

6 O Estado estacionário

Agora vamos conferir a validade de nosso modelo perante os resultados obtidos a partir do método de Boltzmann-Enskog para gases inelásticos¹¹ a baixa densidade, limite de baixa dissipação.

6.1 Operadores de Colisão

Quando o GG é conduzido pelo mecanismo de alimentação de energia, como o modelo democrático definido anteriormente ($M_\zeta > 0$), uma distribuição estacionaria se desenvolve ao ponto onde a razão de injeção da energia iguala a razão de sua dissipação. O operador vibração-dissipação está dado por

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2v_0^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \cdot \left[\frac{1}{mv_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} + \frac{v_0 \mathbf{c}_1}{k_B T} \right] \tilde{f}(\mathbf{c}_1) + \frac{M_\zeta}{n\sigma_0^2 m^2 v_0^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \tilde{f}(\mathbf{c}_1). \quad (6.1)$$

Assim a equação de movimento da distribuição de velocidades é

$$\frac{\mu_2}{3} \left(3 + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right) \tilde{f} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} = n\sigma_0^2 I(\tilde{f}, \tilde{f}) \quad (6.2)$$

com

$$I(\tilde{f}, \tilde{f}) = I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) + I_2(\tilde{f}),$$

onde $I_1(\tilde{f}, \tilde{f})$, como no caso do **HCS**, é a equação de Boltzmann

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) = \int d\mathbf{c}_2 d\Omega \, |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| \tilde{\sigma}(\Omega) (\tilde{f}(\mathbf{c}'_1) \tilde{f}(\mathbf{c}'_2) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \tilde{f}(\mathbf{c}_2)), \quad (6.3)$$

e $I_2(\tilde{f})$ está dado pela equação acima correspondente a nosso modelo de alimentação de energia. A partir de o novo I_2 definido acima, temos que

$$\mu_2 = - \frac{3\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2v_0^2} \left[\frac{2}{mv_0} - \frac{v_0}{k_B T} \right] - \frac{6M_\zeta}{nm^2\sigma_0^2v_0^3}, \quad (6.4)$$

Devido a equação (A.34) temos que

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{2\mathcal{A}}{m} \left[1 - \frac{T_g}{k_B T} \right] + \frac{2M_\zeta}{m}. \quad (6.5)$$

Como $T_g \gg k_B T$ e $\mathcal{A} = CT_g^{3/5}$ a equação acima pode-se escrever

$$\frac{dT_g}{dt} = -\frac{2\mathcal{C}}{mk_B T} T_g^{8/5} + \frac{2M_\zeta}{m}. \quad (6.6)$$

No caso estacionário, $T_g \equiv T_g(\infty)$, a temperatura não depende do tempo, então, de acordo com a equação acima encontramos

$$T_g(\infty) = \left(\frac{M_\zeta k_B T}{\mathcal{C}} \right)^{5/8}.$$

Assim, o operador I_2 pode ser escrito de maneira conveniente:

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{M_\zeta T_g^{-3/2}}{2n\sigma_0^2\sqrt{2m}} \left\{ 2 \left(\frac{T_g}{T_g(\infty)} \right)^{8/5} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \cdot \left[\frac{k_B T}{2T_g} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} + \mathbf{c}_1 \right] \tilde{f}(\mathbf{c}_1) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \right\}. \quad (6.7)$$

O coeficiente μ_4 é

$$\mu_4 = 4\sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\} - \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{2}{mv_0} - (1+a_2) \frac{v_0}{k_B T} \right] - \frac{30M_\zeta}{nm^2\sigma_0^2 v_0^3}. \quad (6.8)$$

Então a equação para a_2 é

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{16}{15} nv_0\sigma_0^2\sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\} - \frac{8(\mathcal{A} - M_\zeta)}{m^2 v_0^2} a_2, \quad (6.9)$$

e expressando esta equação em função da variável $u = T_g/T_{g_o}$ encontramos a equação

$$\frac{d}{dt} a_2 + c_1 u^{-2/5} a_2 + c_2 u^{1/2} \left\{ a_2 + \frac{a_2^2}{32} \right\} + c_3 u^{-1} a_2 = 0, \quad (6.10)$$

onde

$$c_1 = \frac{4\mathcal{C}}{mT_{g_o}^{2/5}}, \quad c_2 = \frac{32}{15} n\sigma_0^2 \sqrt{\frac{2\pi T_{g_o}}{m}} \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{4M_\zeta}{mT_{g_o}}.$$

A solução de esta equação está dada por

$$a_2(t) = \frac{a_2(0) \exp\left[-\int_0^t dt' (c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2} + c_3 u^{-1})\right]}{1 + 1/32 a_2(0) c_2 \int_0^t dt' u^{1/2} \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' (c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2} + c_3 u^{-1})\right]}. \quad (6.11)$$

como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_g(t)}{T_{g_o}} = \frac{T_g(\infty)}{T_{g_o}} = T_{g_o}^{-1} \left(\frac{M_\zeta k_B T}{3\mathcal{C}} \right)^{5/8} > 0,$$

o expoente, na equação acima, diverge e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_2(t) \rightarrow 0 \quad (6.12)$$

6.2 Distribuição de cauda

É importante entender o comportamento da distribuição de velocidades no limite de velocidades muito grandes¹⁴. Analisemos o comportamento da equação de movimento (6.2) para $c \gg 1$ que no caso estacionário tem seu lado esquerdo, pela distribuição de velocidades ser independente do tempo, igual o zero. Então ao escrevermos a equação

$$I(\tilde{f}, \tilde{f}) = I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) + I_2(\tilde{f}) = 0$$

para $c \gg 1$ considerando que no estado estacionário o sistema adota uma comportamento do tipo

$$\tilde{f} \sim e^{-c^n}$$

temos para I_1 a forma conhecida¹⁴

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) &\approx -\pi c \tilde{f} & n < 2 \\ &= 0 & n = 2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

E para $I_2(\tilde{f})$ usamos as identidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \tilde{f} &= 3\tilde{f} - n c^n \tilde{f} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f} &= -n(n+1)c^{n-2} \tilde{f} + n^2 c^{2n-2} \tilde{f}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Desta maneira e considerando $k_B T \ll T_g$ obtemos

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{M_\zeta T_g^{-3/2}}{2n\sigma_0^2 \sqrt{2m}} \left\{ 2(3\tilde{f} - n c^n \tilde{f}) - n(n+1)c^{n-2} \tilde{f} + n^2 c^{2n-2} \tilde{f} \right\}. \quad (6.15)$$

Podemos ver que a única possível é dada para $n=2$, assim no estado estacionário a distribuição de velocidades se comporta como uma Gaussiana

$$\tilde{f} \sim e^{-c^2}. \quad (6.16)$$

Vejamos agora a evolução temporal do sistema para grandes velocidades. O resultado acima sugere-nos o seguinte Ansatz para a distribuição de velocidades para grandes velocidades

$$\tilde{f} \sim e^{-\varphi(t)c^2}. \quad (6.17)$$

A equação (6.2) se escreve

$$\frac{\mu_2}{3}(3 - 2\varphi c^2)\tilde{f} - B^{-1}\dot{\varphi}c^2\tilde{f} = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0 k_B T} (3 - 2\varphi c^2)\tilde{f} + \frac{M_\zeta}{n\sigma_0^2 m^2 v_0^3} (-6\varphi + 4\varphi^2 c^2)\tilde{f}. \quad (6.18)$$

para $c \gg 1$ ficamos com os termos de ordem c^2 em ambos lados de esta equação, assim optemos

$$-\frac{2}{3}\mu_2 B\varphi - \dot{\varphi} = -\frac{2\mathcal{A}}{mk_B T}\varphi + \frac{4M_\zeta}{m^2 v_0^2}\varphi^2. \quad (6.19)$$

Usando a equação (6.6) que dá a dependência temporal da temperatura granular podemos escrever a equação acima em função da temperatura granular. Obtemos assim

$$\frac{d\varphi}{dT_g} = \frac{(1-\varphi)\left[-\left(\frac{T_g}{T_g(\infty)}\right)^{8/5} + 1 + \varphi\right]}{T_g\left[-\left(\frac{T_g}{T_g(\infty)}\right)^{8/5} + 1\right]}. \quad (6.20)$$

Usando a variável $u = T_g/T_g(\infty)$ escrevemos a equação acima de maneira mais conveniente

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{(1-\varphi)}{u} \frac{[\varphi + 1 - u^{8/5}]}{[1 - u^{8/5}]}. \quad (6.21)$$

a solução da equação acima está dada pela expressão

$$\varphi(u) = 1 - \frac{(u^{8/5} - 1)^{5/8}}{u^2 \left[\frac{(u_0^{8/5} - 1)^{5/8}}{u_0^2(1-\varphi_0)} - \int_{u_0}^u \frac{ds}{s^3(s^{8/5} - 1)^{3/8}} \right]}. \quad (6.22)$$

Onde u_0 e φ_0 são os valores iniciais destas variáveis. Podemos ver que no caso estacionário em que $u = 1$ o valor de $\varphi = 1$ o que está de acordo com o resultado encontrado para o comportamento da distribuição de velocidades no caso estacionário, equação (6.16). Para $\varphi_0 = 1$ o sistema é sempre Gaussiano já que de acordo com a equação acima, para este caso, $\varphi(u) \equiv 1$.

Podemos estudar o comportamento de $\varphi(u)$ para diferentes valores de u_0 e φ_0 . Na figura (6.1), por exemplo, temos o caso $u_0 = 40$ e $\varphi = 0.99$. Pode-se ver que o valor de ϕ diminui o que indica uma superpopulação na cauda para logo aumentar e alcançar o valor de um o que corresponde a uma Gaussiana.

Na figura (6.2) vemos que para o valor inicial $\varphi_0 = 0.9$ este apresenta valores negativos o que causaria uma divergência na cauda.

Assim vemos que nosso modelo se comporta bem para sistemas que se encontram pouco afastados de uma Gaussiana, mostrando que num primeiro estágio de evolução a distribuição de cauda tende a uma superpopulação em grandes velocidades para finalmente atingir uma distribuição Gaussiana no estado estacionário.

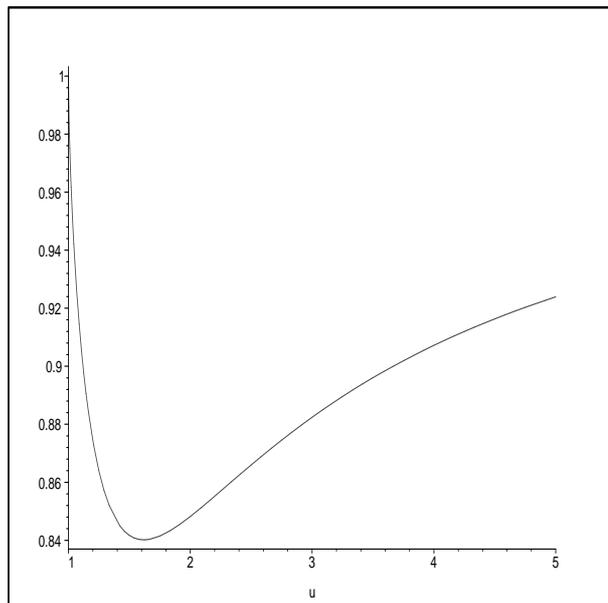


Figura 6.1: Dependência de φ em relação a u para $\varphi_0 = 0.99$ e $u_0 = 40$

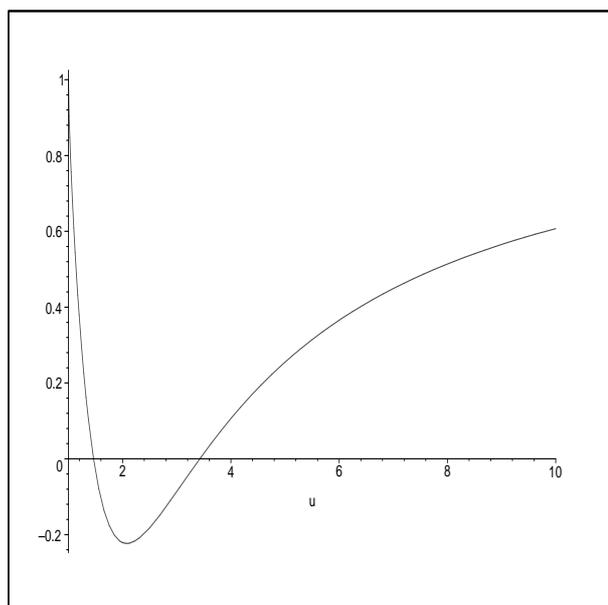


Figura 6.2: Dependência de φ em relação a u para $\varphi_0 = 0.9$ e $u_0 = 40$