

3

A geometria do espectro normalizado em dimensão 4

No Capítulo 2, normalizamos $\sigma_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{k-1}$ para $\sigma_{\text{norm}} : \mathcal{J}_{\text{norm}}^k \rightarrow L_k$, seguindo a prova de Landau, mas observamos que nesse passo, além de perdermos informação relativa ao espectro de matrizes com $t_2 = 0$, acrescentamos uma dificuldade técnica, visto que σ_{norm} não é própria. Uma outra normalização que leva em conta o fato de σ_{norm} ser homogênea é $\sigma_{\text{esf}} : S^{k-1} \rightarrow L_k$ que associa a um ponto (t_2, \dots, t_k) na esfera unitária, o espectro normalizado de $M_k(0, t_2, \dots, t_k)$. A normalização esférica é uma função própria e representa σ_0 de maneira mais informativa. Estudaremos σ_{esf} para matrizes de dimensão 4.

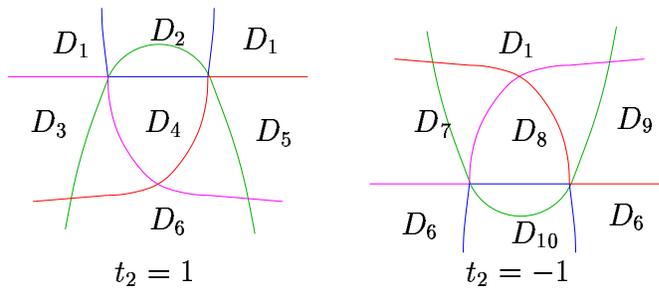


Figura 3.1: Conjunto crítico de σ_0 nos planos $t_2 = 1$ e $t_2 = -1$

A figura 3.1 mostra o conjunto crítico de σ_0 nos planos $t_2 = 1$ e $t_2 = -1$. As curvas em vermelho, azul e rosa representam respectivamente matrizes com espectro múltiplo $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$ e $\lambda_3 = \lambda_4$. A curva em verde, por sua vez, corresponde às demais matrizes críticas. Os desenhos são espelhados porque as matrizes $M_4(0, 1, t_3, t_4)$ e $M_4(0, -1, t_3, -t_4)$ são conjugadas pela diagonal $D = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ e, portanto, o cálculo do espectro respeita essa simetria. Como σ_0 é homogênea, o desenho do conjunto crítico de σ_{esf} nas calotas $t_2 > 0$ e $t_2 < 0$ corresponde respectivamente ao conjunto crítico de σ_0 nos planos $t_2 = 1$ e $t_2 = -1$. Entretanto, o corte da esfera no equador $t_2 = 0$ separa em vários pedaços algumas das componentes conexas de \mathcal{U}_{esf} , o conjunto dos pontos $(t_2, t_3, t_4) \in S^3$ tais que $M_4(0, t_2, t_3, t_4)$ tem espectro simples. Na figura 3.1, as regiões estão nomeadas de modo a identificar aquelas que correspondem

a uma única componente na esfera. A esfera está partida em dez regiões, as quais estão pareadas pela simetria $M_4(0, t_2, t_3, t_4) \leftrightarrow M_4(0, -t_2, t_3, -t_4)$.

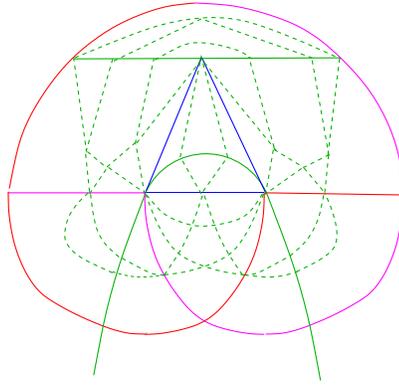


Figura 3.2: Cinco componentes conexas representativas

Uma forma de estudar σ_{esf} fazendo uso da simetria sem violar as componentes conexas é cortar a esfera seguindo linhas de espectro múltiplo. A figura 3.2 mostra a projetivização de uma região da esfera com cinco componentes conexas, exatamente um membro de cada par de componentes simétricas. As curvas tracejadas representam matrizes que não são pontos críticos, mas são pré-imagens de valores críticos.

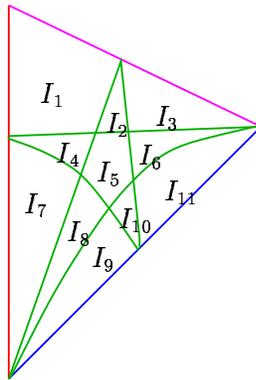
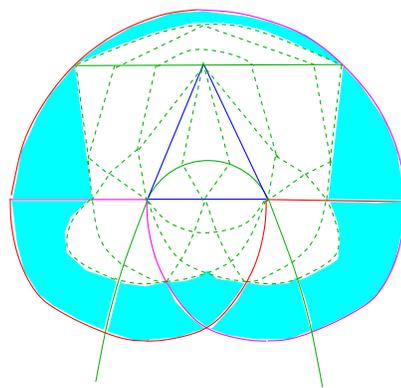
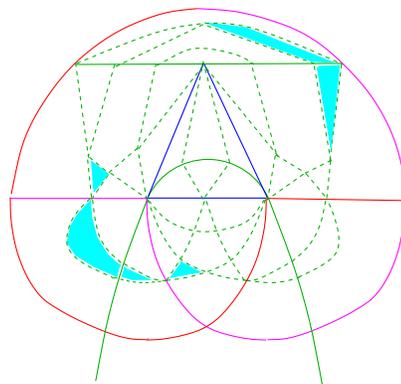


Figura 3.3: O conjunto L_4 e os valores críticos de σ_{esf}

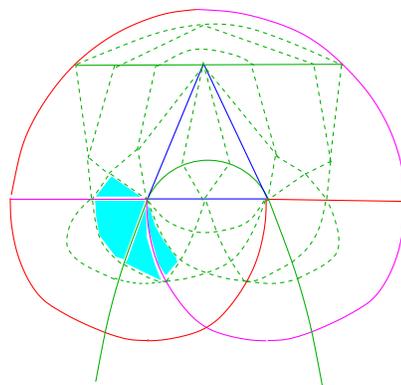
A figura 3.3 mostra o contra-domínio L_4 de σ_{esf} . A fronteira de L_4 é composta por trechos onde $y_2 = -1$ (vermelho), $y_3 = y_2$ (azul) ou $y_3 = 1 - y_3 - y_2$ (rosa). O conjunto em verde representa os demais valores críticos de σ_{esf} . Com exceção dos pontos onde há interseção de curvas, todos os outros pontos críticos são dobras (no sentido de Whitney, [GG]). Portanto, nas onze regiões marcadas na figura, o número de pré-imagens é constante, e ao passar de uma região para a outra, o número de pré-imagens difere de dois. As figuras seguintes mostram metade das pré-imagens de I_n por σ_{esf} , ou seja, veremos apenas as pré-imagens que se localizam nas componentes limitadas da figura 3.2.



$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_1)$$

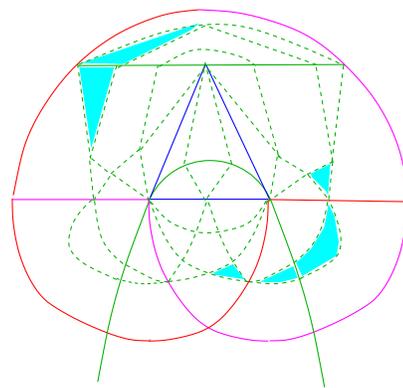


$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_2)$$

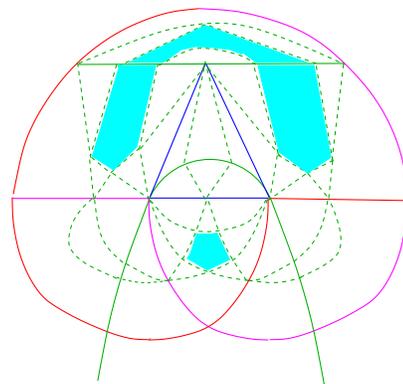


$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_3)$$

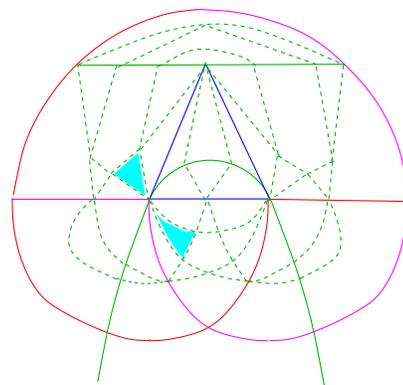
Figura 3.4: A meia-esfera tem 8 pré-imagens de I_1 , 6 de I_2 e 4 de I_3



$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_4)$$

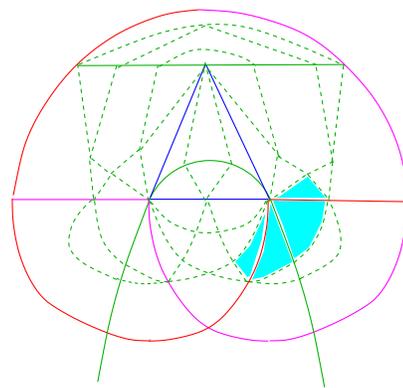


$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_5)$$

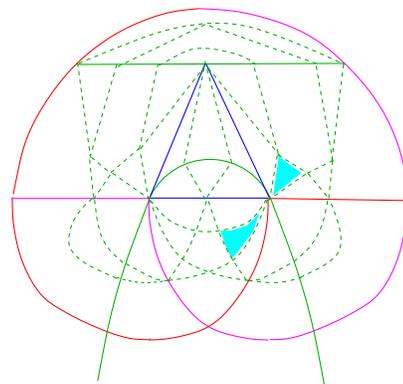


$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_6)$$

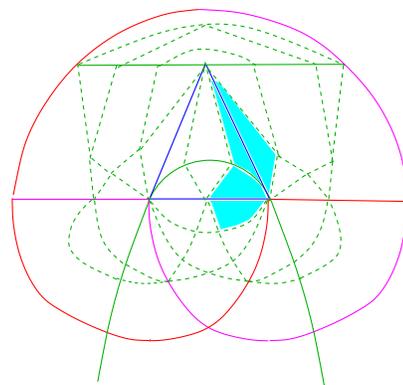
Figura 3.5: As regiões I_4 , I_5 e I_6 têm respectivamente 6, 4 e 2 pré-imagens



$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_7)$$



$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_8)$$



$$(\sigma_{\text{esf}})^{-1}(I_9)$$

Figura 3.6: Existem 4, 2 e 4 pré-imagens de I_7 , I_8 e I_9

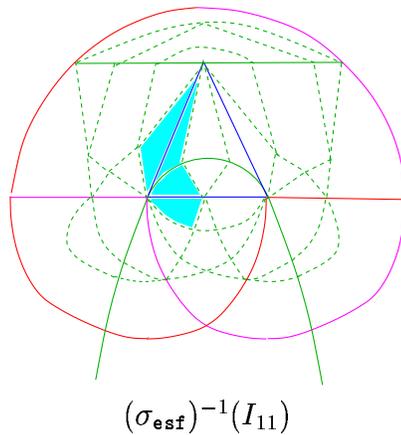
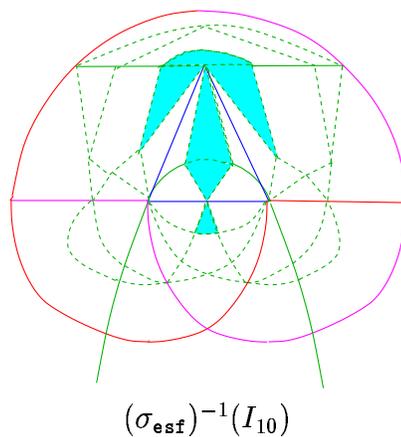


Figura 3.7: Finalmente, I_{10} e I_{11} têm 6 e 4 imagens inversas

Das cinco componentes conexas da meia-esfera, as figuras mostram que apenas duas são levadas sobrejetivamente em $L_4 : D_1$ e D_4 . A restrição de σ_{esf} a qualquer uma delas tem grau ± 1 pois existem valores regulares de σ_{esf} em L_k que têm uma única pré-imagem em D_1 e outra em D_4 . Qualquer ponto de I_9 , por exemplo, tem uma única imagem inversa em D_1 . Na componente D_4 , a ausência de pontos críticos torna evidente que σ_{esf} é um difeomorfismo.

Como visto no capítulo anterior, um dos aspectos fundamentais do argumento de Landau é a existência de um ponto regular injetor de Λ próximo ao vértice $M_k(0, 1, 1, \dots, 1)$. Em termos mais geométricos, isso corresponde a mostrar para $k = 4$ que a curva verde não entra em D_4 quando passa por esse vértice. É muito provável que, em geral, o conjunto crítico evite a região \mathcal{R}_k : Isso implicaria não só a sobrejetividade, mas a injetividade de $\Lambda : \mathcal{R}_k \rightarrow L_k$.