

C

Entrelaçamento de autovalores

O resultado abaixo é atribuído a Cauchy ([P]).

Teorema C.1 *Seja N uma matriz simétrica $n \times n$ e S a submatriz obtida deletando as últimas linha e coluna de N . Se $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ e $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_{n-1}$ são os autovalores de N e S , respectivamente, então $\lambda_1 \leq \sigma_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \sigma_{n-1} \leq \lambda_n$. Em palavras, os autovalores de N e S estão entrelaçados.*

Prova. Vamos supor que S tem espectro simples. Podemos assumir S diagonal, pois conjugando N por

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde Q tem por colunas os autovetores de S , obtemos uma matriz $\tilde{N}$ com os mesmos autovalores de N e que tem por submatriz a diagonal formada pelos autovalores de S .

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

A matriz $\tilde{N}$ tem polinômio característico igual a

$$(\sigma_1 - x) \dots (\sigma_{n-1} - x) \left((a_n - x) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{(\sigma_i - x)} \right).$$

Suponha $a_i \neq 0$, $0 \leq i \leq n-1$: os autovalores de $\tilde{N}$ são as soluções de

$$\frac{a_1^2}{(\sigma_1 - x)} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{(\sigma_{n-1} - x)} = a_n - x$$

A função definida pelo lado esquerdo da equação tem polos nos pontos σ_i e é estritamente crescente pois tem derivada positiva. A figura C.1 mostra um esboço do gráfico dessa função e da reta $a_n - x$. As interseções dos gráficos são pontos cujas primeiras coordenadas são os autovalores de $\tilde{N}$, evidenciando o entrelaçamento dos autovalores.

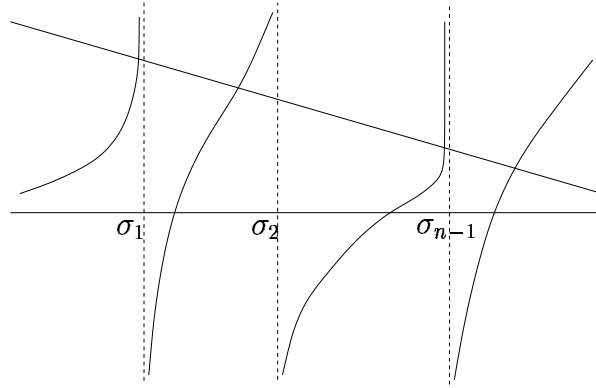


Figura C.1: Autovalores de S e N

Se algum a_i , $1 \leq i \leq n - 1$ é nulo, então σ_i é autovalor de $\tilde{N}$ e podemos deletar as i -ésimas linha e coluna sem alterar os outros autovalores. Repetindo o processo para todos os valores de i com $a_i = 0$, voltamos ao caso acima. Concluimos o resultado no caso em que S tem espectro simples observando que a inserção de pontos que estão nos dois espectros não desfaz o entrelaçamento. O caso geral segue de um processo de limite. ■