

3

Modelagem de um Manipulador Robótico Rígido-Flexível

Neste capítulo é desenvolvida a equação de movimento para um manipulador robótico mais completo incluindo flexibilidade. Este manipulador é apresentado na fig. 3.1. Como pode-se observar, este consiste de uma parte rígida (primeiro elo), e uma parte flexível (segundo elo), a qual será modelada como uma viga de Euler-Bernoulli [47]. Consideram-se motores atuadores nas duas juntas rotativas do manipulador. Ademais são considerados sensores e atuadores piezoelétricos sobre a viga flexível. Estes elementos piezoelétricos em forma de pastilhas terão a função de diminuir as vibrações da viga (no caso dos atuadores) e obter informação sobre deformações experimentadas pela viga (no caso dos sensores).

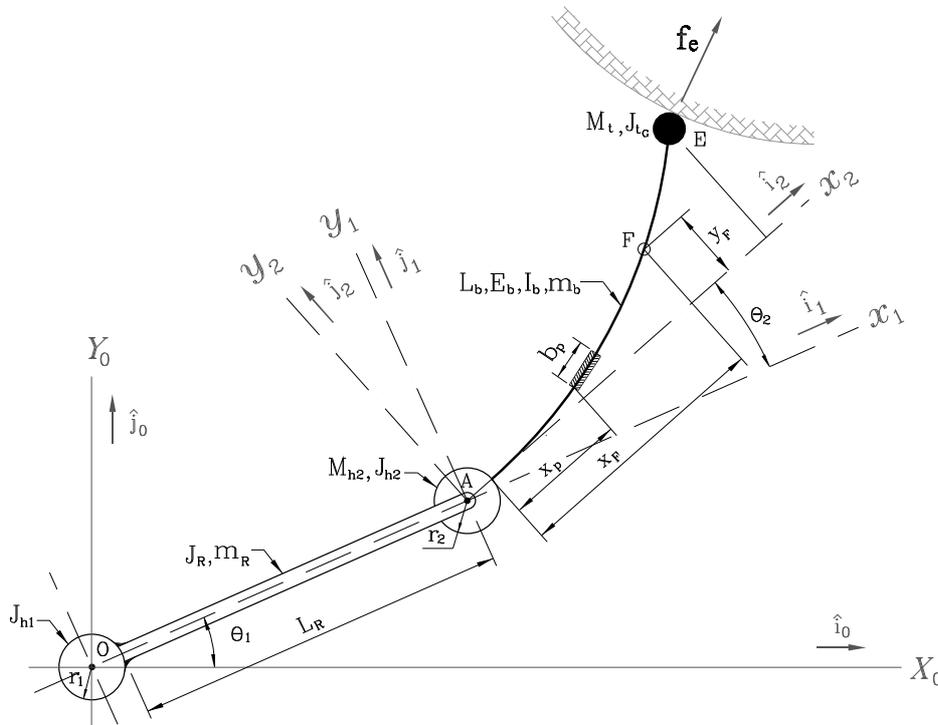


Figura 3.1: Manipulador robótico rígido-flexível com dois elos.

3.1

Energia Cinética e Potencial dos Elos do Manipulador

A abordagem adotada para a modelagem do manipulador rígido-flexível será o método energético através das Equações de Lagrange [43] e também o Método dos Modos Supostos, para a parte flexível [73]. O primeiro passo para utilizar as Equações de Lagrange é formular a energia total do sistema, cinética e potencial, em função de coordenadas generalizadas convenientemente escolhidas para descrever o movimento do sistema. A energia cinética total do sistema, a qual denotaremos por T , está formada pela energia cinética da parte rígida, que denotaremos por T^{rig} , a energia da viga flexível, que denotaremos por T^{viga} e a energia cinética dos elementos piezoelétricos colados sobre a viga flexível, que denotaremos por T^{piez} , ou seja:

$$T = T^{rig} + T^{viga} + T^{piez} \quad (3-1)$$

a parcela rígida está formada pela energia cinética do elo rígido e das duas juntas apresentadas na fig. 3.1. Podemos expressar isto da seguinte maneira:

$$T^{rig} = T_R + T_{h_1} + T_{h_2} \quad (3-2)$$

onde T_R é a energia do elo rígido e T_{h_1} e T_{h_2} as energias das duas juntas. Da análise cinemática do sistema podemos deduzir que

$$T^{rig} = \frac{1}{2} J_1^{rig} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2^{rig} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (3-3)$$

$$J_1^{rig} = J_R + J_{h_1} + M_{h_2} (L_R + r_1)^2 \quad (3-4)$$

$$J_2^{rig} = J_{h_2} \quad (3-5)$$

onde J_R é o momento de inércia do elo rígido em relação à origem O do sistema inercial $X_0 - Y_0$, J_{h_1} e J_{h_2} são os momentos de inércia de cada uma das bases rígidas em relação aos seus próprios centros de massas, e M_{h_2} é a massa da segunda base rígida. A energia cinética da viga flexível junto com a das pastilhas piezoelétricas é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 & T \text{ viga} + T \text{ piez} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_b} m_b(x_F) v_F(x_F)^2 dx_F + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)}(x_F) v_F(x_F)^2 dx_F + \\
 & \quad \frac{1}{2} M_t v_F(L_b)^2 + \frac{1}{2} J_{t,G} \left\{ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{y}'_F(L_b) \right\}^2
 \end{aligned} \tag{3-6}$$

onde $m_b(\cdot)$ é a massa da viga por unidade de comprimento, $m_p^{(k)}$ ($k = 1 \dots N_p$, sendo N_p é o número de pastilhas piezoelétricas) é a massa das pastilhas piezoelétricas por unidade de comprimento ao longo da viga, L_b é o comprimento da viga, $b_p^{(k)}$ ($k = 1 \dots N_p$) é o comprimento de cada pastilha piezoelétrica, x_F e y_F são as coordenadas da posição de um ponto genérico F sobre a viga no sistema relativo $X_2 - Y_2$ como indicada na fig. 3.1, $v_F(\cdot)$ é a função módulo da velocidade absoluta de cada ponto sobre a viga flexível, M_t é a massa de uma inércia na extremidade da viga (que pode ser por exemplo devida à ferramenta de trabalho que o manipulador carrega na sua extremidade) e $J_{t,G}$ é o seu momento de inércia em relação ao próprio centro de massa.

Como vemos da eq.(3-6), para determinar a energia cinética da viga flexível e dos piezoelétricos, precisamos primeiro determinar uma expressão para a velocidade $v_F(\cdot)$, a qual deve ser obtida da cinemática do sistema. Para este fim, a definição de vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}_k, \hat{\mathbf{j}}_k$ ($k = 0 \dots 2$), apresentados na fig. 3.1, resulta muito útil. Da geometria do sistema podemos deduzir as seguintes expressões:

$$\hat{\mathbf{i}}_1 = \cos \theta_1 \hat{\mathbf{i}}_0 + \sin \theta_1 \hat{\mathbf{j}}_0 \tag{3-7}$$

$$\hat{\mathbf{j}}_1 = -\sin \theta_1 \hat{\mathbf{i}}_0 + \cos \theta_1 \hat{\mathbf{j}}_0 \tag{3-8}$$

$$\hat{\mathbf{i}}_2 = \cos \theta_2 \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \theta_2 \hat{\mathbf{j}}_1 \tag{3-9}$$

$$\hat{\mathbf{j}}_2 = -\sin \theta_2 \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \theta_2 \hat{\mathbf{j}}_1 \tag{3-10}$$

derivando estas equações em relação ao tempo e simplificando, obtemos

$$d\hat{\mathbf{i}}_1/t = \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{j}}_1 \tag{3-11}$$

$$d\hat{\mathbf{j}}_1/t = -\dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{i}}_1 \tag{3-12}$$

$$d\hat{\mathbf{i}}_2/t = \dot{\theta} \hat{\mathbf{j}}_2 \tag{3-13}$$

$$d\hat{\mathbf{j}}_2/t = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{i}}_2 \tag{3-14}$$

onde a nova variável angular θ foi introduzida e é definida pela seguinte

expressão

$$\theta \doteq \theta_1 + \theta_2 \quad (3-15)$$

e corresponde à orientação absoluta (no sistema inercial $X_0 - Y_0$) do segundo elo do manipulador, considerando este como se fosse rígido. Usando os vetores unitários podemos determinar uma expressão para o vetor posição \mathbf{R}_F de um ponto genérico F na viga flexível do manipulador com relação à origem O :

$$\mathbf{R}_F = (L_R + r_1) \hat{\mathbf{i}}_1 + (r_2 + x_F) \hat{\mathbf{i}}_2 + y_F \hat{\mathbf{j}}_2 \quad (3-16)$$

A velocidade do ponto genérico F sobre a viga flexível pode obter-se derivando a expressão da equação anterior e usando as Eqs. (3-11)-(3-14), assim tem-se

$$\dot{\mathbf{R}}_F = (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{j}}_1 + (r_2 + x_F) \dot{\theta} \hat{\mathbf{j}}_2 + \dot{y}_F \hat{\mathbf{j}}_2 - y_F \dot{\theta} \hat{\mathbf{i}}_2 \quad (3-17)$$

usando as Eqs. (3-9) e (3-10), obtemos a seguinte relação entre vetores unitários

$$\hat{\mathbf{j}}_1 = \text{sen } \theta_2 \hat{\mathbf{i}}_2 + \text{cos } \theta_2 \hat{\mathbf{j}}_2$$

substituindo na eq.(3-17)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_F = & \{(r_2 + x_F) \dot{\theta} + \dot{y}_F + (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \text{cos } \theta_2\} \hat{\mathbf{j}}_2 + \\ & \{(L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 - y_F \dot{\theta}\} \hat{\mathbf{i}}_2 \end{aligned}$$

e de aqui podemos obter o módulo da velocidade do ponto genérico F

$$\begin{aligned} v_F^2 = & \|\dot{\mathbf{R}}_F\|^2 \\ = & \{(r_2 + x_F) \dot{\theta} + \dot{y}_F + (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \text{cos } \theta_2\}^2 + \\ & \{(L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 - y_F \dot{\theta}\}^2 \end{aligned}$$

após de efetuar as operações algébricas indicadas e realizar simplificações, temos

$$\begin{aligned} v_F^2 = & (r_2 + x_F)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{y}_F^2 + (L_R + r_1)^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 (r_2 + x_F) \dot{\theta} \dot{y}_F + \\ & 2 \dot{y}_F (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \text{cos } \theta_2 + 2 (r_2 + x_F) \dot{\theta} \dot{\theta}_1 (L_R + r_1) \text{cos } \theta_2 - \end{aligned}$$

$$2 (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_2 y_F + y_F^2 \dot{\theta}^2 \quad (3-18)$$

Neste ponto é necessário escolher coordenadas generalizadas para a parte flexível. Para este fim, o Método dos Modos Supostos será utilizado [74][50]. O método consiste em expressar a deflexão dos elementos elásticos, neste caso y_F (ver fig. 3.1), como o produto de duas funções, da seguinte maneira:

$$y_F(x_F, t) = \boldsymbol{\phi}^t(x_F) \mathbf{q}_b(t) \quad (3-19)$$

onde $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ é um vetor que é função apenas da posição (neste caso representada pela coordenada x_F) e $\mathbf{q}_b(\cdot)$ é um vetor que é função apenas do tempo. O vetor $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ tem N componentes:

$$\boldsymbol{\phi}(x_F) = \left[\phi_1(x_F) \quad \dots \quad \phi_N(x_F) \right]^t \quad (3-20)$$

sendo N o número de graus de liberdade a considerar para a viga flexível. Quanto maior este número N , melhor será a aproximação do corpo flexível através da eq.(3-19) mas também maior o custo computacional. As funções escalares $\phi_k(\cdot)$ ($k = 1 \dots N$) são chamadas *funções admissíveis* e devem ser escolhidas de maneira a formar um conjunto completo de funções, satisfazerem pelo menos as condições de contorno geométricas do sistema e serem deriváveis pelo menos até a metade do número de funções admissíveis consideradas, ou seja até $N/2$. Uma escolha conveniente para as funções admissíveis para o caso de vigas engastadas numa extremidade e livre na outra, e que tem mostrado ser eficaz em aplicações aeroespaciais, é a seguinte [50]:

$$\phi_k(x_F) = 1 - \cos \left(\frac{i \pi x_F}{L_b} \right) + \frac{1}{2} (-1)^{i+1} \left(\frac{i \pi x_F}{L_b} \right)^2, \quad k = 1 \dots N \quad (3-21)$$

O vetor \mathbf{q}_b só depende do tempo e os seus elementos são as coordenadas generalizadas da viga flexível

$$\mathbf{q}_b(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) & \dots & q_N(t) \end{bmatrix}^t \quad (3-22)$$

Substituindo a eq.(3-19) na eq.(3-18) tem-se,

$$\begin{aligned} v_F^2(x_F) = & (r_2 + x_F)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\mathbf{q}}_b^t(t) \phi(x_F) \phi^t(x_F) \dot{\mathbf{q}}_b(t) + (L_R + r_1)^2 \dot{\theta}_1^2 + \\ & 2 \left[(r_2 + x_F) \dot{\theta} + (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \right] \phi^t(x_F) \dot{\mathbf{q}}_b(t) + \\ & 2 (r_2 + x_F) (L_R + r_1) \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \\ & 2 (L_R + r_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_2 \phi^t(x_F) \mathbf{q}_b(t) + \\ & \dot{\mathbf{q}}_b^t(t) \phi(x_F) \phi^t(x_F) \mathbf{q}_b(t) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3-23)$$

onde a dependência do modulo da velocidade v_F da coordenada x_F tem sido explicitamente indicada. Agora, pode-se substituir esta última equação na expressão para a energia cinética da eq.(3-6). Fazendo isto, simplificando e agrupando termos, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & T^{viga} + T^{piez} \\ = & \frac{1}{2} J_1^{flex} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2^{flex} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_b^t \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathbf{q}_b^t \mathbf{M}_2 \mathbf{q}_b + \\ & \dot{\theta} \tilde{\phi}_1^t \dot{\mathbf{q}}_b + \dot{\theta} \cos(\theta - \theta_1) J_3 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1) \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b + \\ & \dot{\theta}_1 \cos(\theta - \theta_1) \tilde{\phi}_2^t \dot{\mathbf{q}}_b \end{aligned} \quad (3-24)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1^{flex} &= J_{b,1} + J_{t,1} \\ J_2^{flex} &= J_{b,2} + J_{t,2} + J_{t,G} \\ J_3 &= J_{b,3} + J_{t,3} \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_t + J_{t,G} \phi'(L_b) \phi'^t(L_b) \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_t \\ \tilde{\phi}_1 &= \tilde{\phi}_{b,1} + \tilde{\phi}_{t,1} + J_{t,G} \tilde{\phi}'(L_b) \\ \tilde{\phi}_2 &= \tilde{\phi}_{b,2} + \tilde{\phi}_{t,2} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_b &= \int_0^{L_b} m_b \phi(x_F) \phi^t(x_F) dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} \phi(x_F) \phi^t(x_F) dx_F \\
 J_{b,1} &= (L_R + r_1)^2 \left\{ \int_0^{L_b} m_b dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} dx_F \right\} \\
 J_{b,2} &= \int_0^{L_b} m_b (r_2 + x_F)^2 dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} (r_2 + x_F)^2 dx_F \\
 J_{b,3} &= (L_R + r_1) \left\{ \int_0^{L_b} m_b (r_2 + x_F) dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} (r_2 + x_F) dx_F \right\} \\
 \tilde{\phi}_{b,1} &= \int_0^{L_b} m_b (r_2 + x_F) \phi(x_F) dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} (r_2 + x_F) \phi(x_F) dx_F \\
 \tilde{\phi}_{b,2} &= (L_R + r_1) \left\{ \int_0^{L_b} m_b \phi(x_F) dx_F + \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_p^{(k)}}^{x_p^{(k)}+b_p^{(k)}} m_p^{(k)} \phi(x_F) dx_F \right\} \\
 \mathbf{M}_t &= M_t \phi(L_b) \phi^t(L_b) \\
 J_{t,1} &= (L_R + r_1)^2 M_t \\
 J_{t,2} &= (L_b + r_2)^2 M_t \\
 J_{t,3} &= M_t (L_R + r_1) (L_b + r_2) \\
 \tilde{\phi}_{t,1} &= M_t (L_b + r_2) \phi(L_b) \\
 \tilde{\phi}_{t,2} &= M_t (L_R + r_1) \phi(L_b)
 \end{aligned}$$

Observa-se destas equações as seguintes propriedades: $J_1^{flex} > 0$, $J_2^{flex} > 0$, $J_3 > 0$, \mathbf{M}_1 e $\mathbf{M}_2 > 0$ e simétricas.

A energia potencial do sistema, a qual denotaremos por V , corresponde somente à soma da energia potencial elástica devido à deformação da viga, V^{viga} e dos elementos piezoelétricos V^{piez} . A energia potencial gravitacional pode ser desprezível pois será suposto que o manipulador trabalha num plano horizontal, Assim, temos:

$$V = V^{viga} + V^{piez} \quad (3-25)$$

Da teoria deformações em vigas tipo Euler-Bernoulli [47][73], tem-se a seguinte expressão para a energia potencial elástica:

$$V^{viga} = \int_{\mathcal{V}_b} \epsilon_1 \sigma_1 d\mathcal{V}_b = \int_0^{L_b} E_b I_b \left\{ \frac{\partial^2 y_F}{\partial x_F^2}(x_F) \right\}^2 dx_F \quad (3-26)$$

onde E_b e I_b são o módulo de elasticidade da viga e o momento de inércia da seção transversal da viga, respectivamente. Substituindo a eq.(3-19) na eq.(3-26), tem-se:

$$V^{viga} = \int_0^{L_b} E_b I_b \mathbf{q}_b^t \phi''(x_F) \phi'''(x_F) \mathbf{q}_b dx_F \quad (3-27)$$

ou em notação matricial

$$V^{viga} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^t \mathbf{K}_b^{viga} \mathbf{q}_b \quad (3-28)$$

com

$$\mathbf{K}_b^{viga} = \int_0^{L_b} E_b I_b \phi''(x_F) \phi'''(x_F) dx_F \quad (3-29)$$

3.2 Trabalho feito pelos Atuadores/Sensores Piezoelétricos

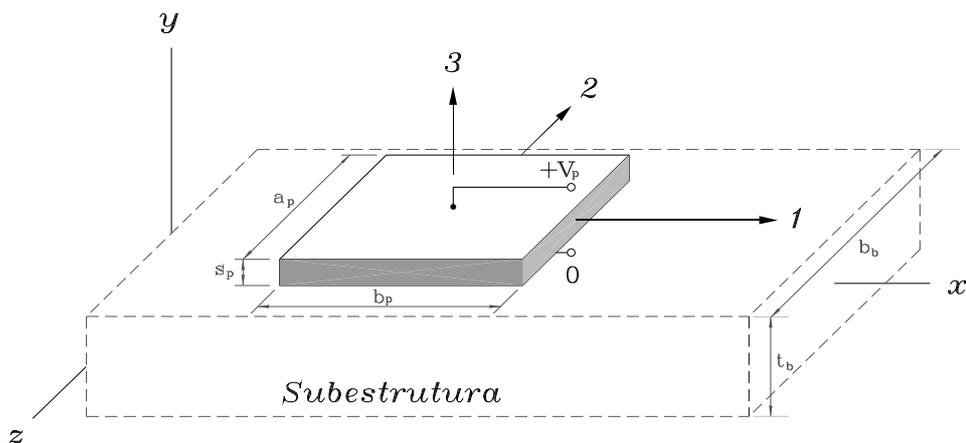


Figura 3.2: Pastilha piezoelétrica colada numa sub-estrutura flexível.

Pastilhas piezoelétricas coladas em estruturas flexíveis são um meio eficiente de sensor deformações e também, de amortecer vibrações indeseja-

das quando elas são usadas como atuadores. Para modelar estas pastilhas piezoelétricas é necessário combinar as relações de esforço-deformação para corpos flexíveis com as equações constitutivas dos materiais piezoelétricos. A equação constitutiva tridimensional eletromecânica para um elemento piezoelétrico general, usando como referência os eixos 1, 2 e 3 apresentados na fig. 3.2, pode ser escrita como [18][35]:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & \epsilon_1^S & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^S & d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_{31} & S_{11}^E & S_{12}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{31} & S_{12}^E & S_{11}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & S_{13}^E & S_{13}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^E & 0 & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} \tag{3-30}$$

onde ϵ_i e γ_{ij} ($i, j = 1 \dots 3$) representam as deformações mecânicas experimentadas pelo elemento piezoelétrico (axial e de corte, respectivamente), σ_i e τ_{ij} ($i, j = 1 \dots 3$) representam as esforços mecânicos atuantes no elemento piezoelétrico (axial e cortante, respectivamente), e_i ($i = 1 \dots 3$) representa a densidade de campo elétrico aplicado ao longo do i -ésimo eixo¹, e d_i representa o deslocamento de carga elétrica². Todos os elementos dentro da matriz são propriedades do piezoelétrico (elásticas, elétricas e eletromecânicas) as quais são geralmente providas pelo fabricante. O superíndice E indica que as propriedades foram medidas com os eletrodos em curto-circuito, e o superíndice S indica que as propriedades foram medidas para uma deformação constante. Na eq.(3-30), S_{ij}^E representa as constantes elásticas do material, ϵ_i^S ($i = 1 \dots 3$) representa a permissividade elétrica do material piezoelétrico, e d_{ij} ($i = 1, 3; j = 1, 3, 5$) representa as constantes de carga do piezoelétrico.

A eq.(3-30) é geral, mas podemos usar algumas condições que simplificam a equação constitutiva geral para o nosso caso particular. Assim, considerando que temos um estado de esforço unidimensional (na direção

¹Assim por exemplo, na fig. 3.2, temos a seguinte relação para a voltagem v_p aplicada na direção do eixo 3: $v_p = s_p e_3$, sendo s_p a espessura da pastilha no eixo de polarização.

²O deslocamento de carga elétrica d_i é definido tal que a corrente i_i drenada pelo piezoelétrico é igual a $\int \int_A \frac{d d_i}{dt} dA$, onde A representa área piezoelétrica.

1), ou seja, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, e polarização elétrica unidireccional (somente na direção 3), a eq.(3-30) fica simplificada a:

$$\begin{bmatrix} d_3 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^S & d_{31} \\ d_{31} & S_{11}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

Para facilitar o cálculo da energia e trabalho mecânico do elementos piezoelétricos, podemos re-escrever a equação anterior como:

$$\begin{bmatrix} d_3 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^S - d_{31}^2 E_p & d_{31} E_p \\ -d_{31} E_p & E_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

onde $E_p \doteq 1/S_{11}^E$ é definido como o módulo de elasticidade do piezoelétrico.

O trabalho mecânico e elétrico feito pelos materiais piezoelétricos por unidade de volume é dado pela seguinte relação:

$$w^{piez} = \frac{1}{2} (-\sigma_1 \epsilon_1 + e_3 d_3) \quad (3-33)$$

logo, o trabalho realizado por uma pastilha piezoelétrica é dado por:

$$\begin{aligned} W^{piez} &= \frac{1}{2} \int_{\forall_p} \{-\sigma_1 \epsilon_1 + e_3 d_3\} d\forall_p = \dots \\ &\frac{1}{2} a_p \int_{x_p}^{x_p+b_p} \int_{y_p}^{y_p+s_p} \begin{bmatrix} d_3 \\ \sigma_1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} dx_F d\tilde{y} \end{aligned} \quad (3-34)$$

onde x_p indica a posição do piezoelétrico como indicado na fig. 3.1 e y_p é a distancia entre a linha neutra da viga e o ponto donde o piezoelétrico é colado a esta. As dimensões a_p , b_p e s_p são apresentadas na fig. 3.2. Agora, substituindo a eq.(3-32) na eq.(3-34) podemos eliminar as variáveis d_3 e σ_1 :

$$\begin{aligned} W^{piez} &= \dots \\ &\frac{1}{2} a_p \int_{x_p}^{x_p+b_p} \int_{y_p}^{y_p+s_p} \{(\epsilon_1^S - d_{31}^2 E_p) e_3^2 + 2d_{31} E_p e_3 \epsilon_1 - E_p \epsilon_1^2\} dx_F d\tilde{y} \end{aligned} \quad (3-35)$$

Considerando que as pastilhas piezoelétricas estão perfeitamente coladas à viga, podemos assumir a seguinte relação:

$$\epsilon_1(x_F, \tilde{y}) = -\tilde{y} \frac{\partial^2 y_F}{\partial x_F^2}(x_F) \quad (3-36)$$

onde \tilde{y} representa a posição de um ponto interno na pastilha piezoelétrica medida a partir da linha neutra da viga (ou seja $y_p \leq \tilde{y} \leq y_p + s_p$), e $\frac{\partial^2 y_F}{\partial x_F^2}$ é a curvatura da viga flexível na linha neutra. Ademais, usando a eq.(3-19) na eq.(3-36), temos:

$$\epsilon_1(x_F, \tilde{y}) = \tilde{y} \phi''(x_F) \mathbf{q}_b \quad (3-37)$$

Substituindo a eq.(3-37) na eq.(3-35) e integrando esta última, obtemos a seguinte expressão para o trabalho piezoelétrico:

$$W^{piez} = \frac{1}{2} \alpha_p v_p^2 - \mathbf{q}_b^t \mathbf{b}_p v_p - \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^t \mathbf{K}_p \mathbf{q}_b \quad (3-38)$$

onde

$$\mathbf{b}_p = d_{31} E_p a_p \left(y_p + \frac{s_p}{2} \right) \int_{x_p}^{x_p+b_p} \phi''(x_F) dx_F \quad (3-39)$$

$$\alpha_p = \frac{a_p b_p}{s_p} (\epsilon_3^S - d_{31}^2 E_p) \quad , \quad v_p = s_p e_3 \quad (3-40)$$

$$\mathbf{K}_p = I_p E_p \int_{x_p}^{x_p+b_p} \phi''(x_F) \phi''(x_F) dx_F \quad (3-41)$$

$$I_p = a_p s_p \left(y_p^2 + y_p s_p + \frac{s_p^2}{3} \right) \quad (3-42)$$

no caso de ter N_p pastilhas piezoelétricas coladas na viga, temos a seguinte expressão para o trabalho:

$$W^{piez} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_p^t \mathbf{C}_p \mathbf{v}_p - \mathbf{q}_b^t \mathbf{B}_p \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^t \mathbf{K}_p^{tot} \mathbf{q}_b \quad (3-43)$$

onde

$$\mathbf{C}_p = \text{diag} \{ \alpha_p^{(k)} \}, k = 1 \dots N_p \quad , \quad \mathbf{B}_p = [\mathbf{b}_p^{(1)} \dots \mathbf{b}_p^{(N_p)}] \quad (3-44)$$

$$\mathbf{K}_p^{tot} = \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{K}_p^{(k)} \quad , \quad \mathbf{v}_p = [v_p^{(1)} \dots v_p^{(N_p)}]^t \quad (3-45)$$

Neste ponto é importante observar que apenas o último termo da

eq.(3-43) é o termo de trabalho conservativo e portanto representa a energia potencial elástica dos elementos piezoelétricos:

$$V^{piez} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^t \mathbf{K}_p^{tot} \mathbf{q}_b \quad (3-46)$$

os outros dois termos da equação, correspondem a trabalho não-conservativo:

$$W_{nc}^{piez} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_p^t \mathbf{C}_p \mathbf{v}_p - \mathbf{q}_b^t \mathbf{B}_p \mathbf{v}_p \quad (3-47)$$

3.3

Trabalho feito pelos Motores Atuadores nas Juntas do Manipulador

O trabalho feito pelos motores de acionamento nas juntas do manipulador é dado pela seguinte expressão:

$$W_{nc}^{mot} = \int_{t_0}^t \tau_1 d\theta_1 + \int_{t_0}^t \tau_2 d\theta_2 \quad (3-48)$$

onde τ_1 e τ_2 são os torques de acionamento dos motores das juntas 1 e 2 respectivamente. Usando a relação eq.(3-15), podemos escrever a eq.(3-48) de maneira equivalente como:

$$W_{nc}^{mot} = \int_{t_0}^t (\tau_1 - \tau_2) d\theta_1 + \int_{t_0}^t \tau_2 d\theta \quad (3-49)$$

3.4

Trabalho feito pelas Forças de Contato

Na condição de contato do manipulador (ponto E na fig.3.1), existirá uma força atuante na extremidade. Denotando esta força, exercida pelo manipulador sobre o meio por \mathbf{f}_e , e o vetor posição da extremidade por \mathbf{R}_E , podemos expressar o trabalho feito por essa força através da seguinte equação:

$$W_{nc}^C = - \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{R}}_E^t \mathbf{f}_e dt \quad (3-50)$$

O vetor posição \mathbf{R}_E pode ser determinado da geometria do sistema e da eq. (3-19) no sistema inercial $X_0 - Y_0$, assim temos:

$$\mathbf{R}_E(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}_b) = \begin{bmatrix} (L_R + r_1) \cos \theta_1 + (L_b + r_2) \cos \theta - \phi^t(L_b) \mathbf{q}_b \sin \theta \\ (L_R + r_1) \sin \theta_1 + (L_b + r_2) \sin \theta + \phi^t(L_b) \mathbf{q}_b \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

nesta equação, a dependência de \mathbf{R}_E com as coordenadas $\boldsymbol{\theta} \doteq [\theta_1, \theta]^t$ e \mathbf{q}_b tem sido explicitada. Derivando esta equação em relação ao tempo temos:

$$\dot{\mathbf{R}}_E = \mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b} \dot{\mathbf{q}}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\theta & \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

onde \mathbf{J}_θ e $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}$ são matrizes Jacobianas definidas pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{J}_\theta \doteq \frac{\partial \mathbf{R}_E}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad , \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b} \doteq \frac{\partial \mathbf{R}_E}{\partial \mathbf{q}_b} \quad (3-53)$$

usando a eq.(3-51) podemos escrever as expressões dos Jacobianos para o manipulador da fig. 3.1:

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} -(L_R + r_1) \sin \theta_1 & -(L_b + r_2) \sin \theta - \phi^t(L_b) \mathbf{q}_b \cos \theta \\ (L_R + r_1) \cos \theta_1 & (L_b + r_2) \cos \theta - \phi^t(L_b) \mathbf{q}_b \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}_b} = \begin{bmatrix} -\phi^t(L_b) \sin \theta \\ \phi^t(L_b) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

Usando a eq.(3-52) na eq.(3-50) temos:

$$W_{nc}^C = - \int_{t_0}^t d\boldsymbol{\theta}^t \left[\mathbf{J}_\theta^t \mathbf{f}_e \right] - \int_{t_0}^t d\mathbf{q}_b^t \left[\mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}^t \mathbf{f}_e \right] \quad (3-56)$$

3.5 Equação de Movimento do Sistema

Uma vez determinadas as expressões para a energia cinética e potencial do sistema e escolhendo como coordenadas generalizadas para o sistema: θ_1 , θ e \mathbf{q}_b só resta aplicar as Equações de Lagrange que para o caso em estudo são [43]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_{\theta_1} \quad (3-57)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \mathbf{Q}_{\theta} \quad (3-58)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_b} = \mathbf{Q}_{\mathbf{q}_b} \quad (3-59)$$

onde L é chamado de *Lagrangiano* do sistema e é definido por:

$$L \doteq T - V \quad (3-60)$$

Nas eqs.(3-57)-(3-59), Q representa as forças generalizadas correspondente ao trabalho não-conservativo. Estas forças generalizadas podem ser obtidas expressando o trabalho não-conservativo como trabalho virtual devido a deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas. As forças generalizadas são então os fatores que multiplicam os deslocamentos virtuais [104]. Usando as eqs.(3-47),(3-49) e (3-56), obtemos a seguinte expressão para o trabalho virtual em forma diferencial:

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} = & \delta\theta_1 \{ \tau_1 - \tau_2 - \mathbf{J}_{\theta_1}^t \mathbf{f}_e \} + \delta\theta \{ \tau_2 - \mathbf{J}_{\theta}^t \mathbf{f}_e \} \dots \\ & - \delta \mathbf{q}_b^t \{ \mathbf{B}_p \mathbf{v}_p + \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}^t \mathbf{f}_e \} + \delta \mathbf{v}_p^t \{ \mathbf{C}_p \mathbf{v}_p - \mathbf{B}_p^t \mathbf{q}_b \} \end{aligned} \quad (3-61)$$

onde \mathbf{J}_{θ_1} e \mathbf{J}_{θ} são a primeira e segunda colunas do Jacobiano \mathbf{J}_{θ} respectivamente, i.e. $\mathbf{J}_{\theta} = [\mathbf{J}_{\theta_1} \quad \mathbf{J}_{\theta}]$. Então, da eq.(3-61) podemos deduzir diretamente:

$$Q_{\theta_1} = \tau_1 - \tau_2 - \mathbf{J}_{\theta_1}^t \mathbf{F}_E \quad (3-62)$$

$$Q_{\theta} = \tau_2 - \mathbf{J}_{\theta}^t \mathbf{F}_E \quad (3-63)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{q}_b} = -\mathbf{B}_{pa} \mathbf{v}_{pa} - \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}^t \mathbf{F}_E \quad (3-64)$$

onde \mathbf{B}_{pa} é a matriz \mathbf{B}_p considerando apenas os atuadores piezoelétricos e \mathbf{v}_{pa} o vetor de voltagem aplicada nos atuadores piezoelétricos. No caso dos sensores temos a seguinte equação adicional:

$$\mathbf{C}_{ps} \mathbf{v}_{ps} - \mathbf{B}_{ps}^t \mathbf{q}_b = \mathbf{0} \quad (3-65)$$

onde \mathbf{C}_{ps} e \mathbf{B}_{ps} são as matrizes \mathbf{C}_p e \mathbf{B}_p considerando apenas sensores piezoelétricos. Daqui podemos deduzir a seguinte relação:

$$\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{C}_{ps}^{-1} \mathbf{B}_{ps}^t \mathbf{q}_b \quad (3-66)$$

Usando as expressões para a energia cinética e potencial do sistema, eq.(3-1), (3-3), (3-24), (3-25), (3-28) e (3-46) podemos construir o Lagrangiano do sistema dado na eq.(3-60)

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_b^t \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathbf{q}_b^t \mathbf{M}_2 \mathbf{q}_b + \\ & \dot{\theta} \tilde{\phi}_1^t \dot{\mathbf{q}}_b + \dot{\theta} \cos(\theta - \theta_1) J_3 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1) \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b + \\ & \dot{\theta}_1 \cos(\theta - \theta_1) \tilde{\phi}_2^t \dot{\mathbf{q}}_b - \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^t \mathbf{K}_b \mathbf{q}_b \end{aligned} \quad (3-67)$$

onde

$$J_1 = J_1^{rig} + J_1^{flex} \quad (3-68)$$

$$J_2 = J_2^{rig} + J_2^{flex} \quad (3-69)$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_b^{viga} + \mathbf{K}_p^{tot} \quad (3-70)$$

O vetor de coordenadas generalizadas do sistema é definido da seguinte maneira :

$$\mathbf{q} \doteq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (3-71)$$

sendo que $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta]^t$ e $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Substituindo o Lagrangiano dado na eq. (3-67) dentro das eqs.(3-57-3-59) obtemos finalmente a equação de movimento do sistema. Após algumas operações e simplificações, e depois de agrupar e ordenar termos, podemos apresentar o resultado em forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\theta\theta} & \mathbf{M}_{\theta\mathbf{q}_b} \\ \mathbf{M}_{\theta\mathbf{q}_b}^t & \mathbf{M}_{\mathbf{q}_b\mathbf{q}_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_\theta \\ \mathbf{h}_{\mathbf{q}_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\theta^t \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}^t \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \dots \\ = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_\tau \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{v}_{pa}} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{pa} \end{aligned}$$

$$(3-72)$$

ou, em forma compacta

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_E^t(\mathbf{q}) \mathbf{f}_e = \mathbf{B}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{B}_{v_{pa}} \mathbf{v}_{pa} \quad (3-73)$$

onde a matriz de inércia

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &\doteq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{\theta\theta} & \mathbf{M}_{\theta\mathbf{q}_b} \\ \hline \mathbf{M}_{\theta\mathbf{q}_b}^t & \mathbf{M}_{\mathbf{q}_b\mathbf{q}_b} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} J_1 & J_3 \cos \theta_2 - \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b \sin \theta_2 & \tilde{\phi}_2^t \cos \theta_2 \\ J_3 \cos \theta_2 - \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b \sin \theta_2 & J_2 + \mathbf{q}_b^t \mathbf{M}_2 \mathbf{q}_b & \tilde{\phi}_1^t \\ \hline \tilde{\phi}_2 \cos \theta_2 & \tilde{\phi}_1 & \mathbf{M}_1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3-74)$$

o vetor de forças de centrífugas e de Coriolis

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &\doteq \left[\begin{array}{c} \mathbf{h}_\theta \\ \mathbf{h}_{\mathbf{q}_b} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} - \left(J_3 \sin \theta_2 + \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b \cos \theta_2 \right) \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} \tilde{\phi}_2^t \dot{\mathbf{q}}_b \sin \theta_2 \\ \left(J_3 \sin \theta_2 + \tilde{\phi}_2^t \mathbf{q}_b \cos \theta_2 \right) \dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta} \dot{\mathbf{q}}_b^t \mathbf{M}_2 \mathbf{q}_b \\ \hline \dot{\theta}_1^2 \tilde{\phi}_2 \sin \theta_2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3-75)$$

a matriz de rigidez

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_b - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_2 \quad (3-76)$$

a matriz de entrada de torques e os torques dos atuadores nas juntas

$$\bar{\mathbf{B}}_\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

a matriz de entrada de voltagem para os atuadores piezoelétricos

$$\bar{\mathbf{B}}_{v_{pa}} = -\mathbf{B}_{pa} \quad (3-78)$$

e a matriz Jacobiana

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_E^t(\mathbf{q}) &\doteq \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\theta^t \\ \mathbf{J}_{\mathbf{q}_b}^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(L_R + r_1) \text{sen } \theta_1 & (L_R + r_1) \text{cos } \theta_1 \\ -(L_b + r_2) \text{sen } \theta - \phi^t(L_b + r_2)\mathbf{q}_b \text{cos } \theta & (L_b + r_2) \text{cos } \theta - \phi^t(L_b)\mathbf{q}_b \text{sen } \theta \\ -\phi(L_b) \text{sen } \theta & \phi(L_b) \text{cos } \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3-79)