4
A evolução temporal da função distribuição no Gás Granular

4.1 A hierarquia BBGKY

A partir da função distribuição das variáveis externas no sistema, $W(\chi_T, t)$, podemos obter uma função distribuição para n partículas, chamada distribuição reduzida. Esta distribuição reduzida para n partículas é definida assim:

$$f^{(n)} = \frac{N!}{(N-n!)} \int d\chi_{n+1}, \ldots, d\chi_N \, W(\chi_T, t) \tag{4.1}$$

onde $f^{(n)} \equiv f(\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Calculamos a função distribuição reduzida para uma partícula, $f^{(1)}$, integrando ambos membros da equação (3.30) e considerando que não há forças externas. De acordo com a definição acima temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)} + \frac{1}{m} p_1 \cdot \nabla_{r_1} f^{(1)} = & \int d\chi_2 \, [\nabla_{r_{12}} U(r_{12}) + \nabla_{r_{12}} \omega(r_{12})] \cdot \nabla_{p_1} f^{(2)} \\ & + \int d\chi_2 \, \gamma_{12} \hat{\mathrm{r}}_{12} \hat{\mathrm{r}}_{12} [\nabla_{p_1}{}^2 + \frac{\beta}{m} \nabla_{p_1} (p_1 - p_2)] f^{(2)} \\ & + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f^{(1)},\end{aligned} \tag{4.2}$$

similarmente calculamos uma equação para $f^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f^{(2)} = & - \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i}{m} \cdot \nabla_{r_i} f^{(2)} - [\nabla_{r_{12}} U(r_{12}) + \nabla_{r_{12}} \omega(r_{12})] \cdot [\nabla_{p_1} - \nabla_{p_2}] f^{(2)} \\ & + \gamma_{12} \hat{\mathrm{r}}_{12} \hat{\mathrm{r}}_{12} (\nabla_{p_1} - \nabla_{p_2})(\nabla_{p_1} - \nabla_{p_2} + \frac{\beta}{m}(p_1 - p_2) f^{(2)} \\ & - \sum_{i=1,2} \int d\chi_3 \, [\nabla_{r_{i3}} U(r_{i3}) + \nabla_{r_{i3}} \omega(r_{i3})] \cdot \nabla_{p_i} f^{(3)} \\ & + \sum_{i=1,2} \int d\chi_3 \, \gamma_{i3} \hat{\mathrm{r}}_{i3} \hat{\mathrm{r}}_{i3} [\nabla_{p_i} - \nabla_{p_3} + \frac{\beta}{m}(p_i - p_3)] f^{(3)} \\ & + M_\varsigma \Big[\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f^{(2)} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} f^{(2)} \Big].\end{aligned} \tag{4.3}$$

A equação de Boltzmann é obtida a partir das equações (4.2) e (4.3) via o método das múltiplas escalas de tempo.

4.2 Ordens de grandeza das equações

Vamos agora assinalar ordens de grandeza aos termos das equações (4.2) e (4.3), para isso usaremos os parâmetros θ e n^*, definidos na referencia[20].

$$\begin{aligned} &\theta \quad\;\; \rightarrow \text{dissipação relativa durante uma colisão} \\ &n^* = n\sigma^3 \rightarrow \text{fração de volume ocupado} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Onde o fator θ associado com a dissipação vem na frente dos operadores L^1 e L^2 que contém os termos dissipativos. O fator n^* aparece devido à relação em ordens de grandeza entre hierarquias de ordens consecutivas, $|f^{(s+1)}| \sim n|f^{(s)}|$. Isto se faz de maneira que $\theta \gg n^* \gg n^*\theta$. Assim a primeira equação obtida acima se escreve (considerando o caso de distribuição uniforme, ou seja, a não dependência da variável $\mathbf{r}$),

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{(1)} = -n^* L^1 f^{(2)} + n^*\theta N^1 f^{(2)} - K^1 f^{(1)} + n^*\theta\, M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f^{(1)} \tag{4.5}$$

onde os seguintes operadores foram definidos:

$$\begin{aligned} K^1 &= \frac{p_1}{m}\frac{\partial}{\partial r_1}, \\ L^1 &= \int dx_2\, F_{12} \frac{\partial}{\partial p_1}, \qquad \text{onde} \qquad F_{12} = \nabla_{r_{12}}[U(r_{12}) + \omega(r_{12})] \\ N^1 &= \int dx_2\, \gamma_{12} \hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12} : \Big[\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\beta}{m}(p_1 - p_2)\Big]. \end{aligned}$$

Notemos que se impôs que as ordens de grandeza do termo de alimentação de energia e o termo de dissipação sejam iguais, de acordo com a observação feita no final do capítulo 3. Para a segunda equação obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^{(2)} &= -K^2 f^{(2)} - I^2 f^{(2)} + \theta M^2 f^{(2)} - n^* L^2 f^{(3)} + n^*\theta N^2 f^{(3)} \\ &\quad + n^*\theta\, M_\varsigma \Big[\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f^{(2)} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} f^{(2)}\Big], \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde escrevemos os operadores

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{p_1}{m}\frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial}{\partial r_2}, \\ I^2 &= F_{12}\frac{\partial}{\partial p_1} + F_{21}\frac{\partial}{\partial p_2}, \\ M^2 &= \gamma_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12} : \Big[\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\beta}{m}(p_1 - p_2)\Big], \\ L^2 &= \int dx_3\, F_{13}\frac{\partial}{\partial p_1} + \int dx_3\, F_{23}\frac{\partial}{\partial p_2}, \\ N^2 &= \int dx_3 \gamma_{13}\, \hat{\mathrm{r}}_{13}\hat{\mathrm{r}}_{13} : \frac{\partial}{\partial p_1}\Big[\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\beta}{m}(p_1 - p_3)\Big] \\ &\quad + \int dx_3\, \gamma_{23}\hat{\mathrm{r}}_{23}\hat{\mathrm{r}}_{23} : \frac{\partial}{\partial p_2}\Big[\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\beta}{m}(p_2 - p_3)\Big]. \end{aligned}$$

4.3 Separação em escalas de tempo

Tipicamente consideraremos sistemas com baixa dissipação (como o aço por exemplo) com $\theta \cong 0,1 - 0,01$[17] e $n^* = n\sigma^3 \cong 0,001 - 0,01$. A relação com o livre caminho médio l_c é dada por[27] $l_c \sim (n\sigma^2)^{-1}$:

$$n^* = n\sigma^2 \sim \frac{\sigma}{l_c} \ll 1.$$

Vamos estender a função $f(s)$ como uma função das variáveis $\tau_0, \ldots, \tau_4$, onde $\tau_0 = s$, $\tau_1 = \theta s$, $\tau_2 = n^* s$, $\tau_3 = \theta^2 s$, $\tau_4 = n^*\theta s$. A derivada em relação a s se escreve então como

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \theta \frac{\partial}{\partial \tau_1} + n^* \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \tau_3} + n^*\theta \frac{\partial}{\partial \tau_4} + \cdots . \tag{4.7}$$

A função de distribuição será expandida, para valores pequenos de θ e n^*, assim

$$f^{(n)} = f_0^n + \theta f_1^n + n^* f_2^n + \theta^2 f_3^n + n^*\theta f_4^n + \cdots . \tag{4.8}$$

Das equações (4.7) e (4.8) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} f^{(1)} = {} & \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_0^1 + \theta\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_1^1\Big) + n^*\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_2^1\Big) \\ & + \theta^2\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_3} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_1^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_3^1\Big) \\ & + n^*\theta\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} f_1^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_4^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_2^1\Big) + \cdots .\end{aligned}$$

Substituindo (4.8) no lado direito da equação (4.5) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} f^{(1)} = {} & [-K^1 f_0^1] + n^*[-L^1 f_0^2] \\ & + n^*\theta[-L^1 f_1^2 + N^1 f_0^2 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1] + \cdots .\end{aligned}$$

Então igualando as duas últimas equações acima,nas ordens corretas dos parâmetros pequenos, obtemos as seguintes relações

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} f_0^1 = -K^1 f_0^1 = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_1^1 = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_2^1 = -L^1 f_0^2, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_3} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_1^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_3^1 = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} f_1^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_4^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_2^1 = -L^1 f_1^2 + N^1 f_0^2 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1. \tag{4.13}$$

Novamente a partir das equações (4.7) e (4.8) em (4.6) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{(2)} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_0^2 + \theta\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_1^2\Big) + n^*\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_2^2\Big)$$
$$+ \theta^2\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_3} f_0^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_1^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_3^2\Big)$$
$$+ n^*\theta\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} f_1^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_4^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_2^2\Big) + \cdots .$$

Substituindo (4.8) no lado direito da equação (4.6) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} f^{(2)} = [-(K^2 + I^2) f_0^2] + \theta[-(K^2 + I^2) f_1^2 + M^2 f_0^2]$$
$$+ n^*[-(K^2 + I^2) f_2^2] + \theta^2[-(K^2 + I^2) f_3^2 + M^2 f_1^2]$$
$$+ n^*\theta[-(K^2 + I^2) f_4^2 + M^2 f_2^2 + N^2 f_0^3 + M_\varsigma(\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}) f_0^2] + \cdots .$$

Assim igualando as duas últimas equações acima, termos comuns geram as relações

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} f_0^2 = -(K^2 + I^2) f_0^2 = -H^2 f_0^2 \tag{4.14}$$
$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_1^2 = -K^2 f_1^2 - I^2 f_1^2 + M^2 f_0^2. \tag{4.15}$$

Em $\tau_0 = 0$ impomos a condição inicial

$$f_{i\geq 1}^{s\geq 1}(p_1, \ldots, p_s) = 0 \tag{4.16}$$

e

$$f_0^{s\geq 2}(p_1, \ldots, p_s) = \frac{N!}{N^s (N-s)!} f_0^1(p_1) \ldots f_0^1(p_s)$$
$$= \frac{N!}{N^s (N-s)!} \prod_s f_0^1. \tag{4.17}$$

As condições (4.16) e (4.17) nos permitirão obter as condições de consistência que gerarão a equação de Boltzmann.

4.4 Cancelamento de termos seculares

As relações achadas acima, equações [(4.9)... (4.15)], quando integradas podem gerar divergências (termos seculares) para $\tau_0 \to \infty$. Ao cancelá-las obtemos as seguintes relações:

- Da equação (4.9) temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} f_0^1 = 0 \Rightarrow f_0^1 \equiv f_0^1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \ldots). \tag{4.18}$$

- Como f_0^1 não depende de τ_0 ao integrar a equação (4.10) em τ_0 temos que

$$f_1^1(\tau_0, \tau_1, \ldots) - \underbrace{f_1^1(\tau_o = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots)}_{0} = -\tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^1,$$

então, para que $\lim_{\tau_0 \to \infty} f_1^1 \neq \infty$, impomos (eliminação do termo secular) que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^1 = 0 \tag{4.19}$$

desta maneira $f_1^1(\tau_0, \tau_1, \ldots) \equiv 0$.

- A partir da equação (4.12), como $f_1^1 = 0$, temos que $\partial_{\tau_0} f_3^1 + \partial_{\tau_3} f_0^1 = 0$, então, integrando em τ_0 temos que

$$f_3^1(\tau_0, \tau_1, \ldots) - \underbrace{f_3^1(\tau_o = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots)}_{0} = \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau_3} f_0^1,$$

então, para que $\lim_{\tau_0 \to \infty} f_3^1 \neq \infty$ impomos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_3} f_0^1 = 0 \tag{4.20}$$

desta maneira $f_3^1(\tau_0, \tau_1, \ldots) \equiv 0$ e $f_0^1 \equiv f_0^1(\tau_2, \tau_4, \ldots)$.

- De (4.14) obtemos

$$\begin{aligned} f_0^2 &= e^{-\tau_0 H^2} f_0^2(\tau_0 = 0) \\ &= e^{-\tau_0 H^2} f_0^1(\tau_0 = 0, p_1) f_0^1(\tau_0 = 0, p_2), \end{aligned} \tag{4.21}$$

como $\partial_{\tau_1} f_0^1 = 0$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} f_0^2 = 0.$$

Assim, ao integrar (4.15), obtemos

$$f_1^2(\tau_0, p_1, p_2) = e^{-H^2 \tau_0} \int_0^{\tau_0} d\lambda \; e^{H^2 \lambda} M^2 \, e^{-H^2 \lambda} \, f_0^1(p_1) \, f_0^1(p_2). \tag{4.22}$$

- Da equação (4.21) podemos deduzir que

$$\begin{aligned} f_0^2(\tau_0 \approx \infty) &= \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-\tau_0 H^2} f_0^1(p_1) \, f_0^1(p_2) \\ &= \exp\{T_g^{-1}[p_1^2/m + p_2^2/m - U(r_{12}) - \omega(r_{12})]\}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde

$$T_g = \frac{1}{3m} \langle \mathbf{p}^2 \rangle$$

é a temperatura granular.

- De (4.11), integrando em τ_0, obtemos

$$\begin{aligned} f_2^1(\tau_0) &= \underbrace{f_2^1(\tau_0=0)}_{0} - \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 - L^1 \int_0^{\tau_0} d\tau_0' f_0^2(\tau_0') \\ &= -\tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 - L^1 \int_0^{\tau_0} d\tau_0' \, e^{-H^2\tau_0'} f_0^1 \, f_0^1. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como vimos no ítem anterior $f_0^2(\tau_0 \approx \infty)$ é constante, por isso a equação acima diverge quando $t \to \infty$. Para remover esta secularidade observemos que para τ_0 muito grande

$$\int_0^{\tau_0} d\tau_0' \, e^{-H^2\tau_0'} f_0^1 \, f_0^1 \approx \tau_0 \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2\tau_0'} f_0^1 \, f_0^1.$$

Então a equação acima fica como

$$f_2^1(\tau_0) = -\tau_0 \Big(\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 + L^1 \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2\tau_0} f_0^1 \, f_0^1 \Big). \tag{4.25}$$

Assim impomos a condição de consistência:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = -L^1 \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2\tau_0} f_0^1 \, f_0^1. \tag{4.26}$$

- Da última relação achada acima se pode mostrar que para $\tau_0 \approx \infty$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} f_2^1(\tau_0 \approx \infty) \simeq 0.$$

- Com as condições achadas $f_1^1 = 0$ e $f_2^1(\tau_0 \approx \infty) = 0$ temos, da equação (4.13), que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} f_4^1 = -L^1 f_1^2 + N^1 f_0^2 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1 \tag{4.27}$$

integrando esta equação em τ_0 temos para $\tau_0 \approx \infty$

$$f_4^1 = -\tau_0 \Big(\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 + L^1 f_1^2(\tau_0 \approx \infty) - N^1 f_0^2 - M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1 \Big). \tag{4.28}$$

Então de maneira que $\lim_{\tau_0 \to \infty} \neq \infty$ impomos a condição

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 + L^1 f_1^2(\tau_0 \approx \infty) - N^1 f_0^2 - M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1 = 0. \tag{4.29}$$

Em resumo, para encontrar a equação da evolução temporal de f_0^1 as seguintes equações de consistência devem ser satisfeitas:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = -L^1 \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2 \tau_0} f_0^1 f_0^1, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 = -L^1 f_1^2(\tau_0 \approx \infty) + N^1 f_0^2 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1. \tag{4.31}$$

Estas equações vão gerar a equação de Boltzmann após fazermos a transformação $(\tau_0 = t, \tau_1 = n^* t, \ldots) \to t$.

4.5 O termo de colisão de Boltzmann

Definindo $S_{12} = \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2 \tau_0}$ podemos escrever a equação (4.30) assim

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = -\int dr_2 dp_2 F_{12} \frac{\partial}{\partial p_1} S_{12} f_0^1 f_0^1. \tag{4.32}$$

Podemos transformar a integral acima em (dado que $\frac{\partial F_{21}}{\partial p_2} = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 &= -\int dr_2 dp_2 \Big[F_{12} \frac{\partial}{\partial p_1} + F_{21} \frac{\partial}{\partial p_2}\Big] S_{12} f_0^1 f_0^1 \\ &= -\int dr_2 dp_2\, I^2 S_{12} f_0^1 f_0^1.\end{aligned}$$

Dado que a distribuição de equilíbrio, para $t \to \infty$, não evolui mais, é fácil ver que

$$H^2 S_{12} f_0^1 f_0^1 = H^2 \lim_{\tau_0 \to \infty} e^{-H^2 \tau_0} f_0^1 f_0^1 = 0.$$

Como $H^2 = I^2 + K^2$, temos que

$$I^2 S_{12} f_0^1 f_0^1 = -K^2 S_{12} f_0^1 f_0^1 \qquad \text{para} \qquad \tau_0 \to \infty.$$

Desta maneira

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 &= \int dr_2 dp_2\, K^2 S_{12} f_0^1 f_0^1 \\ &= \int dr_2 dp_2 \left[\frac{p_1}{m} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{p_2}{m} \frac{\partial}{\partial r_2} \right] S_{12} f_0^1 f_0^1.\end{aligned}$$

Lembrando que $\partial_{r_1} = \partial_{r_{12}}$ e $\partial_{r_2} = -\partial_{r_{12}}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = \int dr_2 dp_2 \left[\frac{p_1 - p_2}{m} \right] \frac{\partial}{\partial r_{12}} S_{12} f_0^1 f_0^1. \tag{4.33}$$

Usando o esquema de integração de Bogoliubov[28]

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = \int dp_2 \frac{|\, p_1 - p_2 \,|}{m} \int bdbd\epsilon \int dr_2 \frac{\partial}{\partial r_{12}} S_{12} f_0^1 f_0^1.$$

Finalmente obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} f_0^1 = \int dp_2 d\Omega \frac{|\, p_1 - p_2 \,|}{m} \sigma(\Omega) \; (f_0^1(p_1') f_0^1(p_2') - f_0^1(p_1) f_0^1(p_2)) \qquad (4.34)$$

onde $\sigma(\Omega) = bdbd\epsilon$[27] e p_1' e p_2' são os momentos dos grãos antes da colisão que gera p_1 e p_2.

4.6 A contribuição dissipativa e o termo de alimentação de energia

Obtemos, então, da condição de consistência (4.31), usando a equação (4.22) para $\tau_0 \approx \infty$ e a definição do operador S_{12}, que

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 = -L^1 S_{12} \int_0^\infty d\lambda \; e^{H^2\lambda} M^2 e^{-H^2\lambda} f_0^1 f_0^1 + N^1 S_{12} f_0^1 f_0^1 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1. \qquad (4.35)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é desprezivelmente pequeno para $\tau_0 \to \infty$, devido a ação do operador $L^1 S_{12}$ na integral[28] , a equação acima se torna então (usando explicitamente o operador N^1),

$$\frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 = \int dx_2 \, dp_2 \, \gamma_{12} \hat{r}_{12} \hat{r}_{12} : \frac{\partial}{\partial p_1} \Big(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{p_1 - p_2}{m k_B T} \Big) S_{12} f_0^1 f_0^1 + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1 \qquad (4.36)$$

Lembrando a definição de (:), acima, podemos escrever a equação acima como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_4} f_0^1 = & \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \int d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_2 \, \gamma_{12} \hat{r}_{12} \frac{\hat{r}_{12} \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{m k_B T} S_{12} f_0^1(p_1) f_0^1(p_2) \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} : \int d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_2 \, \gamma_{12} \hat{r}_{12} \hat{r}_{12} S_{12} f_0^1(p_1) f_0^1(p_2) + M_\varsigma \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} f_0^1(p_1). \end{aligned} \qquad (4.37)$$

Usando a aproximação (4.23)

$$S_{12} f_0^1(p_1) f_0^1(p_2) = f_0^1(p_1) f_0^1(p_2) \, e^{-\frac{\phi_{12}}{Tg(\tau_4)}}$$

onde $\phi_{12} = -\{U(r_{12}) + \omega(r_{12})\}$ é a energia de potencial elástico entre os grãos e se usou

$$f_0^1(\mathbf{p}) \approx n \Big(\frac{1}{2\pi m T_g(\tau_4)} \Big)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{2mT_g(\tau_4)}}. \qquad (4.38)$$

Então substituindo a expressão dada para $S_{12} f_0^1(p_1) f_0^1(p_2)$ e agrupando termos temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau_4}f_0^1 &= \frac{1}{mk_BT}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\left[\int d\mathbf{x}_2\,\gamma_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}e^{-\frac{\phi_{12}}{Tg(\tau_4)}}\right]\underbrace{\left[\int d\mathbf{p}_2 f_0^1(p_2)\right]}_{1}\cdot\mathbf{p}_1 f_0^1(p_1)\\
&-\frac{1}{mk_BT}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\left[\int d\mathbf{x}_2\,\gamma_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}e^{-\frac{\phi_{12}}{Tg(\tau_4)}}\right]\cdot\underbrace{\left[\int d\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2 f_0^1(p_2)\right]}_{0}f_0^1(p_1)\\
&+\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\left[\int d\mathbf{x}_2\,\gamma_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}e^{-\frac{\phi_{12}}{Tg(\tau_4)}}\right]\underbrace{\left[\int d\mathbf{p}_2 f_0^1(p_2)\right]}_{1}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}f_0^1(p_1)\\
&+M_\varsigma\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}f_0^1(p_1).\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial\tau_4}f_0^1 = \frac{1}{mk_BT}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_1 f_0^1(p_1) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\mathbf{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}f_0^1(p_1) + M_\varsigma\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}f_0^1(p_1),$$

onde

$$\mathbf{A} = \int d\mathbf{x}_2\,\gamma_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}\hat{\mathrm{r}}_{12}e^{-\frac{\phi_{12}}{Tg(\tau_4)}}$$

Trabalhando este termo[29]:

$$\mathbf{A}\approx\sigma^2\int d\hat{\mathrm{r}}\int dr\,\gamma(r)\,\hat{\mathrm{r}}\,\hat{\mathrm{r}}\;e^{-\frac{\phi_{12}}{T_g(\tau_4)}} = \frac{4\pi\sigma^2}{3}\mathbf{I}\int_\sigma dr\gamma(r)\;e^{-\frac{\phi_{12}}{T_g(\tau_4)}} = \mathcal{A}\,\mathbf{I}.$$

Temos então

$$\frac{\partial}{\partial\tau_4}f_0^1 = \mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1} + \frac{1}{mk_BT}\mathbf{p}_1\right]f_0^1(p_1) + M_\varsigma\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}f_0^1(p_1). \tag{4.39}$$

Finalmente com as expressões achadas para $\partial_{\tau_2}f_0^1$ e para $\partial_{\tau_0}f_4^1 + \partial_{\tau_4}f_0^1$ formamos a expressão requerida para $\partial_t f$. Assim obtemos uma equação equivalente à de Boltzmann para o caso de um sistema granular com alimentação de energia externa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(p_1) &= \int d\mathbf{p}_2\,d\Omega\,\frac{|\,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\,|}{m}\,\sigma(\Omega)\,\Big(f(\mathbf{p}_1')f(\mathbf{p}_2') - f(\mathbf{p}_1)f(\mathbf{p}_2)\Big)\\
&\quad+\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1} + \frac{1}{mk_BT}\mathbf{p}_1\right] + M_\varsigma\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}f(p_1).\end{aligned} \tag{4.40}$$

Esta equação é similar à achada na referência[29] para o caso de um sistema granular com resfriamento. No caso que tratamos, aparece na equação de Boltzmann o termo de alimentação incorporado ao sistema. Fica mostrada então a coerência do uso dos resultados da referencia[1] para o estudo do gás granular[20,29].

Usando como modelo uma interação hertziana entre as partículas

$$\phi_{12} = \frac{1}{2} k h^{5/2}$$

onde k é uma constante elástica efetiva e $h = 2r_0 - r_{12}$ foi calculado o valor de $\mathcal{A}$[29],

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} T_g^{3/5}, \tag{4.41}$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante [a] dada por

$$\mathcal{C} \sim (\frac{2k_B}{k})^{3/5} \Gamma(3/5)$$

[a]na referência [12] se usa γ em lugar de $\mathcal{C}$