4
Números reais no Ensino Médio

Considerando que o foco de nossa pesquisa está no Ensino Médio e que, na revisão bibliográfica, constatamos a escassez de pesquisas nesse segmento de ensino, apresentamos, neste capítulo, aspectos curriculares, didáticos e cognitivos que nos aproximaram do panorama existente sobre o ensino-aprendizagem de números reais no Brasil.

Para ilustrar como esse ensino é proposto, de acordo com os aspectos descritos, decidimos por realizar uma análise nos documentos curriculares oficiais de Matemática e em três coleções de livros didáticos. Lüdke e André (1986, p. 38) consideram que a análise documental "pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema".

Dessa forma, identificamos como as orientações são assimiladas e traduzidas pelos autores dos livros didáticos considerados e também como esses autores apresentam a forma sugerida oficialmente para que o ensino de números reais ocorra na sala de aula.

4.1
O que dizem os documentos curriculares?

A partir da leitura e da análise que realizamos em todos os documentos curriculares que orientam o ensino de Matemática no Ensino Médio, reconhecemos que os PCNs (Brasil, 1998), as Orientações Curriculares do Ensino Médio (Brasil, 2006) e o PNLEM[50] (Brasil, 2004) têm apontado caminhos para superar os obstáculos em relação ao ensino dos números reais. O PCNEM[51] (Brasil, 2000) não faz sugestões específicas em relação aos conteúdos matemáticos e os PCN+ Ensino Médio[52] (Brasil, 2002) orientam, em linhas gerais, que o ensino do bloco *números e operações* deve ser aprofundado em conexão com outros conceitos. Uma indicação

[50] Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio.
[51] Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.
[52] Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

é que o ensino de números irracionais deva estar relacionado ao trabalho com geometria e medidas. Complementam afirmando que:

> É ainda importante para o aluno, nessa etapa de sua formação, o desenvolvimento da capacidade de estimativa da ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e da capacidade de tratar com valores numéricos exatos ou aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível (Brasil, 2002, p. 122).

A sugestão é que esse tema seja trabalhado nas escolas a partir de uma diversidade de situações e de forma mais operacional, para que o entendimento e a consequente manipulação dos números e de suas propriedades se torne uma ação mais natural no dia a dia escolar dos alunos, tanto na Matemática, quanto nas disciplinas afins.

O documento Orientações Curriculares do Ensino Médio (Brasil, 2006) sugere que é necessário proporcionar aos alunos uma variedade de problemas que apontem a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos e suas operações. Deve-se iniciar pelos números naturais para contar, até chegar aos números reais para medir, e enfatiza que "os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos, lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida."(ibidem, p. 71).

Outra recomendação é utilizarem-se com mais frequência as raízes quadradas irracionais e o número π, com a sugestão de que é pertinente utilizar as expansões decimais para representar os números racionais e os irracionais, assim como localizar alguns desses números na reta numérica.

A opção, nesta pesquisa, foi exatamente trabalhar as expansões decimais para observar o que os alunos constituíram como imagem conceitual para os números reais. A necessidade de medir foi explorada com os alunos no primeiro encontro, antes das atividades. Esse aspecto foi introdutório no contexto desta pesquisa, pois partimos do pressuposto de que esse tema já teria sido minimamente trabalhado com eles em outras séries e desejávamos, exatamente, verificar se ele iria aparecer como imagem.

Nas Orientações Curriculares do Ensino Médio, ainda se acrescenta que "as propriedades relativas às operações com números reais devam ser trabalhadas de modo que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas" (Brasil, 2006, p. 71). Esse aspecto foi valorizado nas atividades preparadas para a pesquisa.

Apesar de se tratar de um documento dirigido para todo o Ensino Médio brasileiro, os avaliadores dos livros didáticos constataram uma carência de abordagens em relação ao ensino de números reais. Os PCN (Brasil, 1998, p.106) apontam como uma das justificativas dessa dificuldade a falta de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais. Afirmam que o ensino desse conteúdo para alunos do Ensino Fundamental, em relação à noção de número irracional nessa fase do aprendizado, não é seguramente intuitiva. Indicam que "quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais [...] parece não haver mais lugar na reta numérica para nenhum tipo de número além dos racionais". E ainda alertam que não é indicada uma abordagem formal para o ensino dos números reais nessa etapa de ensino. Os documentos atestam, portanto, um grau de complexidade grande na busca de caminhos que levem à construção das noções que envolvem o conceito de número real e que todas elas devem ser exploradas.

A consolidação dos significados dos números racionais e a ampliação para o conjunto dos números reais devem ser feitas ainda no 4º ciclo do Ensino Fundamental, "a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos (...)" (ibidem, p. 106) e do reconhecimento de que há números que não são racionais. Esse reconhecimento deve ocorrer no contexto da geometria, a partir de situações em que os números racionais sejam insuficientes para efetuar medições, como no caso exemplar da medida da diagonal do quadrado de lado unitário. A questão da incomensurabilidade não foi explorada pelas atividades propostas nesta pesquisa, pelo mesmo pressuposto que nos levou a não tratar dos aspectos geométricos envolvidos no conceito. Queríamos verificar se eles apareciam nos julgamentos dos alunos quando confrontados com cálculos e representações dos números reais.

Uma outra sugestão que consta nesse documento é que se deve selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais, evitando abordagens formais e a identificação do número irracional somente com os radicais, o que foi explorado nas atividades propostas nesta pesquisa. Ainda recomendam que, nesse trabalho inicial com os irracionais, não deve-se enfatizar os cálculos com radicais. Os objetivos destacados são os seguintes:

> Que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso (Brasil, 1998, p. 106).

Sobre esse aspecto, o documento ressalta que, apesar de esse conteúdo ocupar um bom espaço no currículo, a abordagem dada aos números irracionais ainda valoriza muito o cálculo com radicais e, dessa forma, "o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito" (ibidem, p. 106). Orientam que os cálculos sigam as regras válidas para os racionais, pois isso implicará obter infinitos irracionais utilizando os radicais e as operações fundamentais. Destacam, como exemplo, que "explorar números na forma $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais, pode contribuir para a superação da ideia equivocada de que há poucos irracionais" (ibidem, p. 107). Também consideram que outra forma de operar números irracionais é por meio de suas aproximações racionais e que, "nesses casos, apresenta-se uma situação apropriada para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras" (ibidem, p. 107).

Consta do documento PNLD (Brasil, 2007, p. 42) que, ao introduzir o ensino dos números irracionais, não fica claro que os números π e e são números, da mesma forma que o são os números naturais, que exprimem comprimentos finitos, embora sua representação decimal tenha infinitas casas. Explica- se que "a representação dos irracionais na base 10 (ou em qualquer base), por serem dízimas infinitas e não periódicas, só é possível com um número finito de casas decimais, que são representações que os aproximam". Também destacam que o uso de calculadoras não é bem feito em atividades que envolvem as dízimas periódicas e na identificação de números irracionais pela observação de um número finito de suas casas decimais.

Essas declarações justificam os obstáculos encontrados no ensino dos números reais no Ensino Fundamental. Acreditamos que esses fatores também explicam as mesmas dificuldades encontradas no Ensino Médio, pois, nas pesquisas estudadas, constatamos o pouco enfoque que se dá ao ensino de números reais. Além disso, futuros professores, ao término da licenciatura e já tendo concluído a disciplina Análise Real, não respondem a questões básicas que se referem à compreensão e à necessidade dos números irracionais. Cometem equívocos ao identificar decimais infinitos, como números racionais ou irracionais, e não entendem expressões do tipo $2^{\sqrt{3}}$ e outras situações que foram expostas no Capítulo 2.

Apesar das orientações dadas nos documentos curriculares e das consequentes mudanças que vêm acontecendo nos livros didáticos, a prática atual do professor ainda é, em sua grande maioria, modelada por uma rotina de aulas essencialmente tradicionais, com conhecimentos gerais e teóricos, seguidos de exercícios e pautados numa metodologia de transmissão de informações.

Dessa forma, é importante lembrar que o livro didático não pode ser a única referência didática para o desenvolvimento do trabalho pedagógico, caso contrário, cristalizará certos percursos limitados, determinando assim, sem discussões e sem aperfeiçoamentos, o currículo de Matemática da escola. Se o uso do livro didático ocorrer sem complementações, alterações ou intervenções, o professor tornar-se-á um mero coadjuvante na utilização do livro.

Sabemos, porém, que o livro didático é o suporte para as aulas da maioria dos professores. Essa utilização em nível nacional é tão forte que, muitas vezes, é a única orientação de que o professor dispõe. Em relação a esse aspecto, concordamos em parte com Barufi (1999, p. 48), quando declara:

> O livro didático é um 'porto seguro' onde o professor ancora o curso, evitando desvios de rota em demasia. Constitui-se uma referencia sempre presente para ele e para os alunos. É claro que, no decorrer da viagem *por mares nunca d'antes navegados*, pequenas incursões em ilhas desconhecidas são permitidas, até mesmo podem ser estimulantes para tornar a viagem mais interessante. Entretanto, o rumo não pode ser esquecido.

Como o livro didático de matemática é distribuído gratuitamente para a escola básica, todos têm acesso ao mesmo programa e à forma como ele é abordado, porém cabe-nos enfatizar que incursões são necessárias e algumas vezes o rumo deve ser modificado, principalmente, levando-se em conta os projetos pedagógicos das inúmeras escolas distribuídas pelo nosso imenso país e as diferenças culturais entre os alunos. De qualquer forma, é o livro didático que apresenta o texto "lido" pelas escolas e é por meio dele, do seu aspecto unificador, que identificamos as possíveis ações realizadas em sala de aula. Esse aspecto conduziu- nos a uma análise em coleções de Matemática do Ensino Médio para mapear o que é sugerido em relação ao ensino de números reais.

4.2
Números reais nos livros didáticos do Ensino Médio

Levando em conta a relevância do livro didático na determinação do programa de Matemática nas escolas, analisamos, no início de nossa pesquisa, três coleções de livros didáticos do Ensino Médio, listados na Tabela 5.

Tabela 5: Lista das coleções de livros didáticos analisados

Coleções	Título	Autor (es)	Ano	Editora
I	Matemática: Ensino Médio	Kátia S. Smole Maria Ignez Diniz	2003	Saraiva
II	Matemática: ciência e aplicações	Gelson Iezzi ; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Perigo; Nilze de Almeida	2004	Atual
III	Matemática	Luiz Roberto Dante	2004	Ática

Não tivemos a pretensão de esgotar as propostas apresentadas nos livros didáticos pela análise de todas as coleções. Optamos por três coleções aprovadas no PNLEM de 2005, para ilustrar como os autores apresentam os números reais no Ensino Médio. Procuramos obras didáticas que se aproximassem da realidade vivida pelos professores de Matemática do Colégio Pedro II, local em que aconteceu a pesquisa.

Nossa primeira escolha foi pela Coleção III, por se tratar da coleção eleita e utilizada pela equipe de professores do Colégio Pedro II. Essa coleção é adotada até a data atual, depois de ter sido escolhida novamente no PNLEM 2009. Atualmente toda a obra apresenta-se em um volume único e cabe ressaltar que foi bem avaliada no processo de seleção do PNLEM/2007 e consequentemente aprovada.

A Coleção II foi a segunda a ser selecionada. É conhecida como a coleção dos sete autores[53] e foi escolhida pelo fato de ser muito utilizada pelos professores como apoio didático para suas aulas, na procura por atividades e na preparação de suas aulas. Essa coleção era, e talvez ainda seja, uma referência para os alunos do curso de licenciatura em Matemática.

Chegamos à Coleção I que, na publicação anterior ao PNLEM de 2005, era conhecida como coleção da Kátia-Roku. Para a escolha desta última coleção, consideramos importante decidir por uma que apresentasse novos contextos no que diz respeito às propostas existentes, porém seguindo as orientações dos

[53] Até a edição anterior, eram sete autores; na nova edição passaram a ser cinco.

documentos curriculares. Dessa forma, optamos por uma coleção que grande parte da equipe de Matemática do Colégio Pedro II não era favorável a adotar, por considerá-la com pouco conteúdo, porém buscavam nela exemplos de questões para serem utilizadas nas suas aulas.

Esta última coleção foi muito criticada — antes de as autoras reformularem a nova versão para o PNLEM de 2005 — por matemáticos que participaram de uma análise de coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio (Lima et al., 2001). A referência bibliográfica citada, intitulada *Exame de textos: Avaliação de livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio*, publicada em 2001, data anterior à primeira avaliação feita pelo PNLEM de 2005, auxiliou-nos nessa análise.

Durante a análise das coleções[54], identificamos como os autores abordam os números reais e, com isso, mapeamos aspectos conceituais e evidenciamos detalhes de abordagens desse tema. Nesse estudo, constatamos que a ênfase dada aos números reais acontece no primeiro volume, em que o assunto é desenvolvido no tópico *Conjuntos Numéricos.* Conexões desse tema com outros conteúdos são quase inexistentes no restante do trabalho ao longo de cada coleção.

Até pouco tempo o que se apresentava sobre números reais nos livros didáticos era uma exposição rápida dos conjuntos numéricos, com a valorização demasiada de técnicas envolvendo radicais. As abordagens históricas, quando aconteciam, normalmente apresentavam fatos isolados, que logo eram deixados de lado. Com a implementação do PNLEM[55], em 2004, muitos autores de livros didáticos atualizaram e reformularam suas coleções. O Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (2004) auxiliou muito nesse sentido, pois apresenta ao longo do texto, os objetivos e as orientações que os avaliadores apontam como necessárias para um livro de Matemática desse segmento de ensino. Destacamos um trecho que caracteriza bem a função do livro didático.

> (...) o livro no Ensino Médio tem múltiplos papéis: (i) favorecer a ampliação dos conhecimentos adquiridos ao longo do ensino fundamental; (ii) oferecer informações capazes de contribuir para a inserção dos alunos no mercado de trabalho, o que implica a capacidade de buscar novos conhecimentos de forma autônoma e reflexiva; e (iii) oferecer informações atualizadas, de forma a atuar como apoio à formação continuada do professor, na maioria das vezes

[54] Todas as coleções contendo três volumes foram aprovadas no último PNLEM, em 2005.

[55] Para um maior detalhamento, consulte a página www.fnde.gov.br e procure em: livros didáticos para o Ensino Médio/consultas.

> impossibilitado, pela demanda de trabalho, de atualizar-se em sua área específica. (Catálogo do PNLEM, 2005, p. 23)

O livro didático do Ensino Médio é normalmente útil ao professor para organizar logicamente a teoria, trabalhar os conceitos e propor atividades para os alunos, ou seja, orienta o professor e define sua prática diária da sala de aula. Além disso, funciona como um importante instrumento na formação continuada do professor, promovendo a atualização de conteúdos e de atividades, aprofundando ideias e conceitos. Tal função formativa do livro leva os autores a investigarem, cada vez mais, novas abordagens e problemas que promovam a exploração de ideias matemáticas, busquem conexões entre os temas e até reorganizem o programa do Ensino do Médio. Todos esses aspectos objetivam proporcionar ao aluno uma Matemática dinâmica, contextualizada, conectada com situações interessantes, que valoriza a criatividade do aluno na resolução de problemas.

Lima et al. (2001) já mencionado anteriormente, organizado pelo matemático Elon de Lages Lima[56] apresenta o resultado da avaliação de 12 coleções de livros didáticos de Matemática, utilizadas na época no Ensino Médio das escolas brasileiras, distribuídos em 36 volumes. Consideramos esse documento curricular de grande relevância, pois nos possibilitou um importante referencial, proporcionando o confronto entre diferentes concepções de autores e de professores avaliadores, que se posicionaram a respeito do ensino de números reais para alunos do Ensino Médio.

4.2.1
Números reais segundo Lima et al. (2001)

Neste tópico apresentamos as considerações feitas por Lima et al. (2001) no que se refere à abordagem dada aos números reais nas três coleções que utilizamos[57]. Esse documento de avaliação dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio apresenta um estudo completo de cada coleção, levando em

[56]São autores desse livro: Augusto César Morgado, Edson Durão Júdice, Eduardo Wagner, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes e Paulo César Pinto Carvalho. Cada coleção foi avaliada por dois desses matemáticos.

[57] Lembramos aqui que as considerações feitas por Lima et al. (2001) se referem às três coleções escolhidas para nossa análise antes de sofrerem atualizações e serem submetidas ao PNLEM de 2005. São elas: Smole e Rokusaburo (1998), Iezzi et al. (1998) e Dante, (1998).

consideração três categorias: conceituação, manipulação e aplicação.

Num primeiro momento, é feita uma avaliação geral de cada volume. A seguir, cada um dos capítulos é acompanhado de comentários, críticas, correções e sugestões. Ao final é realizada uma conclusão sucinta do volume analisado. Trata-se de uma análise detalhada que destaca pontos positivos e negativos das coleções e atenta para os cuidados que se deve ter nas definições e na própria linguagem matemática. Também sugere estratégias de abordagens e corrige erros conceituais e de cálculos.

Os avaliadores justificaram todas as críticas feitas por meio de explicações matemáticas, enfatizando a necessidade de os autores se adequarem ao público do Ensino Médio, trazendo mais contextos, aprofundando conceitos, evitando utilizações de termos inadequados, incentivando o uso de calculadoras, enfim, proporcionando críticas relevantes a serem corrigidas para a próxima coleção.

Da coleção I, no capítulo 1 da unidade 1, em que as autoras apresentam os conjuntos numéricos, Lima et al. (2001) declaram que não está clara a relação entre racionalidade e expansão decimal finita ou infinita periódica na apresentação dos números racionais. Acrescentam que, apesar de provarem a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o que consideram positivo, se associam os números irracionais às representações infinitas não periódicas sem maiores explicações. Enfatizam a necessidade de mais cuidado na apresentação dos irracionais e destacam:

> Para completar as afirmativas equivocadas sobre irracionais, vem a impropriedade (infelizmente muito comum): 'os números reais resultam da união dos números racionais com os irracionais' (página 18), como se os irracionais preexistissem aos reais. Na realidade, não se sabe o que é um irracional antes de definir real.(ibidem, p. 231)

Os autores expressam seu descontentamento com a circularidade na definição do conjunto dos números reais, muito comum na maioria dos livros didáticos e mesmo no ensino.

Fazem elogios, em todos os volumes, quanto ao incentivo e à discussão do uso de calculadoras. No capítulo de logaritmos, esclarecem que o livro deveria dizer que os valores dos logaritmos encontrados nas tabelas (ou mesmo na calculadora) são apenas aproximações e identificam propriedades de potências de expoente real que não foram provadas. Apontamos essa crítica como um grande obstáculo a ser ultrapassado, tanto nos livros didáticos como na sala de aula, pelos professores, pois quando se vão enunciar propriedades válidas para os reais que também são válidas para os racionais, os autores se utilizam dessa ampliação sem os devidos esclarecimentos.

No volume 1 da coleção III, os avaliadores declaram, com certo alívio, que os números são adequadamente apresentados como resultados de contagens ou medidas, já que isso não acontece na maioria dos livros didáticos avaliados, porém comentam que a explicação de que $\sqrt{2}$ é irracional não satisfaz, quando o autor da coleção afirma que $\sqrt{2} = 1{,}414213...$ é um número que não é decimal exato nem dízima periódica. Sobre isso, os avaliadores esclarecem:

> (...) examinando o desenvolvimento decimal de um número, nunca podemos garantir que ele seja irracional. Mesmo o número π, que o livro diz ter sido calculado com 1 bilhão de casas decimais (na verdade já são 5 bilhões), poderia ser racional, com um período muito grande (ibidem, p.269).

Eles também sugerem a importância de apresentar um comentário sobre o método matemático que prova a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e sobre a demonstração de que π é irracional, apesar da dificuldade de fazê-lo, mas insistem: “é o único modo que temos para saber que nenhum computador vai encontrar periodicidade no cálculo dos algarismos decimais de π, mesmo que examine alguns trilhões de dígitos” (ibidem, p.269). Retificam o trecho “com o conjunto R dos números reais, a reta fica completa...” (ibidem, p.269) da página 44, afirmando que a reta sempre foi completa, porém os números racionais não esgotam os pontos da reta.

Sugerem que seja feita a correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta. Além do que já foi destacado, a única referência feita ao número real acontece no capítulo 7, que é anterior ao de função exponencial e faz uma revisão das propriedades de potenciação. Os avaliadores acham correto definir potências de expoente irracional por meio de valores aproximados e destacam ser importante para que o aluno não se perca nas abstrações. Por isso consideram relevante que o livro mostre algumas dessas aproximações, tais como: $2^{1,4} = 2{,}639015$; $2^{1,41} = 2{,}657371$; $2^{1,414} = 2{,}664749$ e o valor final $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665144...$

Lima et al. (2001) consideram, até então, a coleção II uma das melhores existentes no mercado. Mesmo assim, declaram que a coleção não esclarece por que a divisão continuada de dois inteiros é um decimal exato ou uma dízima periódica, apesar de ensinar como obter uma fração equivalente a uma dízima periódica, fato importante e que muitas coleções não apresentam. Esse aspecto foi bastante valorizado nas atividades propostas por esta pesquisa.

Assim como em relação à coleção I, afirmam que se perde uma importante oportunidade de mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional e acrescentam que alguns recursos de aritmética seriam suficientes. Consideram essa demonstração simples, esclarecedora e educativa. Observam que o livro não diz claramente o que são números irracionais e porque eles completam a reta, mas reconhecem que esse tema é delicado e sugerem:

> Como explicar o conceito de número real de forma correta e ao mesmo tempo acessível aos alunos do Ensino Médio? Pelo menos, o livro poderia dizer que um número real é uma expressão decimal (finita ou infinita). Quando tal expressão é finita ou periódica, tem-se um número racional. Em caso contrário, tem-se um número irracional. (ibidem, p.107)

Por julgarmos que a expansão proporcionada pela representação decimal infinita é muito importante para alunos desse nível de ensino, nossa pesquisa procurou verificar se essa noção produziu imagens conceituais para os alunos e como utilizavam essas imagens em seus julgamentos.

Segundo os pesquisadores, a definição utilizada para ordenar os números reais está correta[58], mas indicam que não ficou claro como representar números reais na reta, por isso afirmam que muitos alunos têm dúvidas nesse ponto e apresentam como exemplo os números 0,1563847 e 0,1563798561, que causam hesitações na hora de ordenar.

Dessa forma, sugerem a importância de o texto esclarecer o significado de cada dígito de uma expressão decimal, já que muitos conteúdos dependem da localização, pelo menos aproximada, dos números reais na reta. Apontam também que a noção de aproximação não é mencionada no livro e sugerem aos autores que as aproximações sejam trabalhadas nessa etapa do livro.

Os autores estimulam ao longo das avaliações a importância do uso da calculadora, quando declaram que, no passado, era realmente difícil ao aluno entender potência de expoente irracional, porém hoje as calculadoras tornaram-se um instrumento fundamental para o ensino e para o entendimento desse assunto. Ressaltam que seu uso deve acontecer com as devidas precauções e acrescentam

[58] A definição é: $a > b$ significa que a está à direita de b.

que a coleção II não faz a menor referência à calculadora, inclusive nesse capítulo em que ela é indispensável. Procuramos verificar também nesta pesquisa o que os alunos viam quando faziam operações com as calculadoras.

Os avaliadores identificam que, apesar de o número e não ser definido e nem estudado nessa coleção, constam citações sobre os logaritmos neperianos sem contextos, já que nada se esclarece a respeito do número irracional e.

Outra observação feita pelos avaliadores refere-se ao capítulo que introduz a trigonometria, em que os autores da coleção resgatam a medida da circunferência de raio r dada por $2\pi r$, em que π é um número real de valor aproximado 3,14, sem maiores explicações, como se os alunos já soubessem desse caso. Consideram importante resgatar o ensino das medidas de área e perímetro dos círculos, por conta da carência constatada no ensino de geometria. Essa carência não se verifica na escola em que esta pesquisa foi realizada.

Esses resgates, valorizados pelos avaliadores, vão ao encontro à declaração dos autores na apresentação do livro, na qual eles afirmam que os alunos do Ensino Médio não dominam grande parte dos conceitos que são atribuídos para o Ensino Fundamental. Dessa forma, enfatizam que o livro deveria definir e explicar a grande importância do número π.

O último ponto, relacionado com os números reais, destacado nessa coleção pelos avaliadores, ocorre no cálculo do volume de um cubo com arestas de medidas não inteiras. Declaram que, ao abordar o volume de um paralelepípedo retângulo, isso é feito com muita rapidez, pois nada se esclarece e ainda complementam:

> De um modo geral, o volume V de um cubo de aresta a é dado pela fórmula $V=a^3$. Trata-se realmente de um ponto delicado. Não é fácil explicar porque esta fórmula vale para qualquer valor real positivo de a. Mas, pelo menos, o livro poderia reconhecer essa dificuldade e mostrar, por exemplo, que o volume de um cubo de aresta 2,5 é $(2{,}5)^3$. (Lima et al., 2001, p. 126)

Essa análise documental além de nos apresentar o tratamento dado aos números reais pelos autores de livros didáticos nas coleções anteriores a 2001, também nos permitiu uma aproximação das concepções dos matemáticos a respeito de como deve ser conduzido o ensino desse tema para alunos do Ensino Médio.

A fim de organizar nossa análise, apresentada no próximo tópico, elaboramos uma lista-síntese, organizada na Tabela 6 com as sugestões desse documento para o ensino de números reais no Ensino Médio:

Tabela 6: Sugestões de Lima et al. (2001) para o ensino de números reais.

- Apresentar os números reais como resultados de medidas. Primeiramente, apresentar os reais, para depois falar dos irracionais. Não apresentar os números reais como a união dos números racionais com os irracionais, pois não se sabe o que é um irracional antes de definir um real;
- Definir um número real como uma expressão decimal (finita ou infinita). Se a expressão é finita ou infinita periódica, tem-se um número racional. Em caso contrário, tem-se um número irracional;
- Mostrar que a divisão continuada de dois inteiros é um decimal exato ou uma dízima periódica;
- Trabalhar segmentos comensuráveis e incomensuráveis;
- Demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional;
- Localizar números reais na reta, esclarecendo o que significa cada dígito de uma expressão decimal e fazer a correspondência entre os números reais e os pontos da reta;
- Trabalhar com a noção de aproximação de irracionais por números racionais;
- Definir o número π, explicando sua importância e falar sobre a existência da demonstração de que π é irracional;
- Enfatizar e esclarecer que a única maneira de afirmar que um número é irracional é demonstrando que ele não é racional;
- Fazer uso da calculadora, com os devidos cuidados, para trabalhar operações com irracionais por meio de suas aproximações racionais;

Nesta síntese, apresentamos as concepções dos matemáticos avaliadores em relação ao ensino de números reais no Ensino Médio. Todos os aspectos relacionados à conceituação e à manipulação dos números reais destacados ao longo dessa pré-análise proporcionaram-nos mais ferramentas para realizarmos nossa análise nas mesmas três coleções, nas versões que foram atualizadas para o PNLEM de 2005.

4.2.2
Análise dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

Esta análise teve como estratégia uma comparação das coleções anteriores e posteriores ao PNLEM de 2005, considerando as avaliações feitas em Lima et al. (2001). A partir das observações relacionadas ao que mudou nessas coleções e ao que se manteve sobre o encaminhamento dado aos números reais, desenhamos o panorama do que se propõe para esse tema com alunos do Ensino Médio.

Orientamos essa análise de acordo com as seguintes questões:

1) Como o conjunto dos números reais é apresentado? Quais são os conceitos matemáticos trabalhados?

2) Em que momentos e de que forma esse tópico é utilizado?

3) Que tipos de atividades são propostas?

4) Há elementos que contribuem para a formação continuada do professor?

5) Houve mudanças em relação à coleção anterior?

As respostas para essas questões foram organizadas nas Tabelas 7, 8, 9 e 10. Após cada tabela, emitimos uma análise-parecer para cada uma das três coleções e um comentário síntese, contendo observações que consideramos relevantes para o ensino de números reais no Ensino Médio.

O objetivo da primeira pergunta, organizada na Tabela 7, foi identificar como os autores definem os números reais e que conceitos são apresentados e/ou desenvolvidos ao longo das coleções. A caracterização e a condução do conteúdo dão indícios do encaminhamento lógico que o autor defende para se realizar o trabalho com números reais no Ensino Médio.

Tabela 7: Respondendo à pergunta 1

Coleção	Pergunta 1: Como o conjunto dos números reais é apresentado? Quais são os conceitos matemáticos trabalhados?
I	1º) Números irracionais: todos os números que representam as medidas dos segmentos incomensuráveis com a unidade. 2º) Demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. 3º) Exemplos de outros irracionais, como π e o φ (número de ouro = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). 4º) Números reais: R = Q $\cup$ I. Os números reais formam um conjunto ordenado e completo. 5º) Relação entre R e os pontos de uma reta. 6º) Localização de números reais na reta. Conceitos: incomensurabilidade, densidade, ordenação, dízimas e representação decimal infinita.
II	1º) Números irracionais: números que não podem ser escritos na forma de fração, são os decimais não exatos que possuem representação infinita não periódica. 2º) Exemplos de irracionais: 0,212112111...; 1,203040...; $\sqrt{2}$ = 1,4142136...; $\sqrt{3}$ = 1,7320508...; π = 3,141582... 3º) Números reais: R = Q $\cup$ I. 4º) Localização de números reais na reta. Conceitos: ordenação e infinitude, dízimas e representação decimal infinita.
III	1º) Números irracionais: números que não podem ser escritos na forma de fração, são os decimais infinitos e não periódicos. 2º) Demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional - leitura optativa. 3º) Segmentos incomensuráveis: as medidas do lado e da diagonal do quadrado. 4º) π é irracional. 5º) Localiza na reta os números irracionais da forma $\sqrt{n}$. 6ª) Números reais: R = Q $\cup$ I. 7º) Correspondência biunívoca entre R e os pontos de uma reta. 8º) Desigualdades entre números reais. Conceitos: incomensurabilidade, densidade, ordenação, dízimas e representação decimal infinita.

Observamos que todas as coleções analisadas trazem como definição do conjunto R a mesma dada nas versões anteriores, R = Q$\cup$I. Primeiramente, definem número irracional, pela negação do racional, mas sem mostrar ao aluno o desenvolvimento lógico dessa afirmação. A seguir, definem os números reais, com um diferencial para as coleções I e III, que apresentam os números racionais e os números reais como resultados de medições, apesar da brevidade da exposição. A coleção II, em nenhum momento, refere-se aos números reais como números que expressam medidas.

As coleções I e II já trabalham na exposição dos números reais as noções necessárias ao conceito, como a densidade, a ordenação e a infinitude, que foram exploradas didaticamente, e a completude, de maneira mais formal, apenas enunciando a propriedade.

Ao responder à segunda pergunta na Tabela 8, mostramos como o conteúdo "números reais" é distribuído ao longo das coleções e identificamos quais os tópicos do programa de Matemática do Ensino Médio em que os autores resgataram e de alguma forma aprofundaram esse assunto.

Tabela 8: Respondendo à pergunta 2

Coleção	Pergunta 2: Em que momentos esse tópico é utilizado?
I	Vol 1: unidade 1 (conjuntos numéricos) Vol 1: unidade 7 (potências e calculadoras científicas na sessão *Flash Matemático*) – calcula valores aproximados do número irracional $2^{\sqrt{2}}$, utilizando para isso, aproximações racionais de $\sqrt{2}$.
	Vol 3: unidade 4 (resgata a História da Matemática, a quadratura do círculo e o π na sessão *Flash Matemático*). Vol 3: unidade 7 (noção intuitiva de limite de função – toma valores cada vez mais próximos de x, calcula f(x) e observa o que acontece com esses valores).
II	Vol 1: capítulo 1 (conjuntos numéricos). Vol 1: capítulo 6 (função exponencial - apresenta um exemplo com a função $f(x) = e^x$, utilizando a calculadora e a expressão $(1+x)^{1/x}$. É elaborada uma tabela fazendo x se aproximar de zero, e observa-se que as imagens da expressão se aproximam do "importante número irracional, que é estudado em Cálculo Diferencial e Integral e é representado pela letra $e \cong 2{,}7183$" (p. 179).
	Vol 2: capítulo 1 (medidas de arcos e ângulos – comprimento de uma circunferência).
	Vol 3: apêndice 2 (*limite exponencial fundamental* – consideram a função $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, n natural e dizem que, para n muito grande, f(n) se aproxima do número irracional $e \cong 2{,}7182818284$).
III	Vol 1: capítulo 2 (conjuntos numéricos). Vol 1: capítulo 8 (aproximações e erro – leitura optativa).
	Vol 2: capítulo 7 (potência de expoente irracional, aproximações racionais do irracional $2^{\sqrt{2}}$ e do número irracional *e*, a função exponencial $y=e^x$). Vol 2: capítulo 10 (determinação na área do círculo). Vol 2: em *recursos didáticos auxiliares,* apresenta uma sugestão de atividade (figura 5) com operações entre raízes quadradas irracionais, usando calculadora.

Ao verificarmos os tipos de exercícios propostos ao longo das coleções, identificamos o nível de abrangência dedicada ao tema e constatamos uma quase ausência de conexão dentro do programa do Ensino Médio. Citamos como exemplo, o estudo das progressões geométricas. As dízimas periódicas foram apresentadas como exemplos de sequências geométricas infinitas e convergentes, em que o limite é a fração geratriz dessas dízimas, mas não houve nenhuma menção aos números reais.

Observamos que as coleções I e III resgatam os números reais na revisão do conteúdo potenciação, no estudo da função exponencial e dos logaritmos, na retomada do π para trigonometria, mas nada foi mencionado sobre o cálculo de volumes, na passagem do racional para o real, sugestão dada em Lima et al. (2001). Essa abordagem não é considerada em nenhuma das coleções, visto que continuam utilizando a fórmula que calcula o volume de um cubo de aresta a, $V=a^3$, para todo a real, de forma imediata, sem o cuidado de mostrar exemplos quando a é um número racional.

Destacamos o uso de aproximações racionais para os irracionais, no cálculo de potências com expoente irracional e nas funções exponenciais, ao apresentarem o número *e*. É importante enfatizar que, na coleção II, os autores, em muitos exercícios, usam as aproximações 3,14 e $\frac{22}{7}$ para π, utilizando o sinal de igual, isto é, $\pi = 3{,}14$ e $\pi = \frac{22}{7}$, o que pode causar confusão para os alunos.

Os destaques que fizemos mostram que, apesar das críticas feitas pelos avaliadores em Lima et al. (2001), a respeito dos cuidados que se deve tomar ao representar os números irracionais por meio de aproximações decimais finitas, os abusos de linguagem ainda acontecem ao longo das coleções. Em muitos casos, as aproximações são utilizadas como sendo iguais ao número irracional. Esse pode ser um indício que justifica o fato de muitos alunos representarem o número π através de uma razão de inteiros.

O mesmo repete-se nas tabelas numéricas que aparecem ao longo das coleções. Verificamos que os autores apresentam os valores do seno, cosseno, tangente e logaritmo, sem enfatizar que a maioria dos números indicados é irracional, e que os números da tabela são aproximações racionais desses irracionais. Encontramos um único contraexemplo, que acontece na coleção II, em que o autor afirma: “se consultarmos uma tabela ou uma calculadora científica, veremos que sen$8^{o} \cong 0{,}139$ e cos$8^{o} \cong 0{,}990 \cong 1$” (ibidem, p. 394). Mesmo assim, fica a dúvida se os valores mostrados são aproximados ou não, pois os números que constam na tabela apresentam cinco casas decimais e, nesse texto, apresentam apenas três. Dessa forma, o aluno e/ou o professor podem ainda cometer o equívoco de considerar exatas as aproximações racionais dos irracionais que constam nas tabelas.

A partir dos dados obtidos da pergunta 3 e organizados na Tabela 9, percebemos a forma como os autores encaminham didaticamente o trabalho a ser feito com os números reais no Ensino Médio.

Tabela 9: Respondendo à pergunta 3

Coleção	Pergunta 3: Que tipos de atividades são propostas?
I	Utilizar a calculadora trabalhando os números racionais e os números irracionais, por meio de suas aproximações; Representar os números reais na reta real, trabalhando a ordenação; Efetuar cálculos de vários tipos: aproximações de irracionais com o uso da calculadora, obtenção de irracional entre duas frações dadas, sem calculadora e com aproximações de resultados entre irracionais e entre racionais e irracionais; Listar números irracionais que são raízes quadradas, raízes cúbicas e que são obtidos através de operações realizadas entre irracionais e o número de ouro; Representar os números decimais por meio da notação científica.
II	Converter fração em decimal e vice-versa; Calcular expressões numéricas envolvendo dízimas periódicas; Ordenar os números reais e representá-los na reta; Desenvolver expressões numéricas envolvendo radicais; Representar fração na forma decimal e localizar números racionais na reta; Obter a fração geratriz das dízimas periódicas; Representar geometricamente números reais na reta real.
III	Converter fração em decimal e vice-versa; Classificar listas de números reais (decimais finitos, expressões decimais infinitas periódicas e não periódicas) em racional ou irracional; Ordenar números reais e representá-los na reta; Utilizar calculadora para realizar cálculos com radicais.

Verificamos que a coleção I trabalha as noções de comensurabilidade e densidade de forma mais criativa e com bastante cuidado. A coleção I, conforme observamos na nossa análise, apresentou muitas novidades sobre números reais, com atividades diversificadas. As autoras dedicaram mais tempo a esse conteúdo e realizaram mais conexões ao longo dos volumes. É importante destacar que esta coleção, antes da atualização, foi a mais criticada em Lima et al. (2001) e muitas das sugestões e correções dadas, acerca dos números reais, foram aceitas e feitas pelas autoras.

Apesar de Lima et al. (2001) terem sido categóricos na sugestão de se trazer a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ nas coleções do Ensino Médio, a coleção II foi a única que não apresentou esse fato e, além disso, pouco aprofundou o conteúdo números reais, mesmo no capítulo dedicado a esse assunto. Lembramos que esta coleção foi considerada uma das melhores na edição anterior ao PNLEM de 2005. Dentre as três coleções, consideramos esta a mais carente de atividades e a que menos se aprofunda no estudo dos números reais.

Para ilustrar um pouco de cada coleção, as Figuras 4, 5 e 6 apresentam recortes, respectivamente das Coleções I, III e II.

Figura 4: Recorte da sessão *Flash Matemático* da coleção I: sugestão didática para trabalhar com operações de irracionais com o uso de calculadoras

Operações com números irracionais

1. Usando uma calculadora, copie e complete a tabela abaixo:

a	b	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a}.\sqrt{b}$	$\sqrt{a.b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
3	2								
5	3								
17	10								
49	34								
135	121								
68	32								
500	212								
1428	386								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

2. a) Observe os resultados obtidos na tabela.
   - Compare os resultados das colunas I e II. Que relação você acha que existe entre eles?
   - Compare os resultados das colunas III e IV. Que relação existe entre eles?
   - Compare os resultados das colunas V e VI e das colunas VII e VIII. O que você pode dizer sobre eles?

   Tente expressar as conclusões a que você chegou nos itens anteriores na forma de uma igualdade ou desigualdade, usando os símbolos que aparecem na primeira linha da tabela.

   b) Essas conclusões ainda serão válidas se a ou b forem iguais a zero? O que muda em suas conclusões se a=0? E se b=0?

Fonte: Smole e Diniz, 2003, v. 2, p. 25.

A atividade que destacamos da coleção I possibilita ao aluno encontrar números irracionais a partir de operações elementares com as raízes quadradas. Valoriza o uso da calculadora e, com isso, propicia discussões sobre aproximações racionais dos números irracionais, levando o aluno a levantar conjeturas e enunciar propriedades a respeito dessas operações com radicais. A mesma atividade está no livro da coleção III, destacada na Figura 5, porém, esse exercício consta somente no manual do professor, restringindo seu acesso. O aluno só fará a atividade se o professor ler o manual e optar por aplicá-la na sala de aula.

Figura 5: Recorte do manual do professor da coleção III: sugestão didática para trabalhar com radicais com o uso de calculadoras

Outro exemplo é quando os alunos trabalham com operações de radicais usando calculadora:

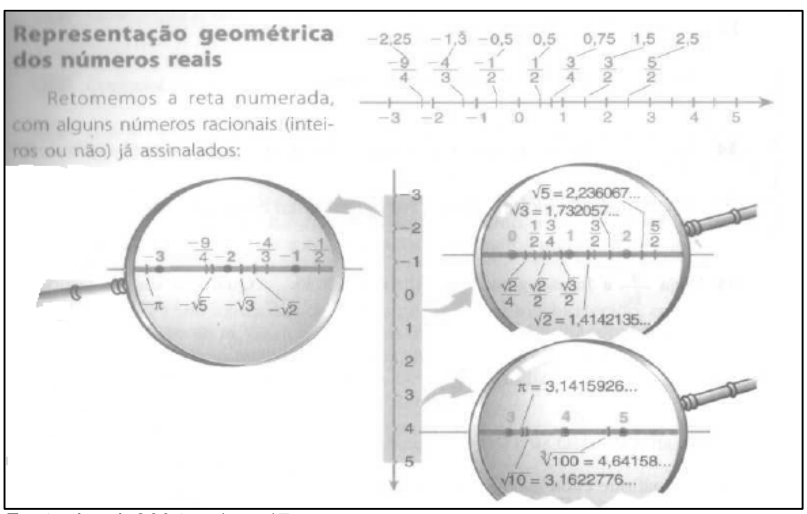
a	b	$\sqrt{a}.\sqrt{b}$	$\sqrt{a.b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$
5	3								
7	10								
3	1								

Eles poderão conjeturar, por exemplo, $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ e $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$. Depois o professor poderá provar que essas conjeturas estão corretas.

Fonte: Dante, 2004, v. 2, p. 13.

Da coleção II, escolhemos um exemplo de localização dos números reais na reta numérica, mostrado na Figura 6.

Figura 6: Recorte da coleção II: representação geométrica dos números reais na reta.



Fonte: Iezzi, 2004, v.1, p. 17.

Consideramos esta atividade relevante, pois trabalha as noções de densidade e ordenação e chama atenção para os cuidados com as expressões decimais infinitas que foram utilizadas e sua correspondente localização na reta real. É possível localizarmos as raízes quadradas de números inteiros e que são irracionais, pois basta construirmos geometricamente, com régua e compasso, os segmentos representados por esses números, usando para isso, os polígonos regulares. Não há, entretanto, nenhum segmento que represente o número π, pois esse irracional não é passível de construção com régua e compasso. Nesse caso, é necessário pensar numa sequência infinita de números racionais que convergem para este irracional, pois qualquer segmento utilizado para representar o π é uma aproximação. É interessante apresentar essas discussões aos alunos, caso contrário os números irracionais serão, equivocadamente, associados às suas aproximações racionais.

Como já mencionamos, uma função do livro didático é atualizar, trazer novas abordagens, fazer conexões e auxiliar na formação continuada dos professores (Catálogo do PNLEM, 2005), Nosso objetivo ao responder à pergunta 4, portanto, é mostrar como os autores atendem a esse aspecto, pois nos possibilitará verificar o grau de comprometimento do autor com sua proposta didática. Os dados que identificamos estão sintetizados na Tabela 10.

Tabela 10: Respondendo à pergunta 4

Coleção	Pergunta 4: Que elementos contribuem para a formação continuada do professor?
I	Apresenta geometricamente a densidade dos racionais; Propõe atividades interessantes e diferentes, envolvendo aproximações e operações entre irracionais com ou sem calculadora; Motiva frequentemente o uso da calculadora numa variedade de exercícios; Demonstra que $\sqrt{2}$ é um número irracional; Apresenta o famoso irracional, número de ouro, deduzindo-o a partir do retângulo áureo e elabora uma atividade com o famoso desenho de Da Vinci mostrando as proporções áureas.
II	As questões apresentadas são de um modo geral, tradicionais, não apresentando inovação, em relação ao que se fazia antes.
III	Apresenta o conceito de segmentos comensuráveis, com ilustrações por meio das leituras optativas; Demonstra que $\sqrt{2}$ é um número irracional; Faz questionamentos, nos boxes *Para refletir*, que possibilitam o uso regular da calculadora; Localiza, por construção geométrica, os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ na reta.

Pela exposição sintetizada na Tabela10, consideramos que a coleção I é a que mais contribui para a atualização dos professores, por trazer diferentes atividades e contextos para o ensino dos números reais. Em relação à pergunta 5, acerca das mudanças em relação à coleção anterior, as coleções I e III atenderam à grande parte das sugestões feitas em Lima et al. (2001) e isso refletiu em mudanças substanciais.

Já a coleção II acrescentou poucas inovações em relação ao que havia apresentado.

Nesta análise percebemos que houve cuidado na investigação, no estudo e no comprometimento com a pesquisa por parte dos autores de livros didáticos na escrita dessas coleções. Isso proporcionou uma consequente atualização dos autores em relação ao ensino-aprendizagem de números reais.

Consideramos que houve uma relação direta entre a avaliação de Lima et al. (2001) e as modificações que constatamos nas coleções estudadas. Na coleção II, no capítulo de potência de expoente irracional, os autores seguem exatamente as sugestões. Também fazem o mesmo a respeito do número *e*, pois apresentam uma sequência de valores aproximados da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, fazendo *n* natural crescer até 50.000 e afirmando que, quando *n* tende ao infinito, a sequência se aproxima muito lentamente para o número irracional e = 2,7182818284... Na atualização desta coleção, não foi destacado pelos autores, contudo, que o número *e* é irracional, porque demonstra-se que esse número não é racional.

Dessa forma, pode significar para o aluno que, se observamos algumas primeiras casas decimais e não visualizamos uma repetição de dígitos, poderemos, então, garantir a irracionalidade desse número. Tal abordagem deve ser evitada, pois possibilita a inferência de deduções falsas. Esse fato acontece na maioria das coleções, porém destacamos um recorte da coleção III, na Figura 7, na qual o autor segue exatamente as orientações de Lima et al. (2001), inclusive utilizando o mesmo exemplo: *π já foi calculado com 5 bilhões de casas decimais*.

Figura 7: Recorte da coleção III sobre o número π

π é irracional

O número π é obtido dividindo-se a medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro (π = 3,1415926535...). Pode-se também provar que π é irracional. Isso garante que não se vai encontrar uma decimal exata nem uma dízima periódica no cálculo dos algarismos decimais de π, mesmo que se obtenha bilhões de dígitos.

Para Refletir
Você sabia que o número irracional π foi calculado com o auxílio de um computador com mais de 5 bilhões de casas decimais sem que tenha surgido uma decimal exata ou uma dízima? Você pode imaginar um número assim?

Fonte: Dante, 2004, v.1, p. 26.

Resgatamos o volume único da coleção III, editado em 2005, e verificamos que o autor atualiza ainda mais as informações sobre o número π, no boxe *Para Refletir*, em que afirma que já se conhece 1,2 trilhões de casas decimais. Após o PNLEM de 2005, observamos nas coleções analisadas uma tentativa em se trabalhar de forma mais abrangente o conteúdo número real. Comparando com o que se apresentava antes ao falar dos números reais, houve o aprofundamento das noções de incomensurabilidade, densidade e aproximação e uma ênfase maior no trabalho com a representação decimal infinita.

Além disso, observamos uma atenção maior dedicada às dízimas periódicas e à localização do número real na reta. A coleção I foi a que mais se destacou, com o uso da calculadora, no desenvolvimento da noção de densidade e nos vários exemplos de atividades resolvidas e propostas, além de trazer alguns contextos interessantes.

Convém destacar o frequente uso da calculadora ao longo de todas as coleções, embora a coleção II não tenha utilizado essa ferramenta no capítulo de números reais. O emprego do número real em contextos sobre medições não acontece. As representações decimais foram mais exploradas e a operacionalidade entre os números reais ainda acontece pouco. O espaço teórico dedicado ao assunto ampliou, porém os exercícios ainda não apresentam uma variedade que possibilite o amadurecimento das noções necessárias ao conceito. A retomada dos números reais nos conteúdos em que esse conjunto é necessário não é feita ainda de forma que se aprofunde o tema.

Até esta etapa da pesquisa, observamos e refletimos sobre o panorama do ensino de números reais no que se refere às orientações curriculares e à forma como se apresenta nos livros didáticos. Esses elementos sugerem como o trabalho com os números reais deve ser conduzido no Ensino Médio brasileiro. Isso é uma indicação, mas não necessariamente a realidade do que de fato se passa nas salas de aula. Por isso, consideramos importante investigar, com um grupo de alunos do Colégio Pedro II, os números reais do ponto de vista da aprendizagem, isto é, identificar o que os alunos conhecem desse campo numérico. Esta etapa, chamada de estudo preliminar exploratório, foi realizada no nosso trabalho de campo e será exposta no capítulo 6 desta pesquisa.

4.3
Como os números reais são apresentados aos futuros professores?

Consideramos importante observar como o conteúdo números reais é apresentado para os futuros professores de Matemática, para compreender melhor porque a questão da circularidade na definição de número real não é resolvida por autores de livros didáticos e professores da escola básica. No capítulo 2, apresentamos Palis (1999), Malta et al. (2002) e Ripoll et al. (2006), três bibliografias brasileiras que apresentam uma definição não circular de número real. Essas referências têm como público alvo, alunos de cursos superiores, porém não atingem ainda um universo considerável de professores, talvez porque sejam de publicação recente e direcionados para determinadas universidades.

Dessa forma, decidimos consultar outras bibliografias mais tradicionais, algumas delas utilizadas em diversos países. Selecionamos sete livros de Cálculo I, pois esta disciplina é cursada por todos os alunos da licenciatura. Além disso, escolhemos mais quatro livros de Matemática que aprofundam o tema e são indicados aos alunos nos cursos de formação continuada e em alguns cursos de Análise Matemática.

4.3.1
Nos livros de Cálculo

Os livros de Cálculo I que consultamos estão indicados na Tabela 11:

Tabela 11: Livros de Cálculo I consultados.

Autor	Título do livro
Louis Leithold	*O Cálculo com geometria analítica*, volume 1
George Thomas	*Cálculo*, volume 1
Munem e Foulis	*Cálculo*, volume 1
Geraldo Ávila	*Cálculo I: funções de uma variável*
Simmons	*Cálculo com geometria analítica*, volume 1
Hoffmannn e Bradley	*Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*
Hallett e Gleason et al.	*Cálculo de uma variável*

Elaboramos a Tabela 12 que ilustra a abordagem que esses autores utilizam quando apresentam os números reais pela primeira vez na sua obra didática. Acrescentamos que o número real é um objeto matemático que é utilizado em todo o curso de Cálculo I.

Tabela 12: Os números reais nos livros de Cálculo I

Livro	Forma de abordagem
Leithold	- Declara que o sistema dos números reais pode ser totalmente descrito por um conjunto de axiomas. Apresenta as propriedades derivadas desses axiomas, pois “como o cálculo elementar envolve números reais, devemos estar familiarizados com algumas propriedades fundamentais do sistema de números reais.” (Leithold, 1977, p. 1) - Após a apresentação de uma série de propriedades, o autor afirma que qualquer número real pode ser classificado como um número racional ou um número irracional.

	- Apresenta o conjunto dos números racionais. “Um número racional é da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e q≠0.” (ibidem, p. 4). - Fornece exemplos de números racionais, tais como os inteiros, as frações, os decimais finitos e as dízimas periódicas. - Afirma que os números reais que não são números racionais são chamados de números irracionais. São os números “decimais não periódicos com um número não finito de dígitos” (ibidem, p.4). - Apresenta como exemplos: $\sqrt{3} = 1{,}732...$; $\pi = 3{,}14159...$ e tg 140º = -0,8391... - Localiza números reais na reta, esclarecendo a origem, a unidade de medida e a correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta. - Define intervalos abertos, fechados, limitados e ilimitados. - Finaliza com uma série de exercícios sobre inequações simples e modulares.
Thomas	- Introduz os números reais ao apresentar a correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares de números (x, y). - Informa a correspondência biunívoca que existe entre os pontos do eixo x e o conjunto dos números reais, declarando em nota de rodapé que “esta correspondência baseia-se no postulado de continuidade da reta, estudado nos cursos de análise matemática.” (Thomas, 1970, p. 3). - Apresenta incluído nas hipóteses de um exercício a seguinte definição: “Um número racional é um número que pode ser expresso na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros primos e q>0. Um número real não-racional é chamado de número irracional.” (ibidem, p. 43).
Munem	- Apresentam sucintamente os números reais como as medidas das distâncias de todos os pontos da reta à origem, dada uma unidade de medida.
Ávila	- Apresenta os diferentes tipos de números, afirmando que o leitor já se familiarizou com estes no ensino secundário. - Apresenta os racionais como todo número que pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e q≠0. Escreve os números racionais na forma fracionária e decimal e destaca que “se o denominador só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), obteremos sempre decimais exatas [...] ao contrário, se o denominador contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, a fração ordinária (em forma irredutível!) terá representação decimal periódica.” (Ávila, 1994, p. 2). - Apresenta o algoritmo da divisão para escrever o número racional $\frac{5}{7}$ na forma decimal. - Apresenta 0,10100100001000001... e 0,10110111011110111110... e declara que “decimais como estas também são números, os chamados números irracionais, que se caracterizam por terem representações decimais infinitas e não periódicas.” (ibidem, p. 3). Acrescenta que, por isso, não podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$. - Apresenta e demonstra que o número $\sqrt{2}$ não é racional. Afirma que, em geral, é difícil saber se um dado número é irracional ou não. - Apresenta o conjunto dos números reais como o conjunto que é constituído pelos números racionais juntamente com os números irracionais. - Ressalta que os números reais têm uma representação simples e muito útil, por meio dos pontos de uma reta. - Localiza números reais na reta. - Explica que um modo de operar com os números irracionais “consiste em representá-los por sequências de números racionais que os aproximem com o grau de precisão cada vez maior e tão grande quanto quisermos.” (ibidem, p. 4). - Finaliza com uma lista de exercícios que contempla os aspectos abordados. - Dedica um tópico aos intervalos e às inequações simples e modulares.
Simmons	- Não define número real, apenas declara que as variáveis, tais como comprimento, área, volume, posição, tempo, velocidade, são medidas por números reais. - Apresenta exemplos de números reais representados por números decimais.

Hoffmann	- Apresenta os números reais no final do livro quando faz uma revisão de álgebra. - Apresenta o conjunto Q = { $\frac{p}{q}$ / p e q $\in$ Z e q$\neq$0}, dos números racionais; - Apresenta o conjunto dos números irracionais (I), como o que contém todos os números que não são racionais. - Define o conjunto R como R = Q $\cup$ I. - Representa os reais na reta.
Hallett	- O autor não faz qualquer menção aos números reais.

Nessa consulta realizada, percebemos que os autores consideram que os números reais são objetos já conhecidos pelos alunos, pois a abordagem dada ao assunto foi, em geral, muito superficial. Dois dos sete autores visitados sequer definiram número real. Também não trabalharam noções importantes relacionadas aos números reais, nem por meio de exercícios. Ávila (1994) e Leithold (1977) foram os autores que mais dedicaram explicações referentes aos números racionais e irracionais, porém suas abordagens são semelhantes às que são feitas nas coleções de Matemática do Ensino Médio, conforme já expusemos neste capítulo.

Verificamos que o problema da circularidade persiste nos livros em que os autores forneceram uma definição para o conjunto dos números reais, assim como confirmamos o mesmo nos livros do Ensino Médio. O caminho utilizado pelos autores analisados foi definir os números racionais, seguidos dos números irracionais que são obtidos pela negação dos racionais. A união desses dois conjuntos define o conjunto dos números reais. Apesar da referência feita à medida, por meio da correspondência biunívoca dos números reais com os pontos da reta, esta não foi tomada como definição para o número real.

4.3.2
Nos livros indicados para aprofundamento do tema

Dos quatro livros que escolhemos para finalizar essa consulta, três são indicados como importantes fontes de consulta nos cursos de licenciatura e de formação continuada com o objetivo de aprofundar temas da matemática elementar, mas também com pretensões à matemática avançada. O quarto livro selecionado é um texto indicado para cursos de Análise Matemática para futuros professores de Matemática. Esta obra possibilita um equilíbrio entre a formalidade da Análise e os aspectos de interesses didáticos na formação do professor do ensino básico. As quatro obras didáticas escolhidas estão indicadas na Tabela 13:

Tabela 13: Livros de aprofundamento selecionados para consulta

autor	Título da obra
Bento de Jesus Caraça	*Conceitos fundamentais da Matemática*
Elon Lages Lima et al.[59]	*A Matemática no Ensino Médio*, volume 1
Courant e Robbins	*O que é Matemática?*
Geraldo Ávila	*Análise Matemática para Licenciatura*

Como o desenvolvimento do conceito de números reais é valorizado pelos quatro autores, julgamos relevante apresentar separadamente uma síntese para cada texto referente ao tema, possibilitando assim maior riqueza de detalhes.

Conceitos fundamentais da Matemática

Esse livro, além de ser considerado uma obra da matemática elementar, destaca a visão de Bento de Jesus Caraça sobre a matemática como construção humana.

> Seu livro *Conceitos fundamentais da matemática* influenciou gerações de educadores e constitui-se ainda em um referencial obrigatório para todos aqueles que desejem explorar a dimensão humanística da criação matemática. As discussões conceituais, aliadas às incursões históricas e filosóficas, contidas naquela obra, inspiraram muitos educadores e continuam ainda a fazer escola. (Medeiros; Medeiros, 2003, p.261)

Caraça (1998) apresenta a evolução dos conceitos de número, função e infinito, por meio de uma narrativa histórico-filosófica. Nosso foco acontece na primeira parte desse livro quando, após apresentar a construção dos números naturais, a partir do problema em relação à contagem, os números racionais e irracionais são abordados a partir do problema da medida.

O autor faz a construção do campo racional trabalhando com cuidado a operação da medição dos segmentos, a subdivisão da unidade e a insuficiência dos inteiros e o novo campo dos racionais significando a expressão numérica de medição dos segmentos. Ele desenvolve a propriedade de ordenação, a partir do estabelecimento das definições de igualdade e desigualdade. Trabalha o conceito das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e potenciação de expoente inteiro, radiciação e potenciação de expoente fracionário.

Apresenta a crítica sobre o problema da medida, chegando à conclusão de que o campo dos racionais é insuficiente para traduzir as relações geométricas. Parte então para um estudo cuidadoso de comparação entre as propriedades do

[59]Os outros três autores são Eduardo Wagner, Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho.

campo racional e as propriedades da reta.

Afirma que a correspondência entre o conjunto dos números racionais positivos ($\boldsymbol{Q_o^+}$) e os pontos da reta que estão à direita do zero (P_o) não é bijetiva o que se traduz na insuficiência dos números racionais, por conta da incomensurabilidade. Segue verificando todas as características do conjunto P_o, que são a infinidade, a ordenação, a densidade e a continuidade. Apresenta o conceito de corte e declara que é na resposta da pergunta "Sempre que se considerar na reta um corte, haverá um ponto que produza este corte?" que está o nó da questão da continuidade.[60]

A seguir, Caraça (1998) exemplifica com detalhes dois cortes. O primeiro racional, com as classes A (números racionais menores que 5 e o próprio 5) e B (números racionais maiores que 5). O segundo irracional, com as classes A (números racionais cujos quadrados são menores que 2) e B (números racionais cujos quadrados são maiores que 2). Conclui que há cortes no conjunto $\boldsymbol{Q_o^+}$ que não possuem um elemento de separação em $\boldsymbol{Q_o^+}$. Apresenta, então, o que chama de nova definição:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional. (Caraça, 1998, p. 60)

Declara que esses novos números, os reais, não são 'elementares' como os racionais, pois enquanto "para definir um número racional, bastam dois números naturais – o seu numerador e o seu denominador – para definir um número real são necessárias duas infinidades de números racionais" (ibidem, p. 60). Esclarece que quando os racionais são estudados em si, não há necessidade de recorrer à ideia de infinito, mas caso o contexto seja de número real, esta necessidade faz-se fundamental.

O autor dedica um capítulo chamado *Um pouco de história*. Faz uma apresentação do desenvolvimento histórico da Matemática e suas ideias fundamentais, desde as primeiras questões matemático-filosóficas até as novas preocupações atuais. A questão da incomensurabilidade é destacada e mostra a necessidade de um estudo cuidadoso versando sobre o infinito e o movimento. Ressalta que a continuidade "necessita de um estudo aprofundado, ligado com o

[60] Caraça (1998) traz em seu texto um trecho da obra do matemático Richard Dedekind (anexo 1), que mostra como Dedekind em 1872 tratou o conceito de continuidade, que é referenciada como axioma ou postulado da continuidade de Dedekind.

aspecto numérico, quantitativo, da medida" (ibidem, p. 77). O capítulo seguinte é dedicado ao estudo do campo real. Apresenta a classificação dos números reais em racionais e irracionais. Declara que, em geral, a operação radiciação é impossível no campo racional e desenvolve a questão: "Os números irracionais são todos da forma $\sqrt[n]{a}$?" Enfatiza que a definição dada para número real é independente da radiciação e faz uma exposição didática e cuidadosa sobre o número π. Além disso, estuda a correspondência número real e pontos da reta, que chama de *os dois contínuos* e disserta sobre os dois tipos de infinito, o numerável (enumerável) e o contínuo (não enumerável). Essa obra trata o estudo do campo numérico como consequência de uma evolução histórica, no qual o rigor e a preocupação com as definições são uma constante.

A Matemática no Ensino Médio

Esse livro tem como tema central as funções reais de uma variável real. O estudo é feito sem o uso do Cálculo Infinitesimal, pois seu objetivo é aprofundar aspectos da matemática elementar. Dessa forma, os autores anteriormente preparam esse estudo apresentando noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números — naturais e inteiros — e priorizam principalmente o conjunto dos números reais. No capítulo anterior aos números reais, os autores trazem um estudo sobre números cardinais, em que apresentam conjuntos finitos e infinitos.

A abordagem segue incrementando o processo de medição de grandezas contínuas, por meio da determinação do comprimento de um segmento de reta. Para isso, os autores apresentam a seguinte ordem: segmentos comensuráveis e incomensuráveis, a reta real, expressões decimais, desigualdades, intervalos, valor absoluto, sequências e progressões. Inicialmente traz a crise na escola pitagórica com a existência de segmentos incomensuráveis. Os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta, portanto, há a necessidade de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais. Destacamos sobre isso, a narrativa dos autores.

> A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo. Naquela época, em Crótona, sul da Itália, havia uma seita filosófica-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema "Os números governam o mundo". (Lembremos que números para eles eram números naturais, admitindo-se tomar razões entre esses números, formando as frações.). Uma

> enorme crise, que abalou os alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, toda a estrutura da Matemática grega, surgiu quando, entre os próprios discípulos de Pitágoras, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis. (Lima et al., 1996, p.53)

Eles apresentam essa demonstração da incomensurabilidade — dos segmentos diagonal e lado do quadrado — e afirmam, que fixada uma determinada unidade de comprimento, qualquer segmento tem associado a si uma medida numérica. Quando o segmento considerado é comensurável com esta unidade, sua medida é um número racional. Os números irracionais representam, então, medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. Dessa forma, todos os números racionais e os números irracionais formam o chamado conjunto dos números reais, denotado por R. A seguir, a reta real é definida com rigor e destacam que:

> o conjunto R pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de R. [...] a interpretação dos números reais como abscissas dos pontos de uma reta fornece uma visão intuitiva bastante esclarecedora sobre a soma $x + y$ e a relação de ordem $x < y$, como $x, y \in R$. (ibidem, p. 57).

Além disso, fazem uma breve exposição geométrica do produto x.y dos números reais x e y, e acrescentam que as construções geométricas referentes à soma e ao produto de números reais já eram conhecidas desde Euclides, porém esclarecem que, nesta época, as operações representavam operações sobre grandezas e não sobre números.

As expressões decimais infinitas são bem valorizadas nesse estudo. Explicam o significado de cada dígito e apresentam uma sequência infinita não decrescente de números racionais que são valores cada vez mais aproximados do número real em questão. Definem também que o número real é o limite de uma sequência com essas características e que o fato de existir sempre um número real que é o limite de uma sequência, conforme foi apresentada, é uma forma de dizer que o conjunto R é completo.

Lima et al. (1996) seguem esse estudo detalhado das sequências infinitas tomando os casos daquelas que terminam com infinitos zeros e também das que terminam com infinitos noves. Estabelecem que a dízima periódica $0,\overline{9}$ é o número 1 e, utilizando alguns exemplos, generalizam que toda a dízima periódica é um número racional. Apresentam a regra para obter a fração correspondente a uma dízima periódica qualquer e sintetizam com a equivalência*: x é racional* $\leftrightarrow$ *x pode ser representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou infinita e periódica*. Trazem um exemplo que utiliza o número irracional π e afirmam que, para se obter uma correspondência biunívoca entre as expressões decimais e os números reais, basta descartar as que terminam por uma sequência de noves. A seguir apresentam a relação de desigualdade $x < y$ entre números reais e suas propriedades e também definem intervalos e valor absoluto de um número real. Finalizam com uma breve exposição de sequências e mostram, como exemplos, as progressões aritmética e geométrica.

Uma das recomendações fornecidas ao longo do texto nos chama a atenção, pois se refere à questão da circularidade da definição do conjunto R[61]. Eles recomendam que não se deve adotar a atitude, como a maioria de nossos livros escolares fazem, de definir o conjunto dos números reais como $R=Q\cup I$, em que, o número racional pode ser expresso como quociente de dois inteiros e o número irracional é o número que não é racional. Enfatizam também que a maioria dos autores de livros didáticos não dizem o que entendem por "número", mas reconhecem que a apresentação rigorosa da teoria dos números reais foge inteiramente aos objetivos do Ensino Médio. Sobre essa indicação, declaram:

> quando se tem que falar sobre números reais para uma audiência matematicamente imatura, tem-se aí uma boa oportunidade para fazer ligação entre a Matemática e o cotidiano, apresentando-os como resultados de medições, como tentamos explicar aqui. (Lima et al., 1996, p. 72)

Sugerem, com esta recomendação, que se deva evitar a circularidade.

O que é Matemática?

Esse livro[62] é um dos clássicos da Matemática, escrito com didática e rigor e tem como público alvo todos aqueles que se interessam por Matemática. Os autores possibilitam uma boa compreensão de várias ideias fundamentais, entre elas, os sistemas de numeração e a álgebra dos conjuntos.

Os sistemas numéricos da matemática são apresentados no capítulo 2, iniciando com os números racionais como instrumento de medida. Os números

[61] Esta questão também foi enfatizada em Lima et al. (2001).
[62] Escrito em inglês por Richard Courant e Herbert Robbins, foi editado em 1941. A tradução desse livro conta com a cuidadosa revisão técnica do professor doutor João Bosco Pitombeira, professor emérito da PUC-Rio.

naturais e os inteiros são trabalhados no capítulo 1, fazendo parte de um contexto mais geral da teoria dos números. Afirmam que o primeiro passo está em reduzir o problema de medir ao problema de contar e fornecem vários exemplos concretos, concluindo que, quando m e n são números naturais, com n não nulo, o símbolo $\frac{m}{n}$ é denominado número racional. Sobre isso, afirmam que:

> a utilização da palavra número (originariamente significando apenas número natural) para estes novos símbolos é justificada pelo fato de que a adição e a multiplicação destes símbolos obedecem às mesmas leis que orientam as operações com números naturais. (Courant e Robbins, 2000, p. 62)

As operações entre os racionais são então definidas e as propriedades são apresentadas. Acrescentam também a necessidade intrínseca dos racionais na busca de soluções de equações do tipo *a.x=b*, e, a seguir, fornecem a interpretação geométrica dos números racionais, localizando-os na reta numérica. Enfatizam a distinção entre os termos, números racionais e pontos racionais. Apresentam a propriedade da ordenação e definem valor absoluto e, enunciam e mostram, de forma sucinta, que o conjunto de pontos racionais sobre a reta é denso e, ao definirem segmentos comensuráveis e incomensuráveis, e sobre a descoberta de segmentos incomensuráveis destacam:

> Esta revelação foi um acontecimento científico da maior importância. Muito possivelmente, ela marcou a origem do que consideramos ser a contribuição especificamente grega a procedimentos rigorosos na Matemática. Isto certamente afetou de modo profundo a Matemática e a Filosofia da época dos gregos até os dias atuais. (ibidem, p. 71)

Eles mostram que a diagonal de um quadrado é incomensurável com seu lado e que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Afirmam que o conjunto dos pontos racionais, embora denso, não cobre toda a reta numérica e manifestam que

> para uma pessoa ingênua, deve certamente parecer muito estranho e paradoxal que um conjunto denso de pontos racionais não cubra toda a reta. Nada em nossa “intuição” pode nos ajudar a “enxergar” os pontos irracionais como distintos dos racionais. (ibidem, p. 72)

As frações decimais e os números decimais infinitos são apresentadas e para exemplificar os números $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{2}$, definem e utilizam sequências de intervalos encaixados[63]. Estabelecem uma correspondência entre todos os pontos da reta numérica e todas as expressões decimais finitas e infinitas e afirmam que as expressões decimais infinitas que não representam números racionais são denominadas números irracionais. Mostram com atenção e por meio de exemplos, a relação das séries geométricas infinitas com as dízimas periódicas e abordam intuitivamente a noção de limite.

Importante enfatizar que os autores utilizam o algoritmo da divisão de Euclides, explicando que as divisões que produzem processos infinitos são as que geram as dízimas periódicas, e como exemplo, partem de uma dízima periódica com antiperíodo e chegam à sua fração geratriz correspondente. Afirmam a partir disso, que inversamente "pode ser demonstrado que todas as dízimas periódicas são números racionais" (ibidem, p. 80).

Diante do que foi exposto, acrescentam que é possível reformular a definição provisória, de "um número é um decimal finito ou infinito" para "o contínuo numérico ou o sistema de números reais é a totalidade das decimais infinitas" (ibidem, p. 81). Assim, as decimais finitas podem ser consideradas como um caso especial em que todos os dígitos, de uma certa casa decimal em diante, são todos iguais a zero, ou, pode-se também considerar as dízimas periódicas correspondentes aos mesmos números, em que todos os dígitos a partir de um ponto são iguais a nove. Declaram que os números racionais são as dízimas periódicas e os irracionais as dízimas não periódicas. Os autores julgam conveniente oferecer uma definição mais rigorosa do contínuo numérico, isto é, dos números reais. Para isso, consideram uma sequência de intervalos encaixados e a seguir, formulam um postulado que consideram básico na geometria:

> Correspondendo a cada uma destas sequências de intervalos encaixados existe precisamente um ponto sobre a reta numérica que está contido em todos eles [...] este ponto é por definição o número real, se não for um ponto racional, é chamado de número irracional (Courant; Robbins, 2000, p. 82).

A exposição do campo numérico dos reais é finalizada com outras duas formas de definir números reais. Uma delas é atribuída a Richard Dedekind, quando utilizou o conceito de corte, conforme foi abordado por Caraça (1998). Courant e Robbins (2000, p. 86) declaram que, filosoficamente, a definição de

---

[63] É uma sequência infinita qualquer de intervalos I_1, I_2', ..., I_n, ... sobre a reta numérica, com pontos extremos racionais, e com cada um contido no anterior, e de tal forma que o comprimento do n-ésimo intervalo I_n tenda à zero à medida que n aumenta. (ibidem, p. 81)

Dedekind de números irracionais "envolve um grau bastante elevado de abstração, uma vez que ela não coloca quaisquer restrições quanto à natureza da lei matemática que define as duas classes A e B". A outra definição refere-se às sequências convergentes de Cantor, que definem um número real como o limite de uma sequência de racionais que converge[64]. Os autores concluem que, partindo dessa definição, as operações entre essas sequências são fáceis de definir.

Análise Matemática para Licenciatura

Esse livro foi escrito especialmente para cursos de licenciatura em Matemática. Ávila (2001) acrescenta um capítulo sobre tópicos elementares de lógica e dois capítulos sobre números reais e não inclui as partes mais sofisticadas da continuidade. Uma atenção especial é dedicada ao desenvolvimento das ideias e dos aspectos históricos da disciplina.

O autor destaca o conjunto dos números racionais, em que cada elemento possui representação única, através das frações irredutíveis e com denominadores positivos. Faz a conversão de frações ordinárias em decimais para explicar que a representação decimal será um decimal finito ou uma dízima periódica e passa a admitir a existência de números cuja representação decimal não é nem finita, nem periódica: os *números irracionais*. Inventa regras para formar esses números e leva o leitor a criar outras. Resgata um exemplar importante, o número π, e enfatiza que apesar do fato de não vermos um período na sua expansão decimal, por maior que seja, isso não é suficiente para provar que π é irracional.

Ávila (2001) faz a demonstração de que não existe número racional, cujo quadrado seja 2. Diz que quando afirmamos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, estamos pressupondo que existe tal conjunto dos números irracionais. Ressalta que isso requer a construção lógica desses números e que o assunto será abordado mais adiante. Enuncia que um número real é racional ou irracional e encaminha os exercícios na busca da construção de infinitos irracionais**.**

Antes de falar sobre conjuntos enumeráveis, o autor recorre à História da Matemática, com George Cantor (1845-1918), quando se inicia a teoria axiomática dos conjuntos. Narra que, por volta de 1872, Cantor investigava a

[64] Os autores declaram que como existem muitas maneiras de aproximar o mesmo número real por uma sequência convergente de racionais, assume-se que duas sequências convergentes de racionais $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e $b_1, b_2, b_3, \ldots$ definem o mesmo número real se $a_n - b_n$ tende a zero à medida que n aumenta indefinidamente.

representação de funções por meio de séries trigonométricas e começou a estudar os pontos de descontinuidade de algumas funções. Isso possibilitou Cantor a iniciar uma investigação nos conjuntos infinitos, em sua generalidade. Nesse estudo, introduziu o conceito de equivalência de conjuntos[65]. Ávila (2001) demonstra que o conjunto dos números racionais é enumerável.

O autor atenta para o fato de que o aprendizado dos números irracionais pode deixar a ideia falsa de que esse conjunto seja bem reduzido, já que são apresentados como irracionais, apenas o π e alguns radicais. A demonstração de que R é não enumerável é feita nesse livro. Segue definindo segmentos comensuráveis e apresenta exemplos de segmentos incomensuráveis. O autor faz um breve histórico lembrando a Grécia antiga, quando os números que hoje chamamos de irracionais não existiam na Matemática grega, e quando as frações só apareciam de forma indireta, como razão entre duas grandezas e, por isso, não se escrevia na forma $\frac{a}{b}$. Também faz uma narrativa sobre a crise pitagórica e demonstra que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis. Também mostra outros modos de encontrar segmentos incomensuráveis, como por exemplo, utilizando o retângulo áureo. Explica que, com a crise, os gregos criaram uma teoria das proporções que só dependia dos números naturais[66]. O autor apresenta brevemente a teoria das proporções e a definição de Eudoxo[67] e afirma que a crise dos incomensuráveis atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, pois subordinou essas disciplinas aos estudos de Geometria.

Ávila (2001) esclarece que a Matemática volta a desenvolver-se extensamente a partir do século XVI até o início do século XIX e, mesmo sem ter uma teoria que embasasse os números irracionais, desenvolveram algumas propriedades, como por exemplo, $\sqrt{12}.\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$, enfim manipulavam os irracionais sem receio. Foi em meados do século XIX que os matemáticos

[65] Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca que leve elementos distintos de um conjunto, em elementos distintos do outro, ou seja, quando se estabelece uma bijeção entre os conjuntos. Daí vem a definição: Um conjunto A é finito quando existe um número natural n tal que A seja equipotente ao conjunto $F_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Um conjunto é infinito quando não for finito. Para conjuntos infinitos, a noção de "números de elementos de um conjunto" é o que se chama de cardinalidade. Tais números são chamados de transfinitos. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a **N** ou a seus subconjuntos.

[66] Para quem desejar detalhes, consultar a Revista do Professor de Matemática nº 7.

[67] Matemático e astrônomo ligado à escola de Platão (408-355 a.C.), criador dessa nova teoria.

começaram a sentir a necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. Entre os vários matemáticos que cuidaram da construção dos números reais, estão Richard Dedekind, Karl Weiertrass, Charles Méray e Georg Cantor, porém o autor esclarece que as teorias que permaneceram foram apenas as de Dedekind e Cantor. Explica que, baseado na definição de Eudoxo, Dedekind parece ter notado que o seu procedimento levava a uma separação dos números racionais em dois conjuntos e define assim, o conceito de corte.

Dedekind postula que os cortes que não são determinados por números racionais, dão origem aos números irracionais e observa que esses tais cortes representam a expressão aritmética da descontinuidade de Q. Com a junção desses novos elementos ao conjunto Q, obtém-se o conjunto R, dos números reais, que passa a ser um contínuo numérico, pois os irracionais preenchem as lacunas dessa descontinuidade.

Ávila (2001) ressalta que não basta apenas juntar a Q os novos elementos para obter R. É necessário que esse novo conjunto tenha a estrutura que dele se espera, isto é, precisam-se definir as operações usuais (adição e multiplicação), os elementos inversos dessas operações, a relação de ordem e todas as propriedades que valem no conjunto **Q**. Além disso, todas as definições devem ser compatíveis com a forma de se trabalhar no conjunto Q, mas, como exemplo, o autor define somente a relação de ordem e a adição. Esclarece no texto ainda, que está somente dando uma ideia dessa estrutura dos números reais[68] e lembra que a fundamentação dos sistemas numéricos ocorreu na ordem inversa: primeiro foram organizados os complexos, depois os reais, os racionais, os inteiros e, finalmente, os números naturais.

4.4
Inferências para nossa pesquisa

Podemos perceber, nesta etapa da pesquisa, que a questão da circularidade utilizada para definir os números reais nos livros de Ensino Médio ainda permanece na maioria das coleções de Matemática. Podemos afirmar tal fato, mesmo não tendo analisado todas as coleções, pois no estudo que realizamos em

[68] Sugere ver capítulo 28 do livro de Spivak ou o capítulo 1 do livro do Rudin.

Lima et al. (2001), verificamos que apenas duas, das 12 obras, mencionaram que os números reais representam resultados de medições.

Das coleções didáticas consultadas, apenas uma sugere implicitamente que o número real é uma expressão decimal finita ou infinita. As demais definem o conjunto dos números reais com a união dos racionais e dos irracionais, sem evidenciar a questão da medida. Em outras palavras, os números racionais expressam as medidas dos segmentos comensuráveis com a unidade de comprimento escolhida, e os números irracionais representam as medidas dos segmentos que são incomensuráveis com essa mesma unidade.

Além disso, as três coleções que analisamos definem número irracional antes de definir número real. Reconhecemos a dificuldade dos autores em relação à abordagem do tema números reais e também a tentativa em minimizar esse problema por parte dos autores das Coleções I e II. Essas duas obras trabalham a questão da incomensurabilidade, demonstram a irracionalidade do número $\sqrt{2}$, trazem mais exemplos de números irracionais e racionais para trabalhar o conceito de densidade, localizam números reais com diferentes representações na reta e exploram as noções relacionadas aos números reais em atividades diferenciadas.

Um aspecto que observamos em todas as coleções que analisamos e nas coleções analisadas por Lima et al. (2001) é a falta de explicações e comentários quando os autores apresentam como definição de números irracionais, todas as dízimas não periódicas, ou seja, todos os números com representação decimal infinita e não periódica. Segundo os autores, esta definição está correta, mas perde-se a oportunidade de enriquecer a compreensão do aluno sobre os números racionais e irracionais, pois a mesma não vem acompanhada de qualquer comentário ou explicação.

Entendemos que não é difícil para o professor do Ensino Médio mostrar aos seus alunos que todo número racional pode ser representado por uma expressão decimal finita ou uma dízima periódica e que reciprocamente números com tais desenvolvimentos decimais são necessariamente racionais. Como esses fatos não são esclarecidos nas coleções analisadas, quando se define que um número irracional, não pode ser representado como uma razão entre dois números inteiros, a informação fica isolada, por isso, defendemos que é preciso relacionar os fatos matemáticos e mostrar que uns são decorrências lógicas de outros.

Outra situação que evidenciamos é o pouco trabalhado realizado com as representações decimais no capítulo referente aos conjuntos numéricos. Não se utilizam decimais finitos com muitas casas decimais e as dízimas periódicas apresentadas possuem todas, sem exceção, períodos com poucas casas decimais. Além disso, fica subtendido, por exemplo, que os números decimais infinitos da forma 0,12121212... são periódicos e os da forma 0,121221222... são não periódicos, quando na realidade não podemos afirmar nada sobre esses dois números[69], uma vez que se conhecem somente algumas primeiras casas decimais. O aspecto operacional dos números reais é pouco trabalhado, principalmente com os números decimais infinitos; Nesse contexto, o uso da calculadora e o conceito de aproximação são fundamentais.

Na consulta feita aos livros de Cálculo, pudemos perceber que os números reais ou são tidos como já estudados ou como posteriormente serão vistos em algum curso de Análise Matemática. Afirmamos isso, pois não observamos nenhuma abordagem que aprofundasse o tema em relação ao que se faz nos livros didáticos do Ensino Médio, porém nos quatro livros que selecionamos como obras que aprofundam o tema, Caraça (1998), Lima et al. (1996), Courant e Robbins (2000) e Ávila (2001), avaliamos que todas fornecem um tratamento merecido aos números reais. Três delas apresentam o número real como representante numérico de qualquer medida e apenas Ávila (2001) recai na circularidade da definição, ao apresentar os números reais, porém deixa isso claro para o leitor.

Entendemos que, torna-se necessário que o futuro professor tenha acesso a essas obras que aprofundam o tema, resgatando fatos históricos e fazendo conexões com as dificuldades matemáticas encontradas ao longo dessa longa jornada da construção do conceito de número real. Caso contrário, não será possível sair do lugar comum de definir número real como a união dos racionais com os irracionais, como acontece hoje no Ensino Médio.

São muitos os caminhos que poderíamos priorizar para trabalhar com os números reais no Ensino Médio, pois é um tema abrangente que envolve muitos conceitos matemáticos importantes, alguns até avançados para este nível de ensino. O objetivo de nossa pesquisa, entretanto, foi observar e refletir sobre como é possível explorar o conteúdo números reais com alunos da 3ª série do

[69] A não ser que seja usada uma notação de dízima periódica no primeiro caso e, explicada a lei de formação para as próximas casas para o segundo caso. Nesse caso, não haverá essa incerteza.

Ensino Médio, identificando suas imagens conceituais, quando são estimulados a escrever ou falar sobre o assunto. Supusemos que esses alunos tivessem algumas imagens, relacionadas aos números reais, por isso concentramos nossa pesquisa no que os participantes tinham a dizer sobre o assunto.

Dessa forma, optamos por não abordar a relação entre números reais e medidas. Em primeiro lugar, porque não era nossa intenção fazer uma intervenção didática no sentido da superação dos muitos obstáculos ocasionados pelas omissões no trato com os números reais, tanto no ensino Fundamental como no Médio. Nem professores nem autores de livros didáticos superam essa difícil tarefa de fugir da circularidade do conceito de número real, por conseguinte esperávamos que os alunos tivessem pouco a dizer sobre o conceito de número real como resultado de medições. Em segundo lugar, porque o enfoque representativo e operacional dos números reais possibilitariam o surgimento de um maior leque de imagens e impressões vindos dos registros dos alunos.

É importante ressaltar que o objetivo da pesquisa era fazer emergir as imagens que os alunos haviam construído ao longo de sua escolaridade. Temos consciência, no entanto, de que a metodologia escolhida é propícia para gerar situações de conflito nos alunos e que estas poderiam ocasionar a superação de alguns desses obstáculos. Por esse motivo, ficamos atentos a esses conflitos e ao que foi gerado por eles.