

6 Aplicações numéricas

Neste capítulo, a norma de diferença relativa entre dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} é expressa por

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{\frac{\sum_i (A_i - B_i)(A_i - B_i)}{\sum_i B_i B_i}} \quad (6-1)$$

sendo i o índice referente ao número de elementos do vetor.

A norma de diferença relativa entre duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} é dada por

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (A_{ij} - B_{ij})(A_{ij} - B_{ij})}{\sum_i \sum_j B_{ij} B_{ij}}} \quad (6-2)$$

e a norma do erro de simetria de uma matriz quadrada \mathbf{A} é expressa por

$$\|sim(\mathbf{A})\| = \frac{1}{4N(N-1)} \frac{\sum_i \sum_j |(A_{ij} - A_{ji})|}{\sum_i \sum_j A_{ii} A_{jj}} \quad (6-3)$$

sendo N a dimensão da matriz quadrada e os índices i e j referentes ao número de linhas e colunas das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} .

6.1 Comportamento da base \mathbf{V} para um problema transiente de potencial considerando material com gradação funcional

Considere o problema de condução de calor apresentado em [13], em que um quadrado de lado unitário, ilustrado na Figura 6.1-a, apresenta propriedades de calor específico c e coeficiente de condutividade k variando

segundo as expressões

$$c = e^{3Z} \tag{6-4}$$

$$k = 5e^{3Z} \tag{6-5}$$

como ilustrado na Figura 6.2-b.

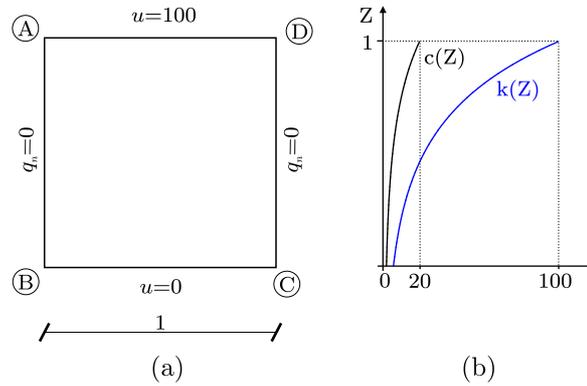


Figura 6.1: a) Estrutura analisada e suas condições de contorno b) Variação das propriedades do material

Esse problema encontra-se resolvido pelo MHSTEC em [13], em que foi utilizada uma malha de 80 elementos lineares igualmente espaçados. Quando do cálculo dos elementos indeterminados da matriz \mathbf{U}^* pela Equação (5-12), verificou-se que o numerador e o denominador desta assumem valores nulos em dois pontos do contorno, como ilustra a Figura 6.2. Nestes pontos, os valores indeterminados de \mathbf{U}^* foram calculados através de uma interpolação quadrática utilizando-se valores adjacentes.

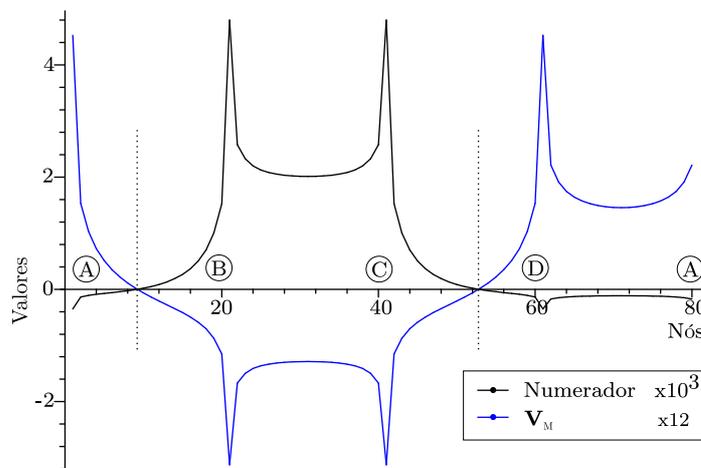


Figura 6.2: Estrutura analisada

Então, como mencionado na Seção 4.2.2, a base \mathbf{V} também pode assumir valores muito pequenos ou nulos em problemas envolvendo material com gradação funcional.

6.2

Problema de potencial em regime permanente para um contorno convexo de 6 lados, sujeito a uma força de massa

Considere um problema de condução de calor no corpo de 5 lados da Figura 6.3, de material homogêneo com constante de condutividade $k = 1$.

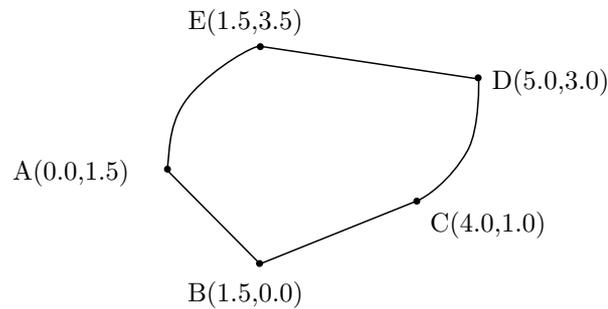


Figura 6.3: Corpo analisado

Considere também que esse corpo está sujeito a uma fonte interna

$$Q = 12.5 \operatorname{sen}(2.5 x_1) + 12.5 \operatorname{cos}(2.5 x_2) \quad (6-6)$$

e ao campo potencial

$$u = -\frac{25}{\pi} \ln[(x_1 + 3)^2 + (x_2 - 6)^2] + 2 \operatorname{sen}(2.5 x_1) + 2 \operatorname{cos}(2.5 x_2) \quad (6-7)$$

ilustrados na Figura 6.4 juntamente com os campos de fluxo nas direções x_1 e x_2 .

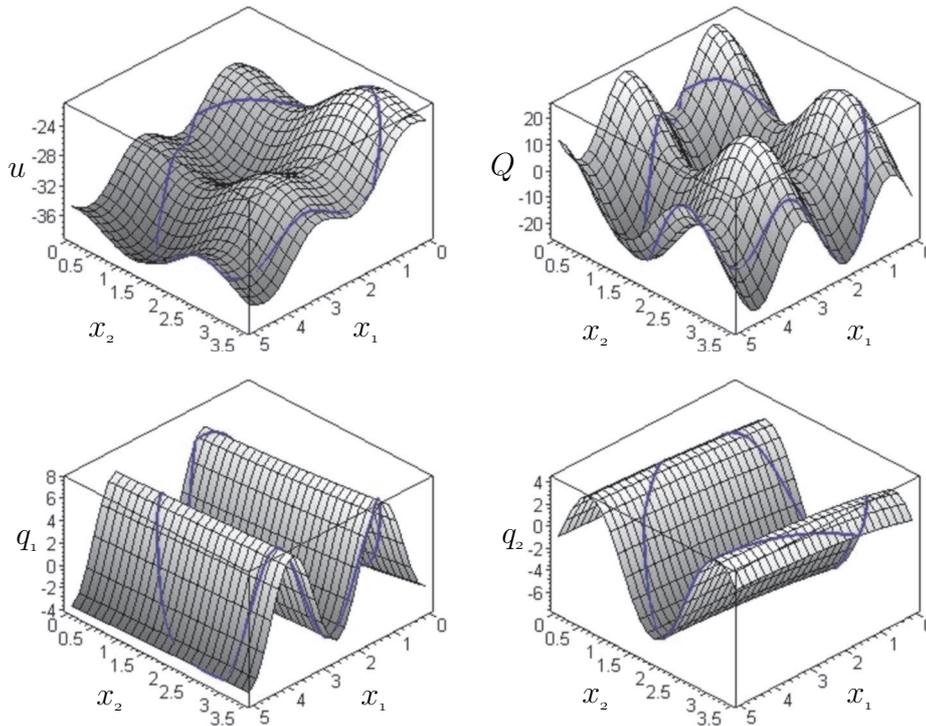


Figura 6.4: Força de massa, campo de potencial, campo de fluxo nas direções x_1 e x_2

Esse problema foi resolvido para condições de contorno de Neumann e Dirichlet pelos métodos MCEC, MCCEC, MHTEC, MHDEC, MHSTEC, MHSDEC e MHMREC. Os parâmetros \mathbf{d}^b e \mathbf{p}^b foram obtidos a partir da solução particular

$$u^b = 2 \sin(2.5x_1) + 2 \cos(2.5x_2) + 1 \quad (6-8)$$

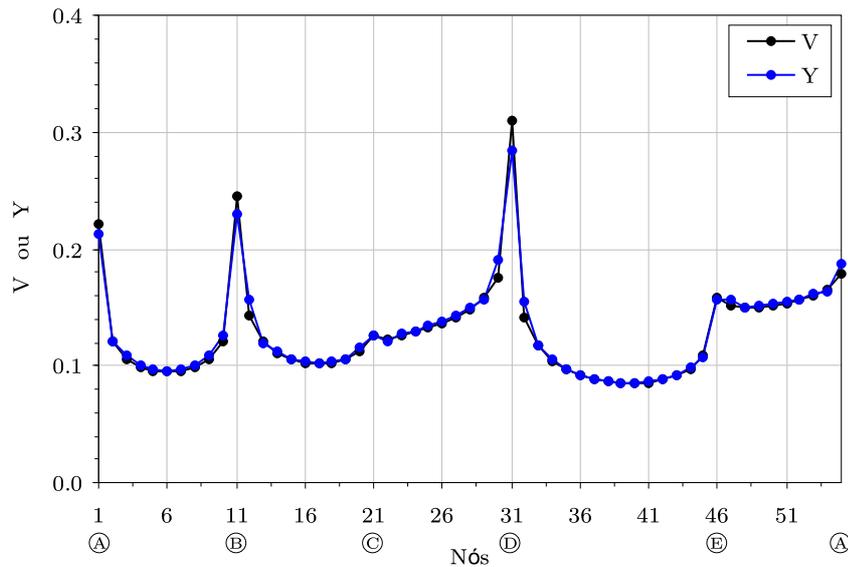
Foram utilizados elementos lineares e foram adicionados 1 grau de liberdade de fluxo normal em cada nó do contorno a fim de representar descontinuidades, apesar destes serem necessários apenas nos cantos. Na Tabela 6.1 estão apresentadas as 5 malhas para as quais o problema foi analisado.

6.2.1 Bases \mathbf{V} e \mathbf{Y}

Na Figura 6.5 estão apresentados os valores das bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5, calculados a partir das Equações (4-44) e (4-83), respectivamente.

Lado	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
A-B	2	4	6	8	10
B-C	2	4	6	8	10
C-D	2	4	6	8	10
D-E	3	6	9	12	15
E-A	2	4	6	8	10
Total	11	22	33	44	55

Tabela 6.1: Número de elementos por lado nas 5 malhas analisadas

Figura 6.5: Valores de \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5

Nota-se que não há valores muito pequenos ou nulos e portanto, não há quocientes indeterminados quando do cálculo dos valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* . Como esperado, nota-se a semelhança entre as duas bases, já que representam aproximadamente os mesmos espaços.

Verifica-se que a diferença entre as bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} diminui com a discretização do contorno, segundo o gráfico da Figura 6.6.

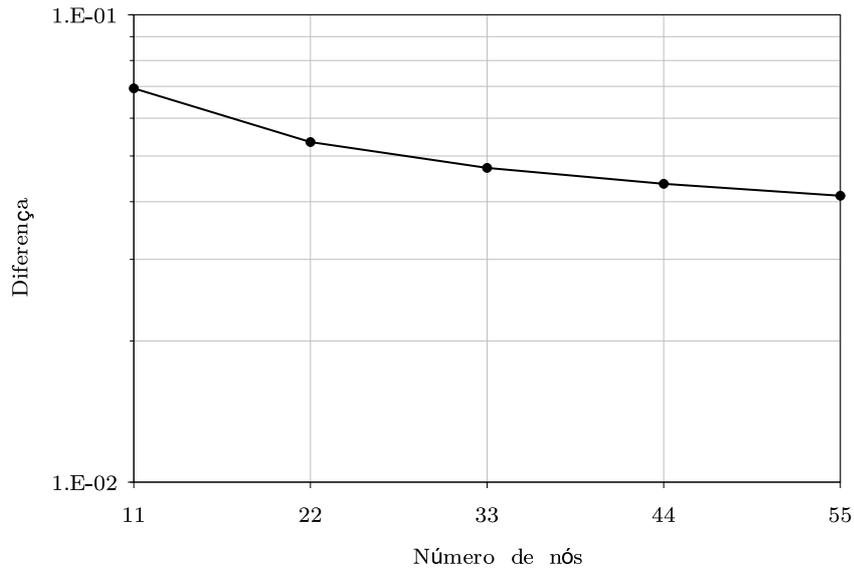


Figura 6.6: Diferença entre as bases de \mathbf{V} e \mathbf{Y} para as diversas malhas

6.2.2

Valores indeterminados de \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^*

Como as bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} não assumem valores nulos ou muito pequenos, os valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* podem ser calculados pelas Equações (4-23), (4-62), (5-77) e (5-78). No entanto, esses valores também estão calculados pelas Equações (5-44), (5-68), (5-88) e (5-94) a fim de verificar numericamente tais relações.

6.2.2.1

Verificação da relação $\mathbf{H}\mathbf{U}^* \approx \mathbf{F}$

Considere que os valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{U}^* estão calculados a partir dos critério de ortogonalidade em relação à base \mathbf{V} pelas Equações (4-23) e (5-7). Como apresentado na Figura 6.7 para a curva de legenda V, o erro entre as matrizes $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ e \mathbf{F} diminui com o aumento da discretização, apresentando valores de 1.1% para a Malha 1 e 0.3% para a Malha 5.

Na curva de legenda MQ, os valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{U}^* estão calculados por mínimos quadrados a partir da Equação (5-44). Verifica-se, então, que o resíduo desta equação também diminui com o aumento da discretização, apresentando valores 1.0% para a Malha 1 e 0.1% para a Malha 5, valores estes menores mas próximos aos obtidos para a curva V.

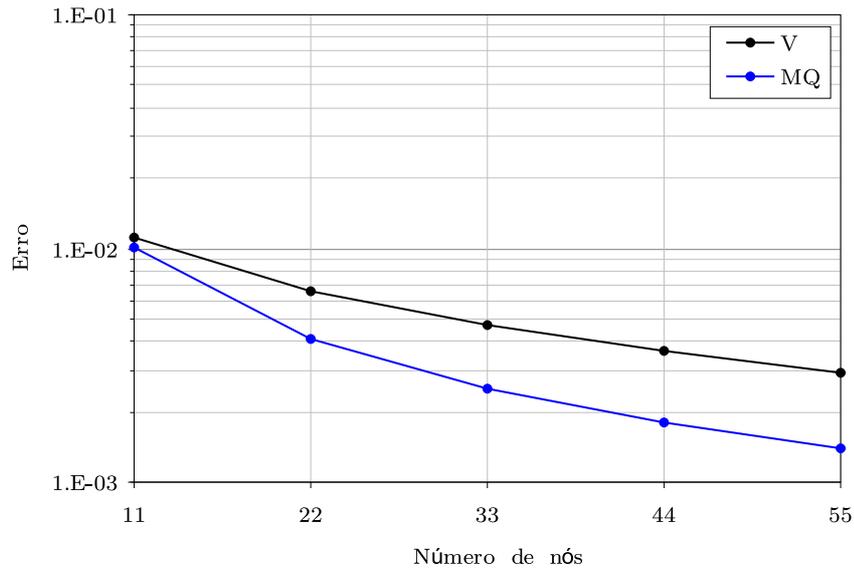


Figura 6.7: Erro entre as matrizes $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas

Como a matriz \mathbf{F} é simétrica, espera-se que o produto $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ também tenda à simetria. Na Figura 6.8, está apresentado o erro de simetria da matriz $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$.

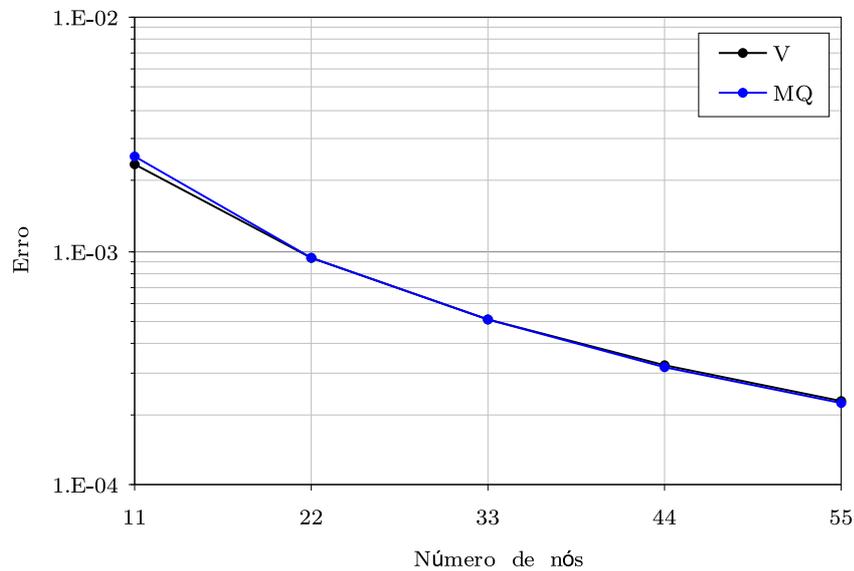


Figura 6.8: Erro de simetria da matriz $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ para as diversas malhas

6.2.2.2

Verificação da relação $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \approx \mathbf{F}$

Considere que os valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{T}^* estão calculados a partir dos critério de ortogonalidade em relação à base \mathbf{Y} pelas Equações (4-62) e (5-56). Como apresentado na Figura 6.9 para a curva de legenda Y, o erro entre as matrizes $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$ e \mathbf{F} diminui com o aumento da discretização, apresentando valores de 15.5% para a Malha 1 e 7.1% para a Malha 5.

Na curva de legenda MQ, os valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{T}^* estão calculados por mínimos quadrados a partir da Equação (5-68). Verifica-se, então, que o resíduo desta equação mantém-se aproximadamente constante com o aumento da discretização, apresentando valores em torno de 49%.

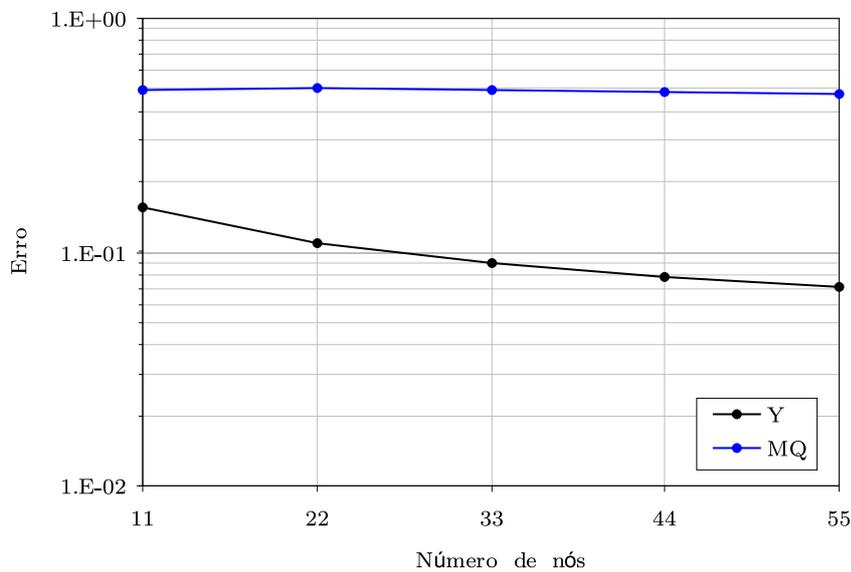


Figura 6.9: Erro entre as matrizes $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas

Como a matriz \mathbf{F} é simétrica, espera-se que o produto $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$ também tenda à simetria. Na Figura 6.10, está apresentado o erro de simetria da matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$, de valores 2.3% para a Malha 1 e 0.7% para a Malha 5 da curva V e 6.8% para a Malha 1 e 1.9% para a Malha 5 da curva MQ. Verifica-se que a matriz tende à simetria.

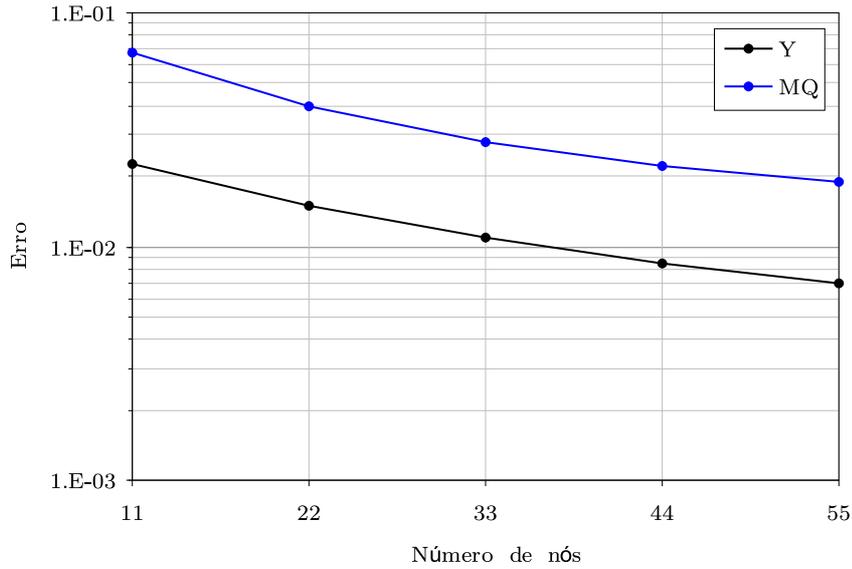


Figura 6.10: Erro de simetria da matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{T}^*$ para as diversas malhas

Devido ao erros elevados apresentados na Figura 6.9, conclui-se que a relação da Equação (5-68) não é válida para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{T}^* .

6.2.2.3

Verificação da relação $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{L} \mathbf{U}^* \approx \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{G}^T$

Considere que os valores indeterminados da matriz \mathbf{U}^* estão calculados a partir do critério de ortogonalidade em relação à base \mathbf{Y} pela Equação (5-78). Como apresentado na Figura 6.11 para a curva de legenda Y, o erro entre as matrizes $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{L} \mathbf{U}^*$ e $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{G}^T$ diminui com o aumento da discretização, apresentando valores de 10.0% para a Malha 1 e 4.5% para a Malha 5.

Na curva de legenda MQ, os valores indeterminados de \mathbf{U}^* estão calculados por mínimos quadrados a partir da Equação (5-88). Verifica-se, então, que o resíduo desta equação também diminui com o aumento da discretização, apresentando valores de 11.8% para a Malha 1 e 3.8% para a Malha 5, valores próximos aos obtidos para a curva Y.

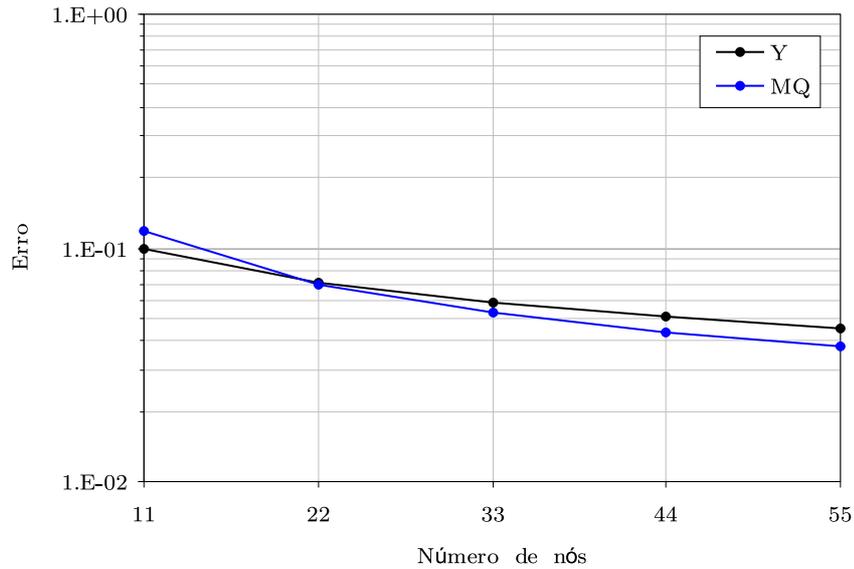


Figura 6.11: Erro entre as matrizes $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{U}^*$ e $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T$ para as diversas malhas

Devido ao erros elevados apresentados na Figura 6.11, conclui-se que a relação da Equação (5-88) não é válida para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* .

6.2.2.4

Verificação da relação $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \approx \mathbf{H}^T$

Considere que os valores indeterminados da matriz \mathbf{T}^* estão calculados a partir do critério de ortogonalidade em relação à base \mathbf{V} pela Equação (5-77). Como apresentado na Figura 6.12 para a curva de legenda V, o erro entre as matrizes $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$ e \mathbf{H}^T mantém-se aproximadamente constante com o aumento da discretização, apresentando valores em torno de 39%.

Na curva de legenda MQ, os valores indeterminados de \mathbf{T}^* estão calculados por mínimos quadrados a partir da Equação (5-94). Verifica-se, então, que o resíduo desta equação também mantém-se aproximadamente constante com o aumento da discretização, apresentando valores em torno de 32%.

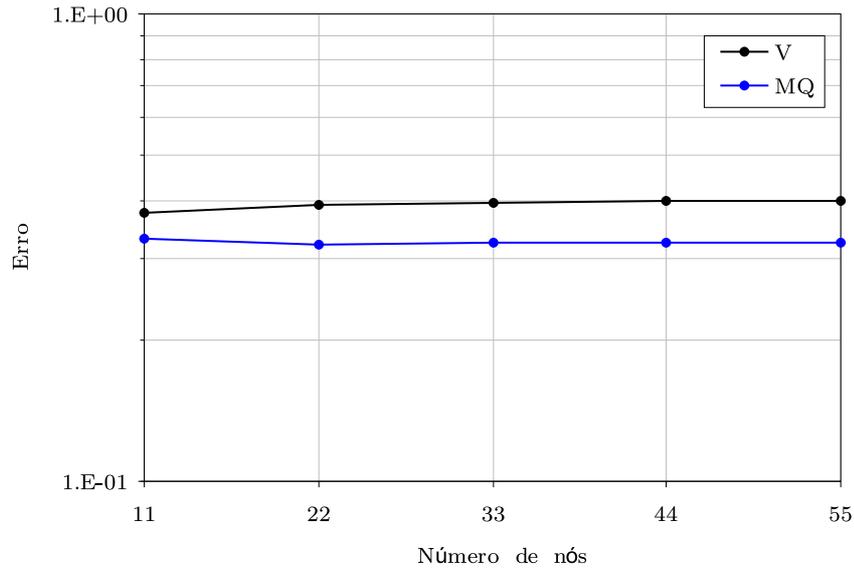


Figura 6.12: Erro entre as matrizes $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^*$ e \mathbf{H}^T para as diversas malhas

Devido ao erros elevados apresentados na Figura 6.12, conclui-se que a relação da Equação (5-94) não é válida para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* .

6.2.2.5 Valores indeterminados de \mathbf{F}

Na Figura 6.13, estão apresentados os valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5. As curvas de legenda MHT-V, MHT-MQ, MHD-Y, MHD-MQ foram obtidas a partir das Equações (4-23), (5-44), (4-62) e (5-68), respectivamente.

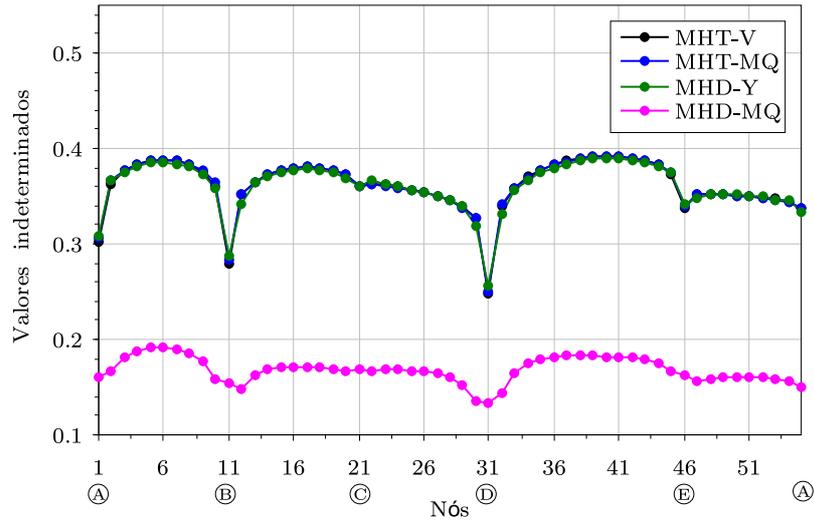


Figura 6.13: Valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5

Na Figura 6.14, estão apresentadas as diferenças dos valores indeterminados das curvas MHT-MQ, MHD-Y e MHD-MQ em relação aos valores da curva MHT-V para as diversas malhas.

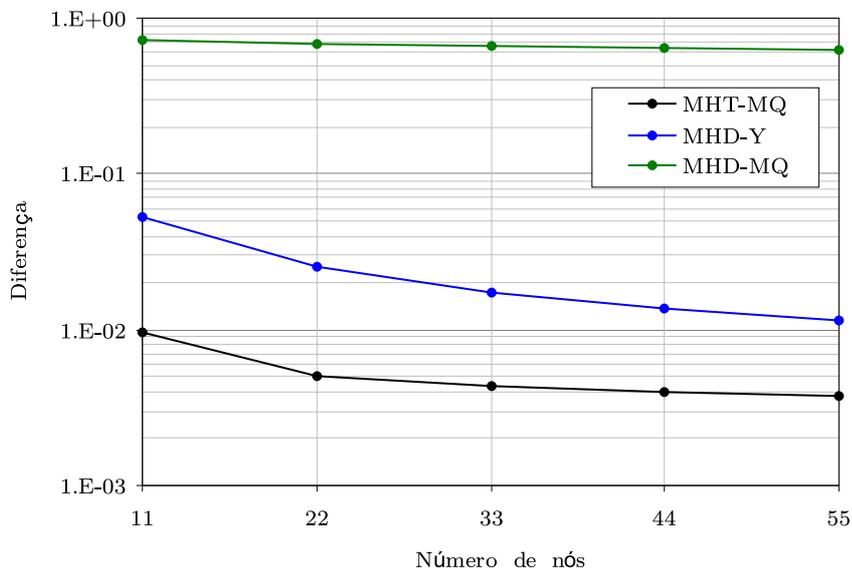


Figura 6.14: Diferença entre os valores indeterminados de \mathbf{F} em relação aos valores indeterminados de \mathbf{F} obtidos a partir de $\mathbf{FV} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas

Pode-se observar que, como já analisado na Seção 6.2.2.2, a Equação (5-68) não é válida para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{F} .

6.2.2.6

Valores indeterminados de \mathbf{U}^*

Na Figura 6.15, estão apresentados os valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5. As curvas de legenda MHT-V, MHT-MQ, MHD-Y, MHD-MQ foram obtidas a partir das Equações (5-7), (5-44), (5-78) e (5-88), respectivamente.

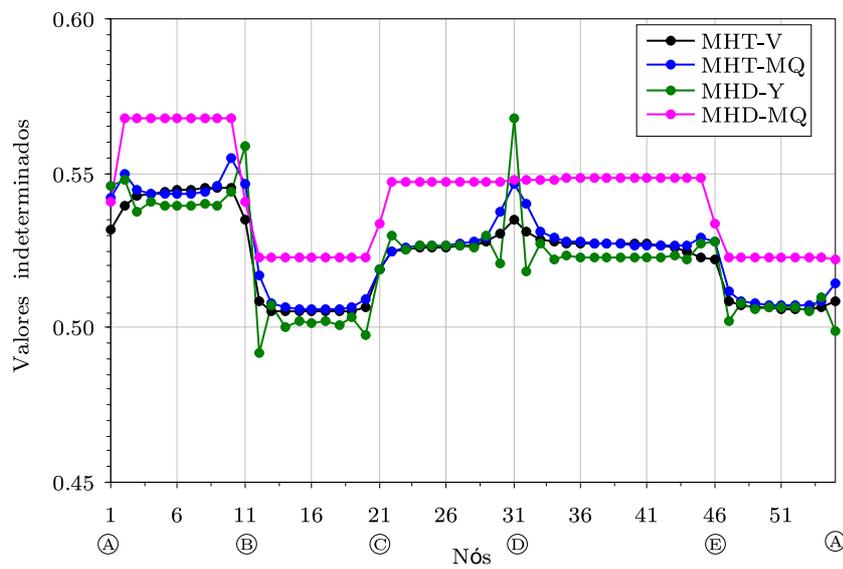


Figura 6.15: Valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5

Na Figura 6.16, estão apresentadas as diferenças dos valores indeterminados das curvas MHT-MQ, MHD-Y e MHD-MQ em relação aos valores da curva MHT-V para as diversas malhas.

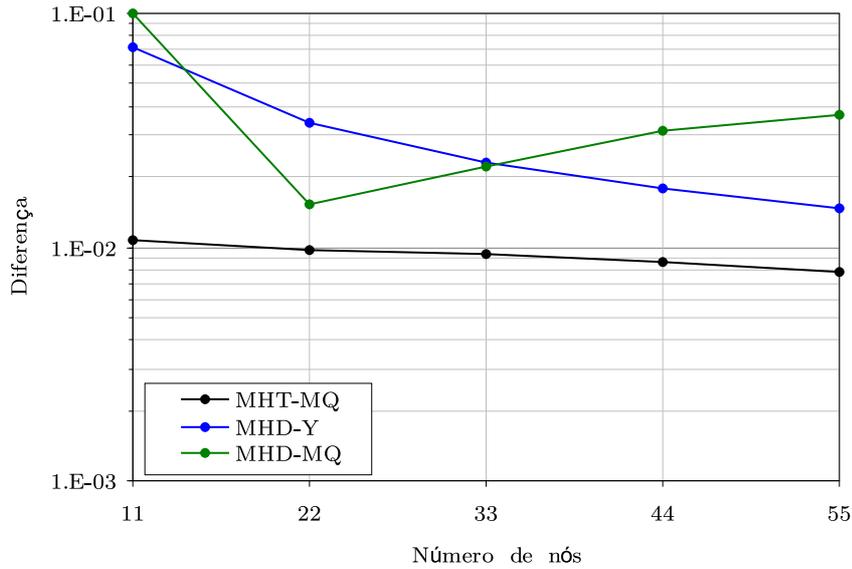


Figura 6.16: Diferença entre os valores indeterminados de \mathbf{U}^* em relação aos valores indeterminados de \mathbf{U}^* obtidos a partir de $(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas

Pode-se observar que, como já analisado na Seção 6.2.2.3, a Equação (5-88) não é válida para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* .

6.2.2.7

Valores indeterminados de \mathbf{T}^*

Na Figura 6.17, estão apresentados os valores indeterminados de \mathbf{T}^* ao longo do contorno para a Malha 5. As curvas de legenda MHT-V, MHT-MQ, MHD-Y, MHD-MQ foram obtidas a partir das Equações (5-77), (5-94), (5-56) e (5-68), respectivamente.

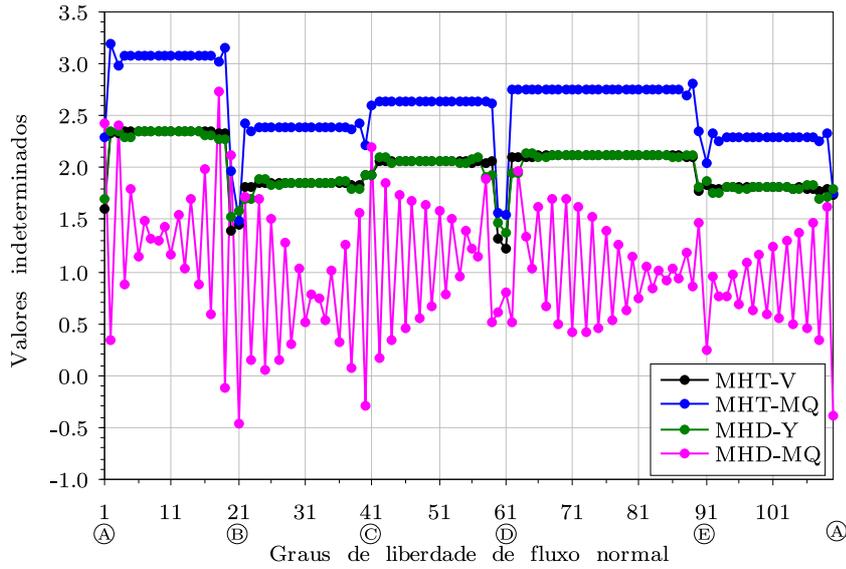


Figura 6.17: Valores indeterminados de T^* ao longo do contorno para a Malha 5

Na Figura 6.18, estão apresentadas as diferenças dos valores indeterminados das curvas MHT-MQ, MHD-Y e MHD-MQ em relação aos valores da curva MHT-V para as diversas malhas.

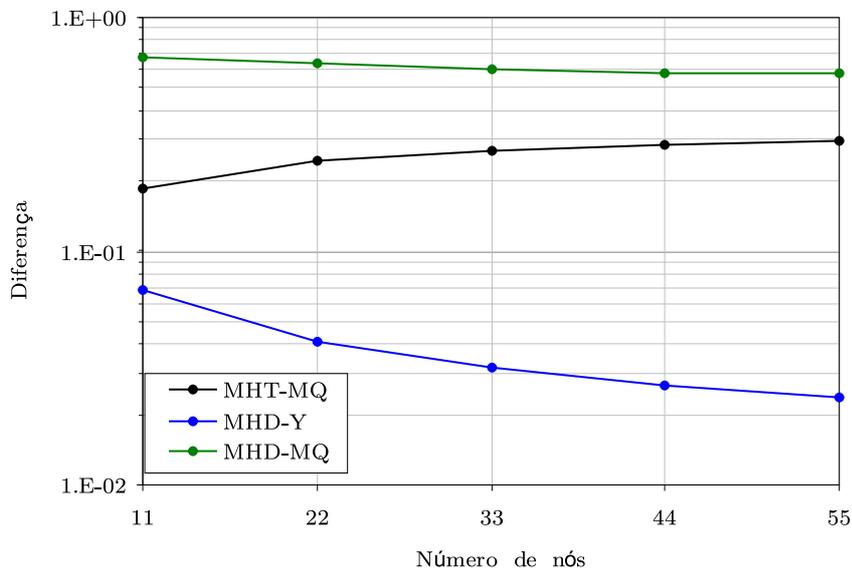


Figura 6.18: Diferença entre os valores indeterminados de T^* em relação aos valores indeterminados de T^* obtidos a partir de $T^* \mathbf{V} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas

Pode-se observar que, como já analisado nas Seções 6.2.2.2 6.2.2.4, as Equações (5-68) e (5-94) não são válidas para o cálculo dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* .

6.2.3 Matriz de rigidez

Na Figura 6.19, está apresentada a diferença entre as matrizes \mathbf{K}_C e \mathbf{K}_{CC} dos métodos MCEC e MCCEC, respectivamente. Para esse problema, essas matrizes apresentam uma diferença que tende a diminuir com o aumento da discretização.

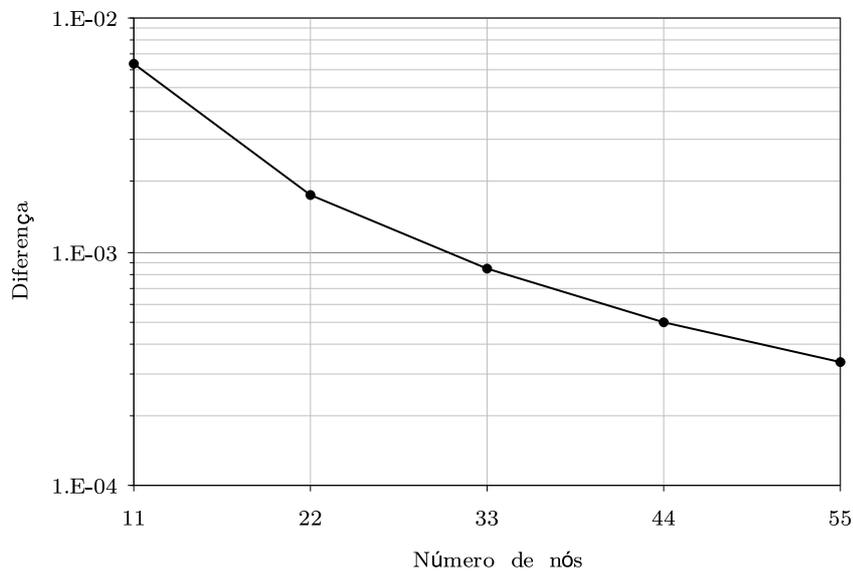


Figura 6.19: Diferença da matriz \mathbf{K}_C em relação à matriz \mathbf{K}_{CC} para as diversas malhas

Na Figura 6.20 está apresentada a diferença das matrizes de rigidez dos métodos MHTEC, MHSTEC, MHDEC, MHSDEC e MHMREC em relação à matriz de rigidez do MCCEC. A denominação V na legenda indica que os elementos indeterminados das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* foram calculados a partir das Equações (4-23) e (5-77). A denominação Y, por sua vez, indica que foram calculados a partir das Equações (4-62) e (5-78). A denominação MQ indica que os elementos indeterminados das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{U}^* foram determinados a partir da Equação (5-44). Observa-se que as diferenças tendem a um valor constante com o aumento da discretização.

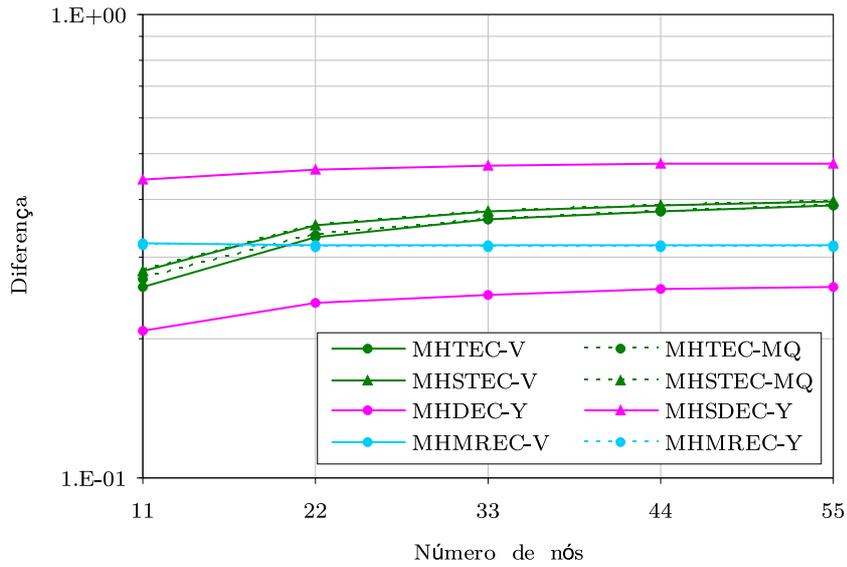


Figura 6.20: Diferença da matriz \mathbf{K} em relação à matriz \mathbf{K}_{CC} para as diversas malhas

Na Figura 6.21 está apresentado o erro de simetria das matrizes de rigidez de cada método para cada malha. Verifica-se que todas tendem à simetria com o aumento da discretização.

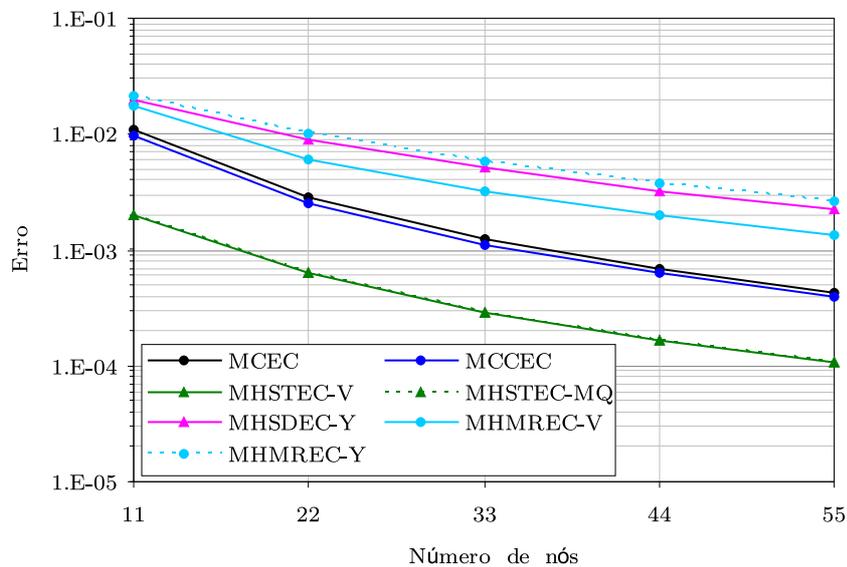


Figura 6.21: Simetria da matriz \mathbf{K} para as diversas malhas

6.2.4 Vetor de constantes C

Na Figura 6.22, estão apresentados os valores da constante C ao longo do contorno para a Malha 5. A curva de legenda C_c refere-se aos valores obtidos para C_C na Equação (3-32) e a de legenda C_{γ} aos valores C_{Γ} obtidos na Equação (5-24). Nota-se que as curvas são parecidas mas não idênticas.

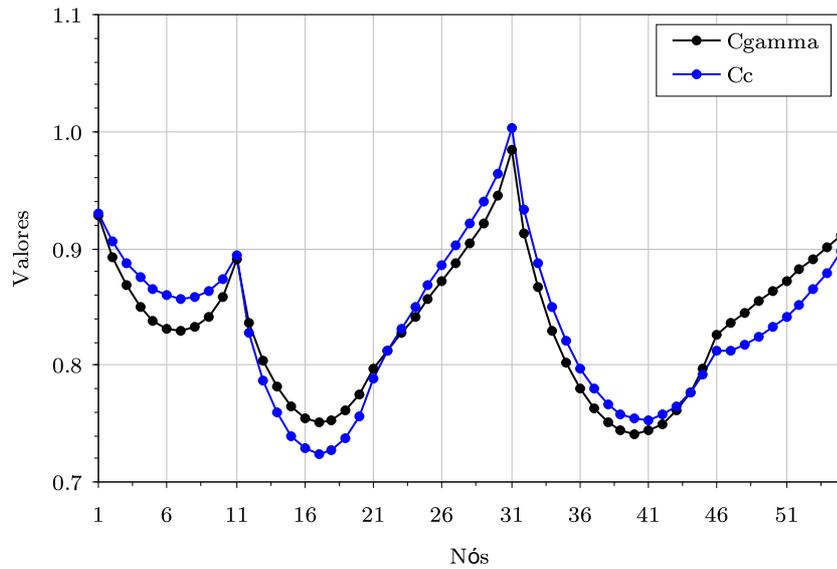


Figura 6.22: Valores de C ao longo do contorno para a Malha 5

Na Figura 6.22, está apresentada a diferença entre os valores das constantes C_C e C_{Γ} . Nota-se que a diferença entre esses valores tendem ao valor constante de 2.3%.

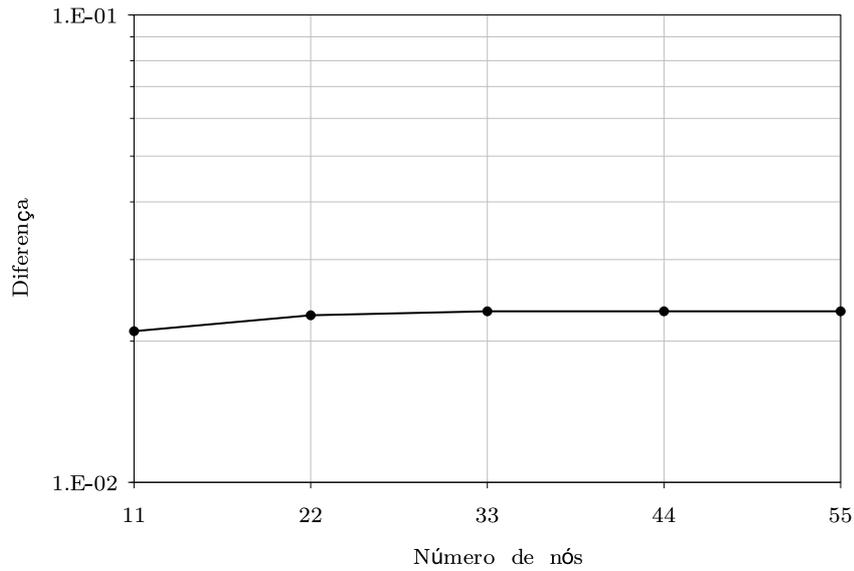


Figura 6.23: Diferença entre os valores de C para as diversas malhas

6.2.5

Resultados de potencial e fluxo normal equivalente para condições de contorno de Neumann e Dirichlet

Nas Figuras 6.24 e 6.25 estão apresentados os valores de potencial e fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5, considerando condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

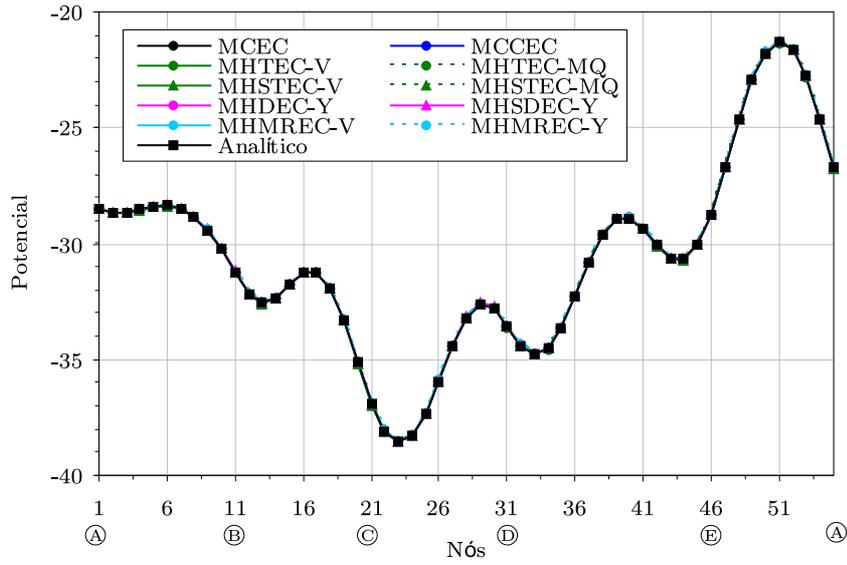


Figura 6.24: Valores de potencial ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Neumann

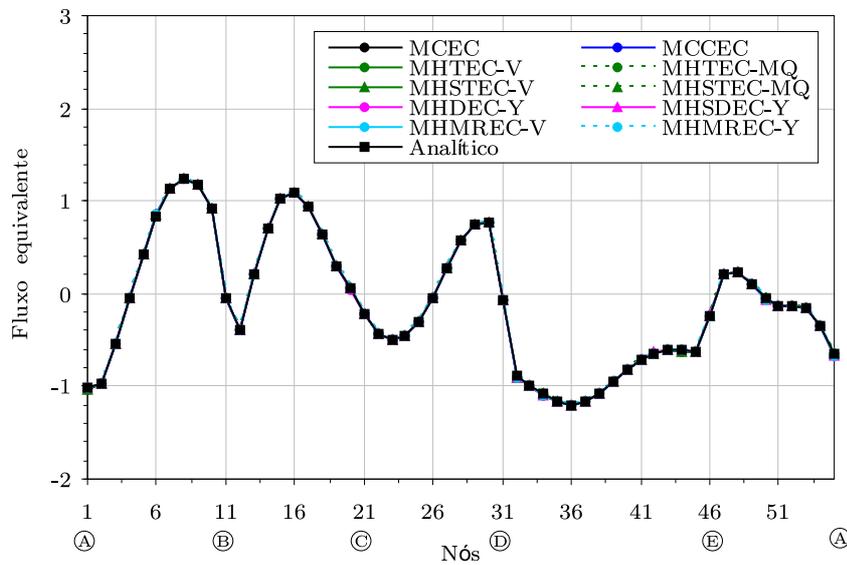


Figura 6.25: Valores de fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Dirichlet

Nas Figuras 6.26 e 6.27 estão apresentados os erros em relação aos valores analíticos do potencial projetado no espaço ortogonal ao dos deslocamentos de corpo rígido e do fluxo normal equivalente para cada malha, para condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

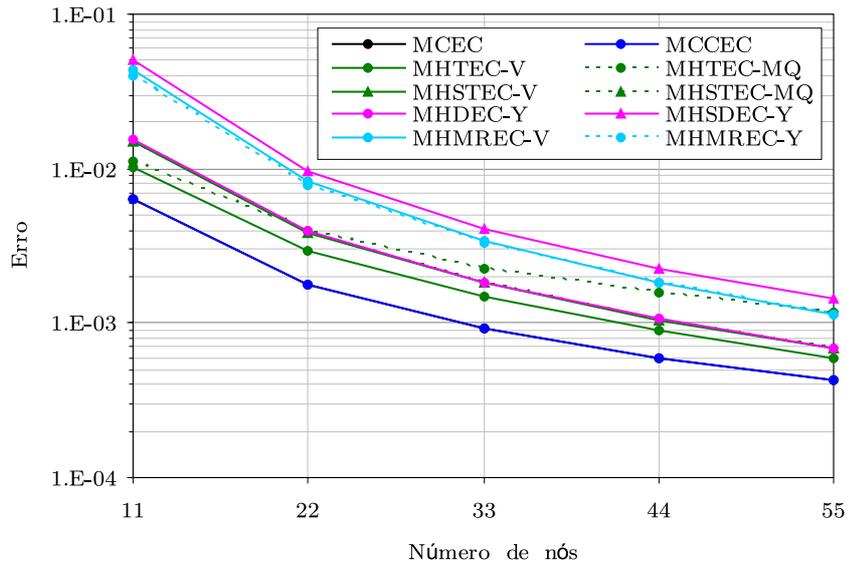


Figura 6.26: Erro dos valores de potencial projetados no espaço ortogonal ao dos deslocamentos de corpo rígido para cada malha e para condição de contorno de Neumann

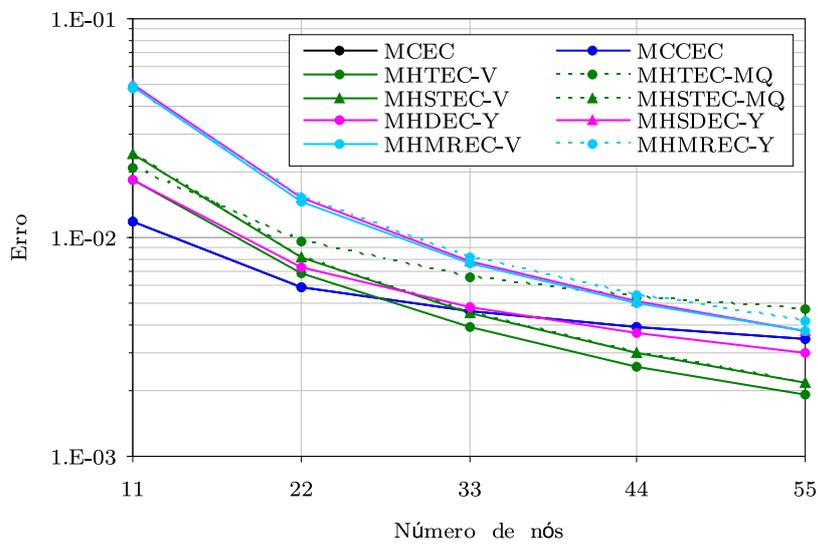


Figura 6.27: Erro dos valores de fluxo equivalente para cada malha e para condição de contorno Dirichlet

6.3

Problema de potencial em regime permanente para um contorno de 8 lados com concavidade, sujeito a uma força de massa

Considere um problema de condução de calor no corpo de 8 lados da Figura 6.28, de material homogêneo com constante de condutividade $k = 1$.

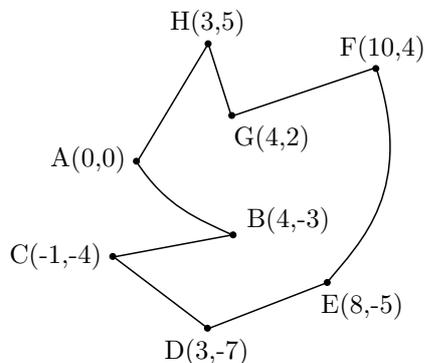


Figura 6.28: Corpo analisado

Considere também que esse corpo está sujeito à mesma fonte interna e ao mesmo campo potencial ilustrados na Figura 6.4 do problema apresentado na seção anterior.

Esse problema foi resolvido para condições de contorno de Neumann e Dirichlet pelos métodos MCEC, MCCEC, MHTEC e MHSTEC. Foram utilizados elementos lineares e foram adicionados 1 grau de liberdade de fluxo normal em cada nó do contorno a fim de representar discontinuidades, apesar destes serem necessários apenas nos cantos. Na Tabela 6.2 estão apresentadas as 5 malhas para as quais o problema foi analisado.

<i>Lado</i>	<i>Malha 1</i>	<i>Malha 2</i>	<i>Malha 3</i>	<i>Malha 4</i>	<i>Malha 5</i>
<i>A-B</i>	2	4	6	8	10
<i>B-C</i>	2	4	6	8	10
<i>C-D</i>	2	4	6	8	10
<i>D-E</i>	2	4	6	8	10
<i>E-F</i>	3	6	9	12	15
<i>F-G</i>	2	4	6	8	10
<i>G-H</i>	1	2	3	4	5
<i>H-A</i>	2	4	6	8	10
<i>Total</i>	16	32	48	64	80

Tabela 6.2: Número de elementos por lado nas 5 malhas analisadas

6.3.1 Bases \mathbf{V} e \mathbf{Y}

Na Figura 6.29 estão apresentados os valores das bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5, calculados a partir das Equações (4-44) e (4-83), respectivamente. Nota-se que há valores muito pequenos ou nulos nas duas concavidades do contorno, nas proximidades dos pontos B e G.

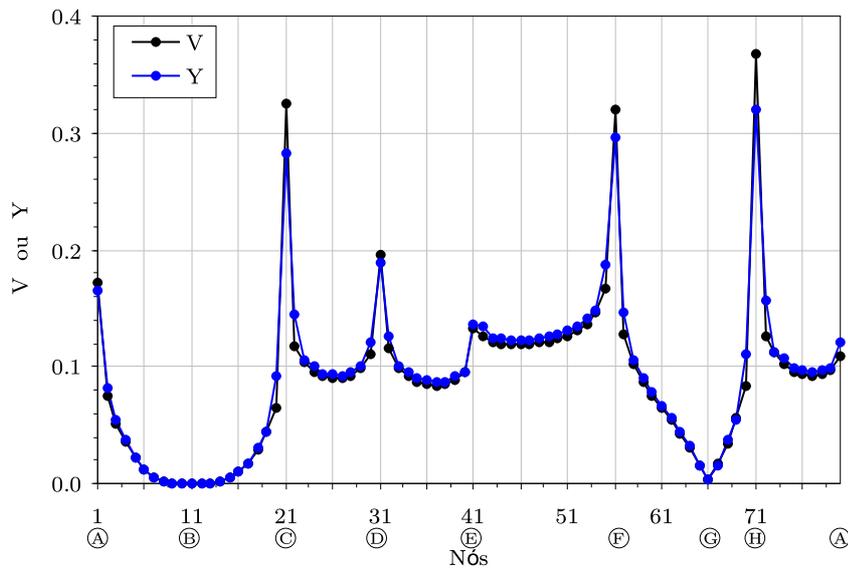


Figura 6.29: Valores de \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5

6.3.2 Valores indeterminados de \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^*

Como já mencionado anteriormente, quando há valores muito pequenos ou nulos das bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} os quocientes resultantes das Equações (4-23), (4-62), (5-77) e (5-78) tornam-se indeterminados. As Figuras 6.30, 6.31 e 6.32 apresentam os valores dos numeradores de tais quocientes na obtenção dos valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* . As legendas \mathbf{V} e \mathbf{Y} referem-se à base utilizada.

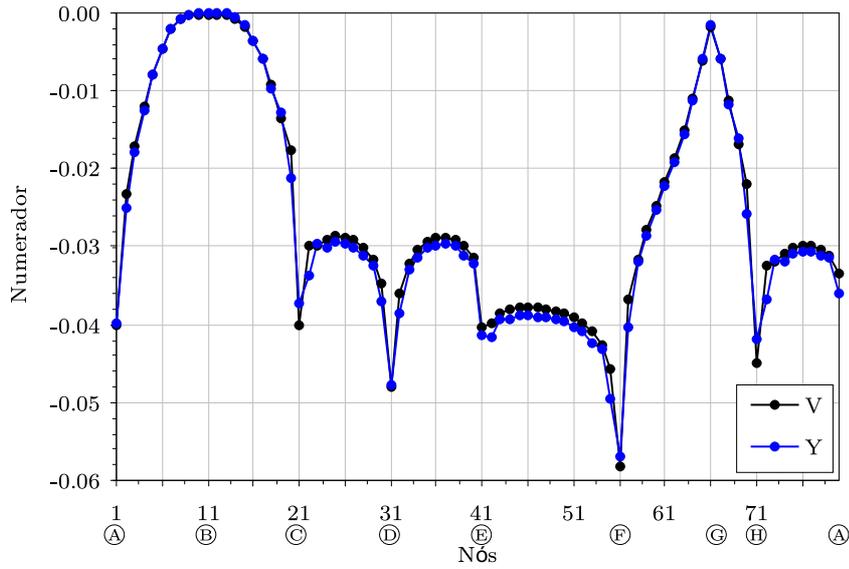


Figura 6.30: Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5

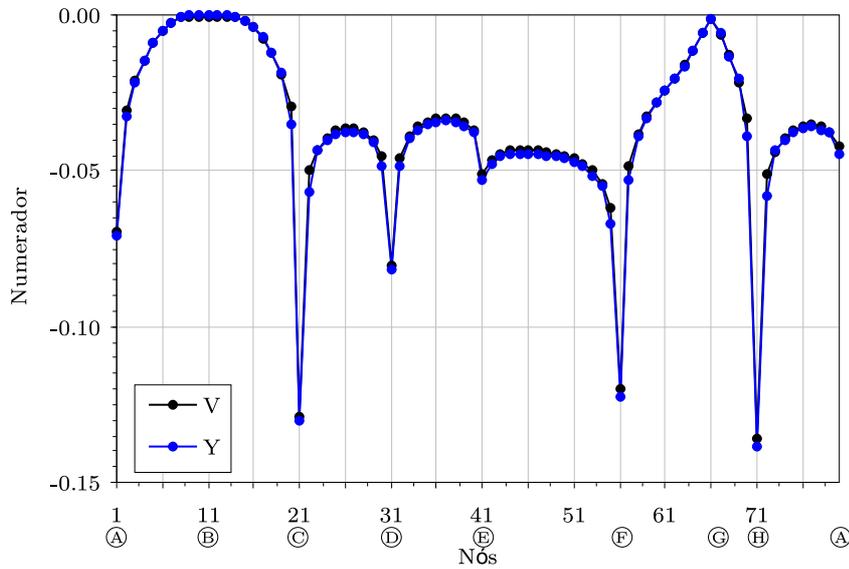


Figura 6.31: Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5

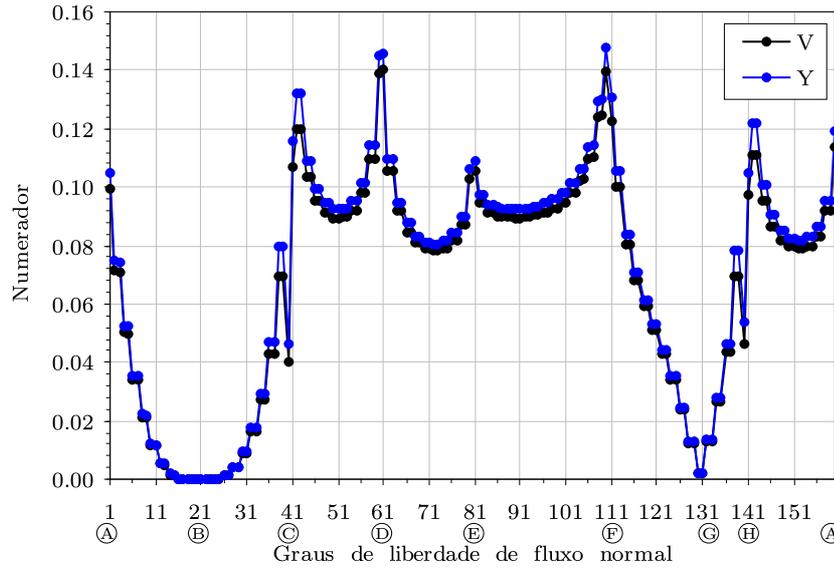


Figura 6.32: Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* ao longo do contorno para a Malha 5

Assim, como somente a Equação (5-44) foi verificada como válida numericamente, é possível calcular os valores indeterminados apenas de \mathbf{F} e \mathbf{U}^* , que estão apresentados nas Figuras 6.33 e 6.34 para a Malha 5.

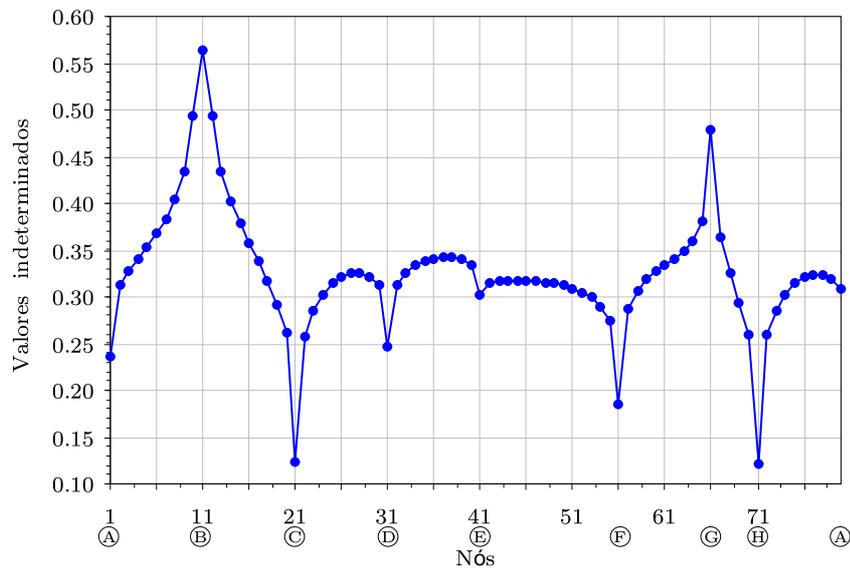


Figura 6.33: Valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5

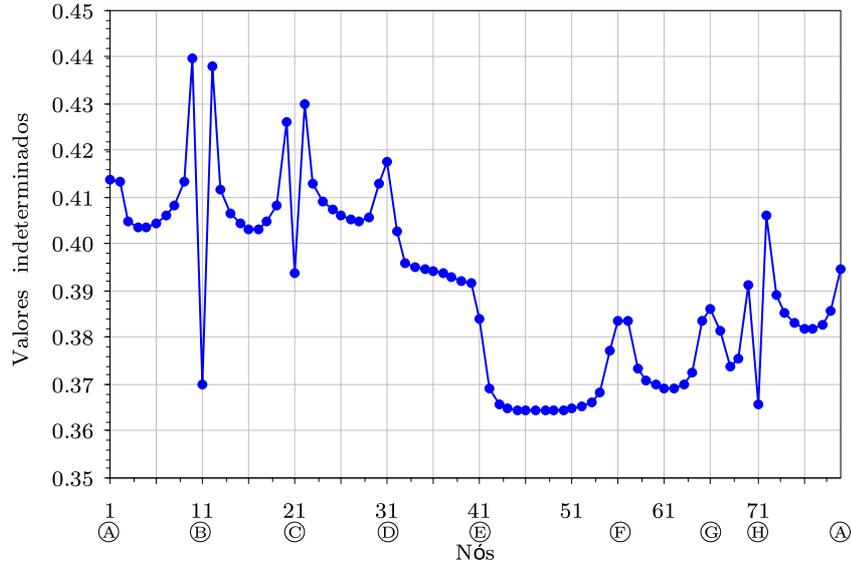


Figura 6.34: Valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5

Na Figura 6.35 está apresentado o resíduo da Equação (5-44) para diversas malhas, de valores 1.5% para a Malha 1 e 0.3% para a Malha 2. Esses valores são próximos aos obtidos no exemplo anterior.

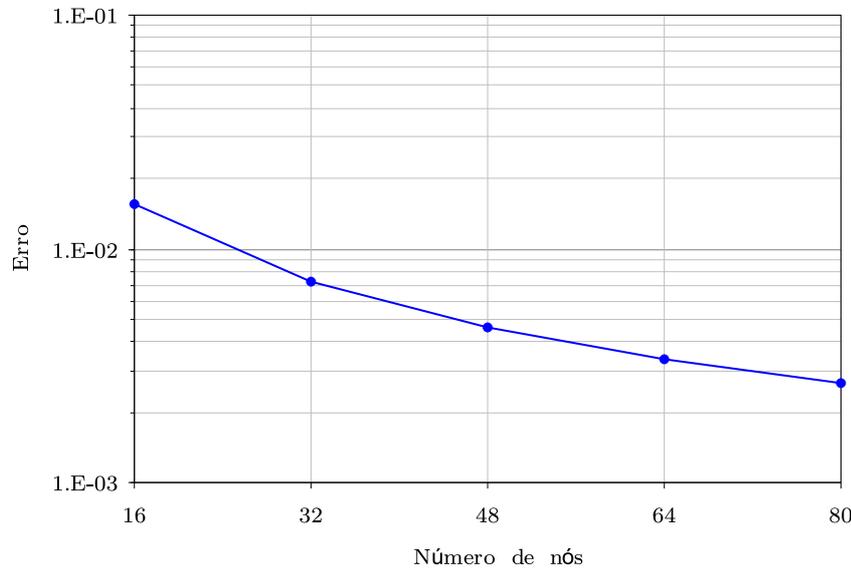


Figura 6.35: Erro entre as matrizes $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas

6.3.3

Resultados de potencial e fluxo normal equivalente para condições de contorno de Neumann e Dirichlet

Nas Figuras 6.36 e 6.37 estão apresentados os valores de potencial e fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5, considerando condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

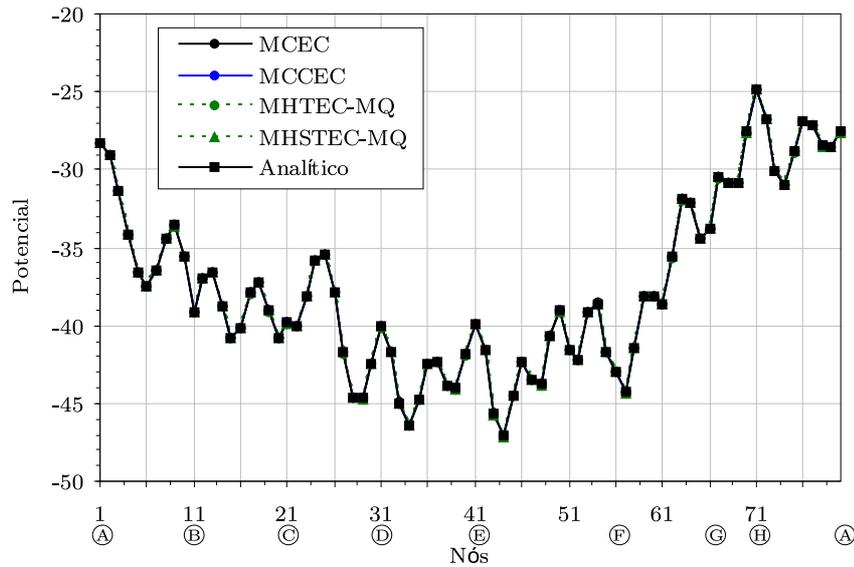


Figura 6.36: Valores de potencial ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Neumann

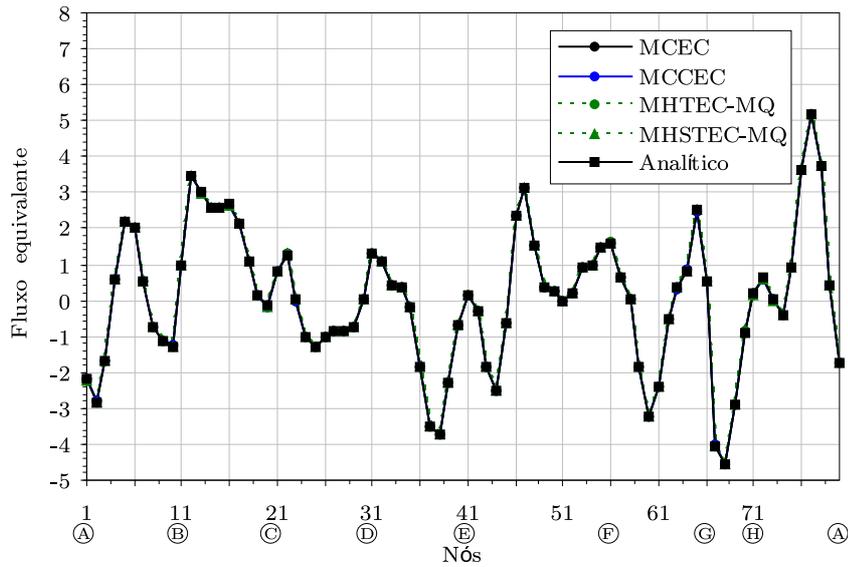


Figura 6.37: Valores de fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Dirichlet

Nas Figuras 6.38 e 6.39 estão apresentados os erros em relação aos valores analíticos do potencial projetado no espaço normal ao dos deslocamentos de corpo rígido e fluxo normal equivalente para cada malha, para condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

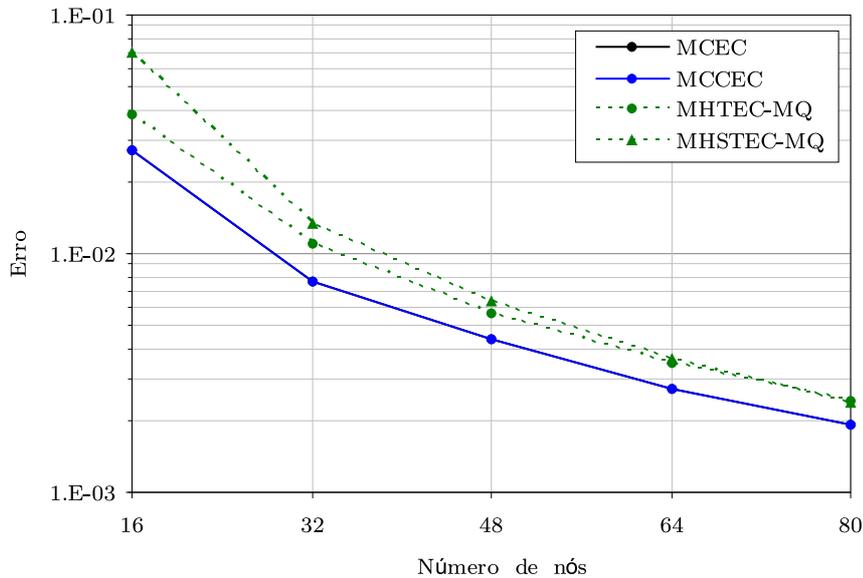


Figura 6.38: Erro dos valores de potencial projetados no espaço normal ao dos deslocamentos de corpo rígido cada malha e para condição de contorno de Neumann

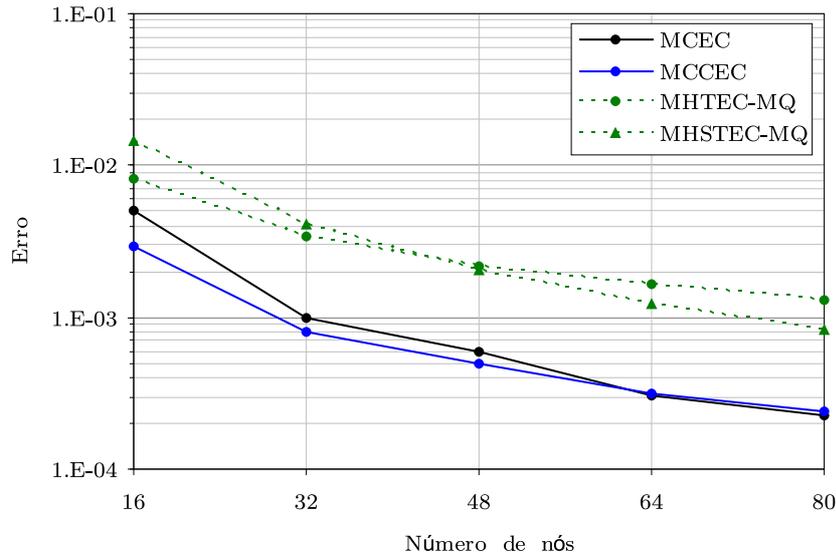


Figura 6.39: Erro dos valores de fluxo equivalente para cada malha e para condição de contorno de Dirichlet

6.4 Problema de Helmholtz para um contorno de 5 lados pelo MHMREC

Considere o problema de Helmholtz, governado pela equação diferencial

$$\nabla^2 u + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{6-9}$$

para o corpo ilustrado na Figura 6.40, submetido a uma fonte harmônica de frequência circular 0.1 no ponto de coordenadas (15,15).

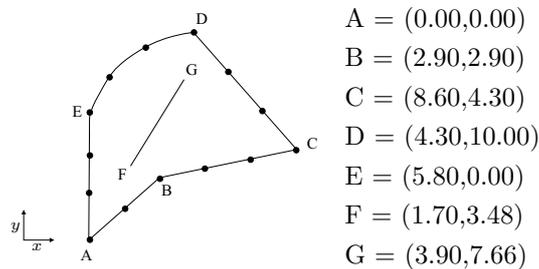


Figura 6.40: Corpo analisado discretizado por 14 elementos lineares para a malha de referência I.

A parte real do potencial de velocidade analítico é expressa por $u = 10 Y(0, \lambda r)$, onde Y é a função de Bessel do segundo tipo, $\lambda = \omega/c$ é o número de onda e $c = 1/\sqrt{2.5}$ é a velocidade de propagação da onda

no meio. O problema encontra-se resolvido para condições de contorno de Neumann e Dirichlet (com potencial prescrito no nó 1) para o MCCEC, MHTEC, MHDEC, MHSTEC, MHSDEC e pelo MHMREC, este segundo a metodologia apresentada na Seção 5.3.8.

Foram analisadas três malhas com elementos lineares. A malha I encontra-se representada na Figura 6.40 e as malhas II e III podem ser obtidas multiplicando o número de elementos em cada lado da malha I por 2 e 3, respectivamente. Foram adicionados 1 grau de liberdade de fluxo normal em cada nó do contorno a fim de representar descontinuidades, apesar destes serem necessários apenas nos cantos.

Nas Figuras 6.41 e 6.42 estão apresentados os erros em relação aos valores analíticos do potencial de velocidade e do fluxo normal equivalente para cada malha, para condições de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

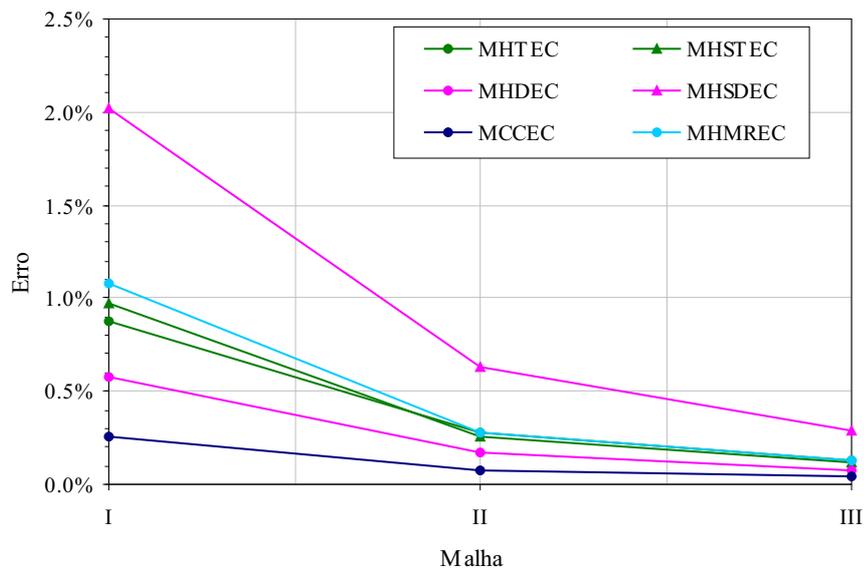


Figura 6.41: Erro dos valores de potencial de velocidade para cada malha e para condição de contorno de Neumann

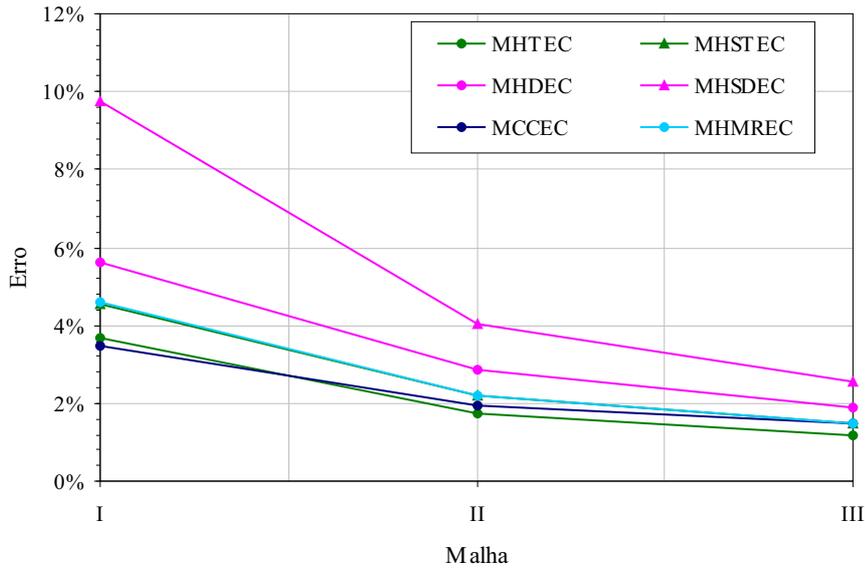


Figura 6.42: Erro dos valores de fluxo normal equivalente para cada malha e para condição de contorno de Dirichlet

Nas Figuras 6.43, 6.44 e 6.45 estão apresentados os valores de potencial e de fluxo nas direções x e y ao longo de 12 pontos igualmente espaçados para condições de contorno de Neumann.

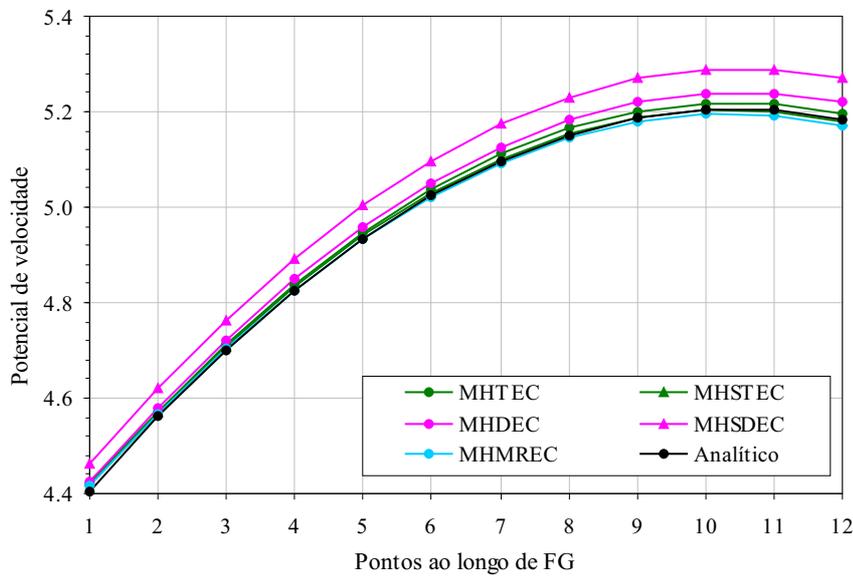


Figura 6.43: Potencial de velocidade ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann

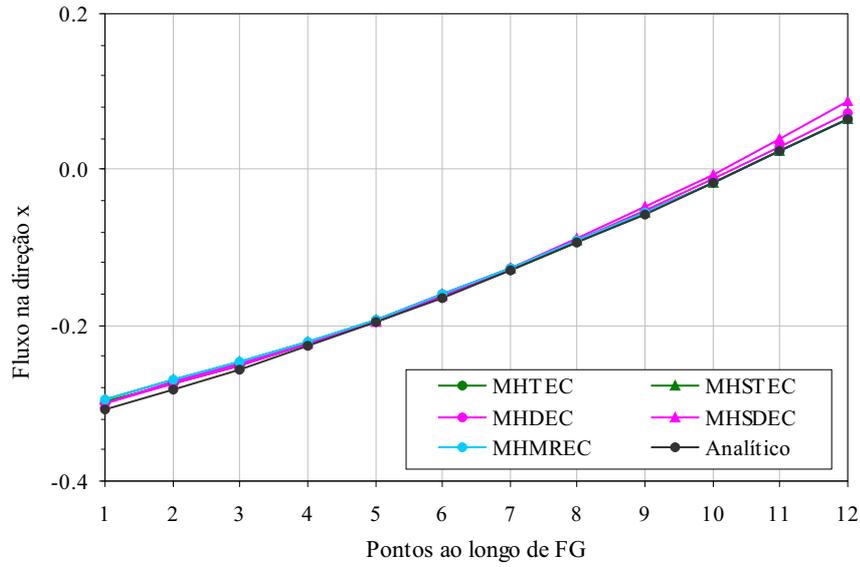


Figura 6.44: Fluxo na direção x ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann

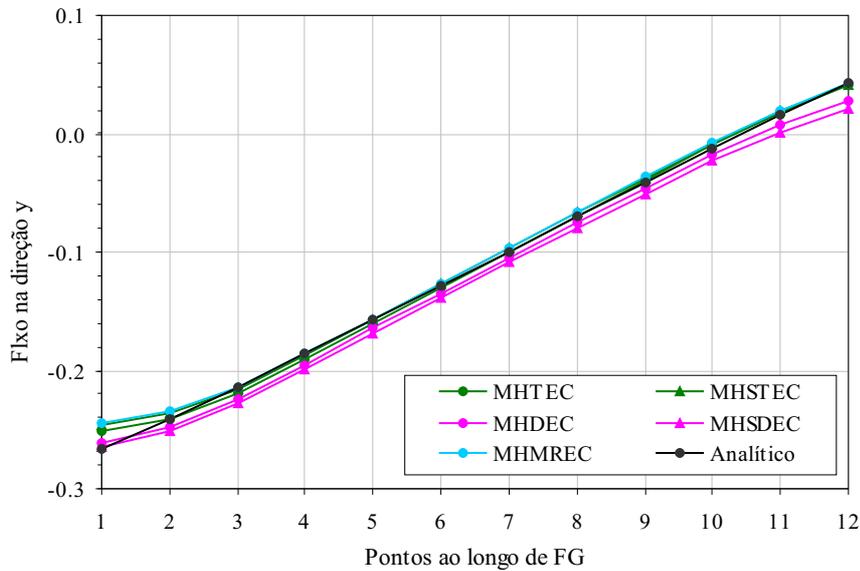


Figura 6.45: Fluxo na direção y ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann