



**Franz Kevin Calvay Pinedo**

**Avaliação e implementação de um modelo constitutivo  
de solo reforçado com fibra**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Raquel Velloso  
Co-orientadora: Michéle Dal Toé Casagrande

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e da orientadora.

### **Franz Kevin Calvay Pinedo**

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional de Engenharia - Perú, em 2013. No ano 2017 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de Geotecnia, onde vem desenvolvendo investigações na linha de pesquisa em implementação numérica e modelagem de solo reforçado com fibras.

#### Ficha Catalográfica

Calvay Pinedo, Franz Kevin

Avaliação e implementação de um modelo constitutivo de solo reforçado com fibra / Franz Kevin Calvay Pinedo; orientadora: Raquel Velloso; co-orientadora: Michéle Dal Toé Casagrande; Rio de Janeiro – 2019.

105 f.: il;(color); 29,7 cm.

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2018.

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia civil e ambiental – Teses. 2. Modelo constitutivo. 3. Implementação numérica. 4. Cam Clay Modificado. 5. Lade-Kim. 6. Solo reforçado com fibra. I. Quadros Velloso, Raquel. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

*Aos meus pais,  
Carlos Calvay e Vilma Pinedo  
Pelo amor incondicional e total confiança.*

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por cuidar de mim e me levar no caminho certo; Ele me guiou até este momento e será meu guia durante toda a minha vida.

Gostaria de agradecer a Raquel Velloso por sua excepcional orientação, pela ajuda continua e pela confiança. Muitíssimo obrigado, Raquel.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Engenharia Civil pelos conhecimentos transmitidos durante esse tempo do mestrado.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar e contribuir no melhoramento dessa dissertação.

Aos meus amigos: Jéssica Nunes, Erland Gonzalez, Jhonatan Garcia, Raul Córdova, Katherine Quispe, Andrés Castaneda, Celso Salvador, Carlo Aguinda, Jainor Cabrera, Lizardo Romero, Paul Pinedo, Thamiris Abdala, Karl Guerra, Marcela Strongylis, Thalita Moraes; pelos conselhos, parceria e conhecimentos transmitidos no desenvolvimento desse trabalho e lembranças para a vida toda.

Agradeço à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

Calvay Pinedo, Franz Kevin; Quadros Velloso, Raquel (Orientadora); Dal Toé Casagrande, Michéle (Co-Orientadora). **Avaliação e implementação de um modelo constitutivo de solo reforçado com fibra**. Rio de Janeiro, 2019. 105p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem como objetivo a implementação e avaliação de um modelo constitutivo para solos reforçados com fibra (compósito). A principal característica do modelo constitutivo implementado é que cada material (matriz de solo e fibra) segue sua própria lei constitutiva e ao mesmo tempo interagem entre si. Utilizando um algoritmo explícito, são implementados os modelos Cam Clay Modificado e Lade-Kim para a matriz de solo, cuja verificação é feita mediante o programa *PLAXIS 2D* e curvas tensão-deformação obtidas da literatura, respectivamente. Posteriormente, é adicionado o comportamento da fibra no desenvolvimento das tensões no compósito e verificado mediante a comparação das curvas tensão-deformação com as apresentadas por Diambra et al. (2013). As linguagens de programação utilizadas neste trabalho foram duas, a primeira é a utilizada no programa *MATLAB*, onde os códigos dos modelos são verificados e validados em relação à um conjunto de ensaios triaxiais de areia reforçada com fibra. Posteriormente foi usada a linguagem de programação *FORTRAN* para incluir o modelo constitutivo para solo reforçado com fibras no programa de elementos finitos *ABAQUS*, através da sub-rotina *UMAT*. Porém, para a implementação na sub-rotina *UMAT* os códigos dos modelos implementados no *MATLAB* sofrem algumas modificações com a finalidade de que o *ABAQUS* consiga compilar e representar adequadamente o comportamento do modelo constitutivo, mediante a correta utilização de vetores e propriedades desta. Finalmente, são modelados ensaios triaxiais drenados para verificar que a implementação mediante a sub-rotina *UMAT* é satisfatória.

## Palavras-chave

Modelo constitutivo; implementação numérica; Cam Clay Modificado; Lade-Kim; solo reforçado com fibra.

## Abstract

Calvay Pinedo, Franz Kevin; Quadros Velloso, Raquel (Advisor); Dal Toé Casagrande, Michéle (Co-advisor). **Evaluation and implementation of a fiber reinforced soil constitutive model**. Rio de Janeiro, 2019. 105p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present work aims to implement and evaluate a constitutive model for fiber-reinforced soils (composite). The main characteristic of the constitutive model implemented is that each material (soil and fiber matrix) follows its own constitutive law and at the same time interact with each other. Using an explicit algorithm, the Cam Clay Modified and Lade-Kim models are implemented for the soil matrix, verified by the PLAXIS 2D software and stress-strain curves obtained from the literature, respectively. Later, it is included the behavior of the fiber in the development of the stresses in the composite and verified by the comparison of the stress-strain curves with those presented by Diambra et al. (2013). The programming languages used in this work were two, the first one is the one used in the MATLAB program, where the codes of the models are verified and validated in relation to a set of triaxial tests of fiber-reinforced sands. Later the programming language was converted into FORTRAN to include the constitutive model for fiber reinforced soil in the ABAQUS finite element software, through the UMAT subroutine. However, for the implementation in the UMAT subroutine the codes of the models implemented in MATLAB undergo some modifications in order that ABAQUS can compile and represent adequately the behavior of the constitutive model through the correct use of vectors and its properties. Finally, drained triaxial tests are modeled to verify that the implementation through the UMAT subroutine is satisfactory.

## Keywords

Constitutive model; numerical implementation; Modified Cam Clay; Lade-Kim, fiber reinforced soil.

## Sumário

1	Introdução	14
1.1.	Objetivos	15
1.2.	Estrutura da dissertação	15
1.3.	Notação	16
2	Revisão bibliográfica	20
2.1.	Considerações iniciais	20
2.2.	Introdução	20
2.3.	Comportamento mecânico de solos reforçados com fibra	23
2.3.1.	Tipos de ensaios	24
2.3.2.	Ensaio triaxiais não drenados	25
2.3.3.	Ensaio triaxiais drenados	26
2.3.4.	Influência das condições do ensaio	28
2.3.5.	Influência das características da fibra	28
2.4.	Modelos constitutivos de solos	31
2.4.1.	Modelo Cam Clay Modificado	31
2.4.2.	Modelo Lade-Kim	35
2.5.	Modelos constitutivos de compósitos	40
3	Estrutura do modelo constitutivo implementado	43
3.1.	Conceitos do modelo	43
3.1.1.	Hipóteses do modelo	43
3.1.2.	Relação das fases do compósito	44
3.1.3.	Contribuição do solo e da fibra	46
3.2.	Modelo constitutivo para as fibras	47
3.2.1.	Orientação das fibras	47
3.2.2.	Resposta tensão-deformação de uma fibra	48
3.2.3.	Interação solo-fibra	49
3.2.4.	Pullout da fibra	49
3.2.5.	Contribuição média das fibras	50

3.3. Relação constitutiva do compósito	52
3.4. Trajetória de tensões efetivo da matriz do solo e compósito	53
4 Implementação do modelo constitutivo	56
4.1. Algoritmo do tipo explícito	56
4.2. Validação do modelo implementado	59
4.2.1. Validação do modelo Cam Clay Modificado	59
4.2.2. Validação do modelo Lade-Kim	63
4.2.3. Validação do modelo do compósito	65
4.3. Avaliação do modelo constitutivo com ensaios de laboratório	70
5 Implementação em um programa de elementos finitos	81
5.1. Modelagem de ensaio triaxial drenado	87
5.1.1. Sub-rotina <i>UMAT</i> – Cam Clay Modificado	91
5.1.2. Sub-rotina <i>UMAT</i> – Lade-Kim	92
5.1.3. Sub-rotina <i>UMAT</i> – Cam Clay Modificado com fibra	93
5.1.4. Sub-rotina <i>UMAT</i> – Lade-Kim com fibra	94
6 Conclusões e sugestões	96
7 Referências bibliográficas	99

## Lista de figuras

Figura 1.1 - Condições triaxiais axisimétricas	17
Figura 2.1 - Muros de arrimo que suportam solo reforçado com geossintéticos e fibra (Adaptado de Kumar Shukla, 2017)	22
Figura 2.2 - Ensaios de compressão e extensão triaxial não drenada; 100 kPa de tensão de confinamento (Ibraim et al., 2010)	25
Figura 2.3 - (a) Efeito de reforço inibição da dilatância (Michalowski e Čermák, 2003). (b) Incremento da dilatância para uma amostra (Diambra et al., 2010)	27
Figura 2.4 - Resultado de ensaio de compressão isotrópica para areia e areia reforçada (Consoli et al. 2005)	27
Figura 2.5: Envoltoria de falha típica para areias reforçadas com fibra (Diambra, 2010)	28
Figura 2.6 - a) Superfície de escoamento e linha de estado crítico; b) Consolidação isotrópica (LCI) e de descarregamento/recarregamento (LD)	32
Figura 2.7 - Contornos da superfície de potencial plástico para diferentes valores de $gp$ – Areia Fina (De Melo, 1995)	37
Figura 3.1 - Fases do diagrama (a) amostra sem reforço, (b) amostra reforçada sem divisão dos volumes de vazios e (c) amostra reforçada com partição do volume de vazios (Diambra et al. 2013)	44
Figura 3.2 - Coordenadas esféricas utilizadas para definir a distribuição da orientação da fibra (Diambra et al. 2013)	47
Figura 3.3: Dominio de tensões de tração para carregamentos de (a)	

compressão e (b) extensão triaxial (Diambra et al., 2013)	51
Figura 3.4 - Trajetória de tensões da matriz do solo e contribuição da fibra ao estado de tensões do compósito-Tensões de preadensamento de 100 kPa e 200 kPa (Modificado de Diambra et al. 2013)	53
Figura 3.5 - Desenvolvimento típico das tensões nas fibras para ensaios de compressão Triaxial (Modificado de Diambra et al. 2013)	54
Figura 3.6 - Desenvolvimento típico da contribuição de resistência nas fibras e matriz de solo (Modificado de Diambra et al. 2013).	55
Figura 4.1 - Algoritmo geral de tipo explícito implementado	58
Figura 4.2 - a) Modelagem de ensaio triaxial drenado no <i>PLAXIS 2D</i> , b) Discretização do modelo em elementos triangulares (mesh)	60
Figura 4.3 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da modelagem triaxial em <i>MATLAB</i> e <i>PLAXIS 2D</i>	62
Figura 4.4 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da modelagem triaxial em <i>MATLAB</i> e <i>PLAXIS 2D</i>	62
Figura 4.5: Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da modelagem triaxial em <i>MATLAB</i> e apresentado por De Melo (1995)	64
Figura 4.6: Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da modelagem triaxial em <i>MATLAB</i> e apresentado por De Melo (1995)	64
Figura 4.7 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).	67
Figura 4.8 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).	67
Figura 4.9 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra	

et al. (2013).	68
Figura 4.10 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> (Lade-Kim com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013)	70
Figura 4.11 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Casagrande (2001) a)Sem reforço; b)Com reforço	73
Figura 4.12 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Casagrande (2001) a)Sem reforço; b)Com reforço	74
Figura 4.13 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a)Sem reforço; b)Com reforço	75
Figura 4.14 Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a)Sem reforço; b)Com reforço	76
Figura 4.15 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a)Sem reforço; b)Com reforço	77
Figura 4.16 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a)Sem reforço; b)Com reforço	78
Figura 5.1 - Definição dos <i>STATEV</i> do modelo implementado	83
Figura 5.2: Esquema da solução no <i>UMAT</i>	85
Figura 5.3 - Valores das variáveis do modelo constitutivo a ser implementado	86
Figura 5.4 - Algoritmo da sub-rotina <i>UMAT</i>	88
Figura 5.5 - Modelagem do corpo para ensaio triaxial	89
Figura 5.6 - Etapas da modelagem ( <i>steps</i> )	90

Figura 5.7 - a) tensões axial e radial após o confinamento, b) tensão axial no final do ensaio, c) tensão radial no final do ensaio	91
Figura 5.8 - a) deformações axial e radial após o confinamento, b) deformação axial no final do ensaio, c) deformação radial no final do ensaio	91
Figura 5.9 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> e da sub-rotina <i>UMAT</i> implementada no <i>ABAQUS</i> (Cam Clay Modificado)	92
Figura 5.10 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> e da sub-rotina <i>UMAT</i> implementada no <i>ABAQUS</i> (Lade-Kim)	93
Figura 5.11 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> e da sub-rotina <i>UMAT</i> implementada no <i>ABAQUS</i> (Cam Clay Modificado com fibra)	94
Figura 5.12: Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no <i>MATLAB</i> e da sub-rotina <i>UMAT</i> implementada no <i>ABAQUS</i> (Lade-Kim com fibra)	95

## Lista de tabelas

Tabela 1.1 - Resumo da notação para tensões e deformações	19
Tabela 4.1 - Parâmetros do solo - modelo Cam Clay Modificado	61
Tabela 4.2 - Parâmetros do solo - modelo Lade-Kim	63
Tabela 4.3 - Parâmetros das fibras no compósito	66
Tabela 4.4 - Parâmetros do solo - modelo Lade-Kim (Ajustados)	69
Tabela 4.5 - Parâmetros do solo - Lade-Kim (Casagrande, 2001; Senez, 2016)	72
Tabela 4.6 - Parâmetros da fibra no compósito (Casagrande, 2001; Senez, 2016)	72

# 1 Introdução

Os solos têm sido estudados amplamente pela engenharia civil com a finalidade de conhecer suas características de resistência, de forma a realizar a construção de projetos onde o solo de fundação tenha uma resistência adequada tal que não afete as estruturas tais como aterros, barragens, estradas, tuneis, entre outras; já que elas transferem as cargas próprias, além das externas até o solo de fundação.

Nos últimos tempos com o crescimento da população e das grandes cidades esses locais com solos de boa qualidade começaram a ser insuficientes, de forma que foi necessário realizar as construções em áreas onde o comportamento do solo não atingia as características nem o comportamento necessário, já que em geral outras alternativas não eram economicamente ou ambientalmente viáveis.

As alternativas para construir obras de engenharia sobre solos de baixa resistência são limitadas, podendo-se remover o material existente no local e substituí-lo por outro de melhores características ou modificar e melhorar as propriedades do solo existente. Porém, o solo natural é um material bastante complexo e variável, por essa razão muitas técnicas têm sido desenvolvidas com o objetivo de conhecer o comportamento real dos diferentes solos com relação a sua resistência, além de outras propriedades, e como estas são modificadas ao serem misturadas com outros materiais. Incluir elementos que resistam tração e adicionar componentes cimentantes tem sido as técnicas mais importantes (Diambra et al., 2010).

O comportamento dos solos ao ser misturado com reforços artificiais tem sido estudado por muitos investigadores tais como Michalowski et al., 1996; Michalowski et al., 2002; Casagrande, 2001; Michalowski et al., 2003; Casagrande, 2005; Diambra et al., 2010; Diambra et al., 2011; Ibraim et al., 2012; Diambra et al., 2013; Diambra et al., 2015; Bower, 2017; Da Silva, 2017; entre outros.

Nesse contexto, torna-se importante conhecer o desenvolvimento das tensões durante o processo no qual o solo é submetido a diferentes carregamentos. Esta dissertação explora o modelo constitutivo do solo (matriz), o modelo constitutivo da fibra e o comportamento do compósito. Para a fibra e o compósito serão utilizados o modelo constitutivo proposto por Diambra et al. (2013). Com essa finalidade serão abordadas teorias como elasticidade, plasticidade, método de elementos finitos, entre outros, a fim de realizar a modelagem de ensaios triaxiais em um programa de elementos finitos (*ABAQUS*).

### **1.1. Objetivos**

Este trabalho tem como objetivo implementar e avaliar um modelo constitutivo de solo reforçado com fibra.

Os objetivos específicos são:

- ❖ Revisão bibliográfica, estudando os diferentes modelos constitutivos desenvolvidos para materiais geológicos, assim como para compósitos solo-fibra.
- ❖ Compreender os modelos analíticos e numéricos de modelagem de solos, suas hipóteses, vantagens e limitações.
- ❖ Implementação dos modelos constitutivos, Cam Clay Modificado, Lade-Kim e com a inclusão da fibra no programa *MATLAB*.
- ❖ Comparar os resultados das simulações de ensaios triaxiais com ensaios experimentais publicados na bibliografia.
- ❖ Implementação do modelo constitutivo solo-fibra no programa de elementos finitos *ABAQUS* v.6.14, utilizando a programação na linguagem *FORTRAN*.

### **1.2. Estrutura da dissertação**

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos, incluindo a presente introdução (capítulo 1) onde se apresenta o tema fundamental da pesquisa e de seus objetivos.

Capítulo 2 – Revisão bibliográfica que apresenta os principais modelos constitutivos para solos reforçados e não reforçados e alguns resultados experimentais de ensaios triaxiais para os solos reforçados.

Capítulo 3 – Descreve a estrutura do modelo constitutivo a ser implementado, as equações que governam a relação tensão-deformação da fibra assim como para o compósito.

Capítulo 4 – Apresenta o algoritmo de implementação e verificação do modelo constitutivo no programa *MATLAB*, assim como avaliações realizadas com ensaios de laboratório existentes na literatura.

Capítulo 5 – Apresenta a implementação do modelo constitutivo no programa de elementos finitos *ABAQUS* para a modelagem de ensaios de compressão triaxial drenado.

Capítulo 6 – Conclusões e sugestões para futuras pesquisas são apresentadas.

### 1.3. Notação

A notação adotada nessa dissertação considera condições axissimétricas, isto porque o modelo constitutivo proposto para o compósito foi desenvolvido sob essas condições. O estado de tensões estão definidos pelo vetor  $\sigma$ , definida na equação (1.1), cujos componentes estão expressos em termos da tensão média ( $p$ ) e tensão desviadora ( $q$ ), cujos cálculos das magnitudes estão definidos nas equações (1.2) e (1.3), respectivamente.

$$\sigma = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Onde:

$$p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} \quad (1.2)$$

$$q = \sigma_a - \sigma_r \quad (1.3)$$

Por outro lado, as deformações estão definidas pelo vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  na equação (1.4), cujos componentes estão expressos em termos da deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  e a deformação de cisalhamento  $\varepsilon_q$ . Os cálculos dessas componentes estão definidos nas equações (1.5) e (1.6).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r) \quad (1.6)$$

Onde os subíndices  $a$  e  $r$  são interpretados como axial e radial, respectivamente, segundo a figura 1.1.

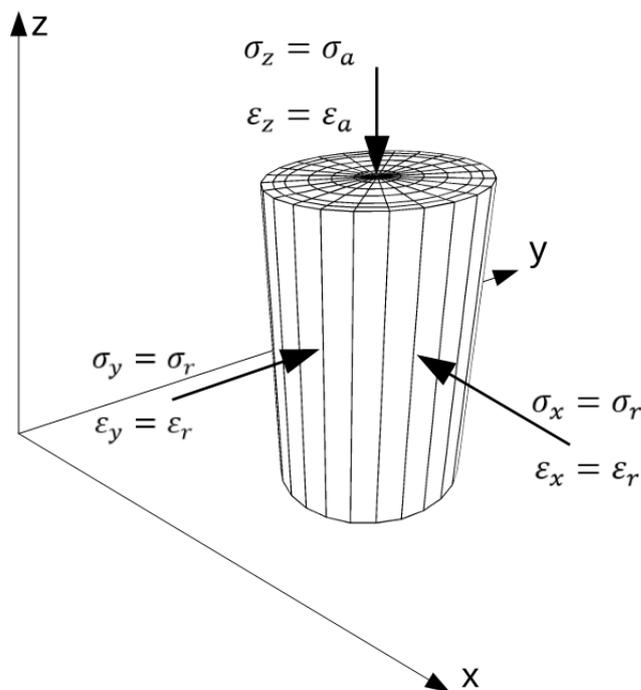


Figura 1.1 - Condições triaxiais axisimétricas

Em toda a dissertação a compressão é assumida positiva tanto para as tensões como para as deformações.

O parâmetro principal para conhecer a variação de volume no corpo de prova é o índice de vazios do solo, cujo cálculo é definido pela equação (1.7).

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1.7)$$

Onde “ $e$ ” é o índice de vazios, “ $V_s$ ” é o volume de solo e “ $V_v$ ” é o volume de vazios.

O volume específico está definido em função do índice de vazios como:

$$v = 1 + e \quad (1.8)$$

Podendo estar relacionado com o incremento da deformação volumétrica de acordo com a seguinte equação:

$$\varepsilon_v = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (1.9)$$

Onde “ $\varepsilon_v$ ” é o incremento de deformação volumétrica e “ $\dot{v}$ ” é o incremento de volume específico.

É necessário também especificar as tensões desenvolvidas pela fibra, pela matriz de solo sem reforço e pelo compósito (solo-fibra). Estas serão definidas como:

As tensões efetivas no compósito estão definidas como:

$$\sigma^* = [p^*, q^*]^T \quad (1.10)$$

$$p^* = p - u \quad (1.11)$$

Onde: “ $p^*$ ” é a tensão efetiva média, “ $u$ ” é a poropressão e “ $q^*$ ” é a tensão desviadora que não é afetada pela poropressão no solo. Porém, essa implementação será desenvolvida sob condições drenadas, pelo qual o valor da poropressão será zero.

As tensões efetivas da matriz do solo estão definidos pelo superscrito “ $'$ ” como pode-se encontrar em qualquer literatura geral de mecânica de solos:

$$\sigma' = [p', q]^T \quad (1.12)$$

No caso da fibra é utilizada uma barra superior para definir que está considerando-se a média das tensões em todas as fibras definidas na equação (1.13). Quando for utilizada a notação sem barra, considera-se a tensão em uma fibra e não o comportamento conjunto delas. A tabela 1.1 apresenta o resumo da notação usada.

$$\bar{\sigma}_f = [\bar{p}_f, \bar{q}_f]^T \quad (1.13)$$

Tabela 1.1 - Resumo da notação para tensões e deformações

<b>Tensões e deformações nos materiais</b>	
<b>Composito</b>	
Totais	$\sigma = [p, q]^T$
Efetivas	$\sigma^* = [p^*, q^*]^T$
Deformações	$\varepsilon = [\varepsilon_p, \varepsilon_q]$
<b>Matriz do solo</b>	
Totais	–
Efetivas	$\sigma' = [p', q]^T$
Deformações	$\varepsilon_m = [\varepsilon_{mp}, \varepsilon_{mq}]$
<b>Fibra (média)</b>	
Totais	–
Efetivas	$\bar{\sigma}_f = [\bar{p}_f, \bar{q}_f]^T$
Deformações	$\bar{\varepsilon}_f = [\bar{\varepsilon}_{fp}, \bar{\varepsilon}_{fq}]$

## **2**

### **Revisão bibliográfica**

#### **2.1.**

##### **Considerações iniciais**

No decorrer do capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica sobre diferentes estudos realizados sobre modelos constitutivos de solos e de compósitos (solo reforçado com fibra sintética) para conseguir avaliar e prever adequadamente o comportamento tensão-deformação.

#### **2.2.**

##### **Introdução**

Reforços de fibras em solos podem ser observados no dia a dia na natureza, podem ser observados, por exemplo, nas raízes da vegetação que dá estabilidade a solos na camada mais superficial. O reforço com fibras é uma técnica conhecida e empregada pelo homem já há muitos anos. São conhecidas diferentes culturas que utilizaram a mistura de solo com raízes ou outros materiais para melhorar as características de materiais de construção. Exemplos claros são as muralhas de Mesopotâmia, a Grande Muralha da China e na construção de estradas e casas no império Inca. As raízes em um solo são consideradas com uma distribuição aleatória, já que é difícil conhecer a distribuição delas no compósito. Elas melhoram as características de resistência do solo, assim como a estabilidade de fundações e taludes.

É conhecido que o desenvolvimento da resistência e outras propriedades do solo melhoram ao serem misturados com fibras orgânicas; porém, esse comportamento seria bom no curto prazo. Posteriormente, foi demonstrado que enquanto o tempo passava a contribuição da resistência da fibra no compósito começava a diminuir, isto devido à baixa resistência que as fibras orgânicas têm ao serem expostas aos diferentes fatores do meio ambiente, tais como pressão, temperatura, molhagem e secagem entre outros. A necessidade de ter materiais

com uma durabilidade superior permitiu desenvolver materiais que os substituam e que tenham uma vida útil muito maior, por exemplo os geossintéticos.

O método atual de reforçar o solo foi desenvolvido por Vidal (1969), o qual consistia basicamente em melhorar as propriedades do solo mediante a inclusão de tiras metálicas, permitindo distribuir as tensões e conseguindo transmiti-las até painéis de concreto que ficavam na face da estrutura de contenção, sua técnica foi patenteada com o nome de “Terra Armada”.

Com o passar dos anos, os requerimentos para os estudos de solos se incrementaram muito, já que em alguns locais a população cresceu exponencialmente. Consequentemente, tornou-se preciso construir estruturas maiores em solos cujas características de resistência não eram as ideais, mas devido à grande demanda tinham que ser construídas, já que outras alternativas deixaram de ser economicamente viáveis.

O melhoramento do solo é possível mediante diferentes métodos, entre eles a utilização de geossintéticos (geotêxteis, geomembranas, geogrelhas, etc.) para a construção de estruturas de contenção (Yang et al., 2009; Yoo and Jung, 2004), aterros (Alamshahi e Hataf, 2009) e fundações (Latha e Somwanshi 2009; Sireesh et al., 2009).

Um dos primeiros pesquisadores que utilizou a ideia de melhorar a estabilidade dos taludes mediante raízes de plantas, foi Waldron (1977). Ele utilizou o mesmo princípio presente em qualquer tipo de análise de estabilidade de taludes, a qual consiste em que as raízes têm que atravessar a provável linha de ruptura, incrementando assim as forças resistentes.

Posteriormente, com o crescimento da produção em massa, optou-se pelas fibras sintéticas as quais podem ser feitas de diferentes materiais. Polipropileno e poliéster são os materiais comumente mais utilizados. As fibras podem ser planas, redondas e contínuas ou discretas. Elas são feitas em muitos comprimentos e são de diferentes tipos como monofilamentos, fibriladas, entre outros (Gray e Al-Refeai, 1986; Maher e Gray, 1990; Maher e Ho, 1994; Nataraj e McManis, 1997; Consoli et al., 2003; Michalowski et al., 2003; Diambra et al. 2013).

Diversos avanços têm sido realizados para conhecer o real comportamento de solos reforçados com fibra, e grande parte das pesquisas se concentram nos trabalhos experimentais, e poucos tratam de modelos que consigam representar adequadamente esse comportamento. Alguns estudos foram realizados com o objetivo de prever a resistência do compósito (Gray e Ohashi, 1983; Maher e Gray, 1990; Prisco e Nova, 1993; Michalowski e Zhao, 1996; Ranjan et al., 1996; Zornberg, 2002; Ding and Hargrove, 2006; Diambra et al., 2013).

Essa dissertação realiza o estudo do comportamento de solos ao incluir pequenas fibras geossintéticas. A característica mais relevante, que faz uma diferença importante em relação a outros tipos de reforço e que é de muito interesse na construção de obras de engenharia é que ao utilizar fibra distribuída aleatoriamente no solo, ela não cria uma superfície de fraqueza definida, como é o caso de utilizar geogrelhas, geotêxteis ou outros. Na figura 2.1, pode-se observar a linha de ruptura mais comum em um solo reforçado com geogrelhas ou geossintéticos e um solo reforçado com fibras.

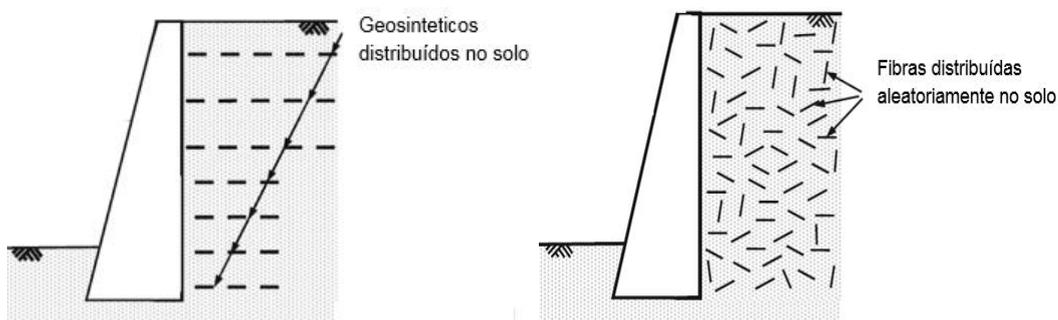


Figura 2.1 - Muros de arrimo que suportam solo reforçado com geossintéticos e fibra (Adaptado de Kumar Shukla, 2017)

No caso dos muros de arrimo, os empuxos horizontais gerados pelo solo com fibra podem ser menores em comparação com um solo sem reforço, nesse sentido as dimensões dessas estruturas poderiam ser diminuídas. No caso de fundações superficiais em solos moles, poderia ser utilizada uma camada superior de solo-fibra-cimento em contato com a estrutura, essa camada será a responsável por distribuir adequadamente as tensões geradas pelo carregamento para o solo de baixa resistência, melhorando assim a resistência do conjunto.

Babu e Vasudevan (2008) realizaram modelos de infiltração no caso de uma parede de estaca-prancha ao utilizar uma camada de solo com fibra a jusante, e

concluíram que quanto maior o teor de fibra maior será o fator de segurança contra o levantamento hidráulico. Concluíram também que ao se misturar solo com fibra para uma barragem temporária de água, para maiores teores de fibra a vazão de infiltração no corpo da barragem diminui. Por outro lado, a aplicação das fibras pode ter uma contribuição muito significativa nas barragens de rejeitos (materiais granulares). A inclusão da fibra ao serem misturadas com um solo granular pode incrementar a resistência pico e pós pico do material, pode diminuir o potencial de liquefação (Da Silva, 2017) e pode ter uma contribuição ambiental importante, já que podem ser armazenadas fibras recicladas feita de PET ou qualquer outro tipo de material de características similares.

### 2.3.

#### **Comportamento mecânico de solos reforçados com fibra**

A mistura de dois ou mais materiais tem duas fases: a matriz (solo) e o elemento de reforço (fibra). A resposta mecânica do compósito depende do teor da fibra (relação entre os pesos da fibra e o solo seco), as características da fibra (propriedades mecânicas, comprimento, concentração da fibra, distribuição e orientação, tipo de mixtura, entre outros) assim como as características da matriz do solo (Curcio, 2008).

A importância da orientação das fibras é fundamental na contribuição da fibra no comportamento do compósito (solo-fibra). Como as fibras são elementos que resistem principalmente tensões de tração e quase não apresentam rigidez à compressão, Diambra et al. (2013) argumentam que somente aquelas que estiverem dentro de um domínio de tração podem contribuir na resistência ao cisalhamento do compósito. Por outro lado, dependendo da técnica de preparação do compósito pode-se utilizar uma distribuição das fibras predefinidas. Em geral, os projetos precisam de um estado de tensões em um grande intervalo de orientações, então, fibras pequenas e flexíveis distribuídas aleatoriamente no solo são muito efetivas (Diambra et al. 2013).

O comportamento do compósito (solo-fibra) tem sido estudado em ensaios de compressão não confinada, cisalhamento direto, triaxiais adensado não drenado e adensado drenado. Em quase todos os casos, conclui-se que ao misturar o solo

com fibra, a resistência pico de cisalhamento aumenta; entre outras características que serão detalhadas nos itens seguintes.

### **2.3.1. Tipos de ensaios**

O ensaio de cisalhamento direto foi um dos primeiros ensaios que avaliou o comportamento das areias misturadas com fibra (McGown et al., 1978; Gray e Ohashi, 1983). Os resultados dessas pesquisas evidenciam a efetividade de melhoramento das fibras ao incrementar as deformações antes da falha e a resistência pico dos solos. Esse ensaio também demonstrou que a presença de fibras no solo reduziu a fragilidade e incrementou a resistência de cisalhamento residual (Yetimoglu e Salbas, 2003).

Consoli et al. (2005) realizaram testes de compressão hidrostática de alta pressão em areia uniforme com diferentes índices de vazios, corroborando que as fibras trabalhem mesmo sob carga isotrópica. Isto foi corroborado após o teste, onde as fibras estavam estendidas ou quebradas.

Heineck et al. (2005) corroboraram mediante a técnica do elemento bender que a rigidez inicial do compósito não é alterada pela inclusão de fibras.

O ensaio de anel de cisalhamento foi feito para avaliar grandes deformações em areias reforçada com fibras por Consoli et al. (2007). Foi concluído que o reforço com fibra produz um incremento significativo na resistência cisalhante em grandes deformações para fibras mais compridas, para concentrações maiores de fibra e amostras mais densas. Liu et al. (2011) concluiu mediante esse ensaio que o comportamento não drenado de uma areia fofa reforçada com fibra não é relevante, mas no momento de atingir a ruptura a amostra sem reforço colapsa, enquanto a amostra reforçada consegue obter uma estabilidade estrutural mesmo ao retirar o anel superior do equipamento.

Os ensaios mais utilizados para conhecer o comportamento do compósito solo-fibra são os ensaios triaxiais (Al Refeai, 1991; Michalowski e Zhao, 1996; Casagrande, 2001; Li e Ding, 2002; Michalowski e Čermák, 2003; Heineck et al. 2005; Consoli et al., 2007; Diambra et al., 2010; 2013; Ibraim et al., 2012), os quais permitem impor condições mais próximas ao de campo nas amostras.

### 2.3.2. Ensaio triaxiais não drenados

Quando uma carga cíclica não drenada é aplicada para amostras reforçadas, apresentam um incremento na resistência ao serem comparada com amostras não reforçadas (Maher; Ho, 1993). O número de ciclos e a magnitude requerida das deformações ao atingir a ruptura aumenta significativamente como resultado da inclusão de fibras. No caso de cargas cíclicas para pequenas deformações, as areias reforçadas com fibra mostram um modulo elástico linear grande, mas é deteriorado sob carregamento cíclico (Li e Ding, 2002).

Ensaio não drenado para estudar o efeito da fibra no solo foram realizados por Ibraim et al. (2010). Nessa pesquisa, foi estudado o efeito da inclusão de fibras em ensaios não drenados para cargas monotônicas, concluindo que a inclusão do reforço na matriz de solo reduz o potencial de liquefação de areias saturadas fofas. Esse comportamento da areia com fibra considera-se de muita importância para prevenir a liquefação estática. Adicionalmente demonstrou que o comportamento de amolecimento do solo (típico em areia fofa sem reforço) torna-se de endurecimento. Alguns resultados dessa pesquisa são apresentados na figura 2.2.

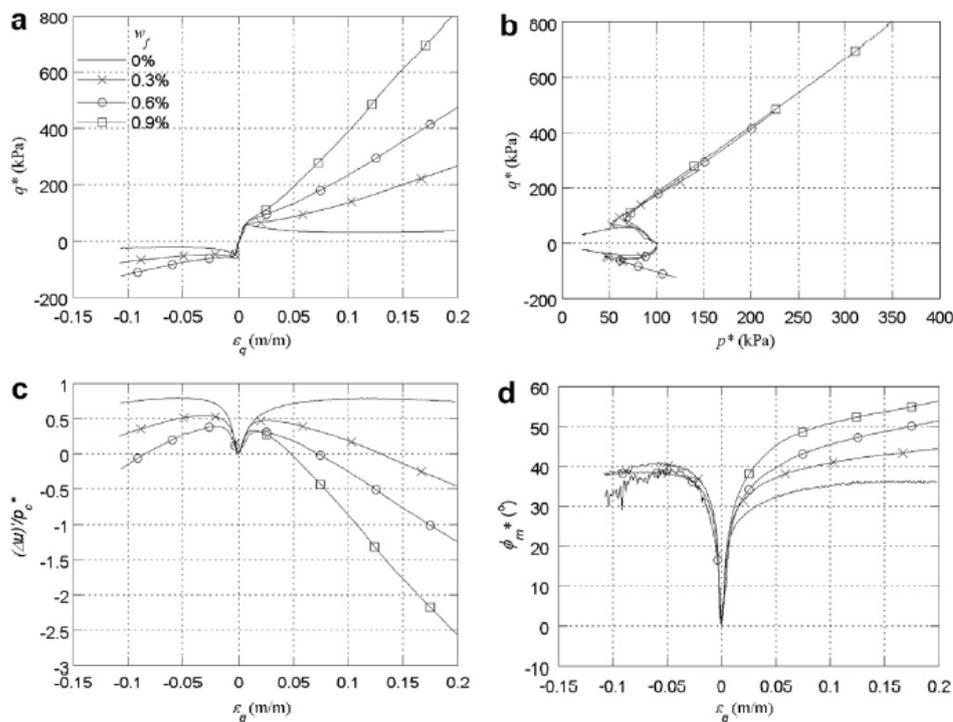


Figura 2.2 - Ensaio de compressão e extensão triaxial não drenada; 100 kPa de tensão de confinamento (Ibraim et al., 2010)

Da Silva (2017) realizou ensaios de areias reforçadas com fibra sob carregamentos cíclicos. Dos quais, corroborou que a inclusão da fibra em um solo reduz a deformação axial e reduz a poropressão gerada, atrasando a liquefação. Porém, é preciso realizar uma maior quantidade de ensaios para conhecer como é que as propriedades da fibra tais como, modulo de Young ( $E_f$ ), comprimento ( $l_f$ ), interface solo-fibra ( $f_b$ ) e concentração volumétrica da fibra ( $v_f$ ), afetam diretamente ao comportamento não drenado do compósito.

### **2.3.3. Ensaio triaxiais drenados**

A maior quantidade de ensaios triaxiais realizados em amostras de solo reforçado, foram sob condições drenadas, os quais reforçaram as conclusões obtidas pelos ensaios de cisalhamento direto. Em geral, a partir dos diferentes ensaios na literatura, quase todos os autores obtiveram as seguintes conclusões gerais.

A principal conclusão e a qual verifica o esperado é que a inclusão de fibras distribuídas aleatoriamente no compósito incrementa a resistência pico (Ranjan et al., 1996; Michalowsky; Zhao, 1996; Consoli et al., 1998) e adicionalmente a resistência residual (Gray e Al-Refeai, 1986; Michalowski e Čermák, 2003).

Outra conclusão é que o reforço reduz a perda de resistência após o pico (Gray e Al-Refai, 1986; Ranjan et al., 1996; Teodoro e Bueno, 1998; e outros). Observou-se também que o reforço com fibra causa um incremento importante na deformação de ruptura (Michalowski e Zhao, 1996; Gray e Al-Refai, 1986; Michalowski e Čermák, 2003).

O equipamento triaxial convencional permite determinar com exatidão o comportamento da deformação durante o carregamento e alguns autores concluem que a presença de fibras inibe o comportamento de dilatação do solo (Michalowski e Zhao, 1996; Michalowski and Čermák, 2003) durante o cisalhamento em amostras tipicamente densas ou sobreadensadas. Pelo contrário, Diambra et al. (2010) mostraram que para compressão ou extensão o compósito apresenta um comportamento mais dilatante, ver figura 2.3.

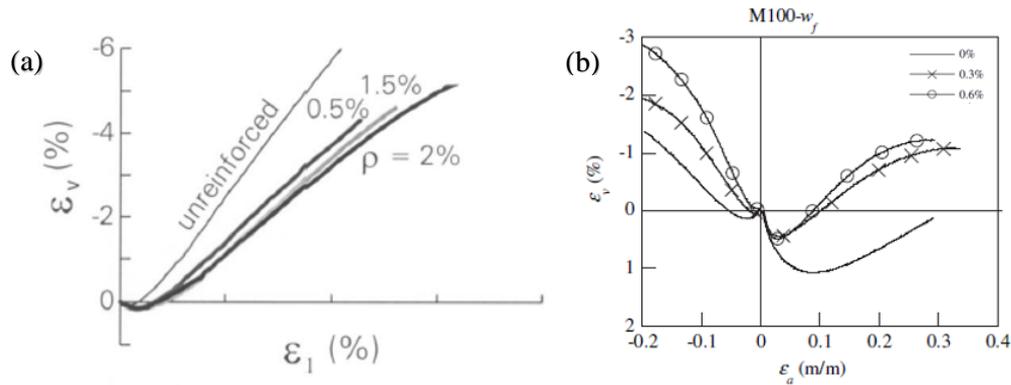


Figura 2.3 - (a) Efeito de reforço inibição da dilatância (Michalowski e Čermák, 2003). (b) Incremento da dilatância para uma amostra (Diambra et al., 2010)

Segundo Diambra (2010), o comportamento volumétrico do compósito depende de como a amostra é preparada, se as fibras são agregadas para uma quantidade fixa de solo, ela torna-se mais densa e conseqüentemente o comportamento será menos compressivo. Se substituir os grãos de solo na amostra por fibras, ela se torna menos densa, pelo que o comportamento será mais compressivo em comparação com o método anterior. Pode-se dizer que nenhum dos dois comportamentos contradiz o outro, eles são só duas maneiras diferentes de comparar amostras reforçadas e não reforçadas.

No caso de carregamento de compressão hidrostática em um compósito onde as fibras estão distribuídas aleatoriamente, conclui-se que as fibras diminuem a compressibilidade da amostra. Na figura 2.4, em um ensaio de compressão hidrostática duas curvas distintas e paralelas foram observadas para amostras reforçadas e não reforçadas (Consoli et al., 2005).

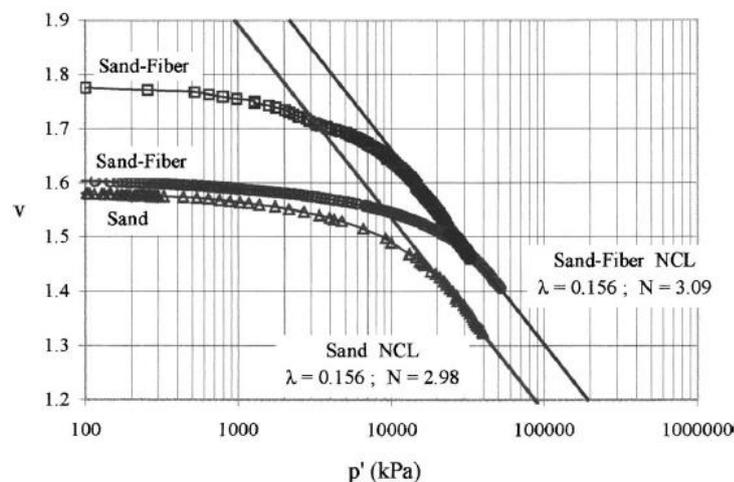


Figura 2.4 - Resultado de ensaio de compressão isotrópica para areia e areia reforçada (Consoli et al. 2005)

### 2.3.4. Influência das condições do ensaio

São duas as condições do ensaio que influenciam representativamente o comportamento do compósito. A primeira é a tensão confinante, os estudos desenvolvidos por Gray e Al-Refeai (1986) e Maher e Gray (1990) sugerem que existe uma mudança na inclinação da linha de ruptura que corresponde a uma tensão confinante crítica " $\sigma_{crit}$ ". As tensões acima do " $\sigma_{crit}$ ", tem uma envoltória de falha a qual é devido ao comportamento plástico da ruptura das fibras. Para tensões menores ao " $\sigma_{crit}$ " a envoltória de falha está associado com a interação fibra-solo, o comportamento é como se apresenta na figura 2.5.

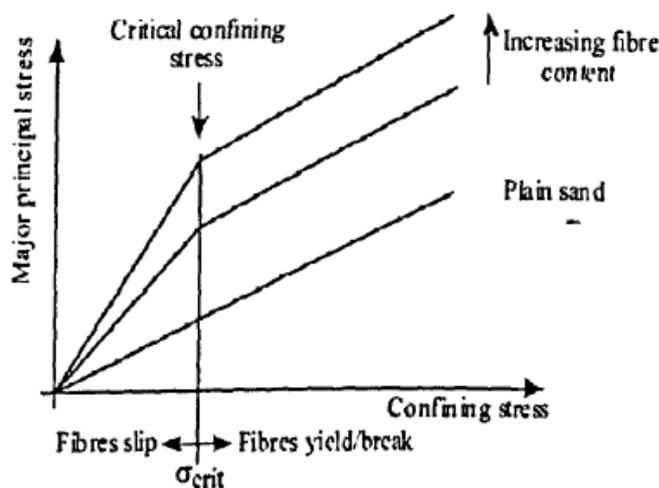


Figura 2.5: Envoltória de falha típica para areias reforçadas com fibra (Diambra, 2010)

Outro fator importante é a densidade da amostra, como acontece em areia sem reforço, quanto maior é a densidade da amostra, maior será o pico de resistência; o comportamento é similar em areias com reforço (Gray e Ohashi, 1983). Diambra (2010) concluiu que quanto maior densidade maior será a contribuição da fibra, essa conclusão foi feita considerando-se que a fibra ocupa alguns vazios próprios do solo tornando a amostra mais densa.

### 2.3.5. Influência das características da fibra

Muitos estudos têm sido realizados para medir a influência das características da fibra no comportamento do compósito. A continuação deste

trabalho será detalhar como os fatores da fibra afetam o comportamento do compósito.

#### **2.3.5.1.**

##### **Modulo elástico da fibra**

Gray e Ohashi (1983) concluíram que a resistência da areia reforçada é melhorada ao utilizar fibras mais rígidas, porém que a resistência atingida pelo compósito não é proporcional ao módulo elástico da fibra. Outras pesquisas demonstraram que utilizar fibras com maior módulo de elasticidade, aumenta a probabilidade de acontecer o arrancamento das fibras com os grãos do solo. Em consequência, a resistência do compósito não será maior, mas menor (Taylor, 1994).

#### **2.3.5.2.**

##### **Relação de aspecto**

Illston (1994) e Taylor (1994) apresentam equações do equilíbrio de forças idealizando no momento em que a fibra é solicitada no compósito, nessas equações torna-se evidente a importância não apenas do comprimento da fibra, mas também do diâmetro. A relação de aspecto " $l_f/d_f$ " (comprimento/diâmetro da fibra) ou fator de forma torna-se mais importante já que tem uma relação proporcional à resistência ao cisalhamento do compósito (Maher e Gray, 1989). O aumento do comprimento da fibra gera aumento da ductilidade e ao aumento da capacidade de absorção de energia (Ulbrich, 1997).

O comprimento e diâmetro são importantes também no caso da avaliação do arrancamento entre a fibra e os grãos de solo e indiretamente influenciam na resistência máxima do compósito no modelo implementado nessa pesquisa (Diambra et al., 2013).

#### **2.3.5.3.**

##### **Teor de fibra**

As resistências de pico e residual para amostras reforçadas são incrementados com o incremento de teor de fibra. Esse parâmetro torna-se o mais representativo no estudo da contribuição de resistência da fibra no compósito.

Tem sido reportado que um incremento de teor de fibra causa um incremento linear na resistência para grandes tensões de confinamento. Para valores baixos de confinamento, a resistência ao cisalhamento tem um incremento inicial e aproxima-se a um limite superior (Gray e Ohashi, 1983; Gray e Al-Refeai, 1986; Maher e Gray, 1990; Ulbrich, 1997; Casagrande, 2001; Consoli et al., 2007b). O aumento do teor de fibra provoca um aumento da capacidade de absorção de energia de deformação (Casagrande, 2005).

Considerando o efeito do teor da fibra em ensaios triaxiais não drenados, o efeito da inclusão de fibras para cargas monotônicas reduz o potencial de liquefação (Ibraim et al. 2010, Da Silva 2017).

#### **2.3.5.4.**

##### **Orientação da fibra**

A orientação de uma fibra relativa ao plano de ruptura influencia crucialmente a sua possibilidade em transmitir cargas. Uma fibra que se posiciona paralela ao plano de ruptura não tem efeito nenhum, enquanto que uma perpendicular apresenta uma contribuição máxima na resistência.

Michalowski e Čermák (2002) propõem uma distribuição da fibra para um comportamento anisotrópico. A função proposta está baseada em uma distribuição axissimétrica com respeito ao eixo normal as camadas compactadas que em geral é o eixo vertical. Nesse estudo foram utilizadas as coordenadas esféricas para o estudo das equações governantes. A orientação das fibras é imposta durante a preparação da amostra e não tem sido realizado muitos estudos específicos para definir a orientação da fibra pelo procedimento da fabricação da amostra. Bower (2017) apresenta valores que podem ser utilizadas na função proposta por Michalowski e Čermák (2002), para três tipos de preparação das amostras.

Diambra et al. (2007) propôs um procedimento para determinar a distribuição da orientação da fibra preparadas usando uma técnica de compactação úmida, que é o procedimento mais utilizado para preparar amostras reforçadas. Foi encontrado que 97% da fibra estavam orientadas entre  $-45^\circ$  até  $45^\circ$  do plano horizontal.

## 2.4. Modelos constitutivos de solos

A bibliografia sobre o assunto dos modelos constitutivos é ampla e ao mesmo tempo dispersa. Nesta seção, são apresentados alguns fundamentos básicos de elasticidade e plasticidade assim como os modelos constitutivos que serão utilizados na implementação.

Um modelo constitutivo busca representar e prever, matematicamente, o comportamento de um material ao ser submetido a carregamentos e/ou deslocamentos, nesse trabalho em particular é avaliada a relação tensão-deformação de solos, assim como de compósitos de solo-fibra.

A vantagem em estabelecer um modelo matemático é o de aplicar idealizações para poder prever e resolver eventos quantitativamente. Segundo Desai e Siriwardane (1984), a eficiência de um modelo constitutivo depende da extensão para o qual o fenômeno físico foi compreendido e simulado. Um modelo não precisa ser exatamente igual à realidade, mas deve ser suficientemente similar para que as conclusões obtidas possam ser estimadas adequadamente na realidade. Nesta seção apresenta-se uma revisão dos modelos dos solos estudados: Cam Clay Modificado e Lade-Kim, que serão implementados posteriormente.

### 2.4.1. Modelo Cam Clay Modificado

Os primeiros modelos do estado crítico foram formulações conhecidas na literatura como modelo Cam Clay, desenvolvidas na Universidade de Cambridge, Inglaterra, por Roscoe et al (1963) e Schofield e Wroth (1968). O modelo original foi posteriormente aperfeiçoado por Roscoe e Burland (1968) dando origem ao hoje conhecido modelo Cam Clay Modificado.

O modelo Cam Clay faz uso do plano  $p - q$  do mesmo conceito de envoltória de ruptura fixa dos modelos convencionais (Mohr-Coulomb e Drucker-Prager), através da projeção da linha de estado crítico (LEC) como reta de inclinação  $M$  passando pela origem dos eixos, vide figura 2.6. Mas em contraste com os modelos clássicos, superfícies de escoamento fechadas são também



$$\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \quad (2.2)$$

#### 2.4.1.1. Função de escoamento

O modelo Cam Clay Modificado considera uma lei de fluxo associado, visto que a função de escoamento é a mesma que a função de potencial plástico. A função de escoamento do modelo é definida pela equação (2.3).

$$f = f(p, q, p_0) = q^2 + M^2 p(p - p_0) \quad (2.3)$$

Onde  $p_0$  é definida como a tensão de pré-adensamento (parâmetro de endurecimento) que depende das deformações volumétricas plásticas do solo. O parâmetro  $M$  é a inclinação da envoltória de ruptura (linha de estado crítico), este parâmetro está relacionado diretamente com o ângulo de atrito efetivo segundo a equação (2.4).

$$M = \frac{6 \operatorname{sen} \phi'}{3 - \operatorname{sen} \phi'} \quad (\text{Compressão triaxial}) \quad (2.4)$$

#### 2.4.1.2. Deformações

No caso do estudo de materiais elasto-plásticos, as deformações totais do solo, estão divididas em duas parcelas, uma parcela elástica e outra plástica como segue:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.5)$$

As deformações elásticas são calculadas diretamente através da lei de Hooke para o qual são necessários os valores dos módulos de variação volumétrica e o módulo de cisalhamento que serão dependentes do valor de “ $p$ ” (tensão média) e o valor do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

$$K = \frac{1 + e}{\kappa} p \quad (2.6)$$

$$G = \frac{3K}{2} \left( \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \right) \quad (2.7)$$

Por outro lado, as deformações plásticas são calculadas com a lei de fluxo que é definida como:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}} \quad (2.8)$$

Onde  $d\lambda$  é um escalar positivo determinado pela lei de consistência e a derivada da função de escoamento que fornece a direção das deformações plásticas. As componentes da equação (2.8), ao serem desenvolvidas podem ser calculados utilizando as equações (2.9) e (2.10).

$$\frac{df}{d\sigma_{ij}} = \frac{df}{dp} \frac{dp}{d\sigma_{ij}} + \frac{df}{dq} \frac{dq}{d\sigma_{ij}} \quad (2.9)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{df}{d\sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}}{\frac{df}{d\sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{df}{d\sigma_{kl}} - \frac{df}{dp_c} \frac{dp_c}{d\varepsilon_p^p} \frac{df}{dp}} \quad (2.10)$$

Desenvolvidas as componentes para o cálculo das deformações plásticas, na equação (2.10), a única incógnita é a derivada de  $p_c$  com relação à deformação volumétrica plástica que pode ser obtida pela lei do endurecimento segundo a equação (2.11).

$$\frac{dp_c}{d\varepsilon_p^p} = p_c \left( \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \right) \quad (2.11)$$

Onde  $e_0$  é o índice de vazios inicial,  $\kappa$  é a inclinação da reta de descarregamento-carregamento (condição pré-adensada) e  $\lambda$  é a inclinação da reta virgem (condição normalmente adensada).

Finalmente, o modelo Cam Clay Modificado para ser implementado precisa dos parâmetros  $M$ ,  $e_0$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $\kappa$ . Adicionalmente, no modelo para solos pré-adensados é importante definir a tensão de pré-adensamento, nessa dissertação a implementação será feita para solos em condições normalmente adensadas, pelo qual esse parâmetro pode ser introduzido como *input* no modelo, mas não é relevante já que para cada ponto de integração a tensão de pré-adensamento será igual com o estado de tensão inicial.

## 2.4.2. Modelo Lade-Kim

O modelo Lade-Kim tem sido relatado na literatura por muitos autores como capaz de reproduzir com boa acurácia o comportamento de materiais granulares. Ele representan características como superfície de plastificação dependente dos três invariantes de tensão, dilatância ligada a uma lei de fluxo não associada, dependência do módulo de Young em relação ao estado de tensão e o comportamento de endurecimento–amolecimento relacionado às tensões atuantes no solo.

Baseado na revisão e avaliação de dados experimentais, Lade e Kim (1988) desenvolveram um modelo constitutivo para materiais friccionais como o concreto, areia e rocha. O comportamento elástico é descrito através da lei de Hooke e o comportamento plástico pelo critério de escoamento, função potencial plástica e um critério de ruptura, expresso em termos dos invariantes de tensão. Antes de começar a desenvolver a equações que serão utilizadas no modelo é importante definir as invariantes do tensor de tensões  $I'_1$ ,  $I'_2$  e  $I'_3$ , como segue:

$$I'_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z \quad (2.12)$$

$$I'_2 = -(\sigma'_x\sigma'_y + \sigma'_y\sigma'_z + \sigma'_z\sigma'_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (2.13)$$

$$I'_3 = \sigma'_x\sigma'_y\sigma'_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma'_x\tau_{yz}^2 + \sigma'_y\tau_{xz}^2 + \sigma'_z\tau_{xy}^2) \quad (2.14)$$

### 2.4.2.1. Deformações elásticas

A componente de deformação elástica é calculada a partir da lei de Hooke, O módulo de Young está relacionado com a primeira invariante (Lade e Kim, 1988), como segue:

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left( \frac{I'_1}{p_a} \right)^n \quad (2.15)$$

Onde  $K_{ur}$  e  $n$  são parâmetros adimensionais, determinados a partir de trechos de carregamento-descarregamento em ensaios de compressão triaxial,  $p_a$  é a pressão atmosférica e  $I'_1$  é a primeira invariante do estado de tensões.

O valor do coeficiente de Poisson  $\nu$  é considerado constante e as deformações elásticas são calculadas através de:

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}^e d\sigma_{kl} \quad (2.16)$$

Em que  $D_{ijkl}^e$  é a matriz de elasticidade, cujos coeficientes são definidos em função do módulo  $E_{ur}$  e o coeficiente de Poisson.

#### 2.4.2.2. Critério de ruptura

No modelo apresentado por Lade (1977), propôs-se uma superfície de ruptura curva, a qual é expressa em termos do primeiro e do terceiro invariante, vide equação (2.17).

$$f_n = \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m = \eta_1 \quad (\text{na ruptura}) \quad (2.17)$$

Onde  $m$  varia com a curvatura da envoltória de ruptura: quando  $m = 0$  a envoltória é linear, se  $m > 1.979$  ela será convexa em relação ao eixo hidrostático. Inúmeros ensaios de laboratório têm mostrado que  $m$  normalmente é menor que 1.5. O parâmetro  $\eta_1$ , relaciona-se com a resistência do material: quanto maior for o seu valor, mais resistente é o solo. Assim relaciona-se com a forma da superfície de ruptura no plano octaédrico.

#### 2.4.2.3. Função de potencial plástico

Kim e Lade (1988) propuseram uma lei de fluxo não associada para descrever o comportamento das deformações plásticas. A superfície de potencial plástico foi calculada e concluída a partir de um grande número de ensaios de laboratório em diferentes materiais e utilizando tanto os planos octaédrico quanto o plano triaxial para visualizar as direções dos valores de incrementos de deformações plástica. A expressão que define a função de potencial plástico é apresentada na equação (2.18).

$$g_p = \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} + \psi_2 \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu \quad (2.18)$$

Onde  $\psi_1$  é um fator de ponderação entre a forma triangular e a circular da superfície de potencial plástico,  $\psi_2$  controla a interseção da superfície com o eixo hidrostático e  $\mu$  determina a curvatura dos meridianos. O valor de  $\psi_1$  é definido empiricamente em função do parâmetro de resistência  $m$  do critério de ruptura:

$$\psi_1 = 0.00155 m^{-1.27} \quad (2.19)$$

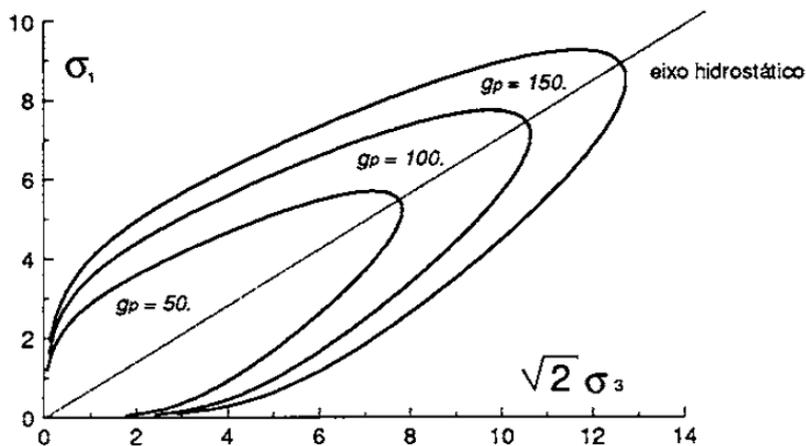


Figura 2.7 - Contornos da superfície de potencial plástico para diferentes valores de  $g_p$  – Areia Fina (De Melo, 1995)

Substituindo-se a equação (2.19) na lei de fluxo, e desenvolvendo as derivadas da superfície de potencial plástico, as componentes dos incrementos da deformação plástica são dados por:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\varepsilon_z^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{zx}^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} = d\lambda_p \left[ \frac{I_3}{p_a} \right]^\mu \begin{Bmatrix} G - (\sigma'_y + \sigma'_z) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1(\sigma'_y \sigma'_z - \tau_{yz}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ G - (\sigma'_x + \sigma'_z) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1(\sigma'_x \sigma'_z - \tau_{xz}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ G - (\sigma'_x + \sigma'_y) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1(\sigma'_y \sigma'_x - \tau_{xy}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{yz} - 2\psi_1(\tau_{xy} \tau_{xz} - \sigma'_x \tau_{yz}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{xz} - 2\psi_1(\tau_{xy} \tau_{yz} - \sigma'_y \tau_{xz}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{xy} - 2\psi_1(\tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma'_z \tau_{xy}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Onde:

$$G = \psi_1(\mu + 3) \frac{I_1^2}{I_3} - (\mu + 2) \frac{I_1}{I_2} + \psi_2 \mu \frac{1}{I_1} \quad (2.21)$$

No caso de materiais com coesão, propõe-se uma translação das tensões principais ao longo do eixo hidrostático, entretanto na presente dissertação só vão ser avaliados solos sem coesão. No modelo de Lade-Kim (1988), pode-se observar o detalhe do cálculo ao se considerar materiais coesivos no comportamento tensão-deformação.

Uma das considerações importantes é satisfazer a condição de irreversibilidade de Prager, o trabalho plástico deve ser positivo sempre que uma mudança nas deformações plásticas ocorrer, ou seja:

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} d\lambda_p \frac{dg_p}{d\sigma_{ij}} \geq 0 \quad (2.22)$$

Para isto acontecer, a superfície do potencial plástico deve ser convexa em relação a origem dos espaços das tensões principais, o que depende de utilizar parâmetros adequados e consistentes. Nesse sentido, a função de plastificação é uma função homogênea de grau  $\mu$ :

$$\frac{dg_p}{d\sigma_{ij}} \sigma_{ij} = \mu g_p \quad (2.23)$$

Essa equação pode ser escrita como segue:

$$dW_p = \mu g_p d\lambda_p \quad (2.24)$$

Como  $d\lambda_p > 0$ , a condição de irreversibilidade requer que:

$$\mu g_p \geq 0 \quad (2.25)$$

Kim e Lade Lade (1988) mostra em seu trabalho que  $g_p$  negativo não é uma escolha adequada, por tanto  $\mu$  e  $g_p$  devem ser positivos. Como  $\left(\frac{I_1^3}{I_3}\right) \geq 27$  e

$\left(-\frac{I_1^2}{I_2}\right) \geq 3$  são sempre positivos então a condição de irreversibilidade recai sobre as seguintes condições:

$$\mu > 0 \quad e \quad \psi_2 > -(27\psi_1 + 3) \quad (2.26)$$

#### 2.4.2.4. Função de escoamento

O critério de escoamento ou função de plastificação, é dado por:

$$F(\sigma_{ij}, W_p) = f'_p(\sigma_{ij}) - f''_p(W_p) = 0 \quad (2.27)$$

Onde:

$$f'_p = \left( \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h e^q \quad (2.28)$$

$$f''_p = \left( \frac{1}{D} \right)^{\frac{1}{\rho}} \left( \frac{W_p}{p_a} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (2.29)$$

Na qual  $h$  e  $q$  são parâmetros do modelo. O parâmetro  $h$  é definido com base no fato de que o trabalho plástico é constante ao longo da mesma superfície de plastificação.

O parâmetro “ $q$ ” é dependente do estado de tensão, se:

$$\begin{cases} q = 0 & \text{durante compressão isotrópica} \\ 0 < q < 1 & \text{durante endurecimento} \\ q = 1 & \text{na ruptura} \end{cases}$$

Uma vez  $q = 1$ , uma relação de amolecimento é necessária (Lade e Kim, 1988a). O valor de  $q$  varia com o nível de tensão,  $S$ , definido por:

$$S = \frac{f_n}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m \quad (2.30)$$

E a variação de  $q$  pode ser relacionada com o valor de  $S$ , essa relação é definida pela equação (2.31), onde  $\alpha$  é uma constante própria do modelo.

$$q = \frac{\alpha S}{1 - (1 - \alpha)S} \quad (2.31)$$

O calculo dos coeficientes  $D$  e  $\rho$  da equação (2.29) podem ser calculados segundo as equações (2.32) e (2.33), respectivamente

$$\rho = \frac{p}{h} \quad (2.32)$$

$$D = \frac{C}{(27\psi_1 + 3)^\rho} \quad (2.33)$$

Onde  $C$  e  $p$  são parâmetros de endurecimento obtidos em função do trabalho plástico ocorrido durante a compressão isotrópica, onde o trabalho plástico pode ser calculado como segue:

$$W_p = Cp_\alpha \left( \frac{I'_1}{p_\alpha} \right)^p \quad (2.34)$$

Em resumo, o modelo Lade-Kim apresenta 11 parâmetros para sua adequada representação (sem considerar a coesão):  $K_{ur}$ ,  $n$  e  $\nu$  são os parâmetros que definem o comportamento elástico;  $\eta_1$  e  $m$  são parâmetros de resistência;  $\psi_2$  e  $\mu$  são parâmetros da função de potencial plástico;  $h$  e  $\alpha$  são parâmetros da função de plastificação; e  $C$  e  $p$  são parâmetros da função de endurecimento.

## 2.5. Modelos constitutivos de compósitos

Na literatura existem alguns modelos de solo-fibra que foram desenvolvidos para conhecer e prever o comportamento do solo ao serem misturados com fibras. Os modelos mais antigos só avaliaram a envoltória de falha do compósito; porém, os mais recentes conseguem utilizar formulações para prever as curvas tensão-deformação.

Maher e Gray (1990) basearam seus estudos no trabalho preliminar de Gray e Ohashi (1983), no qual considera um modelo simplificado baseado no comportamento de só uma fibra, para depois utilizar esse modelo no solo através de aproximações estatísticas variando a orientação da fibra e a posição do plano de cisalhamento ao longo do comprimento da fibra. As considerações realizadas para o desenvolvimento do modelo são: as fibras alongam em igual quantidade nos dois lados do plano de cisalhamento, têm comportamento elástico, estão orientadas em só uma direção e são finas o suficiente para que a rigidez de cisalhamento e flexão seja desprezada. Esse modelo foi usado principalmente para prever a envoltória de falha de solos reforçados com fibra.

Michalowski e Cermák (2003) basearam seu modelo no trabalho de Michalowski e Zhao (1996). Esse modelo utiliza uma abordagem da energia para prever a envoltória de falha de solos reforçados com fibra em condições axissimétricas.

Diambra et al (2010) e (2013) utilizam uma mistura de relações empíricas e mecânicas, juntamente com a abordagem de integração estatística proposta por Maher e Gray (1990), para prever o comportamento das curvas tensão-deformação de compósitos em ensaios triaxiais. O modelo constitutivo em geral está definido sob condições axissimétricas e assim será utilizado nessa dissertação. O detalhe do modelo e as hipóteses que foram consideradas são abordadas no capítulo 3.

Outro modelo que apenas analisa o comportamento de só uma fibra para avaliar as características do compósito foi proposta por Zhu et al. (2014). Esse modelo é baseado no comportamento que foi observado durante um teste de arrancamento em argila, e utiliza uma combinação de relações mecânicas e parâmetros calibrados.

Diambra e Ibraim (2015) basearam seu modelo nos trabalhos de Diambra et al. (2013) e realizaram uma série de modificações, que substituem algumas das relações empíricas com as relações micromecânicas, esse modelo considera além dos parâmetros utilizados o tamanho das partículas de solo.

Bower (2017) realiza também o estudo de só uma fibra e é baseado em relações micromecânicas ao nível da fibra a partir de resultados experimentais e de modelagem numérica. Utiliza formulações de natureza semelhante às anteriormente descritas para desenvolver o modelo do compósito. Finalmente, realiza uma análise de sensibilidade de todos os parâmetros do modelo mediante a implementação numérica.

Em geral, modelos constitutivos de compósitos existem na literatura e cada um deles utiliza suas próprias suposições para modelar um número limitado de características.

Uma consideração conveniente que está presente em vários modelos é a distribuição da fibra no compósito, alguns modelos utilizam uma distribuição homogênea, a qual é mantida em toda a formulação. Outros permitem a alteração

dessa orientação. A orientação das fibras é utilizada para modelar o compósito segundo o tipo de preparação da amostra. Ibraim et al. (2012) concluíram que no caso da preparação das amostras por camadas as fibras estão orientadas principalmente próximas ao plano horizontal. Os estudos experimentais apresentados por Bower (2017) concluem que o método utilizado na fabricação das amostras influencia no comportamento do compósito durante o ensaio, adicionalmente apresenta os valores para as diferentes distribuições segundo o tipo de preparação.

Alguns dos modelos mencionados aparentam poder ser formulados em programas de elementos finitos, tais como Michalowski e Cermák (2003), Diambra et al. (2010) e Diambra e Ibraim (2015), e em geral esses modelos tem uma exatidão razoável. Porém, o comportamento volumétrico de ensaios experimentais na literatura é disperso, pelo qual esses modelos poderiam ser melhorados.

### 3 Estrutura do modelo constitutivo implementado

#### 3.1. Conceitos do modelo

A presente dissertação utiliza o modelo constitutivo proposto por Diambra et al. (2013) que foi detalhado brevemente no capítulo 2, esse modelo foi escolhido porque apresenta uma formulação para representar o comportamento da curva tensão-deformação de um solo com fibra e não somente o critério de ruptura. Entre os parâmetros que influenciam o comportamento do compósito em condições drenadas, um dos mais representativos e que mais influencia o desenvolvimento das tensões é o teor da fibra,  $w_f$ , que é definido como uma relação entre o peso da fibra e o peso seco do solo, que em toda a dissertação será representado como um solo granular.

$$w_f = \frac{W_f}{W_s} \quad (3.1)$$

Onde “ $W_f$ ” é o peso da fibra e “ $W_s$ ” é o peso do solo.

##### 3.1.1. Hipóteses do modelo

O comportamento do solo reforçado com fibra é determinado pela contribuição da resistência da matriz do solo e da fibra, sendo que o comportamento de um influencia no outro. Nessa dissertação, a matriz de solo é representada utilizando os modelos constitutivos Cam Clay Modificado ou Lade-Kim. O primeiro porque é um modelo simples de implementar e o segundo porque é apropriado para materiais granulares. A contribuição da fibra é estimada considerando as seguintes hipóteses ou lei de mistura:

- ❖ Hipótese 1: As fibras são distribuídas homogeneamente em toda a matriz do solo. Premissa importante já que se avalia um modelo equivalente da mistura de solo com fibra em condições drenadas. O estado de tensões e

deformações do compósito são calculados considerando um procedimento volumétrico médio.

- ❖ Hipótese 2: As fibras são consideradas como elementos em 1D, elementos elásticos e que só desenvolvem tensões de tração.
- ❖ Hipótese 3: A adesão entre as fibras e os grãos de solo é parcial e ela pode acontecer durante o cisalhamento, podendo sofrer arrancamento da matriz de solo.
- ❖ Hipótese 4: A contribuição das fibras na resistência do compósito é considerada juntamente com a sua orientação.
- ❖ Hipótese 5: A presença das fibras afeta o estado de tensões da matriz de solo (empacotamento), incrementando a contribuição de resistência no compósito.

As equações para o desenvolvimento do modelo constitutivo do solo-fibra são apresentadas a seguir.

### 3.1.2. Relação das fases do compósito

Para estudar as fases que interagem no compósito é preciso definir algumas quantidades como: o volume total da amostra sem reforço ( $V$ ), a qual é a soma do volume da matriz de solo ( $V_s$ ) e volume de vazios ( $V_v$ ) (figura 3.1a). Para solos reforçados com fibra, o volume da fibra precisa ser incluído como se pode observar na figura 3.1b. Adicionalmente, o volume de vazios pode ser representado em duas partes o volume de vazios que foi causada pela inclusão da fibra ( $V_{vf}$ ) e volume de vazios do solo ( $V_{vs}$ ), ver figura 3.1c.

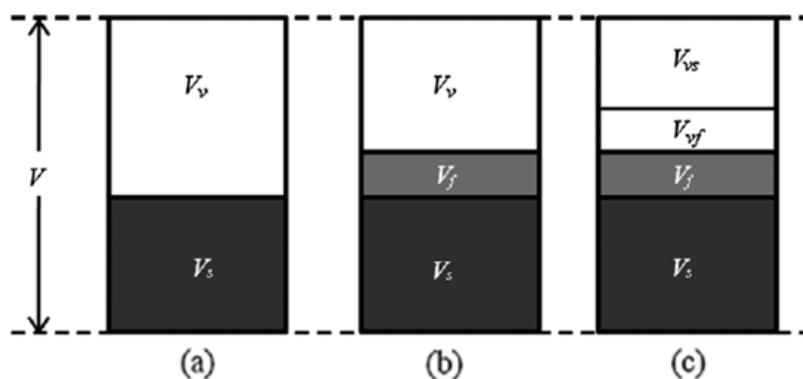


Figura 3.1 - Fases do diagrama (a) amostra sem reforço, (b) amostra reforçada sem divisão dos volumes de vazios e (c) amostra reforçada com partição do volume de vazios (Diambra et al. 2013)

Considerando a distribuição dos volumes apresentada na figura 3.1c é possível definir os volumes específicos para a amostra reforçada com fibra ( $v$ ), da matriz de solo ( $v_m$ ) e da fibra ( $v_f$ ). As equações que definem esses valores são:

$$v = \frac{V}{V_s + V_f} \quad (3.2)$$

$$v_m = \frac{V_{vs} + V_s}{V_s} \quad (3.3)$$

$$v_f = \frac{V_{vf} + V_f}{V_f} \quad (3.4)$$

As relações entre volume específico e a variação da deformação volumétrica é definido como:

$$\dot{\varepsilon}_v = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (3.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{mv} = -\frac{\dot{v}_m}{v_m} \quad (3.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{fv} = -\frac{\dot{v}_f}{v_f} \quad (3.7)$$

Reduzindo e manipulando as equações (3.2), (3.3) e (3.4), obtém-se a seguinte relação em função dos volumes específicos, teor de fibra e as gravidades específicas da fibra e do solo ( $G_f$ ,  $G_s$ ):

$$v = (v_m + v_f \frac{G_s W_f}{G_f}) \frac{G_f}{G_f + G_s W_f} \quad (3.8)$$

Segundo a equação (3.8), pode-se concluir que se fixar o volume específico do compósito, qualquer mudança nos vazios da fibra induz uma diminuição do volume específico da matriz, induzindo um aumento de densidade da matriz de solo.

Outro parâmetro importante que precisa ser definido é a concentração volumétrica, que representa quantitativamente em volume a fibra ( $\mu_f$ ) e a matriz de solo ( $\mu_m$ ) no compósito, cuja soma é igual a 1. Podendo estar relacionadas com os volumes específicos de acordo as equações (3.9) e (3.10).

$$\mu_m = \frac{(V_s + V_{vs})}{V} = \frac{V_s}{V} \nu_m \quad (3.9)$$

$$\mu_f = \frac{(V_f + V_{vf})}{V} = \frac{V_f}{V} \nu_f \quad (3.10)$$

### 3.1.3.

#### Contribuição do solo e da fibra

##### 3.1.3.1.

#### Estado de tensões no compósito

Para determinar o estado de tensões do compósito é preciso realizar um acoplamento das contribuições de tensão da fibra assim como da matriz de solo. A matriz de solo é considerada contínua e homogênea em todo seu volume, pode-se trabalhar com um valor de tensão definido como  $\sigma'$ . Entretanto, as fibras são elementos discretos unidimensionais, mas é considerado que são contínuas na sua orientação (elemento representativo), e a média do estado de tensões da fibra é representado como  $\bar{\sigma}_f$ . Utilizando uma aproximação volumétrica média, o estado de tensões do compósito pode ser definido em duas parcelas como:

$$\sigma^* = \mu_m \sigma' + \mu_f \bar{\sigma}_f \quad (3.11)$$

Derivando a equação (3.11), o incremento de tensões no compósito é:

$$\dot{\sigma}^* = \dot{\mu}_m \sigma' + \dot{\mu}_f \bar{\sigma}_f + \mu_m \dot{\sigma}' + \mu_f \dot{\bar{\sigma}}_f \quad (3.12)$$

##### 3.1.3.2.

#### Estado de deformações no compósito

Substituindo as Eqs. (3.2), (3.3), (3.4) em (3.5), (3.6), (3.7), e reduzindo pode-se obter a seguinte relação:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{mv} \mu_m + \dot{\epsilon}_{fv} \mu_f \quad (3.13)$$

O incremento do tensor de deformações do compósito e das suas partes pode ser definido como:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_m \mu_m + \dot{\epsilon}_f \mu_f \quad (3.14)$$

Considera-se que a deformação da fibra durante o carregamento é desprezível comparada com as deformações que acontecem na matriz do solo. Adicionalmente, o volume específico da fibra é constante, pelo que será um valor inserido para o modelo. Considerando o anterior, a equação (3.14) pode ser representada como:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m \mu_m \quad (3.15)$$

### 3.2. Modelo constitutivo para as fibras

#### 3.2.1. Orientação das fibras

Para definir a distribuição das fibras Diambra et al. (2013) utilizaram as coordenadas esféricas, onde o ângulo  $\theta$  é o ângulo medido a partir do plano "xy",  $\alpha$  é o azimut medido no plano "xy" desde a direção "x". A função  $\rho_{\theta\alpha}$  fornece a probabilidade de que as fibras estejam orientadas dentro do domínio infinitesimal  $d\theta d\alpha$ , como se pode observar na figura 3.2. Por definição a seguinte equação deve cumprir com a seguinte relação:

$$\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho_{\theta\alpha} \cos(\theta) d\theta d\alpha = 1 \quad (3.16)$$

Onde o  $\cos(\theta)$  é considerado devido ao sistema de coordenadas esféricas.

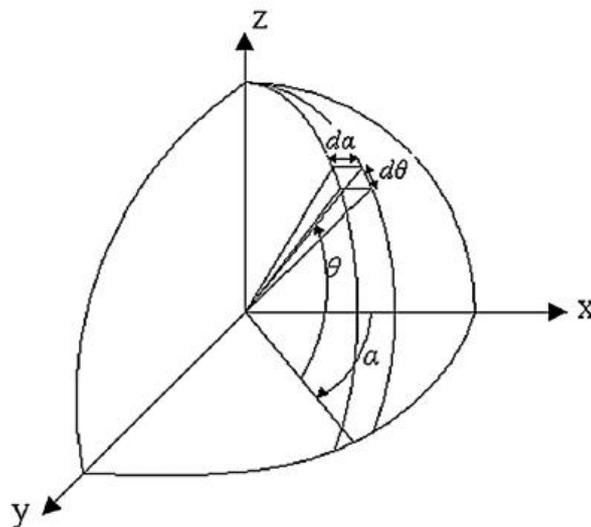


Figura 3.2 - Coordenadas esféricas utilizadas para definir a distribuição da orientação da fibra (Diambra et al. 2013)

No caso de uma orientação isotrópica das fibras a função  $\rho_{\theta\alpha}$  assume o valor de  $1/2\pi$ . No caso de  $N$  fibras numa amostra, o cálculo do número de fibras que estão orientadas em um intervalo infinitesimal  $d\theta d\alpha$  é definido por  $\bar{N}_{\theta\alpha}$  o qual depende das características da fibra como área da fibra ( $a_f$ ), comprimento da fibra ( $l_f$ ) e volume específico da fibra, vide equação (3.17).

$$\bar{N}_{\theta\alpha} = N\rho_{\theta\alpha} = \frac{1}{a_f l_f v_f} \rho_{\theta\alpha} \quad (3.17)$$

Diambra et al. (2007) e Ibraim et al. (2012) demonstraram que devido a técnica de preparação da amostra, as fibras ficam preferencialmente no plano horizontal e que a sua distribuição pode ser representada por:

$$\rho_{\theta\alpha} = (A_{\theta\alpha} + B_{\theta\alpha} |\cos^{n_{\theta\alpha}} \theta|) \quad (3.18)$$

Onde  $A_{\theta\alpha}$ ,  $B_{\theta\alpha}$  e  $n_{\theta\alpha}$  são constantes que definem a distribuição das fibras no compósito e devem ser definidos como *input* do modelo.

### 3.2.2. Resposta tensão-deformação de uma fibra

As fibras são materiais elásticos que trabalham só à tração, com rigidez à compressão desprezível, então a relação que define esse comportamento é:

$$\sigma_f = E_f \langle \varepsilon_f \rangle \quad (3.19)$$

Onde  $E_f$  modulo de Young do material da fibra e  $\langle \varepsilon_f \rangle$  é definido como:

$$\langle \varepsilon_f \rangle = \begin{cases} \varepsilon_f & \text{para } \varepsilon_f < 0 \\ 0 & \text{para } \varepsilon_f > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Diambra et al (2013), após análises realizadas nos ensaios de laboratório, concluíram que as fibras sofrem “*pull-out*” antes de poder atingir seu comportamento plástico. Nesse sentido, não é necessário incorporar um limite para a tensão de tração nem para o comportamento elasto-plástico da fibra.

### 3.2.3. Interação solo-fibra

De acordo com as hipóteses iniciais do modelo, as deformações das fibras têm as mesmas deformações do compósito, porém, as interações entre os grãos da matriz e a fibra não é perfeito, acontecendo um escorregamento entra as duas fases quando uma tensão limite for atingida. Esse escorregamento pode ser interpretado como um fator de efetividade, ou grau de interação (Machado et al., 2002). Esse valor definido como  $K_e$  é afetado exponencialmente pelo valor da tensão média da matriz do solo no compósito (Diambra et al., 2010). Se a tensão média for 0 então as fibras escorregam totalmente, segundo a equação (3.21).

$$f_b = K_e \left( 1 - \exp(-p'/p_{ref}) \right) \quad (3.21)$$

Onde  $p_{ref}$  tem valor de 100 kPa,  $K_e$  é um coeficiente que é calculado fazendo um ajuste do comportamento real do solo com ajuda de modelagem numérica e pode variar entre os valores de 0 e 1.

### 3.2.4. Pullout da fibra

O *pullout* ou arrancamento de uma fibra acontece quando é superada uma tensão limite ou crítica. Para esforços confinantes maiores é mais provável acontecer outros mecanismos de ruptura tais como a ruptura da fibra ou atingir o limite plástico da mesma. O arrancamento acontece quando a resistência na interface atinge o valor máximo permitido  $\tau_{sf}^L$ .

$$\tau_{sf}^L = a_{sf} + p^* \tan \delta_{sf} \quad (3.22)$$

Onde os parâmetros  $a_{sf}$  e  $\delta_{sf}$  são interpretados como coesão e o ângulo de atrito da resistência ao cisalhamento da interface solo-fibra. Considerando uma distribuição uniforme em toda a superfície da fibra, é possível calcular a tensão limite  $\sigma_f^L$  mediante equilíbrio de forças.

$$\sigma_f^L = \frac{p_f l_f}{2a_f} (a_{sf} + p^* \tan \delta_{sf}) \quad (3.23)$$

Onde  $p_f$  é o perímetro da seção transversal da fibra.

Quando o valor de  $\sigma_f^L$  é superado, acontece o arrancamento e o incremento da contribuição da fibra torna-se nulo. No modelo implementado, são calculadas as tensões do conjunto das fibras nas direções  $p$  e  $q$ , podendo ser calculados as equivalentes nas direções radiais e axiais.

As equações (3.24) e (3.25), apresentam as expressões utilizadas para definir as tensões de escorregamento axial e radial, respectivamente, para o conjunto de fibras no compósito.

$$\bar{\sigma}_{f_a} = \frac{\pi}{v_f} \int_0^{\theta_0} \sigma_f^L \rho_{\theta\alpha} \sin^2(\theta) d\theta = K_a \sigma_f^L \quad (3.24)$$

$$\bar{\sigma}_{f_r} = \frac{\pi}{2v_f} \int_0^{\theta_0} \sigma_f^L \rho_{\theta\alpha} \cos^2(\theta) d\theta = K_r \sigma_f^L \quad (3.25)$$

Onde  $K_a$  e  $K_r$  podem ser definidos como as parcelas da tensão limite nas direções axial e radial e que dependem da orientação  $\theta_0$  a qual é definida posteriormente na equação (3.30).

### 3.2.5. Contribuição média das fibras

A contribuição das fibras no estado de tensões é feita mediante uma integração esférica espacial. A equação que define a contribuição da fibra no compósito em 3D é a que segue:

$$\bar{\sigma}_{f_{ij}} = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{l_f}{2} n_i \sigma_{f_{\theta\alpha}} a_f \bar{N}_{\theta\alpha} V n_j \cos(\theta) d\theta d\alpha \quad (3.26)$$

Onde o produto  $\sigma_{f_{\theta\alpha}} a_f$  representa a força na fibra que tem uma orientação  $(\theta, \alpha)$ , o produto  $\bar{N}_{\theta\alpha} V$  representa a quantidade de fibras que estão na direção  $(\theta, \alpha)$  e  $n_i$  e  $n_j$  representam os componentes nas direções  $i$  e  $j$  do vetor unitário  $n$  normal à esfera em  $(\theta, \alpha)$ .

No caso axissimétrico, substituindo as equações (3.17), (3.19) e (3.21) na equação (3.26), pode-se obter os incrementos das tensões axiais e radiais.

$$\dot{\bar{\sigma}}_{f_a} = \frac{\pi}{v_f} \int_0^\pi E_f f_b \langle \dot{\epsilon}_{\theta\alpha} \rangle \rho_{\theta\alpha} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (3.27)$$

$$\dot{\sigma}_{fr} = \frac{\pi}{2\nu_f} \int_0^\pi E_f f_b \langle \dot{\epsilon}_{\theta\alpha} \rangle \rho_{\theta\alpha} \cos^3(\theta) d\theta \quad (3.28)$$

O incremento de deformações  $\dot{\epsilon}_{\theta\alpha}$  pode ser expresso em termos de componentes axiais e radiais. Para condições axissimétricas, o símbolo  $\langle \rangle$  pode ser suprimido se as integrações são feitas somente no domínio das deformações de tração, vide figura 3.3. Considerando essa última condição, as equações (3.27) e (3.28) podem ser representadas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{fa} \\ \dot{\sigma}_{fr} \end{bmatrix} = E_f \frac{\pi}{\nu_f} \begin{bmatrix} 2 \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^4\theta \cos\theta d\theta & 2 \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^2\theta \cos^3\theta d\theta \\ \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^2\theta \cos^3\theta d\theta & \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \cos^5\theta d\theta \end{bmatrix} f_b \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_a \\ \dot{\epsilon}_r \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Onde os limites  $l_1$  e  $l_2$  vão depender do tipo de ensaio triaxial ao ser realizado. Se for um ensaio de compressão triaxial:  $l_1 = 0$  e  $l_2 = \theta_0$ , no caso de um ensaio de extensão triaxial:  $l_1 = \theta_0$  e  $l_2 = \pi/2$ . Os limites são apresentados na figura 3.3. Onde  $\theta_0$  é a direção onde os incrementos de deformações são iguais a zero e é definida pela seguinte equação:

$$\theta_0 = \arctan \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_a}} \quad (3.30)$$

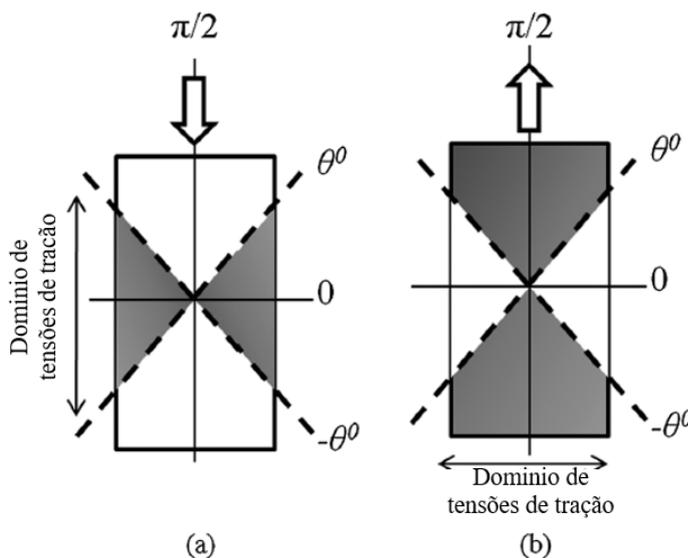


Figura 3.3: Domínio de tensões de tração para carregamentos de (a) compressão e (b) extensão triaxial (Diambra et al., 2013)

No caso de um ensaio triaxial convencional, em notação  $p - q$ , a equação (3.29) pode-se reescrever como:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} = E_f \frac{\pi}{v_f} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} f_b \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p \\ \dot{\epsilon}_q \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{21} \\ M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (N_{11} + N_{12} + 2N_{21} + 2N_{22})/9 \\ (N_{11} - N_{12}/2 + 2N_{21} - N_{22})/3 \\ (N_{11} + N_{12} - N_{21} - N_{22})/3 \\ (2N_{11} - N_{12} - 2N_{21} + N_{22})/2 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Onde os valores  $N_{ij}$  são as componentes na matriz da equação (3.29), extraído pode-se observar o que segue:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^4 \theta \cos \theta d\theta & 2 \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^2 \theta \cos^3 \theta d\theta \\ \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \text{sen}^2 \theta \cos^3 \theta d\theta & \int_{l_1}^{l_2} \rho(\theta) \cos^5 \theta d\theta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Finalmente, já que as deformações que acontecem no compósito são as mesmas que nas fibras, pode-se definir a matriz da fibra como:

$$[M_f] = E_f \frac{\pi}{v_f} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} f_b \quad (3.34)$$

### 3.3. Relação constitutiva do compósito

A relação tensão-deformação do compósito pode ser definida das equações (3.12) e (3.15). Por outro lado, manipulando as equações (3.9) e (3.10) pode-se obter as seguintes equações:

$$\dot{\mu}_m = (\mu_m - 1)\dot{\epsilon}_p = -\mu_f \dot{\epsilon}_p \quad (3.35)$$

$$\dot{\mu}_f = \mu_f \dot{\epsilon}_p \quad (3.36)$$

Uma vez definidos os incrementos nas concentrações volumétricas da fibra e da matriz de solo, a relação constitutiva do solo reforçado com fibra é definida segundo a equação (3.37).

$$\begin{bmatrix} \dot{p}^* \\ \dot{q}^* \end{bmatrix} = \left\{ [M_m] + \mu_f [M_f] + \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu_f \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \bar{p}_f \\ \bar{q}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_f \\ 0 \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p \\ \dot{\epsilon}_q \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Onde  $[M_m]$  é a matriz elasto-plástica da matriz de solo, que é calculada de acordo com o modelo constitutivo ao ser utilizado. Nessa dissertação são utilizados para o comportamento da matriz de solo os modelos constitutivos Cam Clay Modificado e Lade-Kim.

### 3.4.

#### Trajétoria de tensões efetivo da matriz do solo e compósito

O desenvolvimento do incremento das tensões para o solo não reforçado, da fibra e do compósito é apresentado nesta seção. Para um melhor entendimento serão utilizados materiais reforçados em condições triaxiais drenadas.

As condições de contorno requeridas para solo reforçado, em condições triaxiais, seguem a trajetória de tensões  $\delta q^*/\delta p^* = 3$ . Na equação (3.11), qualquer estado de tensão do compósito,  $\sigma^*$ , é calculado da soma entre as parcelas do estado de tensão das fibras,  $\mu_f \bar{\sigma}_f$ , e da matriz de solo,  $\mu_m \sigma'$ . A contribuição da fibra é mostrada na figura 3.4 como uma seta a partir da trajetória de tensão da matriz do solo.

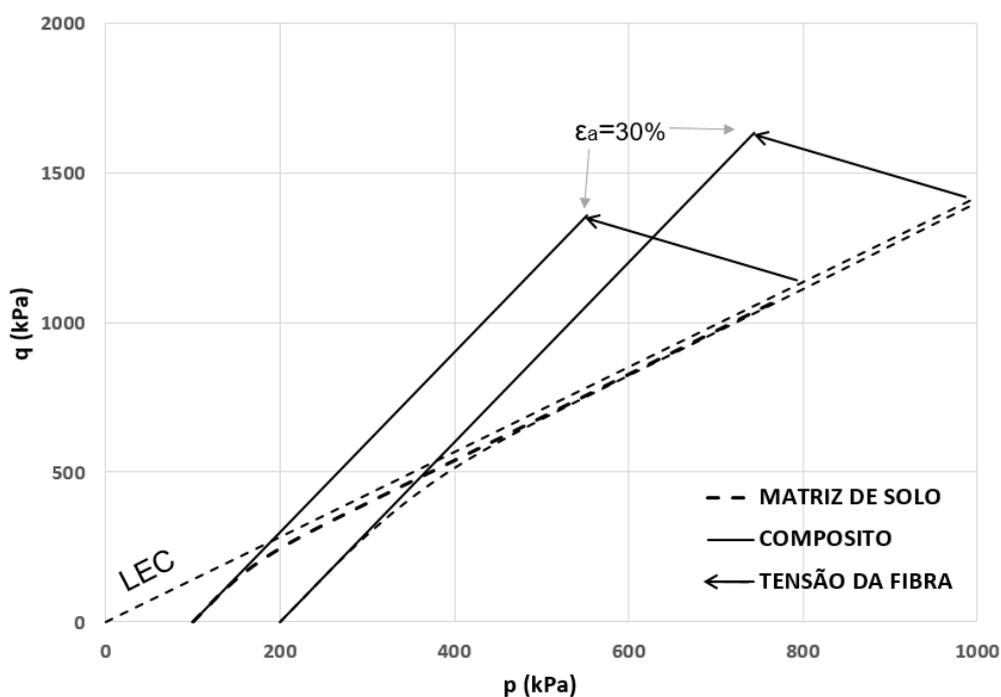


Figura 3.4 - Trajetória de tensões da matriz do solo e contribuição da fibra ao estado de tensões do compósito-Tensões de preadensamento de 100 kPa e 200 kPa (Modificado de Diambra et al. 2013)

A trajetória de tensões da matriz do solo segue um comportamento não convencional, isto se deve a presença de fibras no compósito que o modificam. No início, a trajetória de tensões da matriz de solo é igual à trajetória de tensões do compósito. Segundo os resultados experimentais na literatura, as fibras não influenciam consideravelmente o comportamento do compósito até um nível de deformação entre 2.5 e 3%, após este nível de deformação ele vai se afastando gradualmente dessa trajetória convencional e parcialmente vai convergindo com a linha de estado crítico para níveis de deformação maiores. Por outro lado, a contribuição da tensão das fibras torna-se maior devido ao contínuo incremento de deformação. A resistência da matriz de solo também melhora devido ao efeito de empacotamento devido às fibras. Conseqüentemente, o compósito torna-se mais resistente, já que o estado de tensões necessário para atingir a ruptura é maior.

As componentes  $\mu_f \bar{p}_f$  e  $\mu_f \bar{q}_f$  têm um incremento quase linear durante o cisalhamento, vide figura 3.5. A linearidade deste comportamento tensão-deformação do conjunto de fibras pode explicar a tendência linear, correspondente da resposta tensão-deformação para o solo reforçado para médias e grandes deformações, vide figura 3.6.

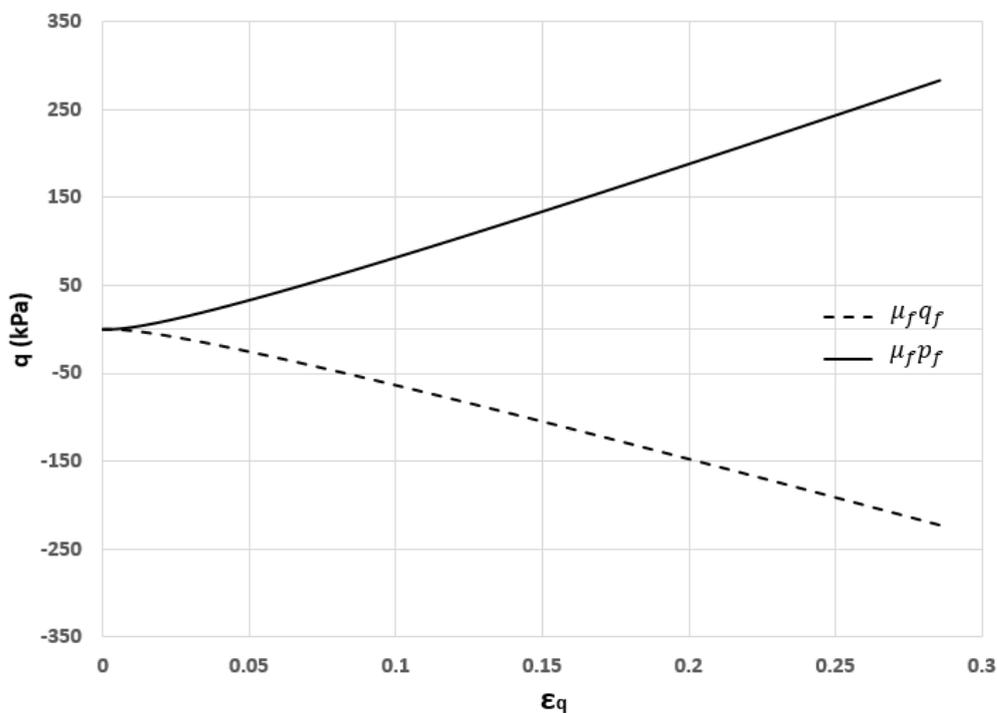


Figura 3.5 - Desenvolvimento típico das tensões nas fibras para ensaios de compressão Triaxial (Modificado de Diambra et al. 2013)

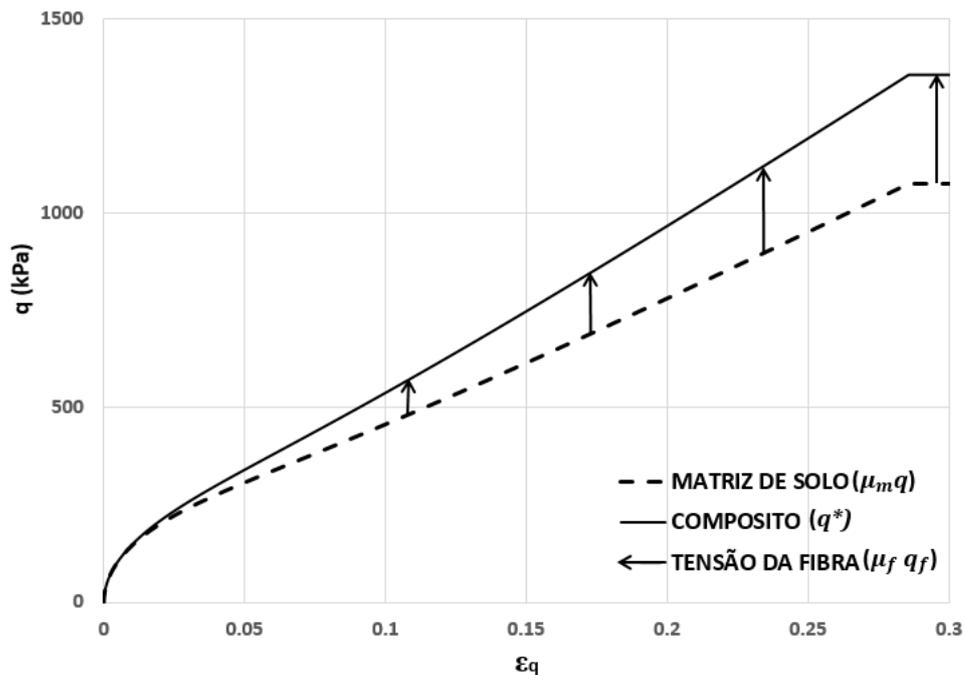


Figura 3.6 - Desenvolvimento típico da contribuição de resistência nas fibras e matriz de solo (Modificado de Diambra et al. 2013).

A figura 3.6 apresenta uma comparação entre o comportamento tensão-deformação do solo reforçado e da matriz do solo. Desses resultados, pode-se concluir que o solo experimenta um incremento de resistência devido ao incremento de confinamento dado pelas fibras no compósito, Diambra et al (2013). Porém, para grandes deformações a contribuição da tensão da fibra atinge seu máximo valor permissível e acontece o escorregamento entre as fibras e os grãos de solo ou “*pull-out*”. Depois de acontecer isto, as duas contribuições de incremento de tensão da fibra e do solo mantem-se constantes, assim como o estado de tensões do compósito.

## 4 Implementação do modelo constitutivo

A análise de materiais com comportamento elasto-plástico por elementos finitos é feita de forma incremental e iterativa. A cada estágio do processo de solução, incrementos de força são aplicados e os respectivos incrementos de deslocamento são calculados pela solução das equações de equilíbrio. As deformações e tensões são computadas nos pontos de integração de cada elemento usando as relações deformação–deslocamento e por uma lei elasto-plástica de tensão–deformação.

Caso ocorra a plastificação no material e um modelo de endurecimento isotrópico esteja sendo utilizado, a solução destas leis elasto-plásticas é obtida resolvendo-se um sistema de equações da forma:

$$\dot{\sigma} = D_{ep}(\sigma, h)\dot{\varepsilon} \quad (4.1)$$

$$\dot{h} = \dot{\varepsilon}_p \quad \text{ou} \quad \dot{h} = \dot{w}_p \quad (4.2)$$

Onde  $\dot{h}$  dependerá do parâmetro utilizado para representar o endurecimento, segundo o modelo constitutivo utilizado. Nestas expressões  $\sigma$  representa o vetor de tensão,  $\varepsilon$  o vetor de deformação total,  $h$  o parâmetro de endurecimento e  $D_{ep}$  a matriz elasto-plástica do material. O sinal de ponto acima das variáveis representa o incremento em relação a cada passo no qual a carga é aplicada.

### 4.1. Algoritmo do tipo explícito

Para o cálculo dos incrementos de tensão a partir dos incrementos de deformação impostos foi utilizado um algoritmo explícito. O processo para isto é o seguinte: inicialmente é aplicado um incremento de deformações, esta é considerada como elástica, calculando-se assim um incremento de tensão, como apresentado na equação (4.3).

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.3)$$

Após o cálculo do incremento de tensão, é atualizado o estado de tensões do material  $\sigma_{ij}^{n+1}$  a partir da tensão do passo anterior  $\sigma_{ij}^n$ .

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \dot{\sigma}_{ij} \quad (4.4)$$

O novo estado de tensões  $\sigma_{ij}^{n+1}$  deve ser avaliado com a finalidade de saber se ele encontra-se no espaço de tensões elásticos ou não, utilizando a função de escoamento. A equação (4.5) mostra as condições que devem ser cumpridos ao ter assumido a deformação como elástica.

$$f < 0 \quad \text{ou} \quad f = 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{d\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (4.5)$$

Se o estado de tensões  $\sigma_{ij}^{n+1}$  satisfaz as condições da equação (4.5), então os cálculos terminam e se retorna à equação (4.3). Se o estado de tensões calculado não satisfaz essas condições, então o material plastificou (comportamento elasto-plástico). Assim, é preciso atualizar ou corrigir o incremento de tensões, para isto, é preciso diferenciar a parcela de deformações elásticas das plásticas, essa última parcela deve ser calculada utilizando a lei de fluxo associada ou não associada dependendo do modelo constitutivo implementado.

O incremento de tensões corrigido  $\dot{\sigma}_{ij}^c$  é calculado subtraindo a parcela de deformações plásticas das deformações totais e utilizando a matriz elástica, outro jeito é multiplicando as deformações totais pela matriz elasto-plástica, vide equação (4.6).

$$\dot{\sigma}_{ij}^c = D_{ijkl}^e (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = D_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.6)$$

Uma vez obtido o incremento de tensão corrigido, o estado de tensão atual deve ser atualizado com a equação (4.4). Após o cálculo do estado de tensão, são atualizados os parâmetros de endurecimento ou variáveis dependentes, os quais serão utilizados no passo posterior.

Uma vez realizado a atualização do estado de tensão, pode-se utilizar um novo incremento de deformação igual ou de similar magnitude ao anterior,

equação (4.3), fazendo o teste de plasticidade e repetir esse processo até atingir o estado de ruptura ou até o nível de deformação desejado (deformação axial ou cisalhante), com a finalidade de obter a curva tensão-deformação. Uma consideração muito importante no momento de utilizar esse algoritmo é que os incrementos de deformações utilizadas devem ser o suficientemente pequenas, da ordem de  $10^{-5}$ , para poder utilizar o estado de tensões do passo anterior e os cálculos não divergirem. A figura 4.1 apresenta o algoritmo explícito geral implementado.

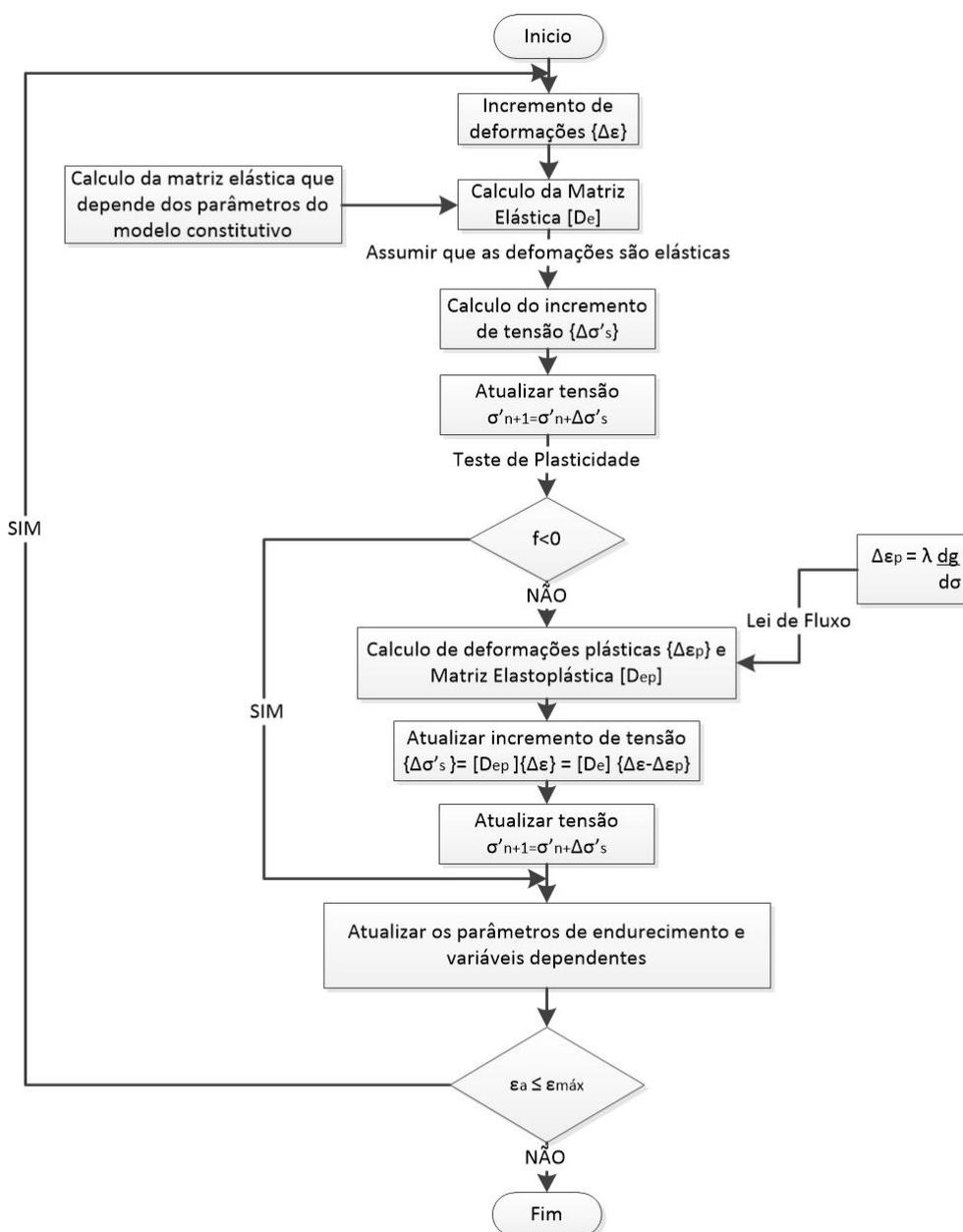


Figura 4.1 - Algoritmo geral de tipo explícito implementado

## 4.2. Validação do modelo implementado

A implementação dos modelos constitutivos do solo e do compósito (solo com fibra) foi composta por duas fases. Inicialmente, para a avaliação de cada modelo, foi desenvolvido um programa utilizando o *MATLAB*, já que ele permite a debugagem do algoritmo implementado, assim como a facilidade de armazenar os valores obtidos em vetores e matrizes. Esses vetores permitem ser utilizadas pelo usuário para fazer gráficos que permitem observar o comportamento das variáveis e comprovar se ele está seguindo a tendência do modelo constitutivo. Posteriormente, a implementação foi feita na linguagem de programação *FORTRAN* e foi compilado com o programa *PLATO*, para assim ser utilizado no *ABAQUS*, como será apresentado no capítulo 5.

Os modelos constitutivos implementados, como já foram mencionados para a matriz de solo, foram o Cam Clay Modificado e o modelo de Lade-Kim, e nos dois casos o comportamento da fibra foi posteriormente adicionado. As validações dos modelos implementados foram comparadas com programas comerciais, ensaios de laboratório de solo e solos com fibra apresentadas na literatura e nas referências bibliográficas.

### 4.2.1. Validação do modelo Cam Clay Modificado

No caso do modelo Cam Clay Modificado, a implementação realizada no programa *MATLAB* segue a mesma formulação utilizada pelo programa de elemento finitos *PLAXIS 2D*, para solos normalmente adensados. A utilização deste programa é importante para conferir se a implementação desenvolvida é satisfatória. Para isto, foi realizada a modelagem de um ensaio triaxial drenado no *PLAXIS 2D* sob condições axissimétricas, como é mostrado na figura 4.2a. As dimensões totais do modelo são de 2m x 1m e os elementos utilizados pelo *PLAXIS* são de forma triangular, ver figura 4.2b.

As condições de contorno para o modelo implementado são as seguintes:

- Na face esquerda (eixo de simetria), o deslocamento no eixo “x” não é permitido.

- Na face inferior, o deslocamento no eixo “y” não é permitido.

- O valor  $\sigma_3$  representa a tensão aplicada durante a etapa de confinamento.

Na etapa de cisalhamento pode ser imposto um carregamento vertical ou como no caso apresentado na figura 4.2a, impondo diretamente um recalque  $\delta$  ao corpo de prova.

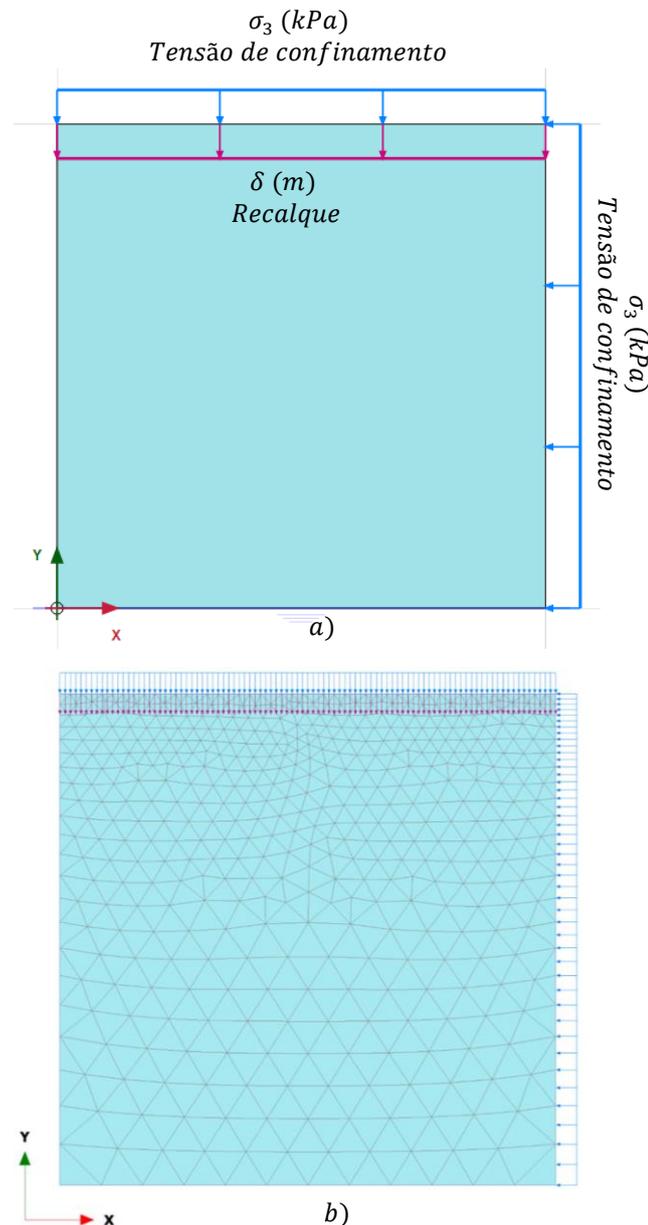


Figura 4.2 - a) Modelagem de ensaio triaxial drenado no *PLAXIS 2D*, b) Discretização do modelo em elementos triangulares (mesh)

Para avaliar se o comportamento da implementação do modelo Cam Clay Modificado foi satisfatório foram feitas modelagens com diferentes condições de contorno, uma delas considera variar as pressões de confinamento para verificar o

adequado desenvolvimento das tensões no solo. Por outro lado, além de variar as condições de contorno também foram variados os parâmetros do solo com valores consistentes na literatura. Cada um dos casos foi validado no algoritmo desenvolvido no programa *MATLAB*.

Com fins práticos, apresenta-se na tabela 4.1 os parâmetros de solo de um dos casos avaliados, esses parâmetros foram obtidos parcialmente da tese de doutorado de Diambra (2010) e serão utilizados posteriormente na avaliação do modelo constitutivo do compósito.

Tabela 4.1 - Parâmetros do solo - modelo Cam Clay Modificado

<b>Parâmetro</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>
$\lambda$	Inclinação da reta virgem	0.031
$\kappa$	Inclinação da linha elástica de carregamento/descarregamento	0.01
$\nu$	Coefficiente de Poisson	0.10
$e_0$	Índice de vazios inicial	0.999 / 0.991 / 0.980
$\phi'$	Ângulo de atrito	36°
$p_c$	Tensão de pré-adensamento	60 / 100 / 200 kPa

Os parâmetros do modelo, índice de vazios e tensão de pré-adensamento, foram utilizados dos ensaios triaxiais realizados por Diambra et al. (2013).

Nas figuras 4.3 e 4.4 são apresentadas as curvas tensão-deformação e deformação volumétrica para cada um dos casos apresentados na tabela 4.1, calculadas pelo algoritmo implementado e pelo programa *PLAXIS*.

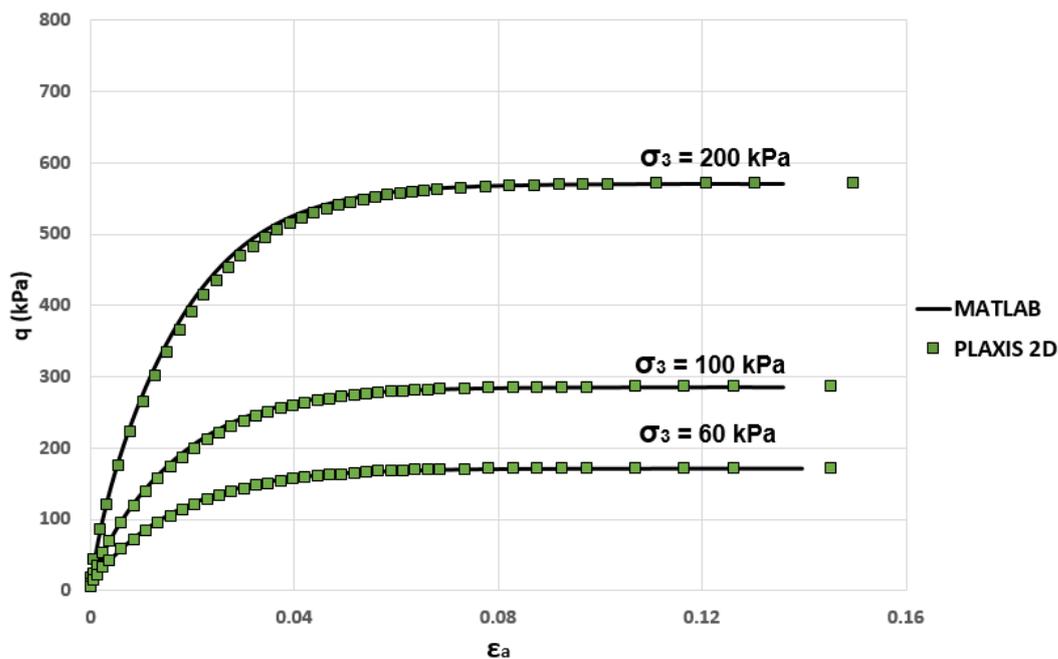


Figura 4.3 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da modelagem triaxial em *MATLAB* e *PLAXIS 2D*

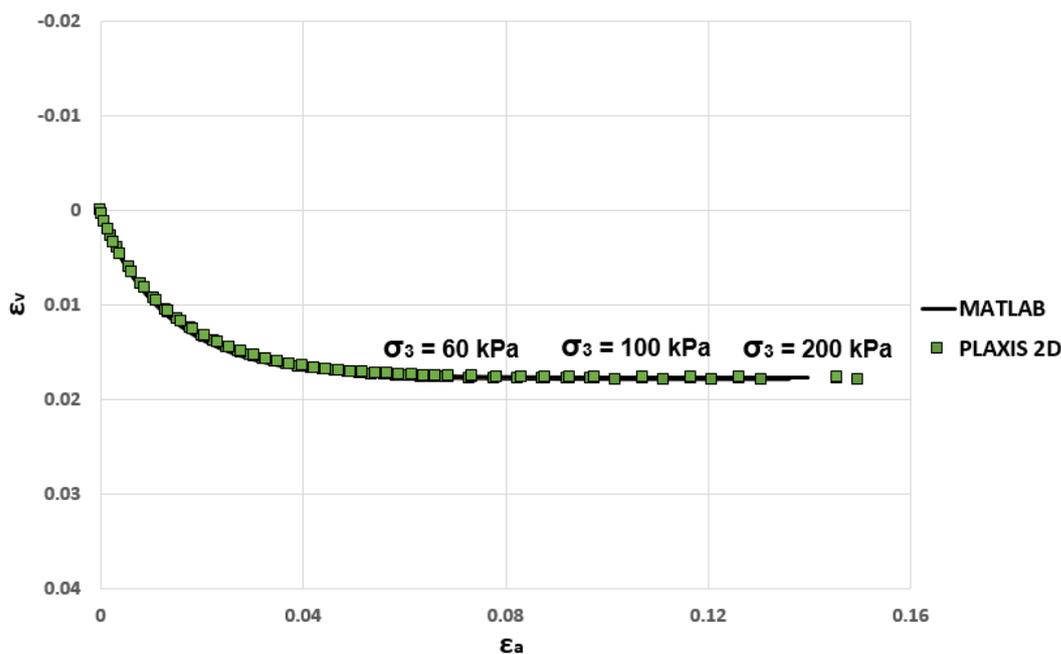


Figura 4.4 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da modelagem triaxial em *MATLAB* e *PLAXIS 2D*

Pode ser concluído, das figuras 4.3 e 4.4, que as curvas obtidas da implementação e os resultados obtidos do programa *PLAXIS* são concordantes, pelo qual o modelo Cam Clay Modificado implementado para um solo normalmente adensado considera-se válido.

#### 4.2.2. Validação do modelo Lade-Kim

No caso do modelo Lade-Kim o uso comercial dele é mais limitado e quase escasso, porém, existe muitas referências na literatura com implementações realizadas deste modelo para caracterizar ensaios triaxiais e problemas geotécnicos. De Melo (1995) apresenta na dissertação do mestrado “Utilização de um modelo elasto-plástico para a análise de deformações em solos” uma análise completa do modelo Lade-Kim, assim como comparações com ensaios de laboratório e estudo de otimização dos parâmetros do modelo para o seu melhor ajuste com as curvas tensão-deformação obtidas experimentalmente em laboratório. Por essa razão, são utilizadas as curvas apresentadas na referência para validar a implementação do modelo constitutivo.

Do mesmo modo que o modelo Cam Clay Modificado, para realizar a avaliação e validação do algoritmo implementado, são testados os diferentes tipos de materiais (parâmetros ajustados) e com as mesmas condições de confinamento apresentadas por De Melo (1995). Das comparações feitas das curvas da implementação com as curvas da referência, em todos os casos eles apresentaram comportamentos muito semelhantes.

Na tabela 4.2 são apresentados os parâmetros do material de um dos casos avaliados na referência, o tipo de solo é denominado como “material de fundação”.

Tabela 4.2 - Parâmetros do solo - modelo Lade-Kim

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
$K_{ur}$	2000.00
$n$	0.10
$\nu$	0.26
$\eta_1$	61.32
$m$	0.25
$\psi_2$	-2.88
$\mu$	2.29
$h$	1.08
$\alpha$	0.35
$C$	0.00094

Parâmetro	Valor
$P$	1.68

Nas figuras 4.5 e 4.6 são apresentados o comportamento tensão-deformação e deformação volumétrica do algoritmo implementado e as curvas obtidas da implementação feita por de Melo (1995).

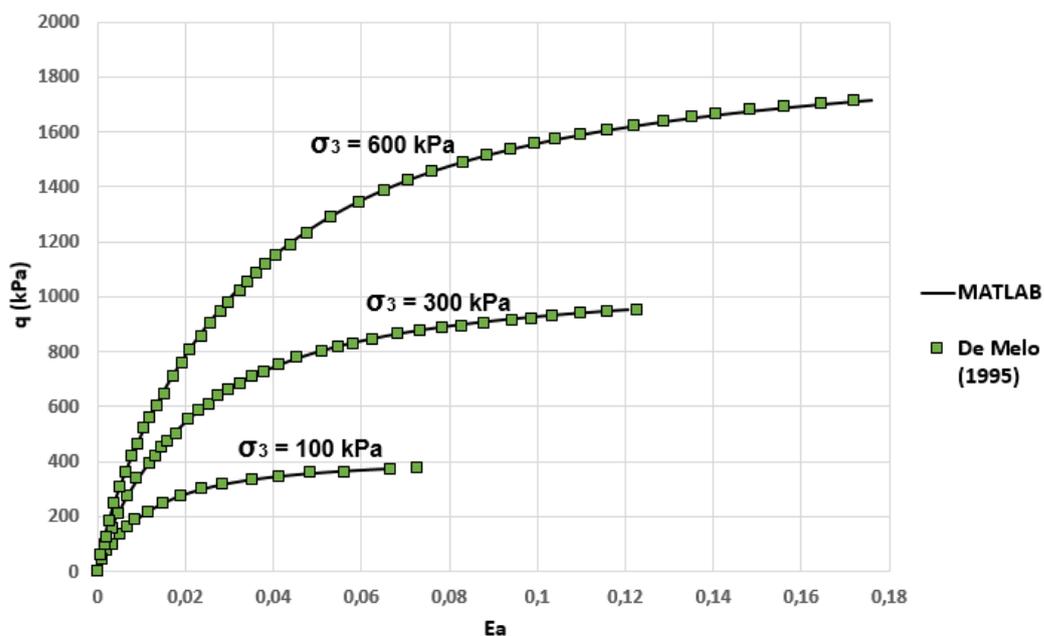


Figura 4.5: Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da modelagem triaxial em *MATLAB* e apresentado por De Melo (1995)

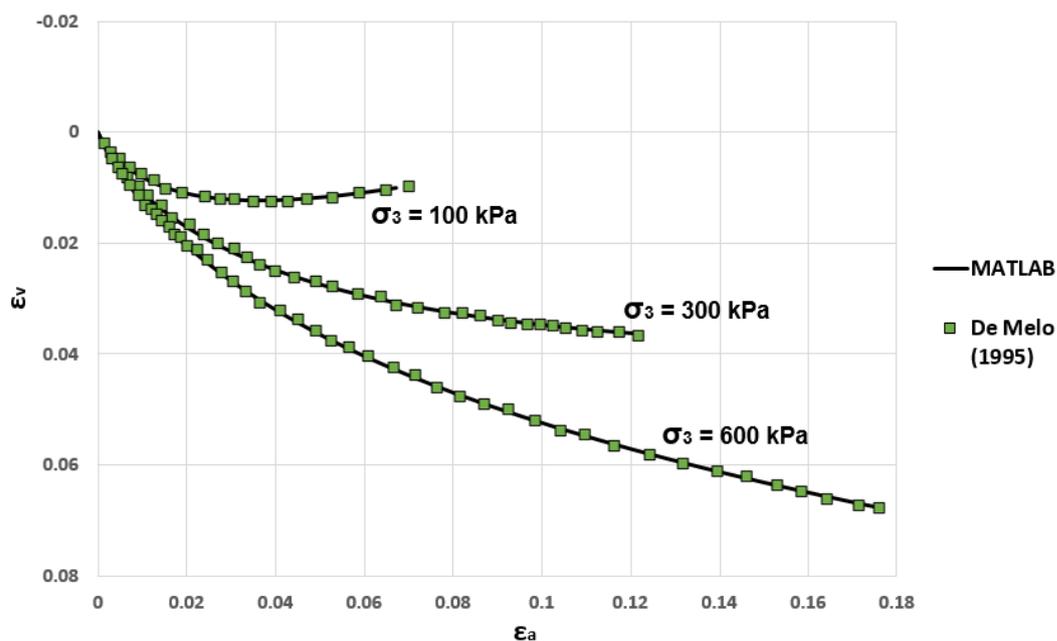


Figura 4.6: Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da modelagem triaxial em *MATLAB* e apresentado por De Melo (1995)

Das figuras 4.5 e 4.6, pode ser concluído que a implementação desenvolvida no *MATLAB* e as curvas apresentadas por De Melo (1995) são concordantes, pelo qual o modelo Lade-Kim implementado considera-se válido.

### **4.2.3. Validação do modelo do compósito**

Uma vez os modelos constitutivos da matriz de solo foram avaliados e validados, foi realizada a implementação da fibra para cada modelo constitutivo, os quais serão avaliadas e comparadas com as curvas tensão-deformação das simulações apresentadas por Diambra et al. (2013).

Diambra et al. (2013) utilizaram para a matriz de solo um modelo constitutivo de endurecimento cinemático cuja denominação é *Severn-Trend Sand*, o qual combina conceitos de estado crítico, critérios de resistência de Mohr Coulomb e critérios de plasticidade. Porém, uma das regras do modelo constitutivo proposto como já foi mencionado anteriormente, é que cada material respeita sua própria lei constitutiva, pelo qual optou-se por modelos constitutivos de endurecimento isotrópico (*Cam Clay Modificado* e *Lade-Kim*). Por essa razão podem existir algumas diferenças ao comparar as curvas tensão-deformação de Diambra et al. (2013) com as dessa dissertação.

Com a finalidade de obter o comportamento mais próximo das curvas tensão-deformação do compósito e de manter os parâmetros obtidos da referência, inicialmente será utilizado o modelo *Cam Clay Modificado*, cuja formulação utiliza parâmetros similares ao *Severn-Trend Sand*.

Os parâmetros do modelo constitutivo da matriz de solo (*Cam Clay Modificado*) foram apresentados na tabela 4.1. Adicionalmente, para a implementação no modelo do compósito, é necessária a adição do parâmetro da gravidade específica dos grãos do solo  $G_s$ , cujo valor é 2.65, e o índice de vazios do compósito uma vez terminada a etapa de confinamento. Esses últimos valores foram obtidos da referência para cada caso apresentada por Diambra et al. (2013); e as comparações estão desenvolvidas sob uma tensão de confinamento de 100 kPa e para níveis de deformação cisalhante máxima de 30%.

Na tabela 4.3 são apresentadas as propriedades mecânicas e geométricas de cada uma das fibras utilizadas na avaliação do comportamento do compósito. Os teores de fibra utilizados são 0% (sem reforço), 0.3%, 0.6% e 0.9% para as fibras tipo 1 e 3, e para a fibra tipo 2 os teores são 0%, 0.3%, 0.45% e 0.6%.

Tabela 4.3 - Parâmetros das fibras no compósito

<b>Parâmetro</b>	<b>Fibra 1</b>	<b>Fibra 2</b>	<b>Fibra 3</b>	<b>Unid</b>
$E_f$	900	2600	4000	MPa
$K_e$	0.45	0.34	0.08	-
$\nu_f$	3.27	4.80	2.40	-
$\alpha_{sf} / \delta_{sf}$	-	60 kPa/0°	4 kPa/11°	-
$l_f$	35	20	40	mm
$d_f$	0.1	0.030	0.12x1.45	mm
$G_f$	0.91	0.91	0.91	-
$A_{\theta\alpha}/B_{\theta\alpha}/n_{\theta\alpha}$	0/0.324/5	0/0.324/5	0/0.467/12	-

Nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9 são apresentadas as curvas tensão-deformação do solo reforçado com as fibras tipo 1, 2 e 3, respectivamente; assim como a superposição das curvas da implementação realizada e as curvas apresentadas por Diambra et al. (2013).

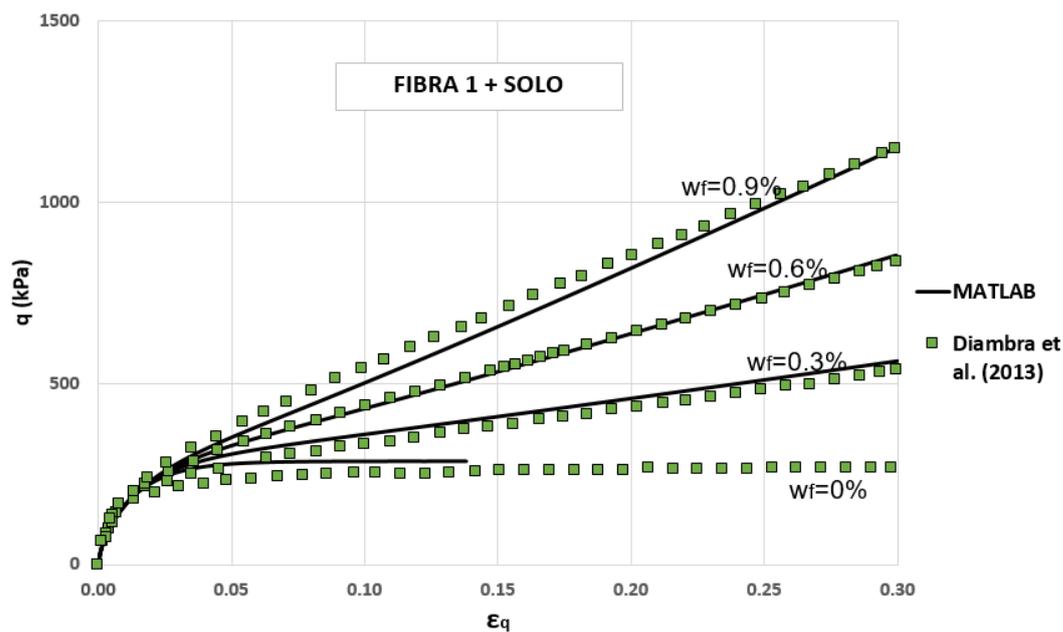


Figura 4.7 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).

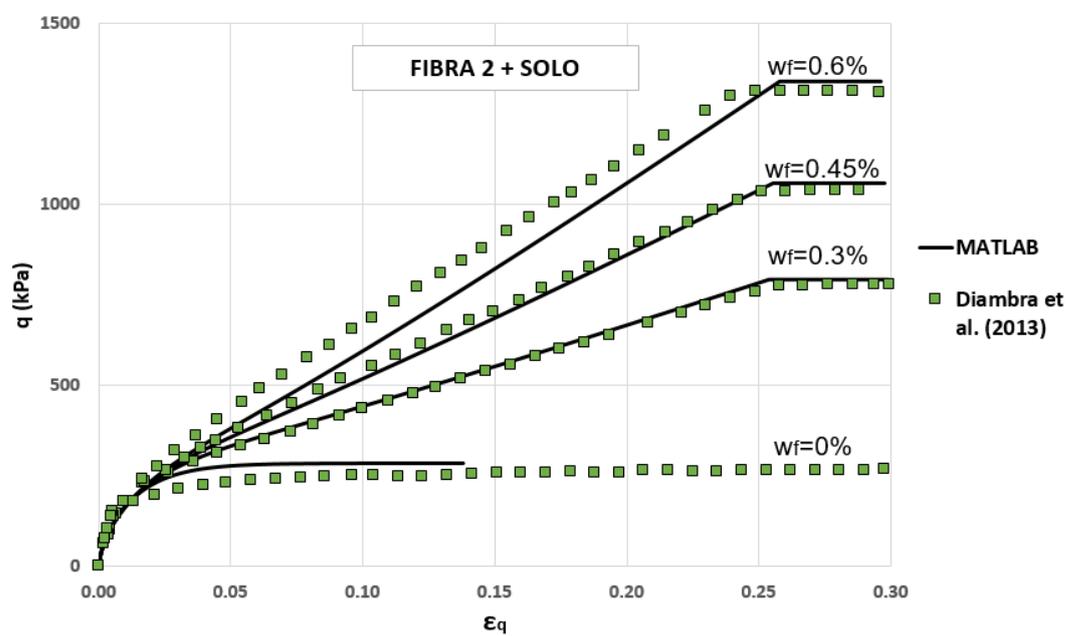


Figura 4.8 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).

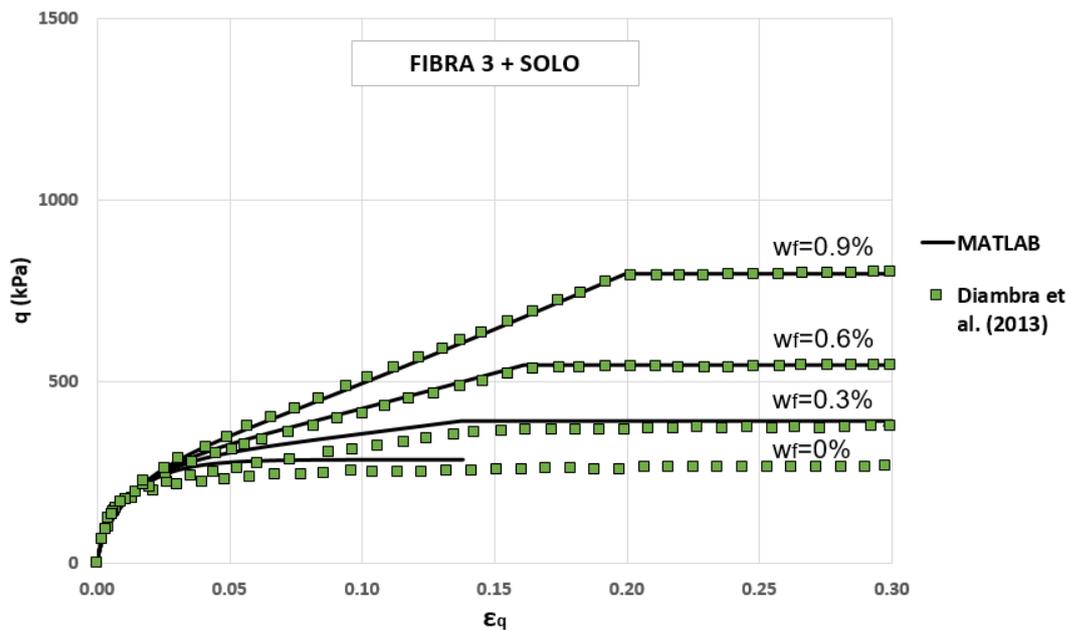


Figura 4.9 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* (Cam Clay Modificado com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).

Das figuras pode ser concluído que a implementação desenvolvida no *MATLAB* e as curvas apresentadas por Diambra et al. (2013) são concordantes, então, considera-se que o modelo implementado do compósito é válido.

No caso do solo sem fibra, de acordo com os parâmetros utilizados ele atinge a ruptura antes de uma deformação de cisalhamento de 15%, porém ao ser reforçado a matriz de solo não atinge a ruptura.

Em geral, o desenvolvimento da curva tensão-deformação do compósito para os três tipos de fibra é consistente. Porém, no caso da fibra 2 ele se afasta relativamente do comportamento para baixos níveis de deformação, mas enquanto a deformação cisalhante for incrementada ele consegue atingir os valores esperados. A razão pela qual isto pode acontecer é devido a que o modelo constitutivo implementado é diferente ao utilizado por Diambra et al. (2013).

Com a finalidade de aproximar melhor o comportamento de um solo granular é adicionado o comportamento da fibra no modelo de Lade-Kim; podendo ser utilizado qualquer outro modelo, sempre que sejam respeitadas as hipóteses.

Com a finalidade de avaliar o comportamento do compósito com o modelo Lade-Kim para a matriz de solo, é utilizada a fibra tipo 1 com os mesmos teores de fibra apresentados na figura 4.7. As propriedades da fibra tipo 1 foram apresentadas na tabela 4.3. Esta avaliação procura concluir se a implementação com um modelo diferente é viável ou não. Obter parâmetros equivalentes para a matriz de solo não faz parte dessa pesquisa, porém, é importante para a comparação das curvas tensão-deformação. Na tabela 4.4 são apresentados os parâmetros do modelo Lade-Kim ajustados. Do mesmo modo que o modelo Cam Clay Modificado, deve ser considerado o valor da gravidade específica do solo e o índice de vazios ao final da etapa de confinamento.

Tabela 4.4 - Parâmetros do solo - modelo Lade-Kim (Ajustados)

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
$K_{ur}$	2500.00
$n$	0.80
$\nu$	0.10
$\eta_1$	36
$m$	0.16
$\psi_2$	-3.25
$\mu$	2.38
$h$	0.5
$\alpha$	0.6
$C$	0.00025
$P$	1.6

Na figura 4.10 são apresentadas as superposições das curvas tensão-deformação do solo misturado com a fibra tipo 1.

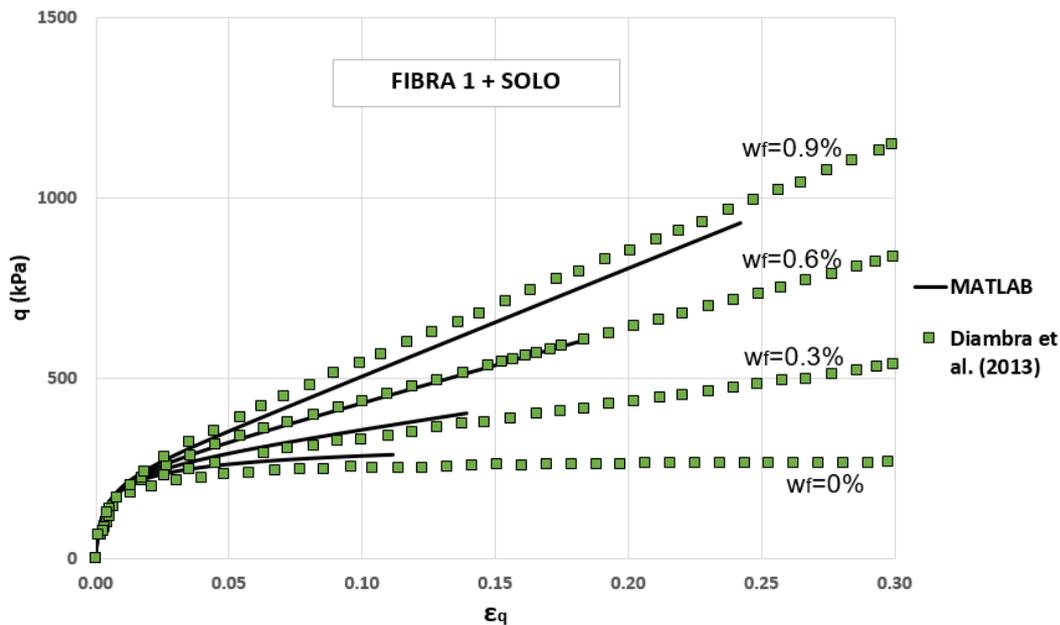


Figura 4.10 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* (Lade-Kim com fibra) e apresentado por Diambra et al. (2013).

De acordo aos parâmetros utilizados, as curvas tensão-deformação apresentam um comportamento similar e válido; porém, na implementação do modelo Lade-Kim, a matriz de solo atinge o estado de ruptura para níveis de deformação menores. Ao mesmo tempo, pode-se observar da figura 4.10 que enquanto maior é o teor de fibra o estado de ruptura é atingido para níveis de deformação maiores, isto mostra como a contribuição das fibras no compósito aumenta a resistência da matriz de solo e do compósito, evitando atingir facilmente o estado de ruptura e tornando-o mais resistente como foi descrito no item 3.4 e na figura 3.4. É importante definir que o ajuste dos parâmetros não foi realizado mediante um retroanálise ou algum algoritmo de otimização, mas por mudanças dos parâmetros até que as curvas apresentem valores de resistência similares.

### 4.3. Avaliação do modelo constitutivo com ensaios de laboratório

A avaliação do modelo constitutivo implementado é realizada mediante a comparação das curvas tensão-deformação apresentadas nas dissertações de mestrado de Casagrande (2001) e de Senez (2016). As curvas foram obtidas a partir de ensaios triaxiais drenados utilizando compósitos de solo com fibra sintética, polipropileno e polietileno.

As curvas geradas nessa dissertação utilizam o modelo Lade-Kim para o comportamento do solo sem reforço. Os parâmetros para caracterizar o comportamento do solo sem reforço foram testados até obter uma boa aproximação com as curvas dos ensaios. As propriedades das fibras foram obtidas das referências e as propriedades que não estão disponíveis foram assumidas para representar adequadamente o comportamento do compósito. Estas propriedades podem ser confirmadas posteriormente com ensaios de laboratório, porém, deve-se utilizar o mesmo tipo de solo e fibra.

Casagrande (2001) estudou o comportamento de um solo residual arenosiltoso reforçado com fibras de polipropileno, mediante ensaios triaxiais drenados a fim de estudar o comportamento em termos de tensão-deformação-resistência. Foram escolhidos os ensaios para o solo sem reforço para tensões de confinamento de 60, 100 e 200 kPa. Para solo com reforço as tensões de confinamento foram de 60, 100, 200, 300 e 400 kPa.

Senez (2016) estudou o comportamento de uma areia pura reforçada com dois tipos de fibras PET, de comprimentos distintos (1.4 dtex com 33 mm e 3.3 dtex com 56 mm). As tensões de confinamento utilizadas para as amostras sem e com reforço para os dois tipos de fibra foram de 50, 100 e 150 kPa.

Na tabela 4.5 são apresentados os parâmetros de Lade-Kim ajustados para os dois tipos de solo sem reforço. Na tabela 4.6 são apresentados os parâmetros das fibras utilizadas por cada autor. No caso da distribuição da fibra para os dois casos, foi utilizada a distribuição para a fibra tipo 3 apresentada por Diambra et al. (2013) a qual foi apresentada na tabela 4.3. Essa distribuição obedece ao tipo de preparação das amostras mediante camadas de compactação, orientação preferencialmente horizontal. O teor da fibra em todos os casos foi de 0.5% do peso seco do solo.

Tabela 4.5 - Parâmetros do solo - Lade-Kim (Casagrande, 2001; Senez, 2016)

Parâmetro	Casagrande(2001)	Senez (2016)
$K_{ur}$	2500.00	2000.00
$n$	0.50	0.50
$\nu$	0.30	0.30
$\eta_1$	30	30
$m$	0.12	0.16
$\psi_2$	-3.00	-3.20
$\mu$	1.90	2.35
$h$	0.35	0.50
$\alpha$	0.50	0.60
$C$	0.00033	0.0009
$P$	1.40	1.60

Tabela 4.6 - Parâmetros da fibra no compósito (Casagrande, 2001; Senez, 2016)

Parâmetro	Casagrande(2001)	Senez (2016)		Unid
	Fibra polipropileno	Fibra PET 1.4dtex	Fibra PET 3.3 dtex	
$E_f$	2300	2800	2800	MPa
$K_e$	0.29	0.40	0.18	-
$\nu_f$	3.00	4.50	2.00	-
$a_{sf} / \delta_{sf}$	20 kPa / 0°	2.2 kPa/0.5°	5.2 kPa/0°	-
$l_f$	24	38	56	mm
$d_f$	0.023	0.0098	0.023	mm
$G_f$	0.91	0.91	0.91	-
$A_{\theta\alpha} / B_{\theta\alpha} / n_{\theta\alpha}$	0/0.467/12	0/0.467/12	0/0.467/12	-

As figuras 4.11 e 4.12 apresentam as curvas obtidas da implementação e dos ensaios de laboratório realizados por Casagrande (2001). Por outro lado, as figuras 4.13 a 4.16 mostram a comparação das curvas da implementação e as obtidas de laboratório por Senez (2016), as duas primeiras pertencem as fibras PET tipo 1.4 dtex e as outras duas ao tipo 3.3 dtex.

## FIBRA POLIPROPILENO

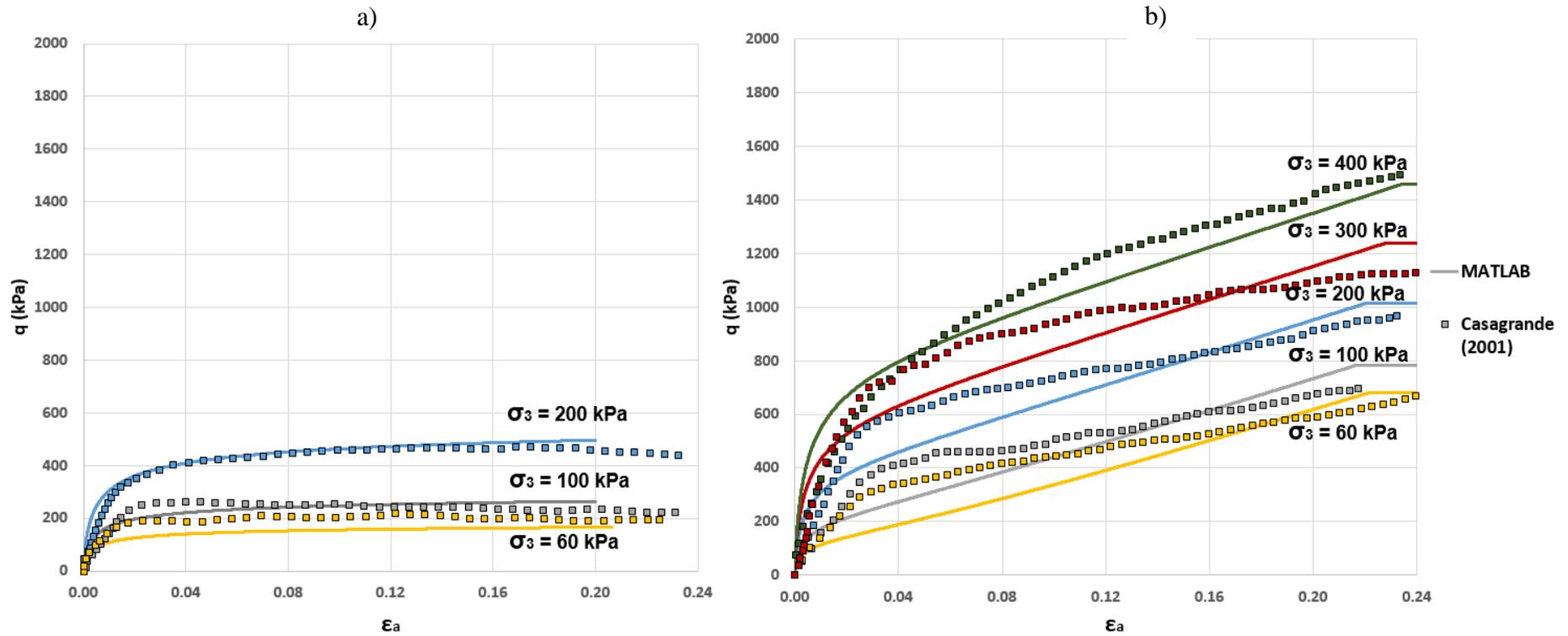


Figura 4.11 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Casagrande (2001) a) Sem reforço; b) Com reforço

### Fibra Polipropileno

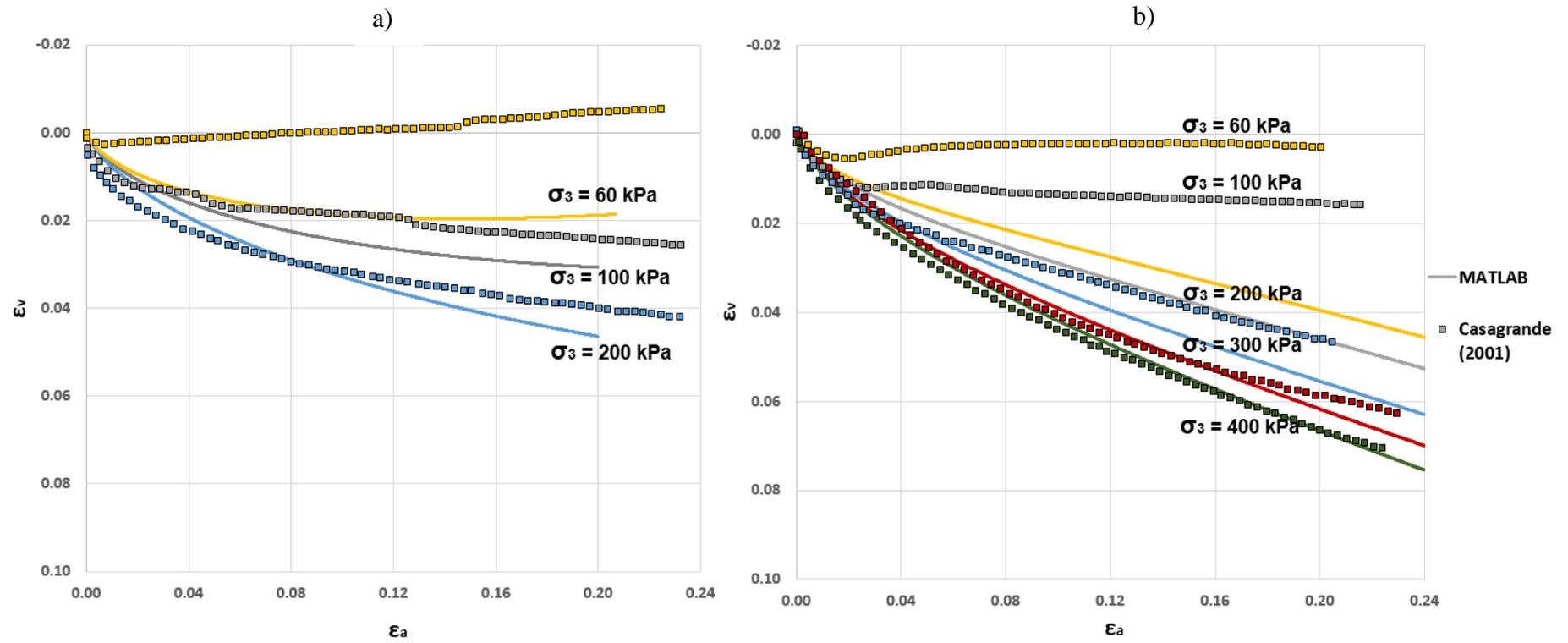


Figura 4.12 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Casagrande (2001) a) Sem reforço; b) Com reforço

## Fibra PET - 1.4 dtex

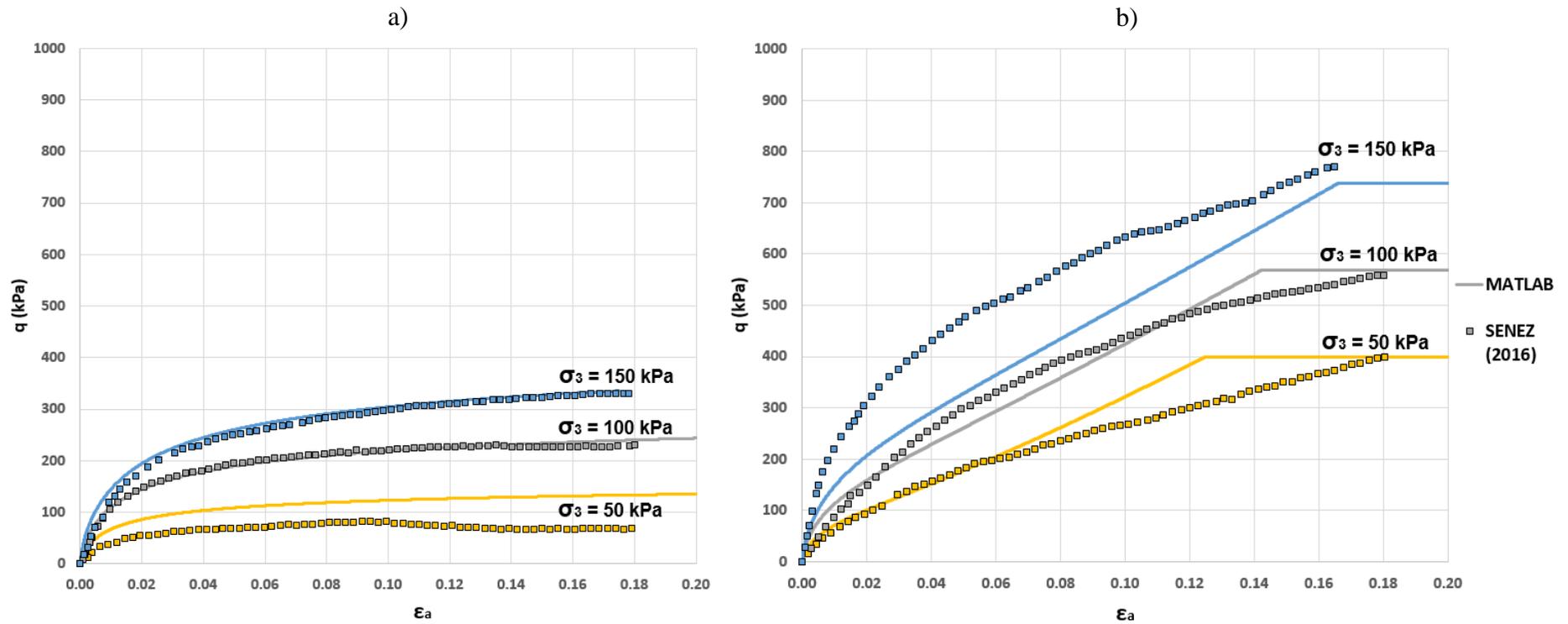


Figura 4.13 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a) Sem reforço; b) Com reforço

## Fibra PET - 1.4 dtex

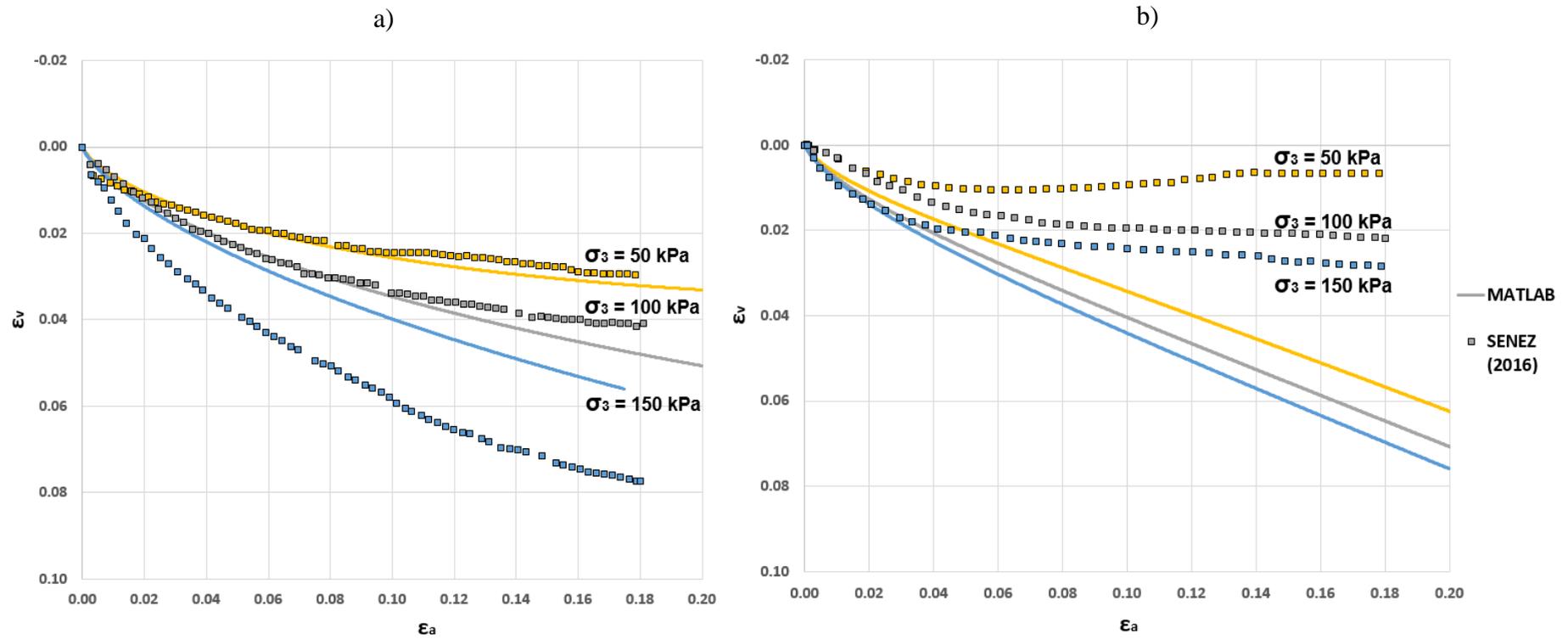


Figura 4.14 Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a) Sem reforço; b) Com reforço

## Fibra PET - 3.3 dtex

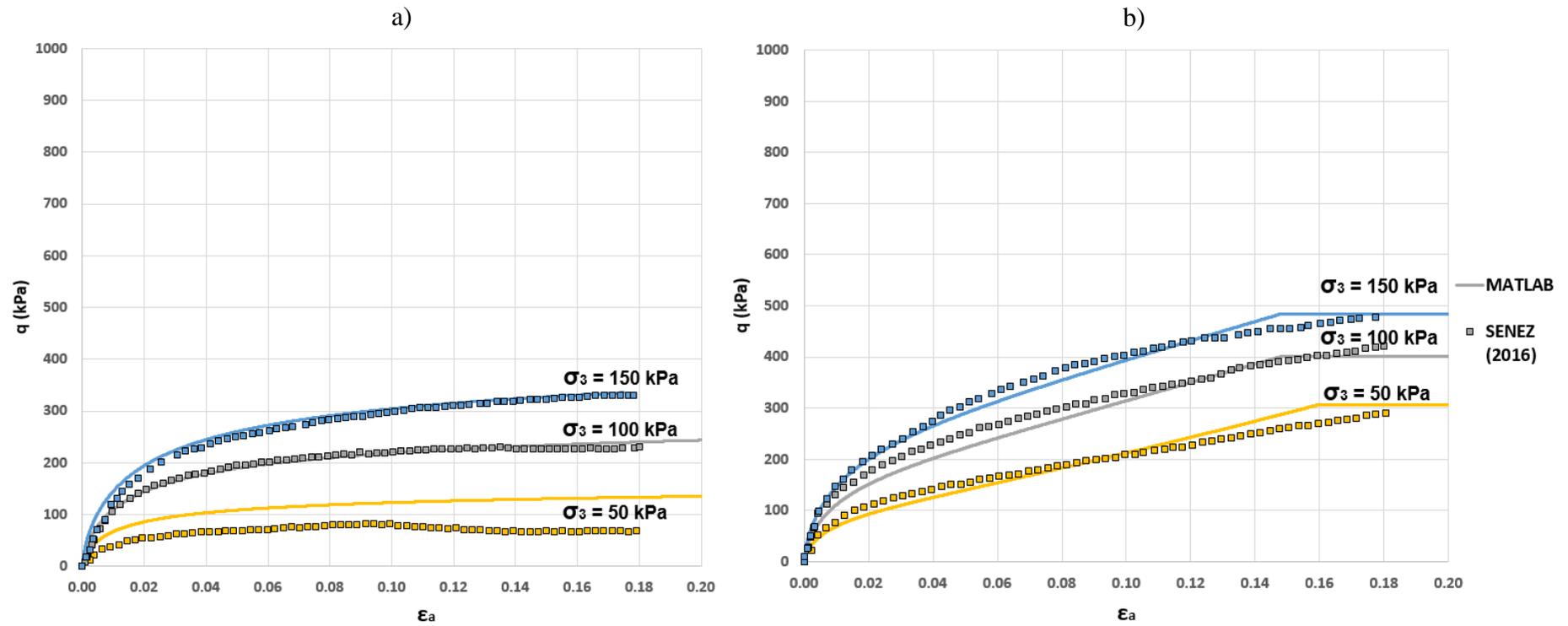


Figura 4.15 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a) Sem reforço; b) Com reforço

## Fibra PET - 3.3 dtex

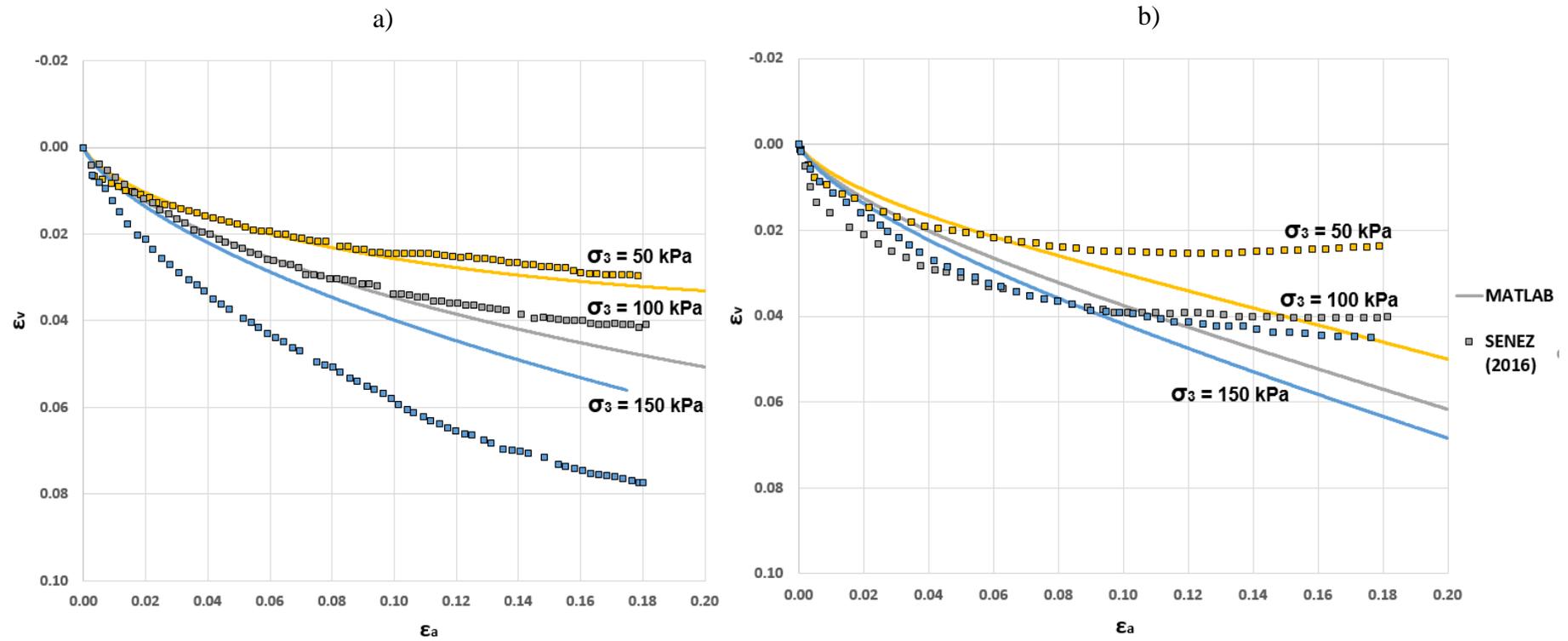


Figura 4.16 - Comparação das curvas deformação axial-deformação volumétrica obtidas da implementação e as apresentadas por Senez (2016) a) Sem reforço; b) Com reforço

Das comparações feitas com os ensaios triaxiais apresentados por Casagrande (2001), conclui-se das figuras 4.11 e 4.12 que o ajuste feito para o solo sem reforço é satisfatório, tendo uma diferença na curva de deformação volumétrica para uma tensão de confinamento de 60 kPa. No caso do solo reforçado, os parâmetros utilizados procuraram manter uma aproximação em todas as curvas tensão-deformação e de variação volumétrica. Na figura 4.12b pode-se observar que para uma tensão confinante de 60 kPa e 100 kPa, as curvas não conseguem se aproximar aos ensaios de laboratório, essas diferenças são devidas a que o solo reforçado apresenta uma rigidez maior no início do ensaio

Das comparações feitas com os ensaios triaxiais apresentados por Senez (2016), o ajuste realizado para o solo sem reforço considera-se satisfatório. Porém, nos casos das curvas tensão-deformação dos compósitos existem algumas diferenças importantes. No caso da fibra PET tipo 1.4 dtex as diferenças são muito notórias, figuras 4.13 e 4.14, devido a que o comportamento do compósito se afasta do comportamento do solo sem reforço desde níveis de deformação muito pequenos, o que não pode ser representado pelo modelo implementado. De acordo aos diferentes testes feitos com o modelo, pode-se observar que a contribuição da fibra sob condições triaxiais começa a ser notória para níveis de deformação entre 2 e 3%, para depois manter uma tendência quase linear. Em contraste, a fibra PET tipo 3.3 dtex se ajusta adequadamente com o modelo implementado, figuras 4.15 e 4.16, já que o comportamento do compósito apresenta similitudes com as considerações do modelo.

O comportamento volumétrico obtido dos ensaios apresentados por Senez (2016) concluem que a inclusão da fibra no compósito torna a amostra dilatante, uma das razões para isto ter acontecido em laboratório pode ser que para tensões de confinamento baixas a amostra ficou em condição pré-adensada por conta dos esforços aplicados durante a compactação. Segundo os modelos implementados em condições normalmente adensadas, o comportamento volumétrico do compósito é mais compressível devido ao empacotamento que gera a existência das fibras no compósito. Porém, esse comportamento depende do modelo constitutivo escolhido para a matriz de solo e de como ele interage com a fibra. Nesse sentido é importante mencionar que o comportamento volumétrico de

ensaios de laboratório de compósitos na literatura é muito disperso, pelo qual modelos constitutivos que aproximem melhor esse comportamento são necessários.

## 5

### Implementação em um programa de elementos finitos

Os modelos constitutivos Cam Clay Modificado, Lade-Kim e do compósito utilizando o algoritmo do tipo explícito foram implementados no programa de elementos finitos *ABAQUS*. Para isto foi utilizada a opção que este programa oferece ao incluir leis constitutivas através de uma sub-rotina mediante a linguagem de programação Fortran. Esta sub-rotina é denominada por *UMAT* (sub-rotina do usuário para definir o comportamento mecânico de um material).

O programa *ABAQUS* permite ao usuário apenas escrever o código do modelo constitutivo, mas o compilamento e a linkagem do código são executados pelo próprio programa. A sub-rotina é acionada pelo *ABAQUS* com o fornecimento das variáveis utilizadas no modelo constitutivo e as condições de contorno. Essas variáveis são processadas pela sub-rotina em cada ponto de integração do elemento, as quais uma vez atualizadas são retransmitidas ao *ABAQUS*. Esta operação é feita para cada incremento de força ou deslocamento imposta pelo usuário.

As variáveis ou parâmetros utilizados foram a tensão de confinamento, imposição de deslocamento, a matriz constitutiva do elemento, o vetor *PROPS* (cujos valores são os parâmetros do modelo constitutivo implementado na sub-rotina *UMAT*) e o vetor *STATEV*. O vetor *STATEV* permite que qualquer variável criada no código seja armazenada e utilizada no próximo passo. Esse vetor é muito útil quando se utiliza um modelo elasto-plástico cujo parâmetro de endurecimento precisa ser atualizado a cada incremento de deformação ou no caso em que tenham que ser armazenadas variáveis do passo anterior para atualizar os parâmetros iniciais (algoritmo explícito). Fornecidas estas variáveis, o algoritmo explícito pode corrigir as tensões e calcular a matriz constitutiva do elemento.

Apesar da inclusão de sub-rotinas oferecer certa flexibilidade na análise de materiais, deve-se observar que o *ABAQUS* não disponibiliza a função “debugger”

da sub-rotina implementada, pelo qual esta deve ser testada fora do *ABAQUS* mediante um compilador, nesse caso foi utilizado o compilador *PLATO*.

A sub-rotina *UMAT* apresenta um processo de comunicação onde é necessário introduzir primeiro o título desta sub-rotina como segue:

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV),
1 DDSDE(NTENS, NTENS), DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS),
2 STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS), TIME(2), PREDEF(1), DPRED(1),
3 PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3), DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)

```

Este é o título que deve ser incluído em todas as sub-rotinas *UMAT*, a qual descreve que informação será fornecida pelo *ABAQUS* ao início de incremento e quais informações devem ser enviadas de volta ao programa pela sub-rotina. O grupo de variáveis, mencionado após o nome da sub-rotina, é a informação obtida do *ABAQUS* e também as informações retornadas ao programa após cada incremento.

A sub-rotina *UMAT* disponibiliza muitas variáveis e nem todas serão utilizadas para as implementações desenvolvidas. As variáveis utilizadas, na sub-rotina *UMAT*, para a implementação dos modelos constitutivos serão definidas a seguir:

*NDI* – É o número de componentes nas direções principais ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) no ponto de integração. No caso axissimétrico tem o valor de 3.

*NSHR* – É o numero das tensões cisalhantes ( $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ ) no ponto de integração. No caso axissimétrico o valor é 1.

*NTENS* – É quantidade de componentes do vetor de tensões e deformações (*NDI* + *SHR*), tem o valor de 4 para condições axissimétricas.

Essas três constantes são fornecidas pelo *ABAQUS* de acordo as condições de modelagem feita na sua interface, pelo qual com a finalidade de utilizar a

mesma codificação geral para todos os casos, evitando erros, a utilização dela é ideal.

*STRESS (NTENS)* – esse vetor é fornecido como o tensor de tensão no início do incremento e deve ser atualizado no final da sub-rotina. Dependendo do tipo de modelo (estado plano de tensões, axissimétrico ou 3D), ele pode conter até 6 componentes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ .

*STATEV (NSTATEV)* – esse vetor contém as variáveis dependentes da solução. Estes são fornecidos pelo *ABAQUS* no início da sub-rotina como os valores no início do incremento devendo ser retornados como os valores atualizados, se preciso, no final do incremento. Em outras palavras, esses são os valores que queremos atualizar após cada incremento. É uma variável muito importante no contexto da comunicação com o *ABAQUS*. Com essas variáveis, estamos permitindo que os parâmetros de endurecimento ou tensões do passo anterior sejam atualizados ou não, se for necessário. Nas implementações desenvolvidas nessa dissertação utilizou-se até 9 variáveis dependentes para o adequado desenvolvimento da sub-rotina. Na figura 5.1, as variáveis dependentes são ativadas na interface do *ABAQUS*.

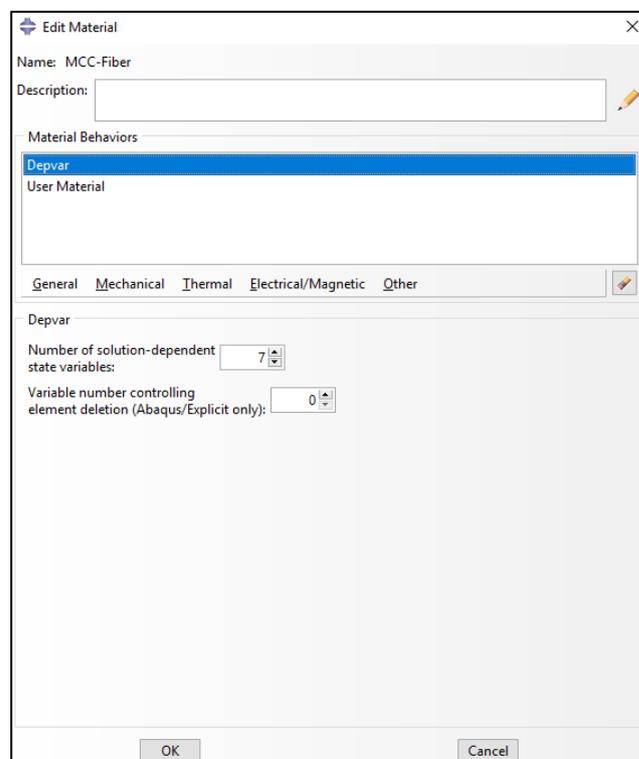


Figura 5.1 - Definição dos *STATEV* do modelo implementado

*NSTATEV* – É o número de variáveis com solução dependente, as quais estão associadas com o modelo constitutivo do material. Descreve quantas variáveis de solução dependente deveriam ser enviadas ao *ABAQUS* no final da sub-rotina do passo anterior e entregues pelo programa no início do próximo passo.

*DDSDDE (NTENS, NTENS)* – É a matriz Jacobiana do modelo constitutivo, que relaciona  $\Delta\sigma$  definido como os incrementos de tensão e  $\Delta\varepsilon$ , incrementos de deformação. A matriz Jacobiana define as mudanças do componente de tensão no final da sub-rotina *UMAT* gerada pelo incremento de deformações. A composição geral da matriz Jacobiano pode ser descrita segundo a equação (5.1).

$$J = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\gamma_{23}} \\ \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\gamma_{23}} \\ \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\gamma_{23}} \\ \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\gamma_{23}} \\ \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\tau_{13}}{\Delta\gamma_{23}} \\ \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\varepsilon_1} & \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\varepsilon_2} & \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\varepsilon_3} & \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\gamma_{12}} & \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\gamma_{13}} & \frac{\Delta\tau_{23}}{\Delta\gamma_{23}} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Porém, a equação (5.1) pode se reduzir mais no caso de um modelo isotrópico com condições axissimétricas de acordo à equação (5.2).

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\sigma_3 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\varepsilon_3 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Onde as variáveis “D” (Componentes da matriz Jacobiana) são calculados segundo o modelo constitutivo utilizado para o material.

*STRAN (NTENS)* – É o vetor que armazena as tensões totais no modelo e as componentes ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ ) e é sub-ministrada pelo *ABAQUS* ao início de cada incremento.

$DSTRAN$  ( $NTENS$ ) – É o vetor de incremento de deformações o qual é fornecido pelo *ABAQUS*. Ele é sub-ministrado ao início de cada passo para o cálculo do incremento de tensão.

A figura 5.2 mostra explicitamente o que representam os vetores  $STRESS$ ,  $STRAN$  e  $DSTRAN$ . No incremento ( $i$ ), o *ABAQUS* proporciona um estado de tensões inicial  $STRESS(i)$  e de deformações totais  $STRAN(i)$ , desde o incremento anterior, assim também fornece o incremento de deformação  $DSTRAN(i)$ . Ao final do incremento, a sub-rotina deve entregar o estado de de tensões atualizado  $STRESS(i+1)$  e alternativamente o estado de deformações total  $STRAN(i+1)$ .

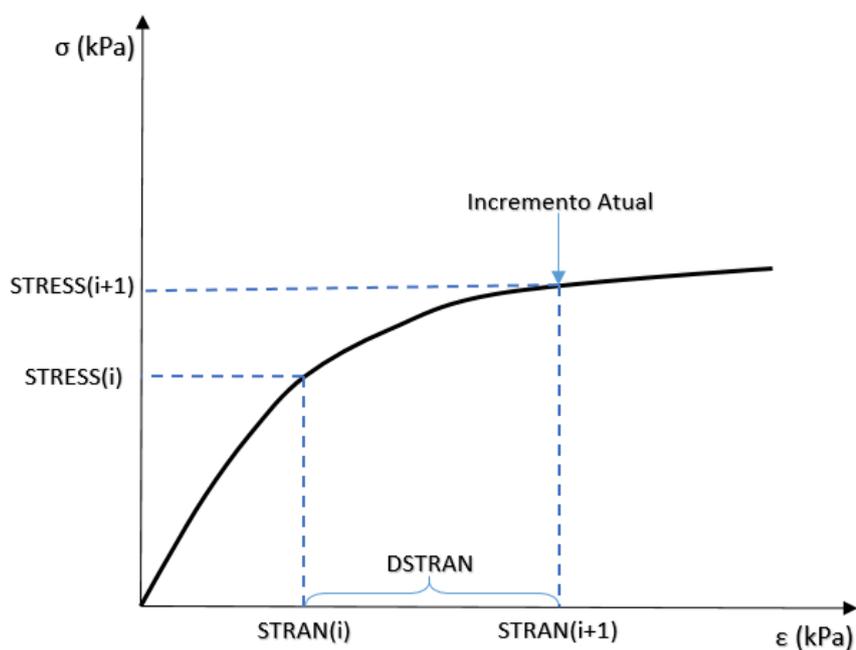


Figura 5.2: Esquema da solução no *UMAT*

$NPROPS$  – É o número de constantes definidas associadas com o uso do material. Ele descreve quantos parâmetros tem o modelo constitutivo a ser implementado. No caso, do modelo Cam Clay Modificado ele precisa de 6 variáveis, Lade-Kim de 11 variáveis e os compósitos deles precisam de 16 e 22 variáveis, respectivamente.

A figura 5.3 mostra os parâmetros do material que são introduzidas mediante a opção *General / User Material*.

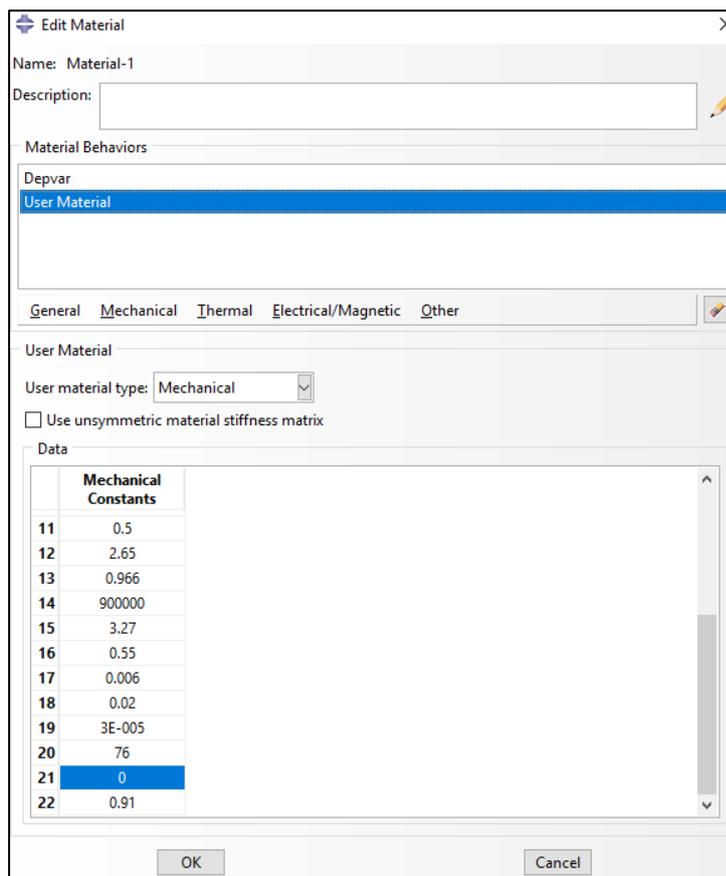


Figura 5.3 - Valores das variáveis do modelo constitutivo a ser implementado

Todo o processo começa na interface do *ABAQUS*, onde a geometria do modelo tem que ser modelada e todas as propriedades do material são definidas no programa principal do *ABAQUS* como constantes mecânicas. Cada programa principal do *ABAQUS* coloca esses valores na sub-rotina *UMAT* mediante o vetor *PROPS*, tais como, módulo de Young, módulo de cisalhamento, coeficiente de Poisson, parâmetros de resistência, etc; além das condições de contorno e cargas aplicadas. Ele inclui os grupos compostos assim como o sistema de coordenadas. Em seguida, as condições de limite e carga para cada etapa devem ser fornecidas.

Como último passo, é necessário estabelecer a conexão entre a sub-rotina *ABAQUS* e *UMAT*. Deve ser definido que o *ABAQUS* deve usar uma sub-rotina definida em cada incremento durante o processo de solução do modelo, esta deve ser definida no menu “*Job*”.

A implementação feita na linguagem *FORTRAN* para ser utilizada na sub-rotina *UMAT*, segue a mesma lógica da apresentada no capítulo 4, na figura 4.1. Porém, deve ser modificada com a finalidade que o *ABAQUS* consiga interpretar adequadamente o código implementado.

A principal diferença é que o *ABAQUS* utiliza a sub-rotina completa implementada por incremento de deformação, para cada ponto de integração de cada elemento do modelo, mas a implementação no programa *MATLAB* utiliza o código só uma vez (como se fosse somente um ponto de integração) e dentro dele vai realizando os cálculos segundo às condições impostas. Nesse sentido, o código geral deve permitir a inicialização de cada parâmetro dependente ou independente em qualquer incremento, aqui enfatiza a importância do uso do vetor  $STATEV(i)$ , já que os modelos constitutivos implementados precisam guardar os valores do passo anterior para sua posterior utilização. A figura 5.4 apresenta o algoritmo utilizado para a implementação da sub-rotina.

Com a finalidade de validar os modelos constitutivos implementados mediante a sub-rotina *UMAT*, serão modelados ensaios triaxiais no *ABAQUS*, comparando as curvas tensão-deformação com as apresentadas no capítulo 4. No caso dos modelos Cam Clay Modificado e Lade-Kim sem fibra, eles serão comparados com uma curva das figuras 4.3 e 4.5, respectivamente. No caso do comportamento tensão-deformação dos compósitos Cam Clay Modificado e Lade-Kim com fibra, eles serão comparados com uma curva das figuras 4.7 e 4.10, respectivamente.

## **5.1. Modelagem de ensaio triaxial drenado**

A modelagem feita para simular um ensaio triaxial drenado considera condições axissimétricas. As dimensões utilizadas para o corpo de prova são de dimensões de 2m x 1m, ver figura 5.5.

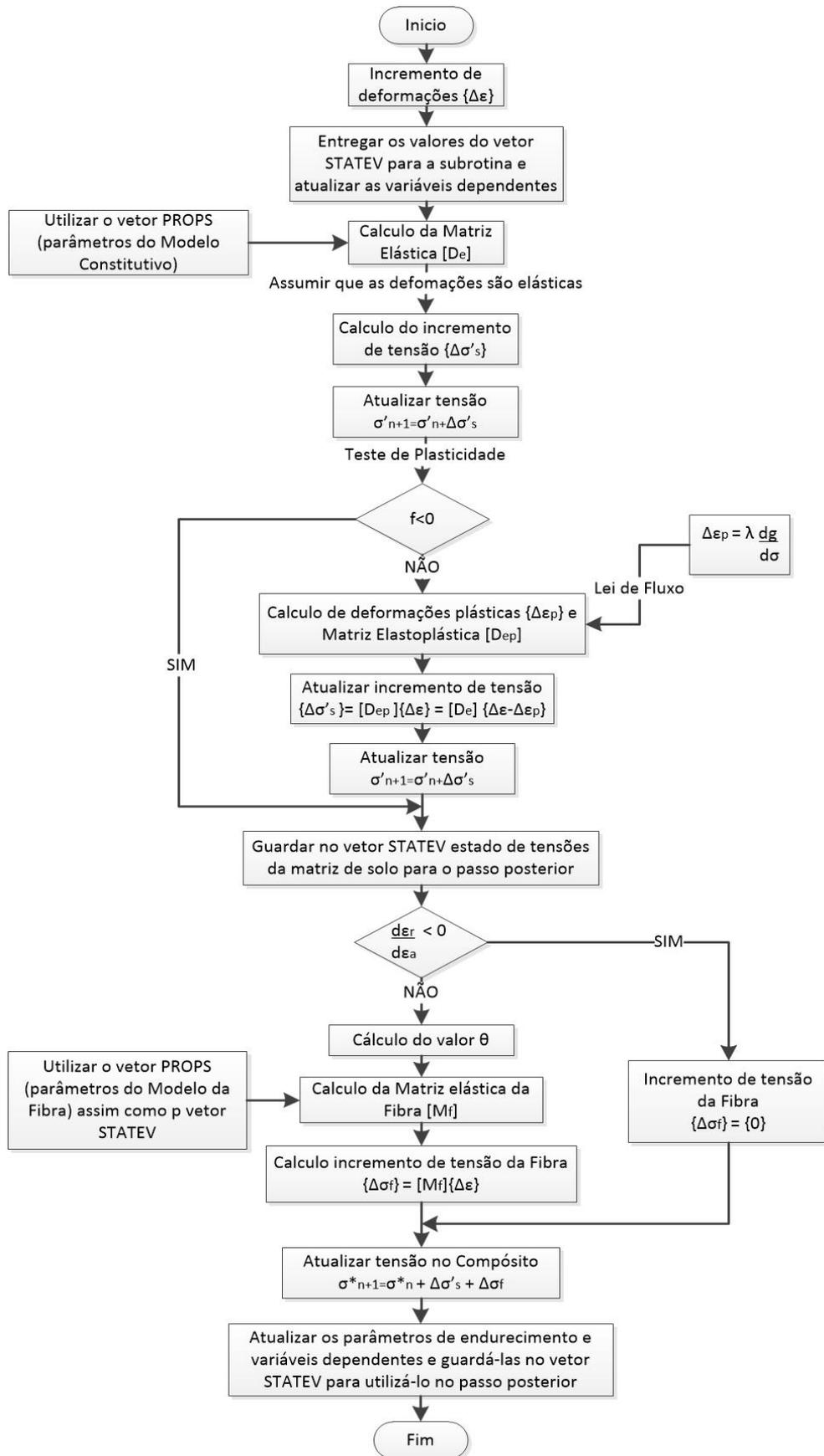


Figura 5.4 - Algoritmo da sub-rotina UMAT

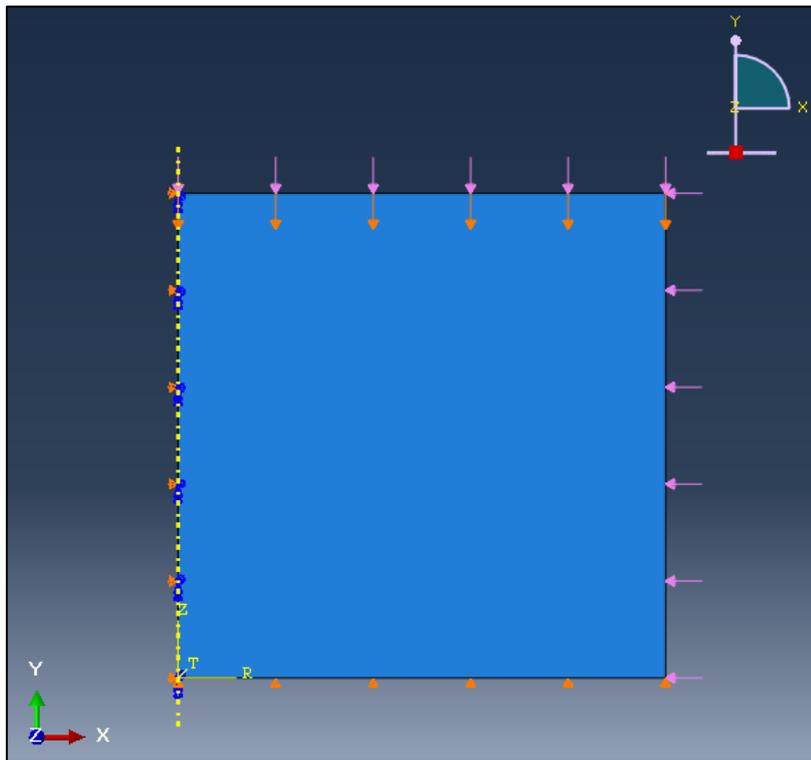


Figura 5.5 - Modelagem do corpo para ensaio triaxial

As condições de contorno para o modelo implementado são as seguintes:

- Na face esquerda (eixo de simetria), o deslocamento no eixo “x” não é permitido (triângulos laranja).
- Na face inferior, o deslocamento no eixo “y” não é permitido (triângulos laranjas).
- A tensão de confinamento em todos os casos é de 100 kPa e é aplicada nas faces superior e direita (setas roxas), essas faces estão livres para serem deslocadas.
- Como já foi mencionado anteriormente, é possível aplicar uma tensão desviadora no corpo de prova ou diretamente um deslocamento, na modelagem foi aplicado um deslocamento de 0.20 m (setas laranjas para baixo).

O deslocamento de 0.20 m é imposto para atingir um nível de deformação axial de 20%. No caso de modelar um ensaio triaxial com as dimensões reais, deve-se considerar que o deslocamento tem que ser proporcional as dimensões do modelo, porém as curvas tensão-deformação devem ser as mesmas.

Outro aspecto importante para a modelagem é definir os *steps* da modelagem:

- *Step 1 (Initial)*: É aplicada uma tensão interna no corpo de prova, para isto é utilizada a opção “*predefined fields*”, a função desta tensão é se equilibrar com a tensão de confinamento aplicada no seguinte *step* (100 kPa).

- *Step 2 (Confinamento)*: É aplicada a tensão de confinamento (100 kPa), até atingir o equilíbrio do corpo de prova, utiliza-se a opção “*loads*”. Adicionalmente podem ser aplicadas as condições de contorno nas faces esquerda e inferior mediante a opção “*BCs*”, estas podem ser aplicada no *step* anterior e propagadas a esse *step*.

- *Step 3 (Cisalhamento)*: É imposto o deslocamento na face superior e começa a etapa de cisalhamento no corpo de prova.

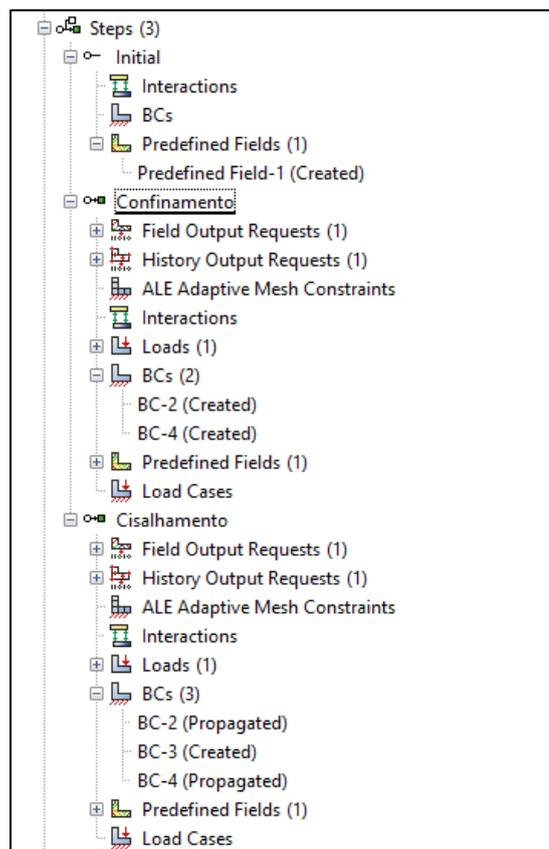


Figura 5.6 - Etapas da modelagem (*steps*)

Uma vez definidas as condições mencionadas, é possível utilizar as sub-rotinas *UMAT* dos modelos implementados.

### 5.1.1. Sub-rotina *UMAT* – Cam Clay Modificado

O modelo Cam Clay Modificado no *ABAQUS* foi testado utilizando os parâmetros apresentados na tabela 4.1. Na figura 5.7 e 5.8 são apresentados esquematicamente os estados de tensões e deformações no início e final do cisalhamento. Esse modelo utiliza 6 variáveis no vetor *PROPS*.

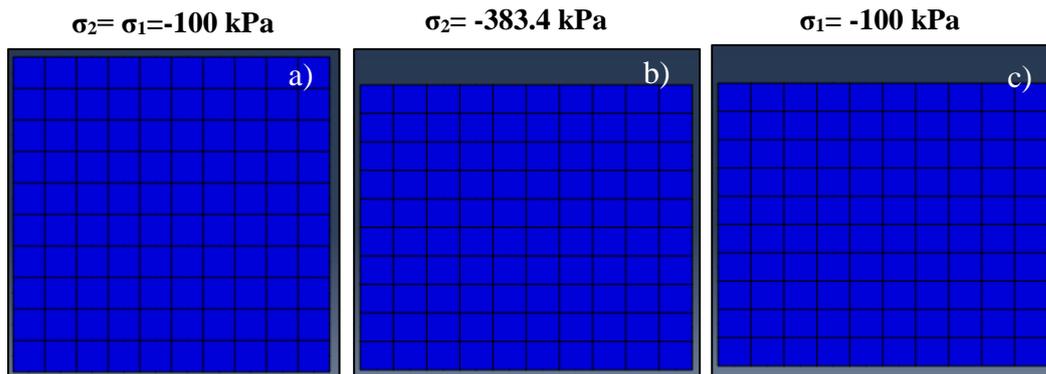


Figura 5.7 - a) tensões axial e radial após o confinamento, b) tensão axial no final do ensaio, c) tensão radial no final do ensaio

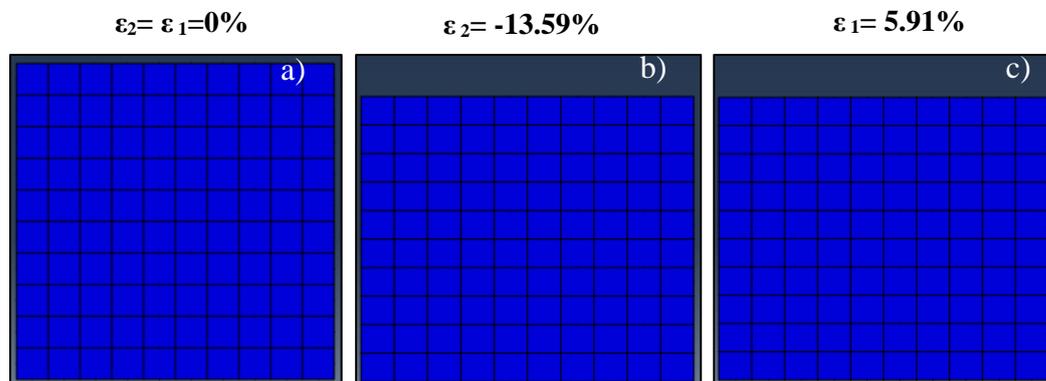


Figura 5.8 - a) deformações axial e radial após o confinamento, b) deformação axial no final do ensaio, c) deformação radial no final do ensaio

As curvas tensão-deformação da implementação feita no *MATLAB* e a obtida mediante a implementação da sub-rotina *UMAT* são apresentadas na figura 5.9. É importante dizer que devido as condições de contorno todos os pontos de integração dos elementos apresentam os mesmos valores, pelo qual não é necessário fazer uma discretização detalhada para essas condições de contorno.

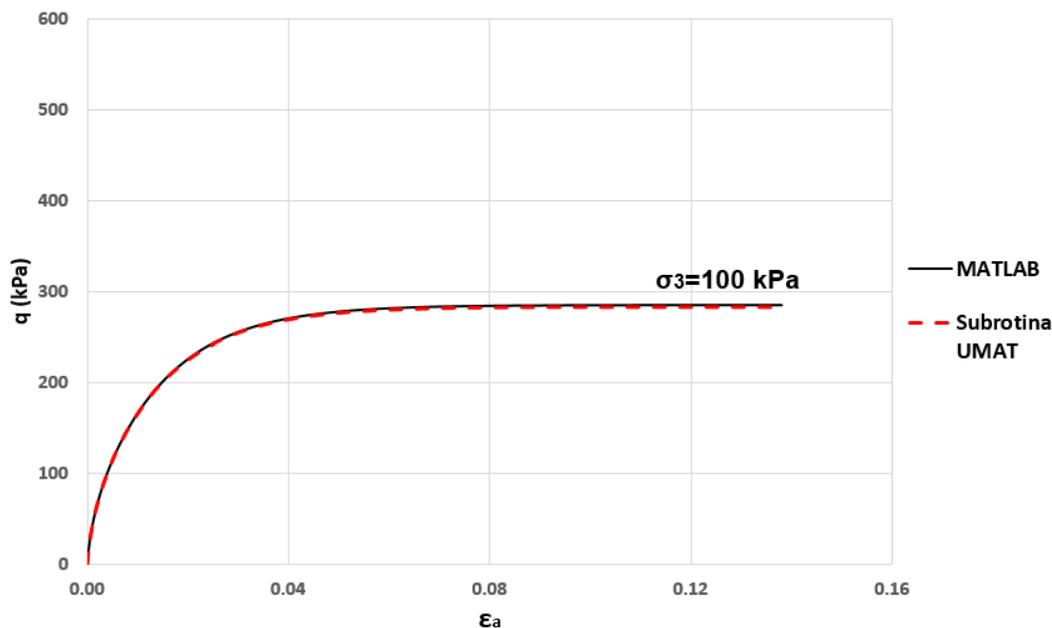


Figura 5.9 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* e da sub-rotina *UMAT* implementada no *ABAQUS* (Cam Clay Modificado)

### 5.1.2. Sub-rotina *UMAT* – Lade-Kim

O modelo Lade-Kim no *ABAQUS* foi testado utilizando os parâmetros apresentados na tabela 4.4. A curva tensão-deformação da implementação feita no *MATLAB* e a obtida mediante a implementação da sub-rotina *UMAT* são apresentadas na figura 5.10.

A discretização dessa modelagem foi de só um elemento, isto com o objetivo de otimizar tempo de processamento, ainda utilizar mais de um elemento torna a implementação instável devido as formulações do modelo. Esse modelo utiliza 11 variáveis no vetor *PROPS*.

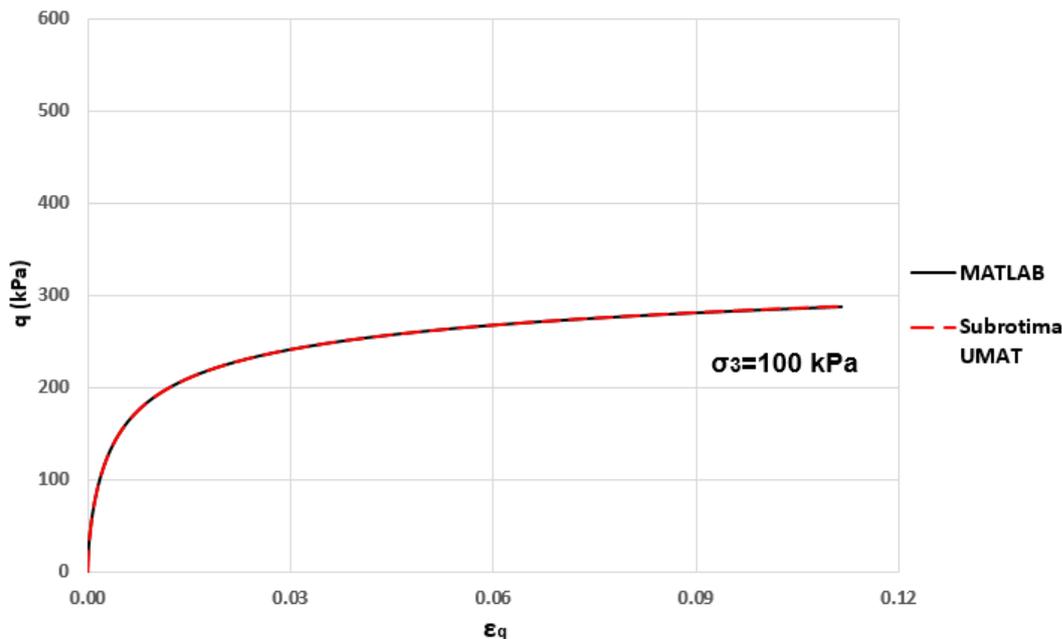


Figura 5.10 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* e da sub-rotina *UMAT* implementada no *ABAQUS* (Lade-Kim)

### 5.1.3. Sub-rotina *UMAT* – Cam Clay Modificado com fibra

Para a implementação do modelo Cam Clay Modificado com fibra, optou-se por utilizar níveis de deformação axial não maiores de 20%.

O tipo de fibra escolhido para essa modelagem foi o tipo 2 cujas propriedades foram representadas na tabela 4.3. Esse modelo utiliza 16 variáveis no vetor *PROPS*, no caso de avaliar o comportamento da fibra com *pull-out* são utilizadas todas as variáveis, caso contrario utiliza-se 12 variáveis.

Dos parâmetros no vetor *PROPS*, 6 delas são próprias da matriz de solo (incluindo a gravidade específica dos grãos), 1 é o índice de vazios do compósito depois do confinamento e os outros valores são próprias da fibra.

Algumas das variáveis utilizadas nessa sub-rotina para realizar os cálculos, a quais não são inseridos no vetor *PROPS*, são os parâmetros que definem a orientação das fibras na equação (3.18),  $A_{\theta\alpha}/B_{\theta\alpha}/n_{\theta\alpha}$ . A equação (3.29), apresenta a matriz 2x2 dependente da orientação das fibras e dos limites de integração, as componentes dessa matriz apresentam expressões de integração complexas, pelo qual na sub-rotina são utilizadas essas expressões já desenvolvidas. Conseqüentemente, a sub-rotina *UMAT* deve considerar os valores

que representam as orientações das fibras no compósito e substituí-las caso as orientações sejam diferentes às apresentadas nessa dissertação.

As curvas tensão-deformação da implementação feita no *MATLAB* e a obtida mediante a implementação da sub-rotina *UMAT* são apresentadas na figura 5.11.

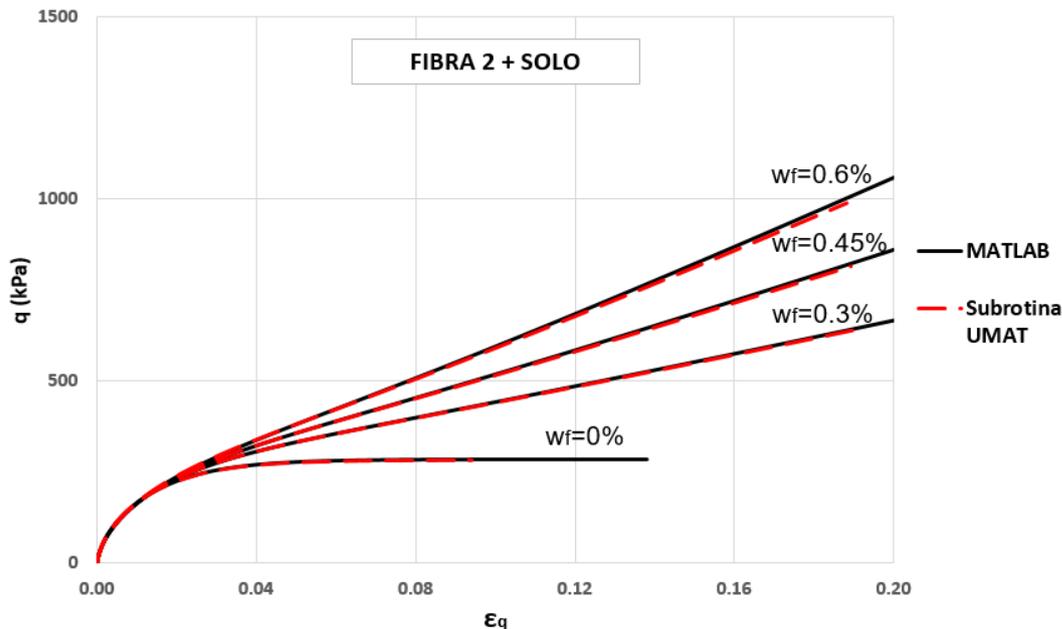


Figura 5.11 - Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* e da sub-rotina *UMAT* implementada no *ABAQUS* (Cam Clay Modificado com fibra)

#### 5.1.4. Sub-rotina *UMAT* – Lade-Kim com fibra

Para a implementação do modelo Lade-Kim com fibra, optou-se por utilizar níveis de deformação axial não maiores de 20%.

O tipo de fibra escolhido para essa modelagem foi o tipo 1 cujas propriedades foram representadas na tabela 4.3. Esse modelo utiliza 21 variáveis no vetor *PROPS*, caso não seja avaliado o *pull-out* são utilizadas 18 variáveis.

Dos parâmetros no vetor *PROPS*, 12 delas são próprias da matriz de solo (incluindo a gravidade específica dos grãos), 1 delas representa o índice de vazios do compósito depois da etapa de confinamento e os outros valores são próprias da fibra. As considerações realizadas para as orientações das fibras são as mesmas que o modelo anterior.

As curvas tensão-deformação da implementação feita no *MATLAB* e a obtida mediante a implementação da sub-rotina *UMAT* são apresentadas na figura 5.11.

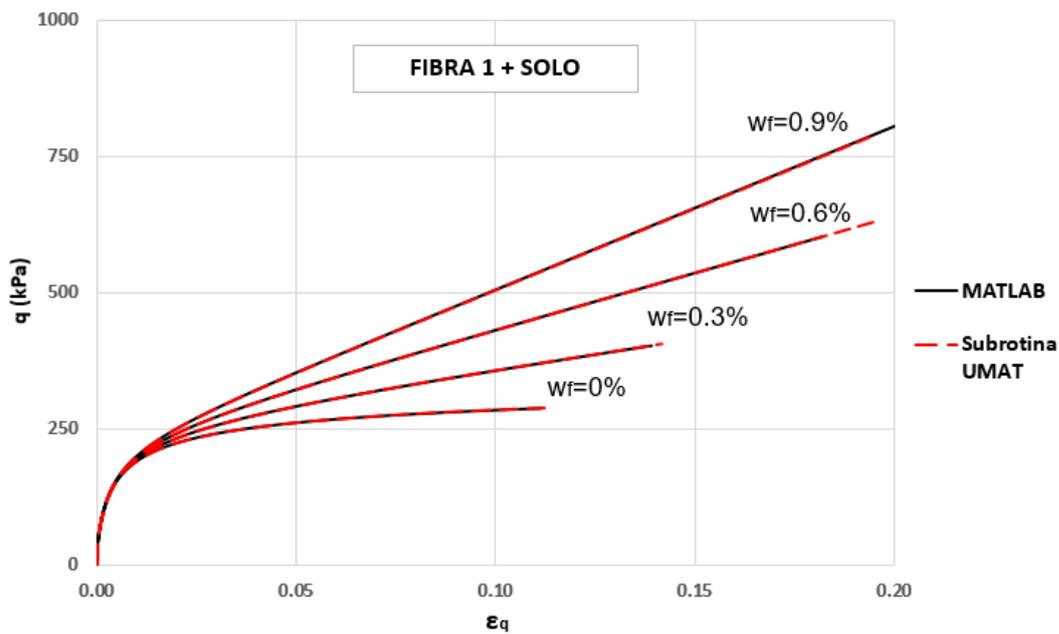


Figura 5.12: Comparação das curvas tensão-deformação obtidas no *MATLAB* e da sub-rotina *UMAT* implementada no *ABAQUS* (Lade-Kim com fibra)

Pode ser concluído das modelagens em geral, que a implementação realizada para os modelos mediante a sub-rotina *UMAT* no programa de elementos finitos *ABAQUS*, foi satisfatório.

## 6 Conclusões e sugestões

Este trabalho tratou da implementação de um modelo constitutivo de solo (areia) com fibra e sua avaliação mediante a comparação das curvas tensão-deformação do código implementado com resultados existentes na literatura. Considerando que uma das condições desse modelo é que cada componente do compósito segue sua própria lei constitutiva, mas interagem entre elas, foram avaliadas as implementações dos modelos constitutivos Cam Clay Modificado e Lade-Kim sem e com fibra.

Foram implementados e validados os modelos Cam Clay Modificado e Lade-Kim, no programa *MATLAB*. Os resultados foram validados mediante a comparação das curvas tensão-deformação, com os resultados obtidos do programa Plaxis 2D e com as curvas tensão-deformação apresentadas na literatura, respectivamente.

Foram implementados e validados com grande exatidão o comportamento das curvas tensão-deformação dos modelos com fibra, no programa *MATLAB*, as quais foram avaliadas e verificadas utilizando as curvas tensão-deformação apresentadas por Diambra et al. (2013).

De acordo as comparações feitas das curvas tensão-deformação com ensaios de laboratório existentes na literatura, o modelo constitutivo implementado consegue aproximar-se com boa acurácia; porém, é preciso realizar ensaios de *pull-out* da fibra para verificar se os valores utilizados são válidos.

Os ajustes feitos para os ensaios de laboratório da literatura apresentam, em alguns casos, diferenças consideráveis e em outros uma boa aproximação. É importante utilizar outros modelos constitutivos para a matriz de solo com a finalidade de avaliar se esse comportamento pode ser representado com o modelo implementado.

Foram implementados os modelos constitutivos mencionados anteriormente em um programa de elementos finitos, *ABAQUS*, mediante a utilização da sub-rotina *UMAT* fazendo uso da programação na linguagem *FORTRAN*. Essas sub-rotinas foram avaliadas e validadas mediante a modelagem de ensaios triaxiais drenados, em todos os casos os resultados foram similares às implementações desenvolvidas no programa *MATLAB*.

Sobre o modelo constitutivo para o compósito solo-fibra desenvolvido por Diambra et al. (2013), observou-se que a contribuição da resistência devido à presença da fibra no compósito começa a ser percebida só a partir de um nível de deformação entre 2 e 3%, no caso do ensaio triaxial. E enquanto maior for o nível de deformação, maior será a resistência; porém, esta só aumenta até atingir o escorregamento, o qual é dependente das condições geométricas da fibra e do estado de tensões na matriz de solo e do compósito.

Uma vez atingido o escorregamento entre as fibras e os grãos de solo, a resistência do compósito permanece constante. Esse comportamento é de difícil implementação no programa de elementos finitos já que para isto a matriz Jacobiana deveria ser zero.

Segundo as formulações do modelo constitutivo implementado para o compósito solo-fibra durante um carregamento hidrostático não existiria contribuição das fibras já que não existe um domínio de tensões de tração, como acontece no cisalhamento. Essa característica está em discordância com observações experimentais apresentadas por Consoli et al. (2005).

A resistência do compósito está fortemente relacionada à orientação das fibras, pelo qual é importante defini-la segundo o tipo de preparação da amostra. Nessa dissertação utilizou-se somente duas orientações obtidas de Diambra et al. (2013).

Os tempos de processamento das modelagens para um elemento só de solo com fibra e com os memos incrementos, é de aproximadamente 5 segundos no caso de *MATLAB* e de mais de 100 segundos no caso de utilizar a sub-rotina *UMAT* no *ABAQUS*. Porém, é importante mencionar que no *MATLAB* o elemento é representado com só um ponto de integração e no *ABAQUS* tem quatro pontos.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

Implementação do modelo constitutivo em um programa cujas formulações permitam ser avaliadas para grandes deformações, já que a contribuição da fibra é mais representativa enquanto o nível de deformação é maior.

Utilizar um algoritmo implícito ou um algoritmo explícito de retorno para a implementação do modelo Lade-Kim já que devido a suas formulações ele torna-se instável para uma quantidade grande de elementos.

Estender a implementação do modelo constitutivo do compósito em condições diferentes das triaxiais, onde há rotação de tensões calculando os limites de tração em cada passo e em cada elemento.

Com a finalidade de conhecer as orientações mais reais que as fibras apresentam ao serem misturados com solo, segundo o tipo de preparação, podem ser realizadas tomografias nas amostras antes e depois dos ensaios triaxiais.

Realizar a implementação de um solo com fibra, considerando para a matriz de solo condições pré-adensadas.

Estudar a possibilidade de modificar o modelo proposto por Diambra et al. (2013) com a finalidade de incluir um comportamento bi-linear para o compósito.

## 7

### Referências bibliográficas

ABAQUS USER'S MANUAL, Version 6.14. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, 2014.

AL REFEAI, T.O. **Behaviour of granular soils reinforced with discrete randomly oriented inclusions**. Geotextiles and Geomembranes, 10(4), 319–333, 1991.

ALAMSHAHI, S. e HATAF, N. **Bearing capacity of strip footings on sand slopes reinforced with geogrid and grid-anchor**. Geotextiles and Geomembranes, 27(3), pp. 217-226, 2009.

BABU G.L.S. e VASUDEVAN A.K. **Seepage velocity and piping resistance of coir fibre mixed soils**. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 134(4), pp. 485-492.

BOWER, T.A. (2017), **Constitutive modelling of soils and fibre-reinforced soils**. PhD Thesis (Doctor of Philosophy) – Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Cardiff University, UK.

CASAGRANDE, M.D.T., **Estudo do comportamento de um solo reforçado com fibras de polipropileno visando o uso como base de fundações superficiais**. 95f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.

CASAGRANDE, M.D.T., **Comportamento de solos reforçados com fibras submetidas a grandes deformações**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2005.

CONSOLI, N. C.; PRIETTO, P. D. M. e ULBRICH, L. A. **Influence of fiber and cement addition on behavior of sandy soil**. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 124(12), pp. 1211-1214, 1998.

CONSOLI, N. C.; VENDRUSCOLO, M. A.; PRIETTO, P. D. M. **Behavior of plate load tests on soil layers improved with cement and fiber.** Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, v. 129, n. 1, pp. 96-101, 2003.

CONSOLI, N., CASAGRANDE, M. e COOP, M. **Effect of Fiber Reinforcement on the Isotropic Compression Behavior of a Sand.** Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 131(11), pp. 1434-1436, 2005.

CONSOLI, N. C.; CASAGRANDE, M. D. T. e COOP, M. R. **Performance of a fibre-reinforced sand at large shear strains.** Géotechnique, 57(9), pp. 751-756, 2007.

CURCIO, D. S. **Comportamento hidromecânico de compósito solo-fibra.** 169f. Tese (Doutorado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.

DA SILVA, A. P. **Constitutive modelling of fibre-reinforced sands under cyclic loads.** Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2017.

DAVIS, R. O., e SELVADURAI, A. P. **Elasticity and geomechanics.** Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

DAVIS, R. O., e SELVADURAI, A. P. **Plasticity and geomechanics.** Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

DE MELO, L. T. **Utilização de um modelo elasto-plástico para a análise de deformacoes em solos.** Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1995.

DESAI, C. S., e SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive laws for engineering materials: With emphasis on geologic materials.** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.

DI PRISCO, C.; NOVA, R. **A constitutive model for soil reinforced by continuous threads.** Geotextiles and Geomembranes, 12(2), pp. 161-178, 1993.

DIAMBRA, A., RUSSELL, A., IBRAIM, E. e MUIR WOOD, D. **Determination of fibre orientation distribution in reinforced sands.** *Géotechnique*, 57(7), pp.623-628, 2007.

DIAMBRA, A. **Fibre Reinforced Sands: Experiments and Modelling.** PhD Thesis (Doctor of Philosophy) – Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, University of Bristol, UK, 2010.

DIAMBRA, A., IBRAIM, E., MUIR WOOD, D. e RUSSELL, A. **Fibre reinforced sands: Experiments and modelling.** *Geotextiles and Geomembranes*, 28(3), pp. 238-250, 2010.

DIAMBRA, A., IBRAIM, E., RUSSELL, A. e WOOD, D. **Modelling the undrained response of fibre reinforced sands.** *Soils and foundations*, 51(4), pp. 625-636, 2011.

DIAMBRA, A., IBRAIM, E., RUSSELL, A. e MUIR WOOD, D. **Fibre reinforced sands: from experiments to modelling and beyond.** *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(15), pp.2427-2455, 2013.

DIAMBRA, A. e IBRAIM, E. **Fibre-reinforced sand: interaction at the fibre and grain scale.** *Géotechnique*, 65(4), pp. 296-308, 2015.

DING, D.; HARGROVE, S. K. **Nonlinear stress-strain relationship of soil reinforced with flexible geofibers.** *Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering*, 132(4), pp. 791-794, 2006.

GRAY, D. e OHASHI, H. **Mechanics of Fiber Reinforcement in Sand.** *Journal of Geotechnical Engineering*, 109(3), pp. 335-353, 1983.

GRAY, D. e AL-REFAI, T. **Behavior of fabric versus fiber-reinforced sand.** *Journal of Geotechnical Engineering*, pp. 804-820, 1986.

HEINECK, K. S.; COOP, M. R. e CONSOLI, N. C. **Effect of microreinforcement of soils from very small to large shear strains.** *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(8), pp. 1024-1033, 2005.

IBRAIM, E., DIAMBRA, A., MUIR WOOD, D. e RUSSELL, A. **Static liquefaction of fibre reinforced sand under monotonic loading.** Geotextiles and Geomembranes, 28(4), pp. 374-385, 2010.

IBRAIM, E., DIAMBRA, A., RUSSELL, A. e MUIR WOOD, D. **Assessment of laboratory sample preparation for fibre reinforced sands.** Geotextiles and Geomembranes, 34, pp. 69-79, 2012.

KIM, M.K. e LADE, P.V. **Modelling rock strength in three dimensions.** Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr., vol. 21, 1984.

LADE, P. V. **Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces.** International Journal of Solids and Structures, 13 (11), pp. 1019-1035, 1977.

LADE, P.V. e NELSON, R.B. **Modelling the elastic behavior of granular materials.** International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v.11, pp. 521-542, 1987.

LADE, P.V. e KIM, M.K. **Single hardening constitutive model for frictional materials, II.** Yield Criterion and Plastic Work Contours, Computers and Geotechnics, v.6, pp. 13-29, 1988a.

LADE, P.V. e KIM, M.K. **Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, III.** Comparisons with Experimental Data, Computers and Geotechnics, v.6, pp. 31-47, 1988b.

LATHA, G. M. e SOMWANSHI, A. **Bearing capacity of square footings on geosynthetic reinforced sand.** Geotextiles and Geomembranes, 27(4), pp. 281-294, 2009.

LI, J.; DING, D. W. **Nonlinear elastic behavior of fiber-reinforced soil under cyclic loading.** Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 22(9-12), pp. 977-983, 2002.

LIU, J., WANG, G., KAMAI, T., ZHANG, F., YANG, J. e SHI, B. **Static liquefaction behavior of saturated fiber-reinforced sand in undrained ring-shear tests.** Geotextiles and Geomembranes, 29(5), pp. 462-471, 2011.

MACHADO, S. L.; CARVALHO, M. F. e VILAR, O. M. **Constitutive model for municipal solid waste.** Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 128(11), pp. 940-951, 2002.

MAHER, M. e GRAY, D. **Static Response of Sands Reinforced with Randomly Distributed Fibers.** Journal of Geotechnical Engineering, 116(11), pp. 1661-1677, 1990.

MAHER, M. e HO, Y.C. **Mechanical properties of Kaolinite/fiber soil composite.** Journal of Geotechnical Engineering, 120(8), pp. 1381-1393, 1994.

MCGOWN, A.; ANDRAWES, K. Z. e AL-HASANI, M. M. **Effect of inclusion properties on the behaviour of sand.** Géotechnique, London, 28(3), pp. 327-346, 1978.

MICHALOWSKI, R. e ZHAO, A. **Failure of Fiber-Reinforced Granular Soils.** Journal of Geotechnical Engineering, 122(3), pp. 226-234, 1996.

MICHALOWSKI, R. e ČERMÁK, J. **Strength anisotropy of fiber-reinforced sand.** Computers and Geotechnics, 29(4), pp. 279-299, 2002.

MICHALOWSKI, R. e ČERMÁK, J. **Triaxial Compression of Sand Reinforced with Fibers.** Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 129(2), pp. 125-136, 2003.

MUIR WOOD, D., DIAMBRA, A. e IBRAIM, E. **Fibres and soils: A route towards modelling of root-soil systems.** Soils and Foundations, 56(5), pp. 765-778, 2016.

NATARAJ, M.S.; ADDULA, H.R.; MCMANIS, K.L. **Strength and deformation characteristics of fiber reinforced soils.** International Symposium on Environmental Geotechnology, 3., San Diego, 1996. Proceedings. Pennsylvania: Technomic Publishing Co., Inc, v.1, p.826-835, 1996.

PLAXIS. **Material Models Manual**, 2016.

RANJAN, G., VASAN, R. e CHARAN, H. **Probabilistic Analysis of Randomly Distributed Fiber-Reinforced Soil.** Journal of Geotechnical Engineering, 122(6), pp. 419-426, 1996.

ROSCOE, K. H. e BURLAND, J. B. **On the generalized stress-strain behaviour of wet clay.** In: CONFERENCE IN ENGINEERING PLASTICITY. Papers. Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 536-609, 1968.

SENEZ, P. C., **Comportamento de uma areia reforçada com fibras de polietileno tereftalato (PET).** 124f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SHUKLA, S. **Fundamentals of Fibre-Reinforced Soil Engineering.** Singapore: Springer, 2017.

SIREESH, S., SITHARAM, T. G., e DASH, S. K. **Bearing capacity of circular footing on geocell-sand mattress overlying clay bed with void.** Geotextiles and Geomembranes, 27(2), pp. 89-98, 2009.

SIVAKUMAR BABU, G., VASUDEVAN, A. e HALDAR, S. **Numerical simulation of fiber-reinforced sand behavior.** Geotextiles and Geomembranes, 26(2), pp. 181-188, 2008.

TAYLOR, G.D. **Materials in Construction.** London: Longman Scientific & Technical, 2ed, 1994. 284p.

TEODORO, J. M. e BUENO, B. S. **Estudo do comportamento de solos reforçados com fibras plásticas de polipropileno.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA GEOTÉCNICA, 11, Brasília, 1998. **Anais...** v. 2, pp. 1093-1100, 1998.

ULBRICH, L. A. **Aspectos do comportamento mecânico de um solo reforçado com fibras.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1997.

VIDAL, H. **The principle of reinforced earth.** Highway Research Record. Washington, D.C., NCR-HRB, n. 282, p.1-16, 1969.

WALDRON, L. J. **The shear resistance of root-permeated homogeneous and stratified soil.** Soil Science Society of America Journal, 41(5), pp. 843-849, 1977.

YANG, G., ZHANG, B., LV, P., e ZHOU, Q. **Behaviour of geogrid reinforced soil retaining wall with concrete-rigid facing.** Geotextiles and Geomembranes, 27(5), pp. 350-356, 2009.

YETIMOGLU, T.; SALBAS, O. **A study on shear strength of sands reinforced with randomly distributed discrete fibers.** Geotextiles and Geomembranes, v. 21, pp. 103-110, 2003.

YOO, C. AND JUNG, H. S. **Measured behavior of a geosynthetic-reinforced segmental retaining wall in a tiered configuration.** Geotextiles and Geomembranes, 22(5), pp. 359-376, 2004.

ZHU, H. H., ZHANG, C. C., TANG, C. S., SHI, B., e WANG, B. **Modeling the pullout behavior of short fiber in reinforced soil.** Geotextiles and Geomembranes, 42(4), pp. 329-338, 2014.

ZORNBERG, J. G. **Discrete framework for limit equilibrium analysis of fiberreinforced soil.** Géotechnique, pp. 593-604, 2002.