representado como uma fração $\frac{a}{b}$, <i>a</i> e <i>b</i> números inteiros e <i>b</i> ≠ 0. Consideramos suficiente, neste item, fazer esse julgamento ou dizer que a representação decimal de $\sqrt{3}$ é infinita e não periódica.	
f) Número irracional. Para $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ ser um número racional, os dois números $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{3}$ precisariam ser racionais ou irracionais simétricos, o que não ocorre neste caso, pois $\frac{1}{3}$ é racional e $\sqrt{3}$ é irracional, conforme visto no item a.	
OBJETIVO	
Identificar nas respostas dos alunos o tipo de julgamento utilizado, se foi por meio dos exemplos protótipos do decimal infinito e não periódico ou analítico, por não ser possível sua representação através de uma divisão de inteiros.	

Para realizar a análise dessa atividade, preparamos a Tabela 52 com todas as respostas obtidas dos participantes, pois favorece a comparação dos dados entre os participantes — análise vertical — e também nas explicações dadas pelo mesmo aluno nos dois itens — análise horizontal.

Tabela 52: atividade F1 itens e e f – 7º encontro

ALUNO	item e: $\sqrt{3}$	item f: $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$
Carla	Irracional, não pode ser representado em forma de fração.	Racional, pode ser representado em forma de fração.
Bruno	Irracional, não apresenta período, número infinito.	Irracional, não apresenta período, número infinito.
Antônio	Irracional, não pode ser escrito em forma de fração.	Irracional, o $\sqrt{3}$ não pode ser representável em forma de fração com números inteiros.
Isabel	Irracional, por ser decimal infinito.	Irracional, pois a fração é somada a um decimal infinito.
Denise	Irracional, por não ter período e não poder ser representado em forma de fração.	Irracional, por não ter período e não poder ser representado em forma de fração.
Vinicius	Irracional, não há métodos atuais que comprovem o resultado exato, sem aproximação de tal número.	Irracional, apesar de poder ser escrito em forma de fração, não se pode fazer com que se torne um número irredutível, no caso seria $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$.
Thaissa	Irracional, não existem inteiros a e b, tais que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ou $a^2 = 3b^2$.	Irracional, apesar de ter a fração $\frac{1}{3}$, como está somada com $\sqrt{3}$ e esse número é irracional, o número $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ não pode ser escrito em forma de fração.
Fernando	Irracional, não pode ser escrito em forma de fração.	Irracional, não pode ser escrito em forma de fração.
Artur	Irracional, pois é raiz de um número primo.	Irracional, é raiz de um número primo. (Artur usou uma seta que apontou para o $\sqrt{3}$)
Clara	Racional, sua representação em número decimal apresenta dízima.	Racional, pois há uma representação exata. (Clara escreveu: $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$)
Emanuel	Irracional, não representável por fração.	Irracional, não representável por fração.

Dos onze alunos que participaram desse encontro, dez classificaram adequadamente os dois números como irracionais. Os dois números foram classificados por Clara como racionais; no caso do $\sqrt{3}$, a aluna utilizou o atributo relevante para racionais, “apresenta dízima”¹¹⁵, para números racionais, porém esse não é atributo dos números irracionais; já para o número $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$, a aluna utilizou o atributo “há uma representação exata”, diferente do usado no item a. No desenvolvimento do item f, Clara reduziu ao mesmo denominador e apresentou o

¹¹⁵ O termo dízima aqui com significado de dízima periódica.

número $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$. É possível que essa representação, para a aluna, esteja associada à forma fracionária, que ela nomeia como representação exata, visto que ela não considerou $\sqrt{3}$ uma “representação exata”. Concluímos que os dois julgamentos inadequados da aluna se fundamentaram, respectivamente, num exemplo protótipo do número $\sqrt{3}$, visualizado como uma dízima periódica, e numa expressão fracionária, que nesse caso conduziu seu julgamento analítico.

No caso da participante Carla, o número $\sqrt{3}$ foi classificado e justificado adequadamente, por meio de um julgamento analítico. O número $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$, no entanto, foi classificado de forma equivocada como racional, apesar de o julgamento analítico ser coerente com a classificação dada pela aluna. Um possível fator determinante para essa classificação inadequada foi a possibilidade de representar o número dado, por meio de uma expressão fracionária, visualizada por Carla.

O número $\sqrt{3}$ foi classificado como irracional por dez dentre os onze alunos. Sete desses alunos apresentaram julgamentos analíticos nas suas justificativas, destes, somente Artur explicou com o resultado “é raiz de um número primo”, os demais utilizaram o argumento da impossibilidade de representação na forma de fração. Avaliamos que, provavelmente, esses julgamentos, de certa forma, foram usados em consequência do encontro anterior, no qual os alunos assistiram à demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Artur fundamentou sua resposta, a partir de um resultado que foi discutido nesse encontro, após a demonstração, e esclarecemos que o próprio aluno exteriorizou o enunciado deste teorema¹¹⁶.

Defendemos esta ideia com base no sexto encontro, no qual a grande maioria dos alunos priorizou a representação decimal, mesmo quando ela não era necessária e acrescentamos que somente o aluno Vinícius não utilizou essa representação em nenhum dos quatro itens da atividade D3. Essa mudança de julgamento, de prototípico para analítico, faz-nos relacionar as respostas dessa atividade, com as atividades D3 e E4.

¹¹⁶ Tal fato está registrado no diário de campo desta tese.

Nove dos onze alunos classificou a soma $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ como irracional, um a menos, do que em relação ao número $\sqrt{3}$. Consideramos esse resultado relevante, pois indica que a fração $\frac{1}{3}$ acrescentada ao irracional $\sqrt{3}$ não desequilibrou os descritores já utilizados para classificar o número $\sqrt{3}$. Em outras palavras, a imagem da fração $\frac{1}{3}$, fez que apenas um aluno mudasse de julgamento.

Destacamos que, no duplo julgamento atribuído por Denise — “irracional por não ter período e não pode ser representado por uma fração” —, a aluna utiliza bem a equivalência dessas definições¹¹⁷.

Concluimos que os julgamentos da maioria desses alunos do Ensino Médio foram baseados em descritores de uma imagem conceitual completa sobre a irracionalidade de $\sqrt{3}$, a partir dos diferentes argumentos que forneceram. Ao que parece, o radical, presente nessa representação, é um descritor dessa imagem e sugere que os alunos acreditam que, em algumas condições, as raízes quadradas de números inteiros, não exatas, são números irracionais. É possível que aconteça pela proximidade da demonstração do caso de $\sqrt{2}$, já que nenhuma demonstração foi feita para o caso da raiz quadrada de 3.

Mesmo o aluno Vinícius, quando justificou que “não há métodos atuais que comprovem o resultado exato, sem aproximação de tal número”, ao se referir ao número $\sqrt{3}$, em seu julgamento prototípico — que caracteriza a impossibilidade de alcançar o número irracional $\sqrt{3}$ —, manifesta, nessas palavras, um desenvolvimento da noção de infinitude, que foram mais exploradas nesta tese. Analisando sob a perspectiva de um julgamento prototípico, consideramos sua imagem conceitual “completa” e, nesse caso particular, enxergamos que, somente um julgamento analítico contribuiria para que Vinícius respondesse adequadamente essa questão, a partir dos argumentos que ele utilizou.

¹¹⁷ O termo definição usado aqui é entendido dentro do contexto do Ensino Médio.

6.3.3 Análise geral do grupo

Esse grupo de atividades possibilitou, a partir dos descritores de imagem conceitual que foram exteriorizados, identificar como os alunos operam esses números, manipulam as propriedades operatórias e percebem as aproximações racionais dos números irracionais. Avaliamos, conforme as análises feitas ao longo do capítulo, que essas atividades aliadas às intervenções ocorridas, favoreceram o desenvolvimento das noções de densidade e de infinitude.

A escolha pelos números irracionais da forma $\sqrt{n}$ justificou-se pois entendemos que essa classe infinita de números irracionais, inicialmente trabalhada na atividade P9, possibilitou ao aluno vivenciar o número irracional como resultado de medições, usando para isso o Teorema de Pitágoras, que é um dos resultados mais conhecidos e vividos pelos alunos no final do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Além disso, esses números são muito utilizados na matemática escolar, apesar da pouca variedade encontrada nos livros didáticos (Brasil, 1998 e 2000). Um terceiro motivo é o uso da calculadora que propiciou, nas atividades desta pesquisa, ao aluno investigar propriedades, superar dificuldades, buscar estratégias de resolução e até sugerir resultados. Isso se deve à possibilidade de rapidez nos cálculos e à comparação de resultados com a sua dupla e com os outros alunos das outras duplas.

A atividade P9 teve uma função disparadora e motivadora dos trabalhos; já a atividade 13 mostrou-nos as dificuldades encontradas pelos alunos e a necessidade de cuidados que devemos tomar nos comandos das atividades, a fim de favorecer a manifestação dos descritores de imagens conceituais. Percebemos que determinados tipos de atividades fazem que os alunos escrevam pouco, pois não mobilizam e exploram adequadamente o potencial de exemplos protótipos, no caso de possuírem.

Observamos ainda que alguns alunos assumem as aproximações racionais dos irracionais como o próprio irracional, como a aluna Thaíssa, que confirmou a veracidade do resultado da operação $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ calculando o valor de $\sqrt{18}$ na calculadora. Apesar de os alunos Clara e Vinícius não terem elaborado um significado para a soma $\sqrt{7} + \sqrt{13}$, quando declararam que “*não existe outra*

representação para esse valor, $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ é a representação exata”, manifestaram assim, a impossibilidade de alcançar esse número, quando escrito na forma decimal. Avaliamos, então, que se sentiram contemplados com a representação $\sqrt{7} + \sqrt{13}$, como resultado da soma dos números $\sqrt{7}$ e $\sqrt{13}$.

Destacamos a dupla Bruno-Celso que, utilizando a calculadora, chegou à seguinte sentença matemática: $\sqrt{3} \cdot 3 \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9 \cong 8,999$. Bruno trabalhou com aproximações, chegando a um valor aproximado de 8,999, e Celso, por meio de propriedades de radicais que resultaram 9. Dessa forma, a dupla chegou a uma aproximação, com um erro de 10^{-3} . Essas soluções mobilizam o aprendizado, à medida que possibilitam conexões de exemplos e de propriedades, acrescentando novas inferências e fortalecendo ideias que culminaram na identificação de descritores de imagem conceitual que auxiliam os alunos no desenvolvimento das noções associadas aos números reais.

Thaíssa e Fernando, na tentativa de somar e multiplicar os irracionais, utilizaram a melhor aproximação que a tabela do Excel fornecia — 14 casas decimais — e partiram para os cálculos. Declararam: “tentamos fazer na mão, impossível”. Eles concluíram a questão, no entanto, utilizando as propriedades conhecidas de radicais, pois sabiam de antemão que o número $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ é 3. Percebemos uma insistência na utilização das representações decimais, mesmo quando não eram necessárias. Essa atitude foi discutida com os alunos e, nas discussões sobre as respostas obtidas, percebemos que eles entenderam a dificuldade que é operar números irracionais, visto que a representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

A atividade C2 explorou o conceito de erro de uma aproximação, semeando a ideia, para os números irracionais da forma $\sqrt{n}$, de que, apesar de não podermos capturá-las na forma decimal como acontece com as dízimas periódicas, em que há a possibilidade de se trabalhar com a fração geratriz, ainda assim, há a possibilidade de cercá-las com qualquer margem de erro desejada. Com isso, procede-se cuidadosamente com as operações entre esses irracionais.

A demonstração foi mais uma tentativa de sacramentar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e mostrar ao aluno que não é suficiente conhecer os primeiros bilhões de dígitos decimais para afirmar que nunca haverá período. É preciso mostrar que não existe qualquer fração que, elevada ao quadrado, seja igual a dois. Avaliamos

que essa demonstração deva ser feita anteriormente à apresentação do número real, como representando qualquer medição. Tal procedimento ajudaria a romper com o problema da circularidade na definição de número real que se faz presente, de modo bem frequente, na matemática escolar.

Avaliamos, por fim, que as atividades foram importantes, pois ao resgatar as propriedades dos números reais, descritores de imagem conceitual foram expostos, possibilitando interferências do professor e favorecendo o aprendizado do aluno, propiciando que outros descritores passem a fazer parte do repertório de imagem conceitual do aluno. Nesse sentido, concordamos com Zazkis & Sirotic (2007) quando defendem que as ideias de densidade e os efeitos das operações com os irracionais estão estreitamente relacionados com o currículo do Ensino Médio.