

## 5

### Novos Controladores de Impacto

O objetivo deste capítulo é o desenvolvimento e a aplicação de três novas técnicas de controle para lidar com o período de transição de contato em manipuladores rígidos e manipuladores flexíveis.

#### 5.1

##### Controlador de Impacto para Manipuladores Rígidos

Na literatura, têm sido propostas algumas técnicas de controle para diminuir os efeitos do impacto em manipuladores robóticos, cada uma das técnicas tem vantagens e desvantagens. Algumas destas são técnicas de controle passivo. Uma delas consiste em diminuir a rigidez do contato através do uso de materiais moles (seja na extremidade do manipulador ou no meio de trabalho) [68]. Esta técnica baseia-se no fato que a severidade do impacto pode ser diminuída através de dois mecanismos: com uma menor rigidez de contato pode-se reduzir a magnitude das forças impulsivas e, dependendo das características do material de contato utilizado, esse pode ajudar a dissipar a energia do impacto [90][117]. No entanto, nas aplicações industriais um controle deste tipo pode ser inaceitável, por exemplo em operações de usinagem nas quais o contato metal-metal é inevitável [80]. Outra abordagem é amortecer a junta de acionamento do manipulador. O amortecimento na junta pode ser implementado de maneira ativa ou passiva [78]. Quando implementado de forma ativa, existe o problema da obtenção da velocidade da junta através de sensores de deslocamento angular (encoders), por exemplo, no caso de manipuladores rígidos fazendo contato com superfícies muito rígidas, os deslocamentos angulares detetados durante o contato são quase imperceptíveis através dos sensores, mesmo tendo estes alta resolução. Isso limita o grau de amortecimento que pode se obter ativamente. Através de amortecimento passivo nas juntas pode-se evitar os problemas que carrega o amortecimento ativo [79] mas, para isto precisa-se da construção física de um mecanismo

de amortecimento passivo na junta, o que pode resultar um impedimento em algumas aplicações. No trabalho de Volpe e Khosla [111], mostrou-se que em manipuladores robóticos rígidos, um controle de explícito de força proporcional e alimentação direta unitária<sup>1</sup> com ganho perto de  $-1$  equivale a um controle de impedância com massa infinita, e isto resulta favorável durante a fase de pré-transição do contato, pois evita-se perdas de contato<sup>2</sup>. No, entanto este tipo de controle implica que o manipulador deverá exercer forças iguais e opostas às forças de contato as quais podem ser grandes durante a fase de pré-transição. Logo, a saturação dos atuadores das juntas pode acontecer.

O controlador desenvolvido aqui é projetado especificamente para controlar manipuladores rígidos que impactam devido às incertezas na posição da superfície de colisão ou a obstáculos inesperados. Baseia-se na seguinte idéia: detetar o instante em que acontece o primeiro impacto identificando a posição da superfície de colisão. Logo, uma vez que o manipulador encontra-se livre após o impacto, a trajetória que o manipulador deverá seguir é reformulada para que possa atingir novamente a superfície de contato (cuja posição foi identificada no passo prévio) mas com uma velocidade mínima, evitando assim os próximos impactos. O projeto deste controlador é feito usando a teoria geral de controle ótimo.

### 5.1.1

#### Trajetória Ótima de Recontato

Como foi visto na análise da seção 2.5.1, manipuladores robóticos sob controle de força que perdem contato com o meio de trabalho, tendem a voltar à superfície de contato com uma velocidade que pode ser ainda maior que aquela do primeiro impacto acontecendo um segundo impacto tão severo ou mesmo mais do que o primeiro (veja por exemplo as figuras 2.11-2.13 e 2.21-2.22). Isto é devido a que diante de uma perda de contato, os controladores de força detectam uma força de contato nula e um erro grande, logo atuam para aproximar o manipulador contra a superfície de colisão, mas isto é feito com tal rapidez que provoca impacto. Logicamente, após alguns impactos a energia cinética do sistema diminuirá e o manipulador atingirá a superfície com uma velocidade suficientemente pequena tal que o contato não será mais perdido (fig. 2.19).

---

<sup>1</sup>Ver seção 2.3.1.

<sup>2</sup>O fato que um ganho perto de  $-1$  é favorável durante o impacto de manipuladores rígidos foi verificado também na análise feita na seção 2.5.1, mas chegamos à mesma conclusão por outro caminho.

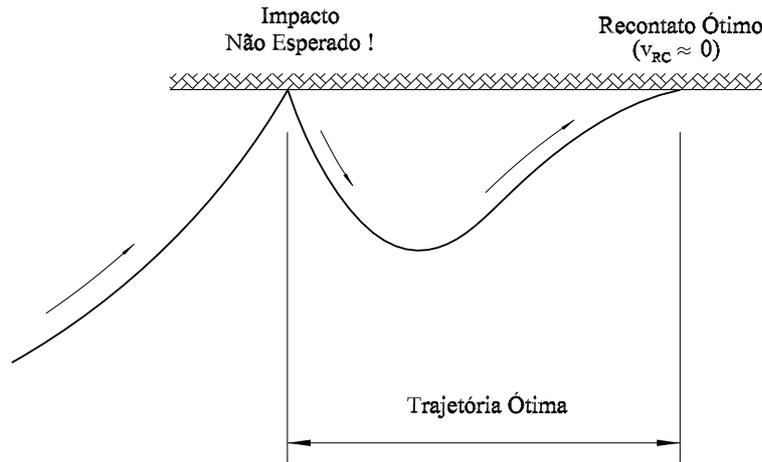


Figura 5.1: Trajetória ótima de recontato da extremidade do manipulador (após um impacto).

A idéia nesta seção é criar um novo controlador chamado *Controlador de Recontato Ótimo* que será acionado a partir do instante da perda de contato para reformular a trajetória que o manipulador deverá seguir para atingir a superfície de contato com velocidade próxima de zero. A posição da superfície de contato pode ser identificada no começo do primeiro impacto. Veja fig. 5.1. Para projetar este controlador usaremos a teoria geral de controle ótimo.

### Formulação do Problema de Controle Ótimo

Dado um sistema dinâmico e uma condição inicial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5-1)$$

o problema de controle ótimo pode ser definido como: Determinar um sinal de controle admissível  $\mathbf{u}^*(t)$  que cause que sistema dinâmico (5-1) acompanhe uma trajetória admissível  $\mathbf{x}^*(t)$  no espaço de estados tal que minimize um determinado índice de desempenho. Matematicamente podemos formular o problema da seguinte maneira:

Achar uma vetor admissível  $\mathbf{u}^*(t)$  que minimize o seguinte funcional:

$$J = \int_0^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \phi(\mathbf{x}(t_f)) \quad (5-2)$$

sujeito aos seguintes vínculos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (5-3)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5-4)$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}, 0 \leq t \leq t_f \quad (5-5)$$

aqui  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  e o funcional a minimizar, definido na eq.(5-2) através das funções  $L$  e  $\phi$ , é um escalar. O sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  está restringido pela condição  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U}$  é algum conjunto em  $\mathbb{R}^m$ . Quando o conjunto  $\mathcal{U}$  é um intervalo, o vínculo do sinal de controle adota a seguinte forma  $\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max}$ . Adicionalmente podem existir vínculos na condição final, ou seja no tempo  $t_f$ , os quais podemos especificar da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\psi}(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = [\psi_1(t_f, \mathbf{x}(t_f)), \dots, \psi_r(t_f, \mathbf{x}(t_f))]^t = \mathbf{0} \quad (5-6)$$

Uma vez que o funcional a minimizar tenha sido especificado, o próximo passo é resolver o problema de otimização. Existem basicamente duas abordagens para isto: O Método da *Programação Dinâmica* e o *Princípio Mínimo de Pontryagin*. O Método da Programação Dinâmica é baseado no Princípio de Optimalidade desenvolvido por Bellman o qual estabelece que um sinal de controle que é ótimo sob um intervalo dado  $[0, t_f]$  é também ótimo em todos os subintervalos  $[t, t_f]$ ,  $0 < t < t_f$ . O problema de controle ótimo torna-se, através desta abordagem, uma equação diferencial parcial sujeita a condições de contorno, a qual é chamada de equação de *Hamilton-Jacobi-Bellman* e possibilita a geração de um sinal de controle por realimentação ótimo  $\mathbf{u}^* = l(t, \mathbf{x}^*)$  [42]. Por outro lado, o Princípio Mínimo de Pontryagin é um princípio variacional e essencialmente estabelece um sinal de controle ótimo deve minimizar uma dada função conhecida como *Hamiltoniano* [74]. Neste trabalho será adotado a segunda abordagem. Para isto introduzimos o Hamiltoniano do problema de controle ótimo, definido pela seguinte expressão:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), n_0) \doteq n_0 L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^t(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (5-7)$$

todas as variáveis que aparecem nesta expressão foram já definidas acima

exceto  $\lambda(t)$  e  $n_0$ . O vetor  $\lambda(t)$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange conhecido como vetor de co-estado e cujo propósito é assegurar que a eq.(5-3) seja tomada em conta no processo de minimização. Já a variável  $n_0$  é um número escalar cujo valor pode ser um ou zero; isto dependerá do tipo de problema que se tenha em mãos.

### Princípio Mínimo de Pontryagin

A derivação das condições necessárias para o controle ótimo é longa e não será apresentada neste trabalho. O nosso interesse aqui é a aplicação e não o desenvolvimento da teoria de controle ótimo e por tanto aqui simplesmente resumizamos os resultados através do seguinte teorema.

#### Theorema [ *Princípio Mínimo de Pontryagin* ]

Suponha que o problema de otimização dado pelas eqs.(5-2)-(5-6) tem uma solução  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$ . Então existem um vetor  $\lambda(t)$ , um número  $n_0$  (o qual pode ter valores 1 ou 0) e um vetor  $\mu$  tal que

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda(t), n_0) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), n_0), \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (5-8)$$

com  $\mathcal{H}$  dado pela eq.(5-7) e  $\lambda(t)$  é um vetor não nulo que satisfaz

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathcal{H}_{\mathbf{x}}^t(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda(t), n_0) \quad (5-9)$$

$$\lambda^t(t_f) = n_0 \phi_{\mathbf{x}}(t_f, \mathbf{x}^*(t_f)) + \mu^t \psi_{\mathbf{x}}(t_f, \mathbf{x}^*(t_f)) \quad (5-10)$$

Se a determinação de  $t_f$  é parte do problema de otimização, então há também a seguinte condição:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \lambda(t_f)) = -n_0 \phi_t(t_f, \mathbf{x}^*(t_f)) - \mu^t \psi_t(t_f, \mathbf{x}^*(t_f)) \quad (5-11)$$

Nas equações acima, os sub-índices  $\mathbf{x}$  e  $t$  denotam diferenciação com relação às variáveis  $\mathbf{x}$  e  $t$  respectivamente. O valor de  $n_0$  dependerá da natureza do problema e pode ser determinado durante a solução do problema de otimização. Quando é determinado que  $n_0 = 1$ , o problema é dito normal, o que acontece na maioria dos casos. Caso contrário, se essa variável vale zero, ou seja  $n_0 = 0$ , e nesse caso o problema é chamado de anormal. Não existe um critério geral e simples para reconhecer se um problema é normal ou anormal e portanto na maioria dos casos o que deve-se fazer para demonstrar que um problema é normal é considerar o caso  $n_0 = 0$  e, através da aplicação do Princípio Mínimo de Pontryagin, provar que não

existe solução para este valor de  $n_0$ .

### Aplicação do Princípio de Pontryagin ao Problema de Recontato Ótimo

A dinâmica de um manipulador rígido de um grau de liberdade, após experimentar um impacto, pode ser representada através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} M \ddot{z}(t) &= u(t) \\ z(0) &= 0 \\ \dot{z}(0) &= -v_0, \text{ sendo que } v_0 > 0 \end{aligned} \quad (5-12)$$

onde  $M$  é a inércia do manipulador,  $z$  representa o deslocamento do manipulador em relação à posição de contato,  $u$  representa o sinal de controle e  $v_0$  é a velocidade com a qual o manipulador volta à condição livre depois de um impacto. No caso particular do manipulador rígido apresentado na fig.5.2, temos que  $M$  representa o momento de inércia do manipulador em relação ao seu eixo de rotação, a variável  $z = \theta - \theta^c$ , sendo  $\theta^c = \pi/2$ , a posição angular de contato,  $u$  é torque de acionamento na junta  $\tau_u$  e  $v_0 = \omega^c$ , sendo  $\omega^c$  a velocidade angular com a qual o manipulador perde o contato.

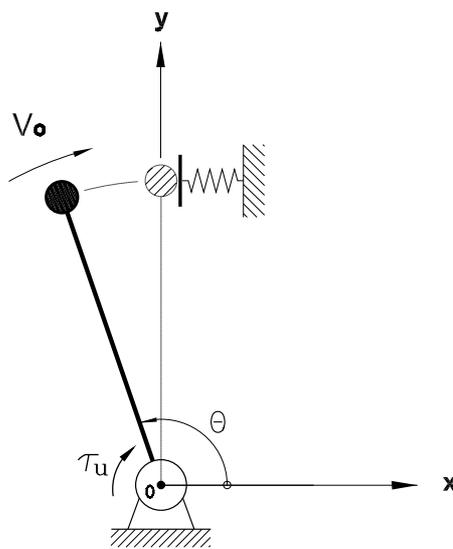


Figura 5.2: Manipulador rígido de um elo com contato/impacto.

O nosso objetivo é determinar um sinal de controle  $u^*(t)$  que leve o manipulador, através de uma trajetória  $z^*(t)$ , a uma condição de recontato ideal que é aquela na qual a velocidade do novo contato é zero. Matematicamente isto pode ser representado pela seguinte condição no estado final:

$$\begin{aligned} z(t_f) &= 0 \\ \dot{z}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (5-13)$$

onde o tempo finito  $t_f$  será especificado. A trajetória entre 0 e  $t_f$  será escolhida para minimizar o seguinte funcional que representa o esforço de controle:

$$J = \int_0^{t_f} u(t)^2 dt \quad (5-14)$$

a trajetória ótima a ser obtida,  $z^*(t)$ , será chamada trajetória ótima de recontato já que levará o manipulador de uma condição dada pelas eqs.(5-12) a uma condição dada pelas eqs.(5-13) minimizando o funcional da eq.(5-14).

Vamos colocar o nosso problema na forma da formulação do Problema Controle Ótimo, eqs.(5-2)-(5-6). Definamos o vetor de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

onde

$$x_1(t) = z(t) \quad (5-16)$$

$$x_2(t) = \dot{z}(t) \quad (5-17)$$

Baseado neste vetor de estado, reconhecendo as funções correspondentes à formulação do Problema do Controle Ótimo temos,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t)/M \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

e as condições iniciais,

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_0 \end{bmatrix}, \quad v_0 > 0 \quad (5-19)$$

as funções do funcional a minimizar

$$L(\mathbf{x}(t), u(t)) = u(t)^2 \quad (5-20)$$

$$\phi(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = 0 \quad (5-21)$$

e a função de vínculo no estado final,

$$\boldsymbol{\psi}(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{x}(t_f) = 0 \quad (5-22)$$

Usando estas funções o Hamiltoniano do sistema pode ser construído:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = n_0 u(t)^2 + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 \frac{u(t)}{M} \quad (5-23)$$

A primeira do condição do Princípio Mínimo de Pontryagin, eq.(5-8), diz que o sinal de controle ótimo minimiza o Hamiltoniano do sistema. Analisando a expressão do Hamiltoniano dada na eq.(5-23), e considerando que  $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ , vemos que para existir um mínimo é preciso que  $n_0 = 1$ . Neste caso, a condição de valor mínimo do Hamiltoniano pode ser especificada derivando a expressão em relação à variável  $u$  e igualando esta a zero.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = 2 u^*(t) + \frac{\lambda_2}{M} = 0 \quad (5-24)$$

daqui

$$u^*(t) = -\frac{\lambda_2}{2 M} \quad (5-25)$$

A segunda condição, eq.(5-9), estabelece que

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

e daqui tem-se,

$$\lambda_1 = C_1 \quad (5-27)$$

$$\lambda_2 = -C_1 t + C_2 \quad (5-28)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são duas constantes. Substituindo a eq.(5-28) na eq.(5-25) temos,

$$u^*(t) = A t - B \quad (5-29)$$

onde

$$A = \frac{C_1}{2 M} \quad (5-30)$$

$$B = \frac{C_2}{2 M} \quad (5-31)$$

substituindo a eq.(5-29) na equação da dinâmica do sistema, eq.(5-18), temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^*(t) \\ (A t - B)/M \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

usando as condições iniciais eq.(5-19), podemos resolver o sistema para obter:

$$x_1^*(t) = \left( \frac{A}{6 M} \right) t^3 - \left( \frac{B}{2 M} \right) t^2 - v_0 t \quad (5-33)$$

$$x_2^*(t) = \left( \frac{A}{2 M} \right) t^2 - \left( \frac{B}{M} \right) t - v_0 \quad (5-34)$$

usando as condição final  $\boldsymbol{\psi}(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{x}(t_f) = 0$ , e sabendo que  $t_f \neq 0$  temos,

$$\left( \frac{A}{6 M} \right) t_f^2 - \left( \frac{B}{2 M} \right) t_f - v_0 = 0 \quad (5-35)$$

$$\left( \frac{A}{2 M} \right) t_f^2 - \left( \frac{B}{M} \right) t_f - v_0 = 0 \quad (5-36)$$

resolvendo para as constantes  $A$  e  $B$ , obtemos

$$A = -6 \frac{v_0 M}{t_f^2} \quad (5-37)$$

$$B = -4 \frac{v_0 M}{t_f} \quad (5-38)$$

Logo, a lei de controle ótima é obtida substituindo estas duas expressões na eq.(5-29), assim

$$u^*(t) = 4 \frac{v_0 M}{t_f} \left\{ -\frac{3}{2} \left( \frac{t}{t_f} \right) + 1 \right\} \quad (5-39)$$

Como pode-se observar desta última expressão, durante o intervalo  $[0, t_f]$  o sinal de controle ótimo varia linearmente com o tempo, começando em  $4 v_0 M/t_f$  e terminando em  $-2 v_0 M/t_f$  como apresentado na fig.5.3.

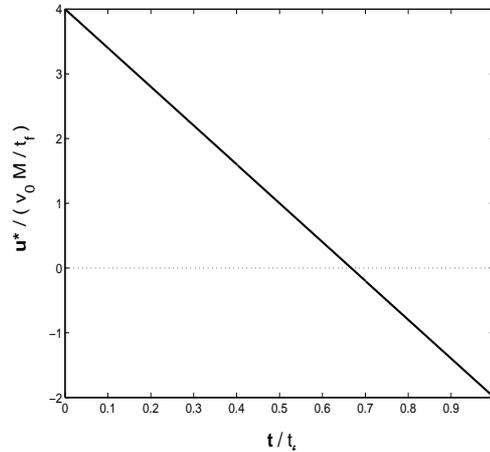


Figura 5.3: Sinal de controle ótimo adimensionalizado  $u^*/(v_0 M/t_f)$  para uma trajetória de recontato ótimo.

A trajetória ótima é dada por

$$x_1^*(t) = z^*(t) = v_0 t_f \left\{ -\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 + 2\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 - \left(\frac{t}{t_f}\right) \right\} \quad (5-40)$$

$$x_2^*(t) = \dot{z}^*(t) = v_0 \left\{ -3\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + 4\left(\frac{t}{t_f}\right) - 1 \right\} \quad (5-41)$$

Observamos que a trajetória ótima obtida corresponde a um polinômio cúbico e a curva da velocidade a uma parábola. Pode-se verificar usando as expressões acima deduzidas que a velocidade vai para zero pela primeira vez no instante  $t = (1/3) t_f$  e o valor máximo da velocidade é  $v_0/3$  e acontece no instante  $t = (2/3) t_f$ . O maior afastamento da trajetória em relação à posição zero é  $(-4/27) v_0 t_f$ . Diagramas da trajetória e velocidade ótima de recontato são apresentados nas figs.5.4-(a) e (b) respectivamente.

### Implementação e Algoritmo do Controlador de Recontato

A fig.5.5 apresenta como o Controlador de Recontato é implementado em um manipulador robótico. O algoritmo é o seguinte:

1. Sob Controle de Posição, acontece um impacto inesperado. Neste instante, ao detetar força de contato, o modo de Controle de Força

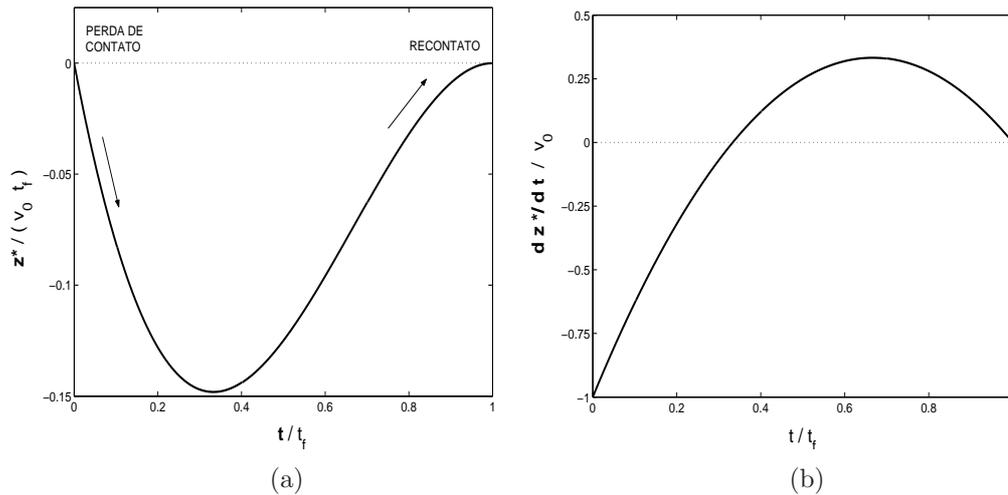


Figura 5.4: (a) Trajetória ótima de recontato após um impacto (adimensionalizada)  $z^*(t)/(v_0 t_f)$ . (b) Velocidade durante a fase de recontato após um impacto (adimensionalizada)  $\dot{z}^*(t)/v_0$ .

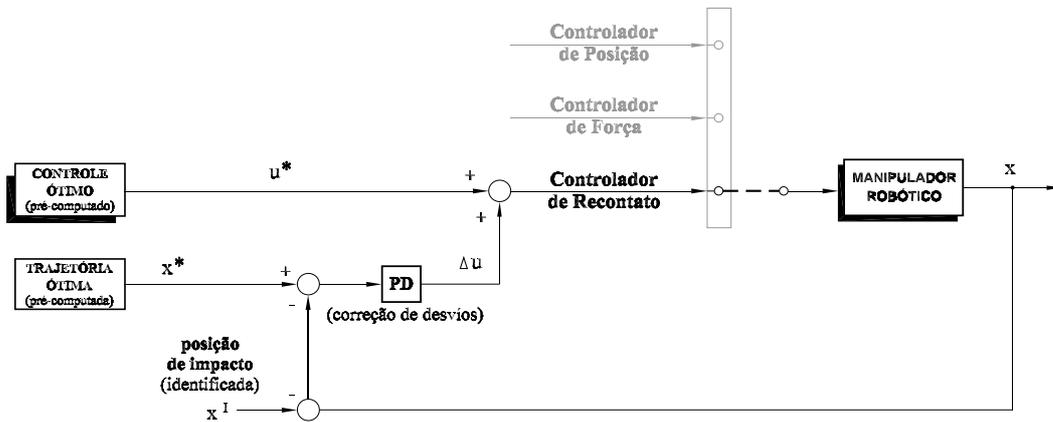


Figura 5.5: Implementação do controlador de recontato.

é acionado pelo comando central do manipulador. Se a velocidade de impacto e a rigidez do meio são pequenas suficientes, é provável que a perda de contato não aconteça (veja fig.2.20). Neste caso não haverá período de pré-transição, logo o manipulador poderá continuar sob o modo de Controle de Força. No entanto, se a velocidade de impacto e a rigidez do meio são grandes o suficiente, haverá perda de contato e como já sabemos da análise do capítulo 2 (veja fig. 2.21) a trajetória de recontato não é boa quando o sistema está sob o controle de força.

2. No instante da perda de contato, é acionado o Controlador de Recontato e também é identificada a posição da superfície de colisão. O sinal de controle ótimo calculado acima na eq.(5-39) é aplicado ao sistema para levar a extremidade do manipulador pela trajetória de recontato previamente calculada, dada na eq.(5-40). Caso houver al-

gum desvio da posição em relação à trajetória de recontato (devido a erros na modelagem ou distúrbios no sistema de controle) este é corrigido imediatamente por um controlador adicional (exemplo, PD) (veja fig.5.5).

3. Após o período de duração do controle ótimo, novamente é accionado o modo de Controle de Força. Como neste caso a velocidade de recontato será muito pequena, espera-se que o Controle de Força leve o valor da força de contato até o valor desejado sem perder novamente o contato.

### Exemplo de Aplicação.

Considere-se como exemplo o manipulador da fig.5.2 com a seguinte condição inicial:  $\theta = 100^\circ$  e  $\dot{\theta} = 0^\circ/s$ . A partir desta condição, planeja-se a trajetória de referência que a extremidade do manipulador deverá acompanhar (linha verde na fig.5.6).

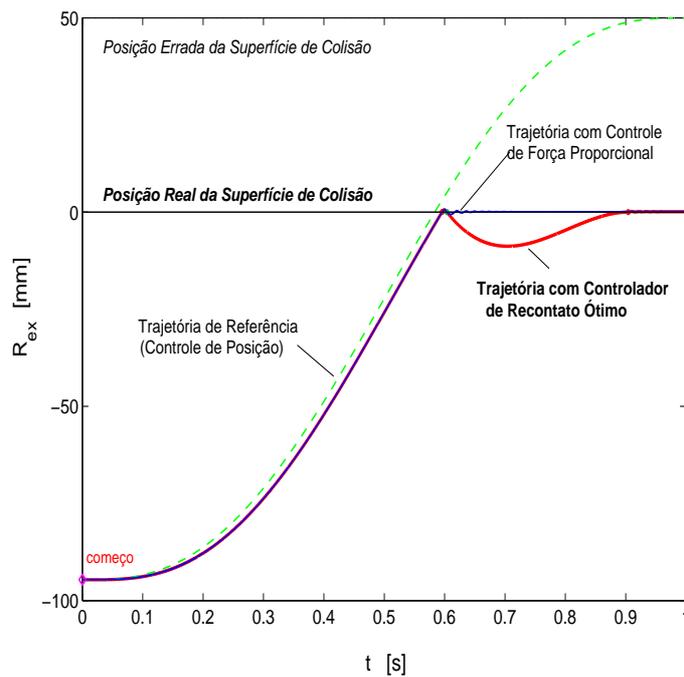


Figura 5.6: Trajetória da extremidade de um manipulador antes e depois de um impacto em  $t = 0,6$  s. Linha vermelha: Com controle de recontato. Linha azul: Com controle explícito de força proporcional. Linha verde: Trajetória de referência para o controle de de posição antes do impacto.

No entanto, a trajetória é planejada com informação incerta ou errada da posição da superfície com a qual o manipulador deverá fazer contato. Logo, durante o movimento no modo de controle de posição acontece um impacto inesperado (aproximadamente em  $t = 0,6$  s) com velocidade de

$v^C = 0,26 \text{ m/s}$ . Neste instante, ao detectar força de contato, o modo de operação do manipulador é cambiado ao do controlador de força o qual tentará levar a força de contato a um valor desejado de  $f_e^d = 10 \text{ N}$ . No entanto, devido à severidade do impacto, o contato é perdido com velocidade  $v^{PC} = 0,20 \text{ m/s}$  após ser experimentada uma força de impacto de  $f_{imp} = 64 \text{ N}$ . Neste instante é acionado o controlador de recontato o qual leva a extremidade do manipulador por uma trajetória projetada para atingir a superfície com velocidade próxima de zero. Uma vez que o segundo contato é estabelecido, novamente é ligado o controlador de força, que neste caso levará a força de contato até o valor desejado, sem perder novamente o contato. Ver fig.5.7 para ver o detalhe da trasição do contato. Na mesma figura apresenta-se a trajetória que seguiria o manipulador caso não existir controlador de recontato após a perda de contato, neste caso, o controlador de força será o responsável por trazer de volta à superfície o manipulador, mas isto é feito de maneira muito deficiente.

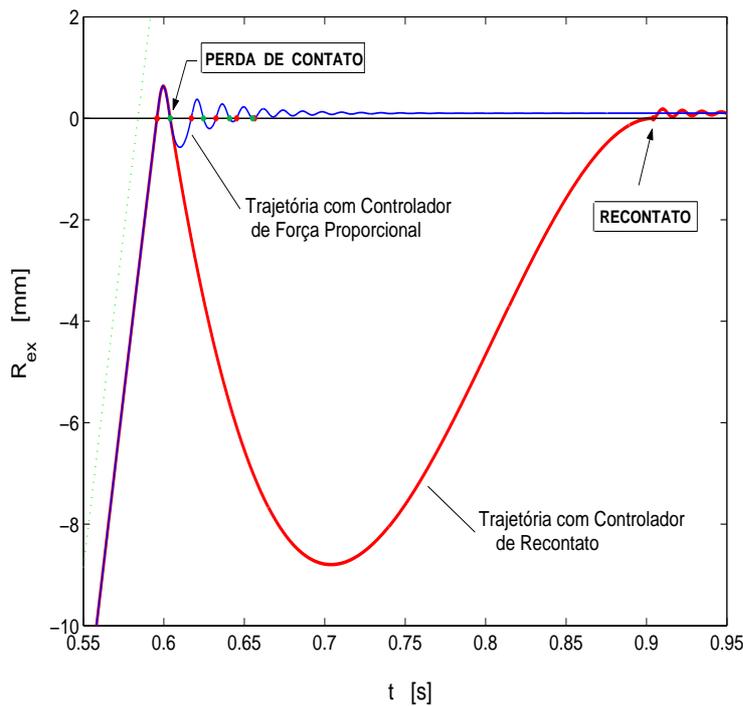


Figura 5.7: Detalhe da trajetória seguida pela extremidade do manipulador após experimentar um impacto.

A fig.5.8 apresenta o diagrama dos valores da força de contato/impacto experimentadas em ambos os casos: com e sem controlador de recontato. Como pode-se observar, no caso de existir controlador de recontato, somente é experimentado o primeiro impacto que é inevitável, já no caso de não existir este controlador, existe uma seqüência de três impactos posteriores

ao primeiro. Obviamente replanejando a trajetória após o primeiro impacto evitamos impactos posteriores.

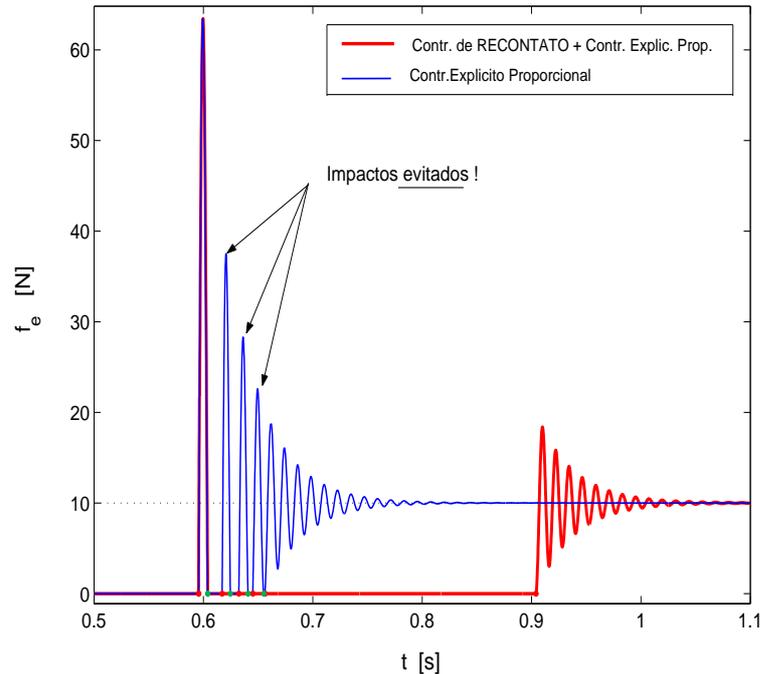


Figura 5.8: Valores da força de contato/impacto experimentadas por um manipulador. Linha vermelha: Com controlador de recontato. Linha azul: Sem controlador de recontato.

Finalmente, na fig.5.9 apresenta-se o diagrama das trajetórias de recontato para diferentes velocidades de perda de contato possíveis. Comparando este diagrama com o da fig.2.21 podemos observar nítidamente a diferença na qualidade do recontato.

A técnica de recontato baseia-se numa idéia muito simples e pode ser estendida a manipuladores com mais de um elo. Para isto é somente necessário utilizar um controlador de posição com a trajetória dada na eq.(5-40) como trajetória de referência. Obviamente, a trajetória de referência pode ser pré-computada off-line, mas devido à identificação online da superfície de colisão esta trajetória deverá ser deslocada um certo valor para começar de zero, no instante da perda do contato.

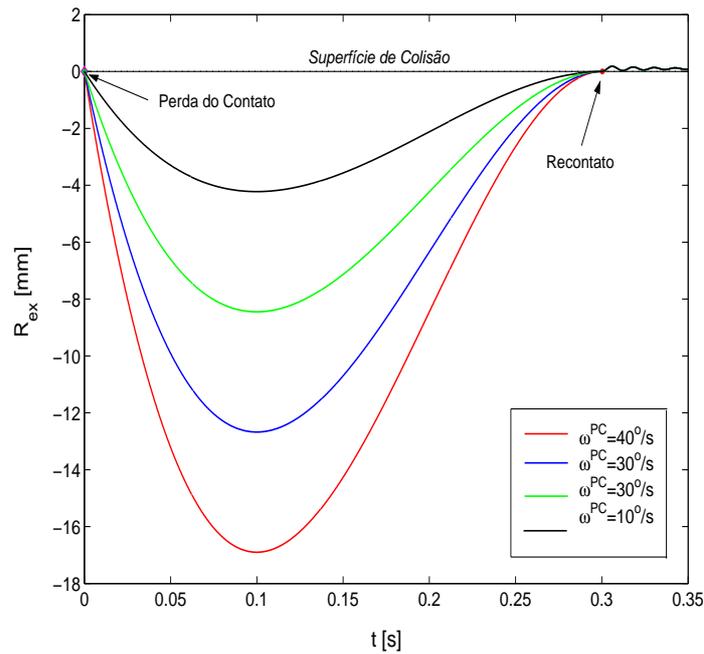


Figura 5.9: Trajetórias ótimas de recontato para várias velocidades de perda de contato.

## 5.2

### Controladores de Impacto para Manipuladores Flexíveis

Técnicas para controle impacto em manipuladores flexíveis são quase inexistentes na literatura. Nesta seção são apresentadas duas novas técnicas de controle as quais são testadas no manipulador flexível modelado no capítulo 3. O primeiro destes controladores é útil quando a posição da superfície de colisão é conhecida com precisão. Este usa a idéia da linearização do movimento do manipulador flexível ao redor do movimento do manipulador considerado como rígido. Esta linearização é usada para projetar um controlador de posição de alta precisão evitando ou diminuindo assim a severidade do impacto inicial. O segundo controlador, é projetado especificamente para lidar com a fase pré-transiente de contato em manipuladores flexíveis. Este controlador amortece ativamente a parte flexível do manipulador através de pastilhas piezoelétricas (atuadores e sensores) para assim melhorar a resposta pré-transiente de contato. O fundamento para isto está na análise da seção 2.5.1, onde foi mostrado que amortecimento do sistema joga um papel importante na fase de pré-transição do contato, mas que infelizmente, no caso de manipuladores flexíveis, o amortecimento da junta não é suficiente para aumentar o amortecimento do sistema, sendo necessário amortecer o elemento flexível também. Devido aos problemas associados com o fenômeno de derramamento de modos (Spillover) que pode acontecer

nas estruturas flexíveis por causa da excitação dos modos residuais [107], é optado por um controle do tipo estrutural para assim proporcionar ao controlador robustez na estabilidade. Os parâmetros deste controlador são otimizados através de um algoritmo de programação não-linear.

### 5.2.1

#### Posicionamento usando Linearização em torno do Movimento Rígido Associado

Se a posição do ambiente é conhecida com precisão, então talvez a melhor alternativa seja evitar impacto através de um posicionamento preciso da extremidade do manipulador. No caso de uma manipulador rígido, o controle de posição com excelente precisão pode ser atingido através do algoritmo conhecido como *Dinâmica Inversa* [88]. Infelizmente este algoritmo não pode ser aplicado diretamente no caso de um manipulador flexível. A dinâmica inversa para manipuladores flexíveis é muito mais complicada devido à que a dinâmica inversa de estruturas flexíveis envolve soluções causais e não-causais e a solução deste problema resulta muito laboriosas para manipuladores de dois ou mais elos [32][9].

Aqui, nesta seção é proposta uma alternativa à determinação da dinâmica inversa de manipuladores flexíveis que consiste em aplicar diretamente a solução da dinâmica inversa do manipulador considerado rígido, mas depois corrigir o erro através de um controle de realimentação. A dinâmica do erro pode ser obtida através de uma linearização do movimento do manipulador flexível em torno do movimento do manipulador considerando-o rígido.

#### Linearização em torno do Movimento de Manipulador Rígido

Considere-se a equação de movimento para ao manipulador flexível do capítulo 3 em ausência de forças de contato:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B}_{\mathbf{v}_{pa}} \mathbf{v}_{pa} \quad (5-42)$$

onde

$$\mathbf{q} \doteq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

Se o manipulador fosse rígido, o vetor  $\mathbf{q}$  seria:

$$\mathbf{q}^R \doteq \begin{bmatrix} \theta_1^R \\ \theta^R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

e a equação de movimento deste:

$$\mathbf{M}^R(\mathbf{q}^R) \ddot{\mathbf{q}}^R + \mathbf{h}^R(\mathbf{q}^R, \dot{\mathbf{q}}^R) = \mathbf{B}_\tau \boldsymbol{\tau}^R \quad (5-45)$$

Mas, como na verdade o manipulador não é rígido, existe uma diferença entre o vetor  $\mathbf{q}^R$  e  $\mathbf{q}$ :

$$\Delta \mathbf{q} \doteq \mathbf{q} - \mathbf{q}^R = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_1^R \\ \theta - \theta^R \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

Substraindo as eq.(5-45) da eq.(5-42) temos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(\mathbf{q}) \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}}) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \{ \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}^R(\mathbf{q}^R, \dot{\mathbf{q}}^R) \} \\ & + \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mathbf{M}(\mathbf{q}^R) \} \ddot{\mathbf{q}}^R = \mathbf{B}_\tau \Delta \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B}_{\mathbf{v}_{pa}} \mathbf{v}_{pa} \end{aligned} \quad (5-47)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^R$ . Se nesta equação, desprezamos os termos de ordem alta, podemos re-escrever esta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_L(\boldsymbol{\theta}^R) \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R, \ddot{\boldsymbol{\theta}}^R) \Delta \mathbf{q} \\ & = \mathbf{B}_{tot} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{W}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R, \ddot{\boldsymbol{\theta}}^R) \end{aligned} \quad (5-48)$$

onde,

$$\mathbf{M}_L(\boldsymbol{\theta}^R) = \begin{bmatrix} J_1 & J_3 \cos \theta_2^R & \tilde{\phi}_2^t \cos \theta_2^R \\ J_3 \cos \theta_2^R & J_2 & \tilde{\phi}_1^t \\ \tilde{\phi}_2^t \cos \theta_2^R & \tilde{\phi}_1^t & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

$$\mathbf{C}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R) = \begin{bmatrix} 0 & -2 J_3 \sin \theta_2^R \dot{\theta}^R & -2 \tilde{\phi}_2^t \sin \theta_2^R \dot{\theta}^R \\ 2 J_3 \sin \theta_2^R \dot{\theta}_1^R & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

(5-51)

$$\mathbf{K}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R, \ddot{\boldsymbol{\theta}}^R) = \begin{bmatrix} J_3 a & -J_3 a & -\tilde{\phi}_2^t a \\ -J_3 b & J_3 b & \tilde{\phi}_2^t b \\ -\tilde{\phi}_2 b & \tilde{\phi}_2 b & \mathbf{K}_b - \dot{\theta}^{R^2} \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

onde

$$a = \cos \theta_2^R \dot{\theta}^{R^2} + \sin \theta_2^R \ddot{\theta}^R \quad (5-53)$$

$$b = \cos \theta_2^R \dot{\theta}_1^{R^2} + \sin \theta_2^R \ddot{\theta}_1^R \quad (5-54)$$

$$\mathbf{W}_L(\boldsymbol{\theta}^R, \dot{\boldsymbol{\theta}}^R, \ddot{\boldsymbol{\theta}}^R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\phi}_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \tilde{\phi}_2 \cos \theta_2^R \ddot{\theta}_1^R + \tilde{\phi}_1 \ddot{\theta}^R \end{bmatrix} \quad (5-55)$$

$$\mathbf{B}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\tau & \mathbf{B}_{v_{pa}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_\tau & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}_{v_{pa}} \end{bmatrix} \quad (5-56)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \tau \\ \mathbf{v}_{pa} \end{bmatrix} \quad (5-57)$$

A eq.(5-47) é a equação dinâmica linearizada da diferença entre o movimento do manipulador flexível (  $\mathbf{q}$  ) e movimento do manipulador rígido (  $\mathbf{q}^R$  ). O termo  $\mathbf{W}_L$  é um termo persistente que aparece devido a que o movimento do manipulador rígido em torno do qual o movimento do manipulador flexível foi linearizado não satisfaz totalmente a eq.(5-42).

### Algoritmo do Controlador

O algoritmo do controlador proposto é o seguinte:

1. Especificar, num certo intervalo, uma trajetória desejada para a extremidade do manipulador:  $\mathbf{R}_E^*(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ ; e transformá-la, via o algoritmo de cinemática inversa para o manipulador rígido, em valores de deslocamentos angulares das juntas:  $\boldsymbol{\theta}^R$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}^R$  e  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}^R$ .

2. Determinar o torque  $\tau^R$  necessário para posicionar o manipulador rígido na trajetória desejada (por exemplo, podemos obter  $\tau^R$  através do algoritmo de dinâmica inversa para manipuladores rígidos).
3. Se aplicamos somente o torque  $\tau^R$  no manipulador flexível, existirá um erro de posicionamento  $\Delta \mathbf{q}$ , cuja dinâmica é determinada pela eq.(5-47). A idéia será projetar um regulador para o sistema da eq.(5-47) cujo objetivo será levar o erro  $\Delta \mathbf{q}$  a zero. A ação deste controlador será:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v}_{pa} \end{bmatrix} \quad (5-58)$$

Este controlador pode ser projetado por exemplo usando a técnica LQR[42] em sub-intervalos onde seja possível considerar as matrizes  $\mathbf{M}_L$ ,  $\mathbf{C}_L$  e  $\mathbf{K}_L$  constantes.

4. Finalmente, a ação de controle total a ser aplicado no manipulador flexível, será:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v}_{pa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}^R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{v}_{pa} \end{bmatrix} \quad (5-59)$$

A estrutura deste controlador é apresentada graficamente na fig.5.10.

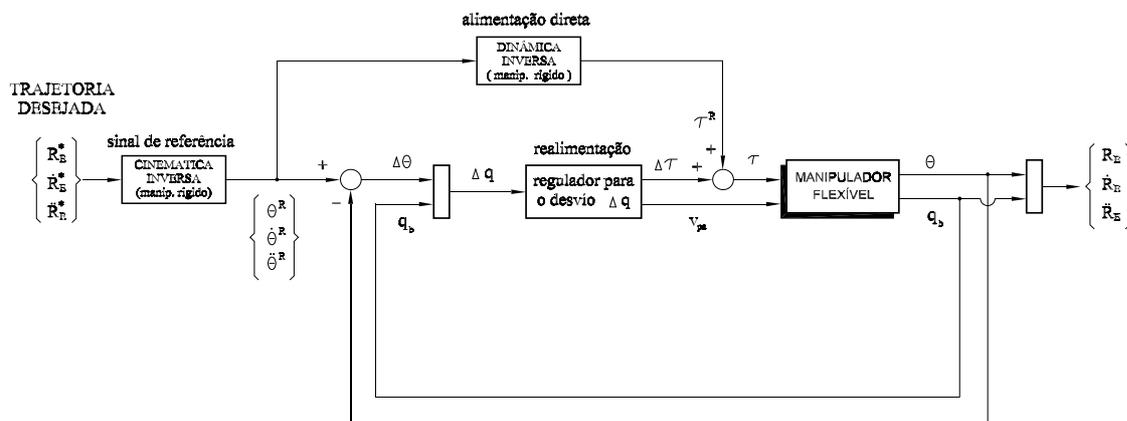


Figura 5.10: Controle de um manipulador flexível linearizado em relação ao movimento do manipulador rígido.

## 5.2.2

### Amortecimento Ativo da Parte Flexível

Como visto no capítulo 2, para melhorar o desempenho durante a fase pré-transiente de contato, o amortecimento, tanto em manipuladores tanto rígidos como flexíveis, é desejado. Para aumentar de amortecimento do sistema, uma alternativa é amortecer a junta de acionamento do manipulador. No entanto, no caso dos manipuladores flexíveis, uma análise feita na seção 2.5.2, mostrou que amortecendo a junta do manipulador não é possível amortecer suficientemente alguns modos do sistema, sobre tudo os de maior frequência (veja fig.2.23). Com pouco amortecimento no sistema, durante a transição de contato, haverá muita vibração e como consequência disso aumentarão as perdas de contato e a duração do pré-transiente será longa. Na verdade, somente altos valores de amortecimento da junta poderiam ser capazes de amortecer em algum grau os modos responsáveis pelas vibrações que ocasionam as perdas de contato.

O uso de amortecedores já foi usado para melhorar a transição do contato em manipuladores flexíveis. Oh e Chung [79] construíram um amortecedor passivo para a junta de um manipulador que foi submetido a impacto. No entanto, o manipulador considerado por eles, tinha pouco grau de flexibilidade (a rigidez da estrutura do elo do manipulador era da ordem da rigidez do contato). É por este motivo que eles conseguiram melhorar a resposta transiente. Para contatos muito rígidos (como no caso do contato metal-metal) com manipuladores flexíveis esta técnica não resulta mais útil. Outra abordagem que achamos na literatura consistiu em amortecer o sistema através da realimentação do sinal de velocidade da extremidade do manipulador, mas esta técnica tem suas complicações devido a que neste caso, a planta a controlar é um sistema não-colocado (pois o sensor está na extremidade e o atuador na junta). Para evitar os problemas relacionados com a não-colocação, foi proposta uma realimenta positiva junto com uma filtragem do sinal de velocidade da extremidade [60][61]. A técnica foi testada em um manipulador flexível e resultados não apresentaram grande melhora do desempenho.

Nesta seção será investigada uma nova abordagem, nunca antes usada no problema de contato transiente de manipuladores flexíveis: O amortecimento da parte flexível. O controlador proposto, utiliza pastilhas piezoelétricas coladas na estrutura flexível do manipulador como pares de sensores e atuadores colocados. Mais ainda, para evitar o problema de instabilidade por derramamento (Spillover de Controle e de Observação)[106][105] que pode acontecer no controle de estruturas flexíveis, utilizaremos uma

realimentação estática dos sinais medidos através de uma matriz ganho simétrica e positiva definida. O projeto do controlador, consiste basicamente na determinação desta matriz ganho. Isto é formulado como um problema de otimização para maximizar a robustez garantindo um bom desempenho. A solução do problema de otimização é feita através de técnicas de programação não-linear.

### Controle Colocado para a Parte Flexível da Estrutura

Considere a equação de movimento para a parte flexível do manipulador:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (5-60)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  são os vetores de coordenadas generalizadas e de sinais de controle, respectivamente.  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de massa a qual é simétrica e positiva definida,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de amortecimento estrutural a qual é simétrica e positiva semi-definida,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de rigidez a qual é simétrica e positiva semi-definida e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de influencia das entradas de controle. No caso de ter sensores e atuadores colocados, podemos expressar o vetor de variáveis medidas através da seguinte relação [58]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^t \mathbf{x} \quad (5-61)$$

Considere-se o sistema a seguinte lei de controle de realimentação das variáveis de saída:

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{G}_1 \mathbf{y} + \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{y}}) \quad (5-62)$$

onde as matrizes  $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são matrizes ganhos de realimentação que são cheias, simétricas e positivas definidas. Logo, considerando as eqs.(5-60)-(5-62), podemos deduzir que a equação de movimento do sistema em malha fechada é a seguinte:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{G}_2 \mathbf{D}^t) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{D} \mathbf{G}_1 \mathbf{D}^t) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5-63)$$

Note que já que ambas as matrizes  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  são positivas definidas, as

matrizes de perturbação da rigidez e amortecimento induzidas pelo controle: termos  $\mathbf{D} \mathbf{G}_1 \mathbf{D}^t$  e  $\mathbf{D} \mathbf{G}_2 \mathbf{D}^t$ , são também simétricas e positivas definidas. Então, tem-se que a dinâmica do sistema em malha fechada é também dado por um sistema de segunda ordem com matriz de massa simétrica e positiva definida, e matrizes de rigidez e amortecimento simétricas e positivas semi-definidas. Um sistema com estas características é sempre estável. Para ver isto considere-se a seguinte equação de estado associada à eq.(5-63):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (5-64)$$

onde

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

e

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{D} \mathbf{G}_1 \mathbf{D}^t, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{G}_2 \mathbf{D}^t \quad (5-66)$$

Considere-se a seguinte candidata a função de Lyapunov (energia mecânica total do sistema):

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (5-67)$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo e usando as eqs. (5-63) e (5-66) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^t \tilde{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{z}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (5-68)$$

Agora podemos usar o Teorema de LaSalle (veja seção 2.4.3) para provar a estabilidade do sistema. Considerando que a matriz de rigidez é positiva definida, i.e. não existem modos de corpo rígido, a função de Lyapunov candidata eq.(5-67) é positiva definida. No entanto, a derivada da função

Lyapunov eq.(5-68), é apenas negativa semi-definida. Procuramos agora o conjunto de soluções possíveis para  $\dot{V} = 0$ . Para isso acontecer, temos da eq.(5-68) que  $\dot{\mathbf{x}}$  deve ser necessariamente zero para todo instante de tempo e, de acordo com a equação de movimento eq.(5-63), isto só é possível se o movimento é iniciado em  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ou seja no ponto de equilíbrio, logo a única solução possível para ter  $\dot{V} = 0$  é solução trivial  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Finalmente, de acordo às condições do Teorema de LaSalle, a estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada eq.(5-63) é demonstrada.

Uma consequência importante da análise de estabilidade é que a estabilidade do sistema em malha fechada para a lei de controle dada na eq.(5-62), com matrizes ganho  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  simétricas e positivas definidas é mantida:

- Independentemente do número de modos retidos no modelo reduzido no qual o projeto do controlador é baseado,
- Independentemente dos erros de modelagem nos parâmetros do sistema; somente o desempenho projetado poderia ser degradado como consequência destes erros de modelagem.

Estas consequências são atribuídas ao fato que uma vez escolhidas matrizes  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  simétricas e positivas definidas, as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{G}_2 \mathbf{D}^t$  e  $\mathbf{K} + \mathbf{D} \mathbf{G}_1 \mathbf{D}^t$  são sempre positivas definidas independentemente de se é usado um modelo completo ou reduzido para a determinação das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ . Logo, podemos afirmar que se uma estrutura flexível com equação de movimento dada na eq.(5-60) é controlável, então o sistema em malha fechada com a lei de controle da eq.(5-62) com  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1^t > 0$  e  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^t > 0$  será sempre assintoticamente estável e portanto os problemas potenciais de estabilidade devido ao derramamento (Spillover) [106] podem ser completamente evitados e além disso os valores dos parâmetros da estrutura flexível não tem que ser conhecidos com exatidão para garantir a estabilidade.

### Otimização dos Ganhos de Realimentação

Pelo exposto acima, as matrizes ganho de realimentação,  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  deverão pertencer à família de matrizes positivas definidas para assim garantir a estabilidade do sistema no sentido de Lyapunov. Mas como escolher estas matrizes ganhos das infinitas possibilidades? Uma opção é limitar os ganhos à família de matrizes diagonais com elementos diagonais

positivos, simplificando assim a tarefa do projeto do controlador. Neste caso teremos um tipo de controle por realimentação no qual, o comando de um atuador específico será definido apenas pela medida do sensor local colocado respectivo, sendo que as medições obtidas por outros sensores na estrutura fora da posição deste atuador não influenciarão diretamente a sua ação. No entanto, se permitimos que as matrizes ganho sejam cheias, e não apenas diagonais, mas positivas definidas, estaremos permitindo que os comandos dos atuadores sejam geradas como uma função linear de todas as medições dos sensores na estrutura, e portanto, proporcionaremos um maior grau de liberdade ao projeto do controlador garantindo sempre a estabilidade e robustez na estabilidade. Embora, neste caso, o projeto da escolha das matrizes ganho possa ser mais complexo, temos a vantagem de poder usar este maior grau de liberdade na a escolha das matrizes para melhorar ao máximo as propriedades desejadas do sistema em malha fechada..

A determinação de matrizes ganho cheias pode ser simplificada introduzindo a decomposição de Choleski [97] que nos permite representar de uma maneira geral matrizes positivas semi-definidas, assim consideramos:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{R} \mathbf{R}^t \tag{5-69}$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^t \tag{5-70}$$

onde as matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  são as seguintes matrizes triangulares inferiores:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & r_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & q_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm}^2 \end{bmatrix} \tag{5-71}$$

e os elementos  $r_{ij}, q_{ij}$  são todos reais. Assim o projeto consiste em determinar o seguinte vetor de  $m (m + 1)$  parâmetros:

$$\mathbf{p} = [ r_{11} \ r_{21} \ \cdots \ r_{m1} \ r_{22} \ \cdots \ r_{mm} \ q_{11} \ q_{21} \ \cdots \ q_{m1} \ q_{22} \ \cdots \ q_{mm} ]^t \tag{5-72}$$

e das eqs.(5-69)-(5-72) tem-se que as matrizes ganho:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1(\mathbf{p}), \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2(\mathbf{p}) \tag{5-73}$$

são funções contínuas e diferenciáveis em  $\mathbf{p}$ . A dinâmica do sistema em malha fechada é também função do parâmetro  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5-74)$$

onde

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}) = \mathbf{K} + \mathbf{D} \mathbf{G}_1(\mathbf{p}) \mathbf{D}^t \quad (5-75)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) = \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{G}_2(\mathbf{p}) \mathbf{D}^t \quad (5-76)$$

Usando a representação do espaço de estado, eqs.(5-64)-(5-66), podemos ver que a matriz de estado do sistema em malha fechada  $\mathbf{A}$ , é também função deste parâmetro  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}) & -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5-77)$$

O nosso objetivo é achar um vetor  $\mathbf{p}$  que faça que o sistema em malha fechada satisfaça condições de desempenho e robustez. Estas condições são estabelecidas da seguinte maneira:

- *Desempenho* : Mover os autovalores do sistema para dentro de uma região desejada dentro do plano complexo.
- *Robustez* : Maximizar a robustez do sistema em malha fechada diante variações paramétricas (a robustez na estabilidade diante da dinâmica residual estaria garantida pela estrutura do controlador e colocação dos pares atuadores/sensores).

Os autovalores do sistema devem ser determinados do problema de autovalor associado com a equação de estado, eq.(5-64). O problema de autovalor é o seguinte:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \hat{\phi}_i = \lambda_i \hat{\phi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5-78)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores do sistema e  $\hat{\phi}_i$  são os autovetores do sistema, normalizados tal que:

$$\hat{\phi}_i^t \hat{\phi}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n \quad (5-79)$$

sendo  $\delta_{ij}$  a função discreta delta de Kronecker. A região desejada no plano plano complexo para os autovalores do sistema pode ser especificada através dos parâmetros amortecimento e frequência natural amortecida associados a cada autovalor do sistema:

$$\omega_{d_i} = \text{Im}(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5-80)$$

$$\zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5-81)$$

Uma medida de robustez, diante de perturbações nos parâmetros do sistema é o condicionamento da matriz modal do sistema:

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 & \hat{\phi}_2 & \dots & \hat{\phi}_{2n} \end{bmatrix} \quad (5-82)$$

Isto pode ser verificado no seguinte teorema.

### Teorema

Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz com  $n$  autovalores diferentes  $\lambda_i$ , i.e. é garantido que tem  $n$  autovetores linearmente independentes  $\hat{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Considere uma matriz de perturbação  $\Delta \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\tilde{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sejam os autovalores da matriz perturbada  $\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$ . Então:

$$\min_i |\lambda_i - \tilde{\lambda}_j| \leq \|\Delta \mathbf{A}\| \mathcal{K}(\hat{\Phi}), \quad j = 1, \dots, n \quad (5-83)$$

onde  $\mathcal{K}(\hat{\Phi})$  é o número de condição da matriz modal  $\hat{\Phi}$ , e é definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{K}(\hat{\Phi}) \doteq \frac{\bar{\sigma}(\hat{\Phi})}{\underline{\sigma}(\hat{\Phi})} \quad (5-84)$$

onde  $\bar{\sigma}$  e  $\underline{\sigma}$  representam os valores singulares máximo e mínimo<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Os valores singulares são definidos pela seguinte decomposição:

Fica evidente do teorema acima que o número de condição da matriz modal representa um limite superior para as perturbações dos autovalores do sistema. Quanto menor seja este número de condição, maior será a robustez do sistema<sup>4</sup>.

Vamos formular matematicamente o problema do projeto de controlador (determinação de  $\mathbf{p}$ ) para que as condições de desempenho e robustez sejam atingidas. Isto pode ser feito adotando como critério de otimização o número de condição  $\mathcal{K}(\hat{\Phi})$  do sistema em malha fechada, sujeito a restrições nos autovalores de tal forma que eles fiquem à esquerda de certo valor real negativo no plano complexo. A formulação pode ser apresentada como um problema de Programação Não-Linear, assim:

$$\underset{\mathbf{p} \in \mathcal{P}}{\text{MINIMIZAR}} \quad J(\mathbf{p}) = \mathcal{K}(\hat{\Phi}) = \frac{\bar{\sigma}(\hat{\Phi})}{\underline{\sigma}(\hat{\Phi})} \quad (5-88)$$

sujeito a

$$f_i(\mathbf{p}) \doteq \omega_{d_i}(\mathbf{p}) - \omega_{d_i}^a = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5-89)$$

$$g_i(\mathbf{p}) \doteq \omega_{d_i}(\mathbf{p}) \zeta_i(\mathbf{p}) - \mu^a > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5-90)$$

onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto de parâmetros admissíveis,  $\omega_{d_i}^o$  denota os valores objetivos das frequências naturais amortecidas e  $\mu^o > 0$  denota o valor objetivo para o limite da constantes de tempo modais.

O problema da otimização apresentado acima pode ser resolvido através de técnicas de programação não-linear baseados em gradientes. Um de tais métodos é o *SQP* (Sequential Quadratic Programming)[5] o qual basicamente consiste na aproximação seqüencial do problema de Programação Não-Linear como um problema de Programação Quadrática (QP). Como

$$\hat{\Phi} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix} \quad (5-85)$$

sendo que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes unitárias normalizadas tal que

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (5-86)$$

e  $\Sigma_1$  é uma matrix diagonal que contém os valores singulares da matriz  $\hat{\Phi}$  em ordem decendente:

$$\Sigma_1 = \text{diag}([\sigma_1, \dots, \sigma_r]) \quad , \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (5-87)$$

ou seja  $\bar{\sigma} = \sigma_1$  e  $\underline{\sigma} = \sigma_r$ .

<sup>4</sup>Da definição de número de condição fica claro que:  $1 \leq \mathcal{K}(\hat{\Phi}) < \infty$ . Portanto, quanto mais perto de 1 seja o número de condição, mais robusto o sistema será.

todo método baseado em gradientes, no *SQP* existe a necessidade de calcular, durante o processo de busca da solução ótima, as derivadas tanto da função objetivo (que no nosso caso é o número de condição) como dos vínculos ou restrições (que no nosso caso são as frequências naturais e fatores de amortecimento). Estas derivadas podem ser estimadas numericamente mas a convergência não é boa. A melhor opção é a determinação analíticas dessas derivadas. Da teoria de álgebra linear temos as seguintes propriedades que serão uteis na determinação das derivadas:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_k} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_i^H \frac{\partial \Phi^c}{\partial p_k} \mathbf{V}_i^H + \mathbf{V}_i^H \frac{\partial \Phi^{cH}}{\partial p_k} \mathbf{U}_i^H \right) = \text{Re} \left\{ \mathbf{U}_i^H \frac{\partial \Phi^c}{\partial p_k} \mathbf{V}_i \right\} \quad (5-91)$$

e

$$\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{2n} a_{ij}^k \hat{\phi}_j \quad (5-92)$$

onde

$$a_{ij}^k = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \hat{\phi}_i^t \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \hat{\phi}_j, \quad j \neq i \quad (5-93)$$

$$= - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{2n} a_{lj}^k, \quad j = i \quad (5-94)$$

Usando a regra da cadeia nas eqs.(5-80)-(5-81) podemos expressar as derivadas dos fatores de amortecimento  $\zeta_i$  e das frequências naturais amortecidas  $\omega_{d_i}$  como função das derivadas dos autovalores:

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^3} \left[ \text{Re}(\lambda_i) \text{Im} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{p}} \right) - \text{Im}(\lambda_i) \text{Re} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] \quad (5-95)$$

e

$$\frac{\partial \omega_{d_i}}{\partial \mathbf{p}} = \text{Im} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (5-96)$$

e as derivadas dos autovalores do sistema podem ser determinadas através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} = \hat{\phi}_i^t \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \hat{\phi}_i \quad (5-97)$$

### Melhora do Desempenho no Pré-Transiente através do Amortecimento Ativo

A fig.5.11 apresenta a estrutura de uma controlador de força/impacto para um manipulador robótico flexível no qual é incluído amortecimento ativo. O controlador da parte ativa (ganho de realimentação) é projetado através da técnica de otimização descrita acima.

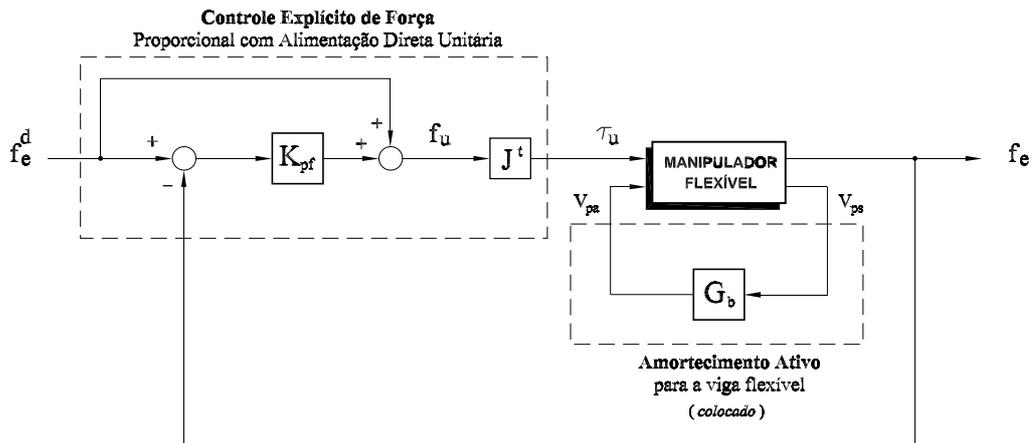


Figura 5.11: Estrutura do controlador de força com amortecimento ativo no elo flexível do manipulador.

Considere-se como exemplo de aplicação o manipulador flexível do capítulo 3 com a simplificação de ter apenas o elo flexível. A tabela 5.1 apresenta os principais parâmetros usados para a modelagem do manipulador.

Tabela 5.1: Principais parâmetros do manipulador do exemplo do controlador de força com amortecimento estrutural na viga (unidades no S.I.).

$L_b$	$t_b$	$b_b$	$E_b I_b$	$m_b$	$M_t$	$K_e$ (Hertz)
0,500	0,003	0,030	4,7	0,25	0,5	$1 \times 10^6$

Tabela 5.2: Parâmetros das pastilhas piezoelétricas usadas no exemplo do controlador de força com amortecimento estrutural na viga (unidades no S.I.).

$a_{pa}$	$b_{pa}$	$s_{pa}$	$a_{ps}$	$b_{ps}$	$s_{ps}$	mater. piezo
0,030	0,100	0,001	0.010	0.010	0.0005	PZT 5A

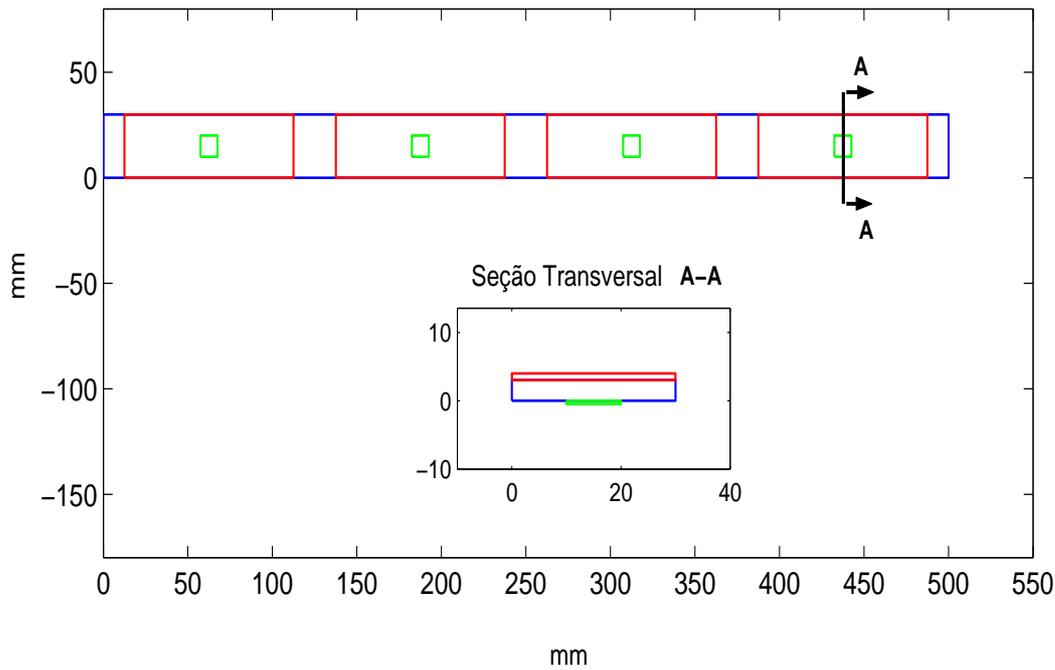


Figura 5.12: Distribuição das pastilhas piezoelétricas ao longo da viga flexível. Azul: Viga. Vermelho: Atuadores. Verde: Sensores.

A tabela 5.2 apresenta os parâmetros das pastilhas piezoelétricas e a fig.5.12 apresenta a distribuição desta ao longo da viga flexível. Na tabela 5.3, na duas primeiras colunas, estão os valores da frequência natural e fatores de amortecimento da parte flexível do manipulador.

Tabela 5.3: Características do sistema flexível em malha aberta (sem amortecimento estrutural) e malha fechada (com amortecimento estrutural, sendo que o ganho do controlador foi determinado através do procedimento de otimização).

malha aberta		desejado (min)*		malha fechada	
$\omega_{d,i}^a$ [rad/s]	$\zeta_i^a$	$\zeta_i^o$	$\omega_{d,i}^f$ [rad/s]	$\zeta_i^f$	
22,6	0,01	0,3	23,5	0,31	
332	0,01	0,1	330	0,15	
1021	0,01	0,1	1030	0,18	
2030	0,01	0,1	2030	0,11	

\* $\omega_{d,i}^a - \Delta\omega_{d,i} \leq \omega_{d,i}^o \leq \omega_{d,i}^a + \Delta\omega_{d,i}$ , onde  $\Delta\omega_{d,i} = 5\% \omega_{d,i}^a$

Na fig.5.13 apresenta-se, no plano complexo, os pólos do sistema em malha aberta. Como pode ver-se os fatores de amortecimento de todos os modos flexíveis, antes de aplicar o controle, são iguais a 1%. O objetivo do controlador projetado para a parte flexível é amortecer os modos de vibração, deslocando os fatores de amortecimento até os valores objetivos

indicados na terceira coluna da tabela 5.3. Para isto, resolve-se o problema de otimização estabelecido nas eqs.(5-88)-(5-90). Nas últimas colunas da tabela 5.3 apresenta-se os valores das freqüências naturais e fatores de amortecimento após a aplicação dos ganhos de controle. Como pode-se ver, todos os valores objetivos foram atingidos. A fig.5.14 mostra o diagrama dos pólos do sistema em malha fechada (após aplicar o controle de amortecimento ativo).

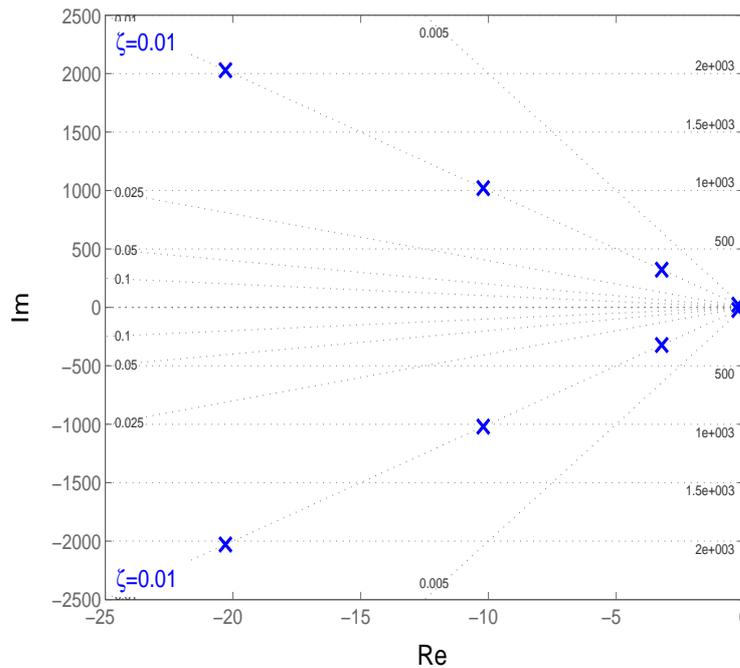


Figura 5.13: Localização dos pólos em malha aberta para a parte flexível do manipulador (sem amortecimento estrutural).

Logo que a parte flexível do manipulador é amortecida, aplica-se o controlador de força segundo a estrutura da fig.5.11. De acordo com a expressão deduzida no capítulo 2, eq.(2-88), existe um limite superior para o ganho proporcional  $K_{pf}$ . Se calculamos a rigidez equivalente da viga flexível temos:  $K_m = 290 N/m$  e sendo a rigidez do contato da ordem  $K_e = 1 \times 10^6$ , teremos, que o limite superior para  $K_{pf}$  é quase zero. Simulações confirmam este fato e por tal motivo será usado  $K_{pf} = 0$ . Os outros parâmetros do controlador de força são:  $K_v = 10$  e  $f_e^d = 20 N$ . Após implementar o controlador completo como na fig.5.11 obtemos a resposta para a posição da extremidade do manipulador apresentada na fig.5.15 e 5.16. Foi considerado o uso de amortecimento ativo somente durante o curto período de transição sendo que em  $t = 1,2$  segundos este foi desativado fazendo decair o sinal de atuação exponencialmente. Os resultados são comparados com o caso de um controle de força sem o amortecimento ativo.

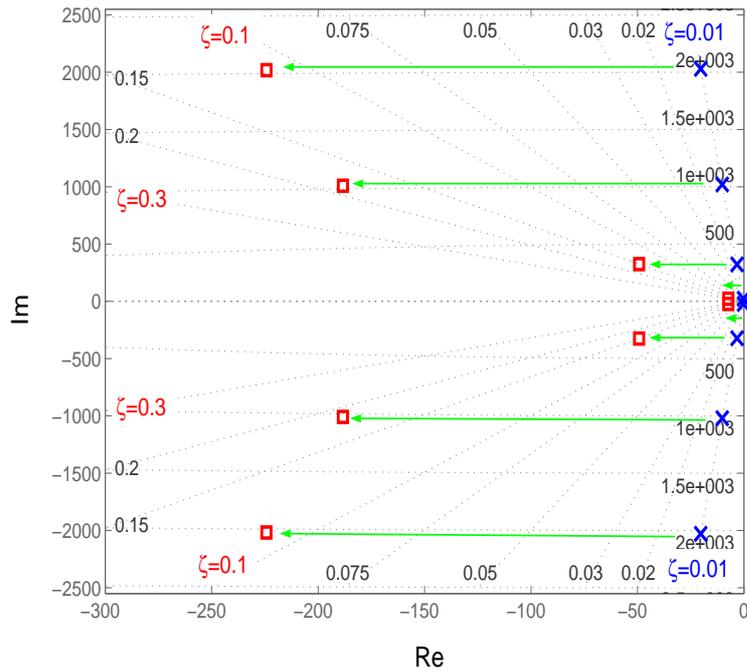


Figura 5.14: Localização dos pólos em malha aberta (azul) e malha fechada (vermelho) para a parte flexível do manipulador.

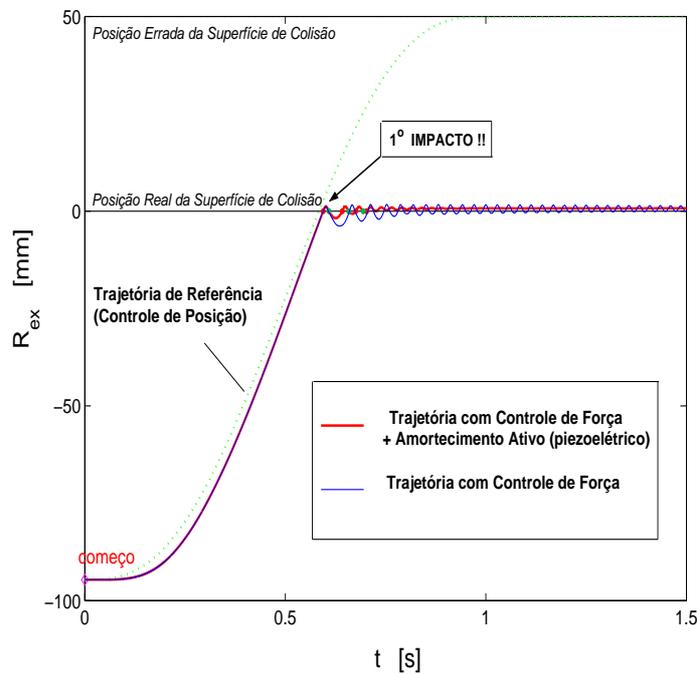


Figura 5.15: Trajetória da extremidade do manipulador antes do primeiro impacto em  $t = 0,6 s$  e depois deste. Linha vermelha: Controle explícito de força com amortecimento estrutural na viga (piezoelétricos). Linha azul: Controle explícito de força sem amortecimento estrutural. Parâmetros do controlador de força:  $K_{pf} = 0$ ,  $K_v = 10$ ,  $f_e^d = 20 N$ .

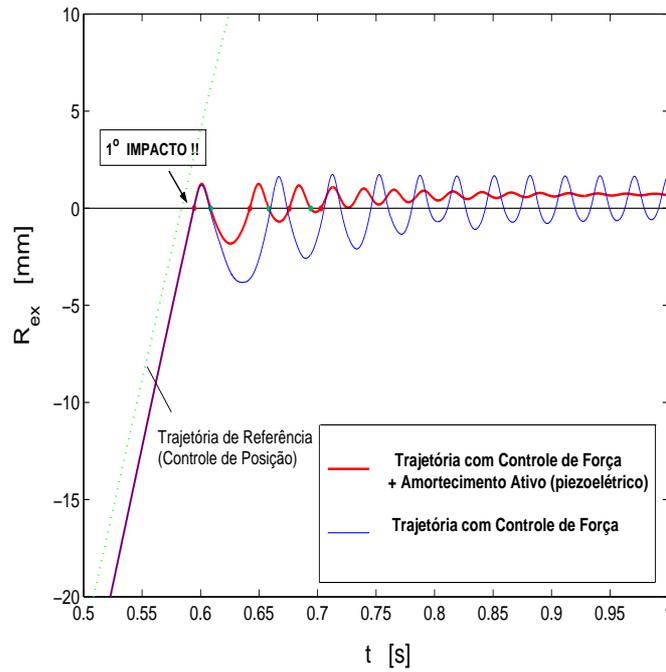


Figura 5.16: Detalhe da trajetória seguida pela extremidade do manipulador antes do primeiro impacto em  $t = 0,6$  s e depois deste. Linha vermelha: Controle explícito de força com amortecimento estrutural na viga (piezoelétricos). Linha azul: Controle explícito de força sem amortecimento estrutural. Parâmetros do controlador de Fforça:  $K_{pf} = 0$ ,  $K_v = 10$ ,  $f_e^d = 20$  N.

Podemos ver claramente dessas figuras a considerável melhora que conseguimos no desempenho ao usar o sistema de controle aqui proposto. Como pode ver-se da fig.5.17, muitos impactos são evitados. Finalmente, na fig.5.18 apresenta-se um diagrama do movimento do manipulador durante o período de transição de contato, incluindo a configuração inicial e final.

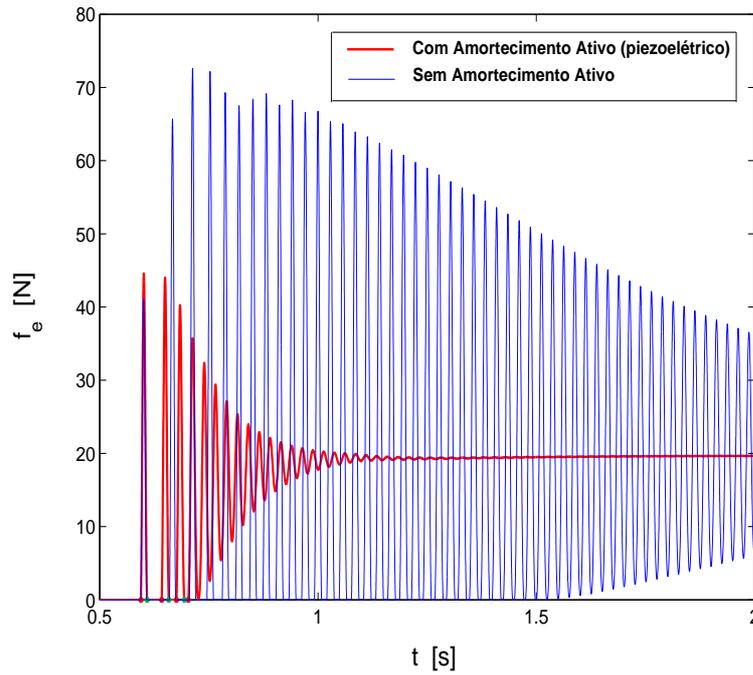


Figura 5.17: Valores da força de contato/impacto experimentadas pelo manipulador. Linha vermelha: Com amortecimento ativo. Linha azul: Sem amortecimento ativo.

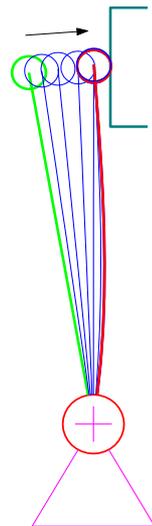


Figura 5.18: Movimento do manipulador flexível durante a fase de transição de contato. Verde: Antes de começar o movimento ( $t = 0$ ). Vermelho: Posição final com  $f_e = 20 N$ .