



Waldy Jair Torres Zuniga

**Otimização Dimensional e de Forma de Trelças
Espaciais Modeladas com Curvas de Bézier**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Anderson Pereira

Rio de Janeiro
Abril de 2019



Waldy Jair Torres Zuniga

**Otimização Dimensional e de Forma de Trelças
Espaciais Modeladas com Curvas de Bézier**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Anderson Pereira

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Sandoval José Rodrigues Júnior

Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof. Ivan Fabio Mota de Menezes

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de abril de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Waldy Jair Torres Zuniga

Graduou-se em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Mecânica da UPA (Universidad de Pamplona) localizada em Norte de Santander, Colômbia, em 2012. Interesses acadêmicos em áreas de pesquisa que envolvam otimização de estruturas, programação matemática, programação não linear, elementos finitos, computação gráfica e dinâmica.

Ficha Catalográfica

Torres Zuniga, Waldy Jair

Otimização dimensional e de forma de treliças espaciais modeladas com curvas de Bézier / Waldy Jair Torres Zuniga ; orientador: Anderson Pereira. – 2019.

89 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2019.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Curva de Bézier. 3. Treliças espaciais. 4. Análise estática linear. 5. Análise de sensibilidade. 6. Otimização Dimensional e de Forma. I. Pereira, Anderson. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

À minha mãe Belkys, pelo apoio, pela
confiança e pelo amor infinito.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor *Anderson Pereira* pelo estímulo, paciência e pela parceria constante para a realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica e Engenharia Civil da PUC-Rio, por todos os conhecimentos e as experiências transmitidas durante o período da pós-graduação.

À empresa *Kordout* pela credibilidade durante estes últimos anos.

À *Lorena Manuely*, pelo carinho, pela compreensão, paciência e o constante apoio emocional que tornaram possível a realização deste trabalho.

A toda a minha família, em especial minha vovó *Isabel Gomez* e irmão *Werlin Torres*, por todos os gestos de carinho, motivação e otimismo.

A todos os amigos que fizeram parte desta jornada de forma direta ou indireta, em especial *Dario Prada*, *André Xavier*, *Hugo Bastos*, *Maira Nobre*, *Herick Geaquinto* e *Mario Rivero*.

À PUC-Rio, pela oportunidade da realização deste Mestrado e pelo incentivo ao estudo e à pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Torres, Waldy; Pereira, Anderson. **Otimização Dimensional e de Forma de Treliças Espaciais Modeladas com Curvas de Bézier**. Rio de Janeiro, 2019. 89p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Estruturas treliçadas espaciais são arranjos geométricos de barras amplamente utilizados em coberturas de edificações. Diversos fatores favorecem o seu uso, tais como a capacidade de vencer grandes vãos e a facilidade em assumir diversas formas. A busca pela geometria ótima é um objetivo importante no projeto de estruturas, onde o interesse principal é minimizar o custo da estrutura. O objetivo deste trabalho é apresentar um sistema computacional capaz de minimizar o peso de estruturas treliçadas cuja geometria é definida por curvas de Bézier. Portanto, os pontos de controle das curvas de Bézier são utilizados como variáveis de projeto. As áreas das seções transversais das barras e a altura da treliça também são consideradas como variáveis de projeto e restrições sobre a tensão de escoamento e a tensão crítica de Euler são impostas no problema de otimização. A estrutura é analisada por meio do método dos elementos finitos considerando a hipótese do comportamento linear físico e geométrico. Os algoritmos de otimização usados neste trabalho utilizam o gradiente da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto. O sistema computacional desenvolvido neste trabalho foi escrito em linguagem MATLAB® e conta com uma integração com o SAP2000® por meio da OAPI (Open Application Programming Interface). Os resultados numéricos obtidos demonstram a eficiência e a aplicabilidade deste sistema.

Palavras-chave:

Curva de Bézier; treliças espaciais; análise estática linear; análise de sensibilidade; programação matemática; otimização estrutural; otimização de forma; otimização dimensional; OAPI SAP2000®.

Abstract

Torres, Waldy; Pereira, Anderson (Advisor). **Size and Shape Optimization of Space Trusses Modeled by Bézier Curves**. Rio de Janeiro, 2019. 89p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Spatial truss structures are geometrical arrangements of bars widely used in building roofs. Several factors favor their use, such as the ability to overcome large spans and the capability of assuming a variety of configurations. The search for optimal geometry is an important goal in the design of structures, where the main interest is to minimize the cost of the structure. The objective of this work is to present a computational system capable of minimizing the weight of truss structures whose geometry is defined by Bézier curves. Therefore, the control points of the Bézier curves are used as design variables. The cross-sectional areas of the bars and the truss height are also considered as design variables and constraints on the yield stress and Euler critical stress are imposed on the optimization problem. The structure is analyzed using truss elements considering the physical and geometric linear behavior. The optimization algorithms used in this work require the gradient of the objective function and constraints with respect to the design variables. The computational system developed in this work was written in MATLAB® and has an integration with SAP2000® through the OAPI (Open Application Programming Interface). The obtained numerical results demonstrate the efficiency and applicability of the developed system.

Keywords

Bézier curve; space trusses; static linear analysis; sensitivity analysis; mathematical programming; structural optimization; shape optimization; parametric optimization; OAPI SAP2000®.

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Motivação	21
1.2	Objetivos	23
1.3	Organização da Dissertação	23
2	Modelagem Geométrica	25
2.1	Considerações Gerais	25
2.2	Curva de Bézier	25
2.3	Geração da Malha de Elementos Finitos	27
3	Análise Estática Linear de Trelças	31
3.1	Considerações Gerais	31
3.2	Estruturas Trelçadas	31
3.3	Formulação para a Análise Linear de Estruturas Reticuladas	32
3.4	Verificação da Análise Estática Linear	36
4	Análise de Sensibilidade	39
4.1	Considerações Gerais	39
4.2	Método das Diferenças Finitas (MDF)	39
4.3	Método da Diferenciação Direta (MDD)	40
4.4	Sensibilidade dos Carregamentos	43
4.4.1	Carregamentos Permanentes	43
4.4.2	Carregamento por Unidade de Comprimento	44
4.4.3	Carregamentos Variáveis	45
4.5	Sensibilidade da Curva de Bézier	47
4.6	Verificação da Análise de Sensibilidade	48
5	Otimização Dimensional e de Forma	51
5.1	Considerações Gerais	51
5.2	Metodologia de Otimização	51

5.3	Formulação do Problema de Otimização	52
5.3.1	Fator de Escala	54
5.3.2	Cálculo dos Gradientes	54
5.4	Exemplos Numéricos	56
5.4.1	Arco semicircular de Michell	56
5.4.2	Treliça de 18 Barras	62
5.4.3	Cobertura Treliçada para Armazenamento de Grãos	67
6	Conclusões	79
6.1	Trabalhos Futuros	80
7	Referências bibliográficas	81
	Apêndice A. Integração MATLAB® - SAP2000®	84

Lista de figuras

Figura 1.1: Projetos elaborados pelas empresas Geometrica Inc., Lanik e Kordout.	19
Figura 1.2: Otimização dimensional e de forma utilizando malha de elementos finitos (HAFTKA, 1992).	22
Figura 1.3: Comparação das metodologias na área de projeto (ARORA, 2016).	22
Figura 2.1: Polígono de controle e curva de Bézier de terceira ordem.	26
Figura 2.2: Geração da malha de Elementos Finitos.	27
Figura 2.3: Definição das coordenadas nodais do banzo inferior.	28
Figura 2.4: Definição das coordenadas nodais do banzo superior em função da altura h e do vetor normal n_0 .	28
Figura 2.5: Estrutura espacial, modelada com a curva de Bézier.	30
Figura 3.1: Elemento de treliça no sistema de referência natural x' e global x, y, z .	33
Figura 3.2: Perfil circular de Alumínio.	36
Figura 3.3: Estrutura treliçada em forma de arco.	36
Figura 3.4: Magnitude dos deslocamentos nodais da estrutura m , programa SAP2000® V20 (CSI, 2019).	38
Figura 4.1: Carregamento do peso próprio.	44
Figura 4.2: Carga linearmente distribuída.	45
Figura 4.3: Carregamentos devido ao vento e à sobrecarga.	46
Figura 4.4: Estrutura treliçada modelada com a curva de Bézier.	49
Figura 4.5: Erro relativo para o cálculo da sensibilidade, método das diferenças finitas à frente e método da diferenciação direta.	49
Figura 5.1: Estrutura com grupos de áreas e pontos de controle.	53
Figura 5.2: Arco semicircular de Michell.	56
Figura 5.3: Arco semicircular de Michell, grupos de áreas e restrições laterais dos pontos de controle.	57

Figura 5.4: Arco semicircular de Michell, na configuração inicial e ótima.	59
Figura 5.5: Arco semicircular de Michell, restrição de tensão de escoamento.	61
Figura 5.6: Arco semicircular de Michell, restrição de tensão crítica de Euler.	61
Figura 5.7: Treliça de 18 barras.	63
Figura 5.8: Treliça de 18 barras, grupos de áreas e restrições laterais dos pontos de controle.	63
Figura 5.9: Treliça de 18 barras, comparação entre as soluções obtidas.	65
Figura 5.10: Treliça de 18 barras, restrição de tensão de escoamento.	66
Figura 5.11: Treliça de 18 barras, restrição de tensão crítica de Euler.	66
Figura 5.12: Mudança no número de elementos do banzo inferior da Treliça de 18 barras, solução obtida através do uso dos pontos de controle da curva de Bézier como variáveis de projeto.	67
Figura 5.13: Cobertura treliçada para armazenamento de grãos, coordenadas em metros (m).	69
Figura 5.14: Detalhe A-A, coordenadas em metros (m).	70
Figura 5.15: Coeficientes de pressão.	73
Figura 5.16: Histórico de convergência da função objetivo.	74
Figura 5.17: Estrutura ótima, coordenadas em metros (m).	75
Figura 5.18: Estrutura ótima, magnitude dos deslocamentos nodais da estrutura m , programa SAP2000® V20 (CSI, 2019).	77
Figura 5.19: Verificação da estrutura ótima com o programa SAP2000® V20 pelo método ASD, (CSI, 2019).	77
Figura 5.20: Verificação da estrutura com os diâmetros dos elementos padronizados, método ASD do programa SAP2000® (CSI, 2019).	78

Lista de tabelas

Tabela 3.1: Propriedades mecânicas do Alumínio 6351-T6.	37
Tabela 3.2: Verificação das rotinas implementadas no MATLAB® com SAP2000®.	37
Tabela 4.1: Verificação da análise de sensibilidade em relação às variáveis de projeto.	50
Tabela 5.1: Arco semicircular de Michell, propriedade mecânicas do material.	57
Tabela 5.2: Arco semicircular de Michell, variáveis de projeto, restrições laterais x_{lb} , x_{ub} e ponto inicial x_0 .	58
Tabela 5.3: Arco semicircular de Michell, resultados da otimização.	60
Tabela 5.4: Comparação dos resultados para o Arco semicircular de Michell.	62
Tabela 5.5: Treliça de 18 barras, propriedade mecânicas do material.	63
Tabela 5.6: Treliça de 18 barras, variáveis de projeto, restrições laterais x_{lb} , x_{ub} e ponto inicial x_0 .	64
Tabela 5.7: Treliça de 18 barras, resultados da otimização.	66
Tabela 5.8: Casos de cargas.	71
Tabela 5.9: Combinações de cargas.	71
Tabela 5.10 Intensidade dos carregamentos.	73
Tabela 5.11: Variáveis de projeto, restrições laterais x_{lb} , x_{ub} e ponto inicial x_0 .	74
Tabela 5.12: Resultados da otimização, 320 grupos de áreas.	76
Tabela 5.13: Resultados da otimização, 4 grupos de áreas.	76
Tabela 5.14: Diâmetros e espessura dos tubos redondos.	78

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas

LETRAS ROMANAS

p_1, p_2, p_3, p_4	- pontos de controle da curva de Bézier
P_i	- coordenadas dos pontos de controle
n	- ordem do polinômio de Bézier
B_i^n	- polinômio de Bernstein
t	- espaço paramétrico
Q_p^n	- coordenadas da curva de Bézier
Q_L	- coordenadas do banzo inferior
n^0	- vetor offset normal
$\frac{dQ_p^n(t)}{dt}$	- gradiente dos pontos de controle
Q_U	- coordenadas do banzo superior
h	- altura que separa os banzos inferior e superior
N_n	- número total de nós
N_e	- número total de elementos
N_{Arc}	- número total de banzos inferiores
d	- treliça no plano ou no espaço
X, Y, Z	- vetores com as coordenadas nodais da estrutura
F	- vetor com as forças externas
x, y, z	- sistema de referência global
x'	- sistema de referência natural
L_e	- comprimento do elemento
a_1	- posição inicial do elemento
a_2	- posição final do elemento
e	- índice do elemento
U	- vetor de deslocamentos globais
u_e	- vetor de deslocamentos no elemento
$B_{e,d}$	- matriz de deslocamento-deformação

B'_e	- matriz de deslocamento-deformação no sistema de referência natural
c_d	- cossenos diretores
c_x, c_y, c_z	- cossenos diretores na projeção de cada coordenada
K	- matriz de rigidez global
$k_{e,d}$	- matriz de rigidez do elemento
E_e	- módulo de elasticidade do material
A_e	- área da seção transversal do elemento
t_s	- espessura do elemento
R_m	- raio médio do elemento
I_{min}	- momento de inércia mínimo do elemento
σ_e	- tensão axial do elemento
F_{cy}	- limite de escoamento do material
f	- função objetivo do problema de otimização
g_l	- restrições de desigualdade do problema de otimização
l	- número total de restrições de desigualdade
σ_e^a	- tensão admissível do elemento
σ_e^T	- tensão de tração do elemento
σ_e^c	- tensão de compressão do elemento
σ_e^{cr}	- tensão crítica de Euler do elemento
k_{flb}	- constante geométrica da seção transversal
x	- variáveis de projeto do problema de otimização
m	- número total de variáveis de projeto
$\frac{dg_l}{\partial x_j}$	- gradiente das restrições de desigualdade do problema de otimização
F_{pp}	- vetor com a força devido ao peso próprio
F_{PC}	- vetor com a força devido ao peso próprio da cobertura
Q	- intensidade da pressão exercida referente à telha
A_c	- área da telha projetada no plano xz
F_D	- vetor de força por unidade de comprimento
q	- carga aplicada por unidade de comprimento
L_e^x	- comprimento do elemento na projeção do eixo x

\mathbf{F}_A	-	vetor de forças variáveis
W	-	cargas do tipo vento e sobrecarga
\mathbf{N}	-	vetor unitário à superfície
$\vec{\mathbf{n}}$	-	vetor normal à superfície
A_{sup}	-	área da superfície
A_{infl}	-	área de influência do nó
$\frac{d\mathbf{Q}_L}{dt}$	-	gradiente das coordenadas do banzo inferior da curva de Bézier
$\frac{d\mathbf{Q}_U}{dt}$	-	gradiente das coordenadas do banzo superior da curva de Bézier
dn^0	-	derivada do vetor offset
$\frac{d\mathbf{Q}_U}{dh}$	-	gradiente da altura da treliça
h_k	-	restrições de igualdade do problema de otimização
k	-	número total de restrições de igualdade
x_j^{lb}	-	restrições laterais, limite inferior das variáveis de projeto
x_j^{ub}	-	restrições laterais, limite superior das variáveis de projeto
$A_{bsup}, A_{horz}, A_{diag}, A_{binf}$	-	grupos de áreas do problema de otimização
\bar{y}_j	-	vetor adimensional das variáveis de projeto
x_j	-	vetor com valor corrente das variáveis de projeto
x^0	-	vetor inicial das variáveis de projeto
\bar{f}	-	função objetivo adimensional
f_0	-	valor inicial da função objetivo
\bar{g}_l	-	restrições de desigualdade adimensional
g_l^0	-	valor inicial das restrições de desigualdade
\bar{x}_j^{lb}	-	restrições laterais, limite inferior das variáveis de projeto adimensional
\bar{x}_j^{ub}	-	restrições laterais, limite superior das variáveis de projeto adimensional

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	-	gradiente da função objetivo do problema de otimização
$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_j}$	-	gradiente adimensional da função objetivo do problema de otimização
$\frac{\partial \bar{g}_l}{\partial \bar{x}_j}$	-	gradiente adimensional das restrições de desigualdade do problema de otimização
m_0	-	massa inicial
m_f	-	massa final
$N_{\text{iterações}}$	-	número de iterações

LETRAS GREGAS

$\varepsilon_{e,x}$	-	deformação ao longo do eixo x
ρ_e	-	densidade do material
$\Delta(.)$	-	incremento por diferenças finitas
ε	-	erro relativo

SIGLAS E ABREVIATURAS

OAPI	-	Open Application Programming Interface
OCR	-	Otimização com restrições
OSR	-	Otimização sem restrições
ADM	-	Aluminum Design Manual
MDF	-	Método das diferenças finitas
MDD	-	Método da diferenciação direta
PI	-	Pontos Interiores
SQP	-	Programação quadrática sequencial
ASCE	-	American Society of Civil Engineers
ASD	-	Design for Strength Using Allowable Strength Design
CAD	-	Projeto assistido por Computador
ABNT	-	Associação Brasileira de Normas Técnicas

Da próxima vez que alguém reclamar que você cometeu um erro, diga a essa pessoa que talvez isso seja uma boa coisa, porque sem imperfeição nem você nem eu existiríamos.

Stephen Hawking

1 Introdução

As estruturas espaciais têm sido uma área ativa de pesquisa desde o início da década de 60 (BEHEAD; PARKER, 2014). A forma e o comportamento das estruturas espaciais tornam este tipo de estruturas atraentes na arte da construção de domos, coberturas, auditórios, estádios e aeroportos.

Com o advento da computação e o desenvolvimento de linguagens de programação de alto nível, foi possível ampliar e melhorar a metodologia da modelagem geométrica, permitindo descrever a forma e as características de um determinado objeto com maior rapidez. Baseado nisso, o engenheiro francês Pierre Étienne Bézier desenvolveu a curva e a superfície de Bézier, com o intuito de melhorar a modelagem dos projetos elaborados pela fabricante de automóveis Renault S.A. (LUCENA, 2007). Entretanto, a curva de Bézier não está limitada somente à indústria automobilística. Esta técnica pode ser aplicada em diversas áreas, tais como a visualização dos fenômenos físicos, a computação gráfica, a animação, o “design” de interfaces, a produção de fontes, a modelagem de projetos, o “design” de produtos etc.

Dentro deste cenário, empresas como Lanik (LANIK, 2019), Geometrica Inc. (GEOMETRICA, 2019), Kordout (KORDOUT, 2019), entre outras, utilizam as curvas paramétricas para desenvolverem tanto projetos arquitetônicos como industriais. Na Figura 1.1, são apresentados alguns dos projetos elaborados por estas empresas.

A fim de obter o projeto ideal de uma estrutura, é necessário integrar a modelagem geométrica de estruturas, o método dos elementos finitos e os algoritmos de otimização, através de um processo iterativo auxiliado por computador. No presente trabalho a análise de elementos finitos, trata apenas do comportamento linear elástico de estruturas treliçadas submetidas a carregamentos estáticos. A partir desta análise, obtém-se a resposta da estrutura em termos dos deslocamentos, que posteriormente são utilizados no processo de busca do projeto ótimo.



Figura 1.1: Projetos elaborados pelas empresas Geometrica Inc., Lanik e Kordout.

Na Engenharia Estrutural a otimização é uma terminologia frequentemente usada na determinação das melhores configurações em uma estrutura, baseada na mudança de diversos parâmetros onde a finalidade é a redução de custos, mantendo porém os critérios de segurança, desempenho e confiabilidade.

Em geral, a formulação do problema de otimização inicia-se a partir da função a ser minimizada ou otimizada, a qual descreve o desempenho de um determinado problema, comumente chamada de função objetivo. Os parâmetros que configuram a função objetivo são denominados de variáveis de projeto, as quais possuem limites inferior e superior, considerados viáveis, e que definem a região de busca para a solução do problema.

Os problemas de otimização estrutural podem ser divididos em três classes, a saber: a otimização dimensional, a otimização de forma e a otimização topológica (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2008). A otimização dimensional está voltada para o dimensionamento da espessura em uma placa ou determinar as dimensões das seções transversais nos elementos. A segunda pretende determinar a forma ótima dos contornos internos e externos da estrutura, sem alterar sua topologia. Finalmente, a otimização topológica, no caso de estruturas discretas, centra-se na remoção de um elemento quando sua área for zero ou próxima de zero, tornando

variável a conectividade dos elementos, o que provoca mudanças na topologia da estrutura. Entretanto, esta Dissertação não abrange a otimização topológica.

Os problemas de otimização podem ser classificados como *Otimização com restrições* (OCR) e *Otimização sem restrições* (OSR) (VAZ; PEREIRA; MENEZES, 2012). As restrições nos problemas de OCR podem ser definidas em termos da resposta estrutural, como por exemplo, deslocamentos, tensões ou frequências naturais. Por outro lado, a OSR não apresenta restrições na sua formulação. Ambas técnicas podem ser aplicadas em diversas áreas do conhecimento.

Os problemas de otimização são geralmente resolvidos através de algoritmos estocásticos e/ou determinísticos. Nos algoritmos estocásticos, a solução é guiada por meio dos processos randômicos. Incluem-se a imitar os algoritmos genéticos (simular algum processo de evolução da natureza). Já os algoritmos determinísticos tais como Pontos Interiores (PI) e Programação Quadrática Sequencial (SQP) empregam os gradientes da função objetivo e das restrições de desigualdade em relação às variáveis de projeto. O cálculo do gradiente das restrições de desigualdade, é feito a partir do gradiente da resposta da estrutura. Os gradientes podem ser determinados por meio do método da diferenciação direta das equações envolvidas no problema de otimização ou pelo método das diferenças finitas.

Durante as últimas décadas diversos pesquisadores têm apresentado estudos relacionados à otimização de forma, buscando determinar a forma ótima das estruturas, reduzir o número de variáveis de projeto e o tempo de processamento. Dessa forma, autores como Ramm, Maute e Shawars (1998), combinaram a otimização topológica e de forma em estruturas que são modeladas por curvas paramétricas, buscando maximizar a rigidez da estrutura com restrições de tensão. Considerações de material de comportamento não linear foram também tratadas na metodologia de otimização abordada pelos autores. Ansola, Canales, Tarrago e Rasmussen (2002), apresentaram uma metodologia de otimização, que consistiu em combinar a otimização topológica (Ground Structure) com a otimização de forma para minimizar a flexibilidade (compliance, em inglês) de estruturas de elementos de cascas, cuja geometria é modelada com curva e superfícies paramétricas. Kegl e Brank (2006), otimizaram a forma de estruturas por meio da movimentação dos pontos de controle da superfície de Bézier. Vucina, Lozina e Pehnec (2008), determinaram a forma ótima de um aerofólio NACA 4413 no plano, usando os

pontos de controle de curvas de Bézier como variáveis de projeto. Três casos foram analisados mudando o grau do polinômio e o número de segmentos das curvas de Bézier acopladas. Ademais, os autores conseguiram utilizar os pontos de controle da superfície de Bézier para otimizar as hélices de uma turbina eólica baseada no aerofólio NACA 4413. Ohsaki (2010), utilizou os pontos de controle da curva de Bézier como variáveis de projeto na metodologia de otimização para modelar a estrutura e determinar a forma ótima de pórticos e treliças espaciais. Além disso, formulou o problema de otimização com vários objetivos para a minimização de flexibilidade (compliance, em inglês) de estruturas estaticamente carregadas. Lee (2013), aplicou a modelagem paramétrica *The Coons patch* com a finalidade de usar os pontos de controle da superfície paramétrica para modelar e otimizar estruturas espaciais. Bruno (2017), adotou os pontos de controle das curvas paramétricas de Bézier e de B-splines como variáveis de projeto para minimizar e determinar a forma ótima das regiões que apresentam concentração de tensões em problemas bidimensionais de elasticidade.

1.1 Motivação

Na maioria dos problemas de otimização aplicados em estruturas, a própria malha de elementos finitos é utilizada ao longo desse processo para descrever tanto a forma do modelo quanto para definir as variáveis de projeto do problema de otimização. Isso quer dizer que os problemas de otimização são ligados diretamente à discretização da malha. No entanto, quando a geometria modelada possui um alto nível de refinamento na malha e suas coordenadas nodais são utilizadas como variáveis de projeto, é possível que a estrutura final apresente alguns inconvenientes como trechos serrilhados, membros extremadamente curtos e problemas numéricos devido à distorção da malha de elementos finitos, o que torna a estrutura inadequada ao uso. Exemplo deste tipo de problema é mostrado na Figura 1.2.

Diante disso, esta Dissertação pretende aplicar a curva de Bézier para modelar a geometria e definir as coordenadas dos pontos de controle da curva de Bézier como as variáveis de projeto do problema de otimização. Desse modo, a geometria do modelo fica definida e o problema de otimização não depende da malha de

elementos finitos. Como consequência se tem uma redução no número de variáveis de projeto.

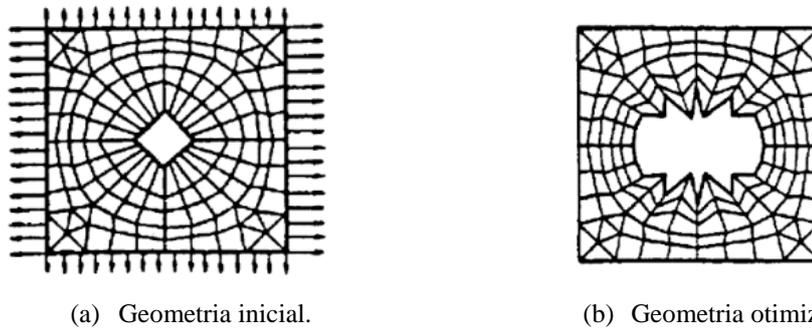


Figura 1.2: Otimização dimensional e de forma utilizando malha de elementos finitos (HAFTKA, 1992).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1621764/CA

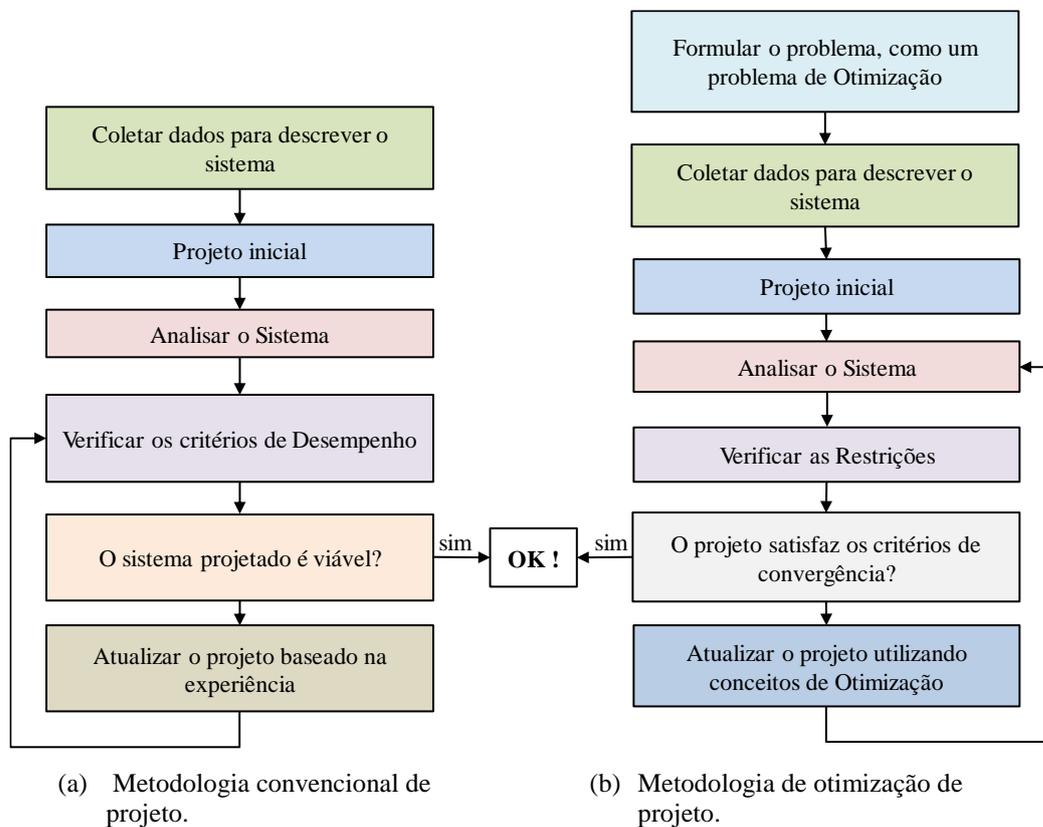


Figura 1.3: Comparação das metodologias na área de projeto (ARORA, 2016).

As metodologias de projeto convencionais utilizadas pelas equipes de engenharia são fundamentadas pela experiência ou na tentativa e erro, porém esta metodologia desconhece se a solução adotada pode ser melhorada ou quanto esta pode ser melhor sob o ponto de vista econômico para determinado problema. No entanto, esta Dissertação propõe o uso das técnicas de otimização tanto para

descrever o problema quanto para obter a solução ótima do problema de otimização. A comparação entre as metodologias de projeto mencionadas anteriormente, foi proposta inicialmente por Arora (2016), como exibido na Figura 1.3.

1.2 Objetivos

Esta Dissertação tem como objetivo desenvolver uma metodologia computacional para minimizar o peso de estruturas que são modeladas com curvas de Bézier. São consideradas a tensão crítica de Euler e o limite de escoamento do material como restrições de desigualdade no problema de otimização. A estrutura pode estar submetida a diversos casos de cargas.

Os pontos de controle da curva de Bézier são utilizados como variáveis de projeto. Esta é uma alternativa eficiente quando comparada com os métodos convencionais de otimização de forma. As áreas das seções transversais das barras e a altura da treliça também são consideradas como variáveis de projeto. As rotinas de programação foram elaboradas no MATLAB® e a configuração ótima da estrutura é obtida pela função `fmincon` do MATLAB®. A metodologia implementada foi validada por meio da comparação de estudos de casos encontrados na literatura. Uma integração entre MATLAB® com SAP2000® foi desenvolvida por meio da OAPI com o objetivo de exportar a geometria otimizada e verificar se a estrutura atende os requisitos de projeto.

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho está dividido em *seis* capítulos, de modo a auxiliar o leitor no entendimento dos temas tratados. Os assuntos abordados nesta Dissertação são apresentados de maneira sequencial e coerente a fim de permitir a transmissão dos conceitos de forma clara. A seguir, é relatado o conteúdo de cada capítulo.

O **Capítulo 2** apresenta o desenvolvimento matemático da curva de Bézier, explicitando os parâmetros necessários para modelar uma estrutura no plano ou no espaço. Exemplos deste tipo de modelagem são também incorporados.

O **Capítulo 3** estuda a análise linear de estruturas reticuladas por meio do Método dos Elementos Finitos. A formulação dos elementos de treliça é abordada

tendo em vista as funções de forma do elemento, passando pela matriz de rigidez deste até a solução do sistema de equações de equilíbrio, onde são obtidos os deslocamentos dos elementos. No final do capítulo, realiza-se a validação da implementação elaborada no MATLAB® com o programa comercial SAP2000® V20.

O **Capítulo 4** trata da obtenção das expressões matemática do gradiente da das restrições de desigualdade em relação às variáveis de projeto. Este cálculo é feito por meio do método da diferenciação direta das equações envolvidas e validado pelo método das diferenças finitas à frente.

O **Capítulo 5** expõe uma formulação matemática por meio dos conceitos de otimização para a minimização da massa e obtenção da forma ótima em estruturas treliçadas atendendo às restrições de tensão de escoamento e tensão crítica de Euler, para considerar que o projeto em estudo seja considerado ótimo. A metodologia proposta é validada através de um caso de estudo apresentado na literatura. Ademais, outros exemplos de otimização dimensional e de forma são tratados.

Finalmente, no **Capítulo 6** são apresentadas as conclusões finais e as sugestões para trabalhos futuros.

2 Modelagem Geométrica

2.1 Considerações Gerais

As curvas paramétricas polinomiais como a curva de Bézier permitem a modelagem de estruturas no plano ou no espaço. Quando a geometria a ser projetada possui uma forma complexa pode-se empregar mais de uma curva ao mesmo tempo, com acoplamento de diferentes segmentos de curva polinomial de diferentes graus.

O modelo geométrico é definido com base nas coordenadas dos pontos de controle da curva de Bézier, que mais adiante serão utilizados como variáveis de projeto no problema de otimização.

Nesta seção são abordadas não só as formulações matemáticas da curva de Bézier, como também suas representações gráficas. Cabe destacar que podem ser usados diversos tipos de representações paramétricas no plano ou no espaço como *splines*, *B-splines*, *NURBS*, *Coons patches*, entre outras. Contudo, estas não serão tratadas no presente estudo.

2.2 Curva de Bézier

A curva de Bézier é definida pela função chamada função básica de Bernstein ou polinômio de Bernstein e pelos pontos de controle (OHSAKI, 2010). Na Figura 2.1 são apresentados o perfil da curva de Bézier e o polígono de controle, o qual consiste nos pontos p_1 , p_2 , p_3 , e p_4 para uma curva de Bézier de terceira ordem.

As curvas de Bézier passam pelo primeiro e último ponto de controle, ou seja, p_1 e p_4 , no caso de uma curva de terceira ordem. Os pontos de controle intermediários p_2 e p_3 determinam a forma da curva. Comumente são usadas curvas de Bézier quadráticas ou cúbicas, já que a aplicação de polinômios de graus maiores é computacionalmente mais custosa de se calcular (ZOZ, 1999).

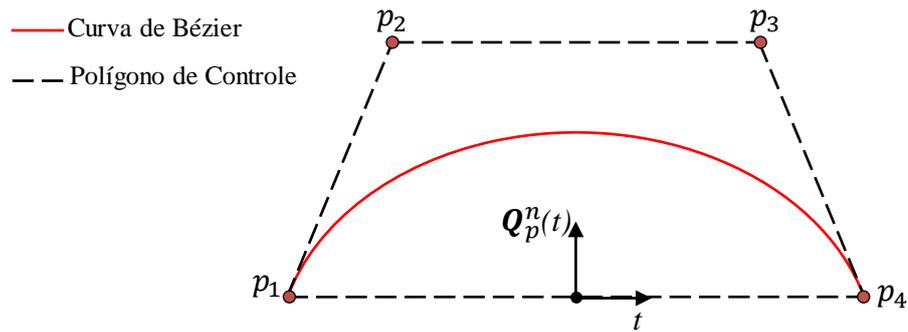


Figura 2.1: Polígono de controle e curva de Bézier de terceira ordem.

O polinômio de Bernstein $B_i^n(t)$ de ordem n é dado por:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2-1)$$

onde os coeficientes binomiais são definidos por:

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i! (n-i)!} & \text{para } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{para } i < 0 \text{ ou } i > n \end{cases} \quad (2-2)$$

onde t é o número de divisões do espaço paramétrico, compreendido $0 \leq t \leq 1$.

Uma curva de Bézier $Q_p^n(t)$ de ordem n é definida como:

$$Q_p^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad (2-3)$$

onde P_i são as coordenadas dos pontos de controle. Desta forma, uma curva de Bézier de ordem n precisa de $n + 1$ pontos de controle para ser definida, enquanto sua forma é controlada pela movimentação dos pontos de controle.

Neste trabalho é implementada a curva cúbica de Bézier, definida matricialmente da seguinte forma:

$$Q_p^n(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^x & p_1^y & p_1^z \\ p_2^x & p_2^y & p_2^z \\ p_3^x & p_3^y & p_3^z \\ p_4^x & p_4^y & p_4^z \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

2.3 Geração da Malha de Elementos Finitos

Uma vez definida a geometria da curva de Bézier é necessário chegar a uma discretização da estrutura em elementos de barra. Neste trabalho, a curva de Bézier foi usada tanto para representar uma parte da estrutura, conforme apresentado na Figura 2.2a, quanto para definir toda a geometria de acordo com a Figura 2.2b.

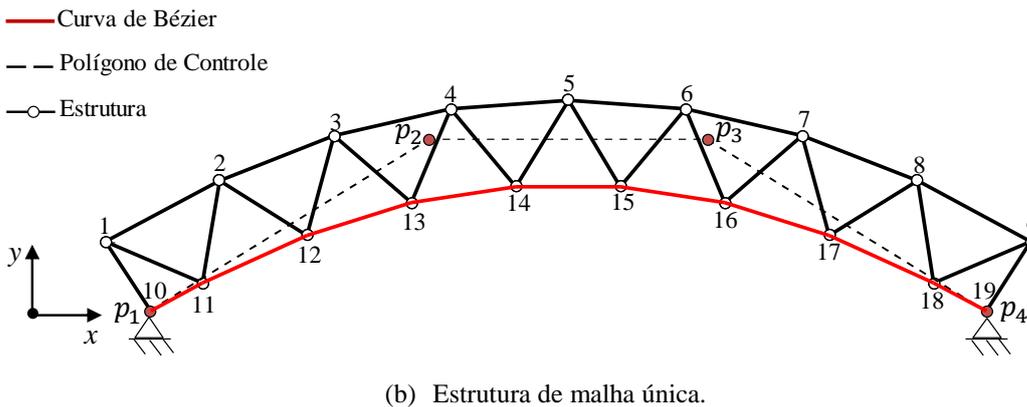
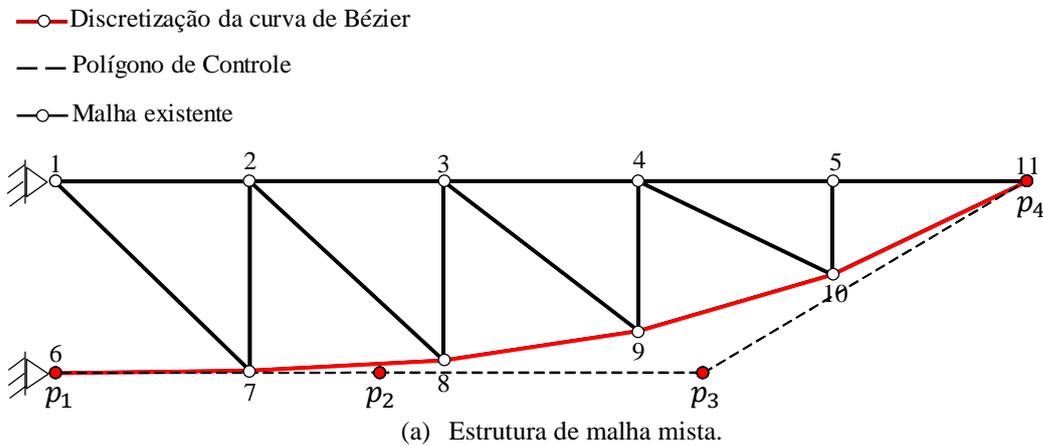


Figura 2.2: Geração da malha de Elementos Finitos.

No exemplo da Figura 2.2a a curva de Bézier é definida por meio da equação (2-4) com $t = 6$, onde o número de elementos para o banço inferior é de $t - 1$. Já

o exemplo apresentado na Figura 2.2b, corresponde a $t = 9$, onde o número de nós e o de elementos da estrutura são $N_{n,2} = 19$ e $N_{e,2} = 35$ respectivamente.

As coordenadas nodais do banzo inferior da estrutura mostrada na Figura 2.2b são definidas por meio da equação (2-5) ou graficamente pela Figura 2.3

$$\mathbf{Q}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_p^n(t_i) + \mathbf{Q}_p^n(t_{i+1})), \quad p = x, y, z \quad (2-5)$$

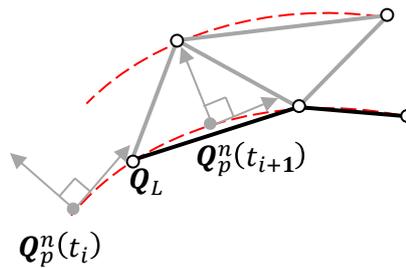


Figura 2.3: Definição das coordenadas nodais do banzo inferior.

As coordenadas nodais do banzo superior da estrutura apresentada na Figura 2.2b são definidas em relação ao vetor normal \mathbf{n}^0 e às coordenadas obtidas pela equação (2-4) que formam parte do banzo inferior como mostrado na Figura 2.4.

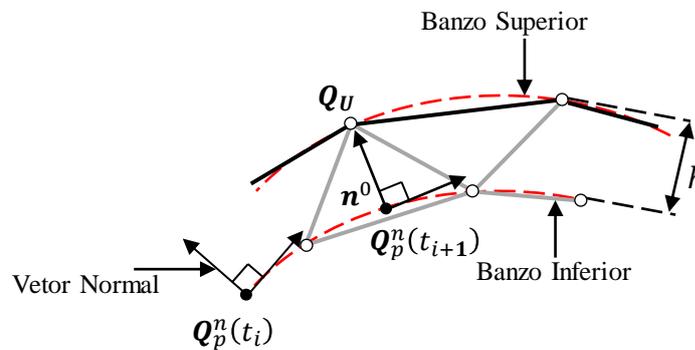


Figura 2.4: Definição das coordenadas nodais do banzo superior em função da altura h e do vetor normal \mathbf{n}^0 .

$$\mathbf{n}^0 = \frac{d\mathbf{Q}_p^n/dt}{\|d\mathbf{Q}_p^n/dt\|}, \quad (2-6)$$

onde $d\mathbf{Q}_p^n/dt$ é o gradiente analítico da equação (2-4) em relação ao espaço paramétrico t .

Dessa forma, pode-se definir as coordenadas do banzos superior como:

$$\mathbf{Q}_U = \mathbf{Q}_p^n(t_i) + \mathbf{n}^0 h, \quad p = x, y, z \quad (2-7)$$

onde h é a altura da treliça, ou seja, a distância entre os banzos inferior e superior.

O número total de nós e o de elementos para uma estrutura no plano são estabelecidos nas seguintes equações:

$$N_{n,2} = 2t + 1, \quad (2-8)$$

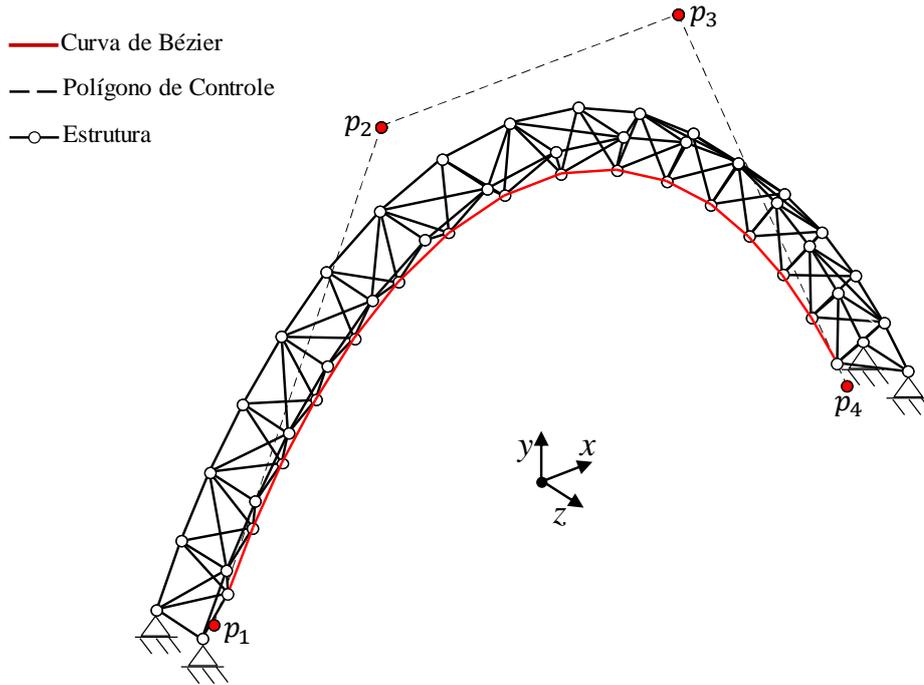
$$N_{e,2} = 4t - 1. \quad (2-9)$$

De modo similar, se estabelecem as coordenadas nodais do banzo inferior e superior para uma estrutura espacial, como mostrado na Figura 2.5. A estrutura espacial projetada apresenta as mesmas características da estrutura plana mostrada anteriormente. A diferença entre as duas modelagens consiste apenas em distanciar as coordenadas nodais do banzo superior para um plano de referência yz equidistante do plano corrente. Essa mudança de posição é feita para o arco frontal e o posterior da estrutura. Por outro lado, na Figura 2.5c é possível observar a mudança da malha de elementos finitos com a mudança da posição dos pontos de controle.

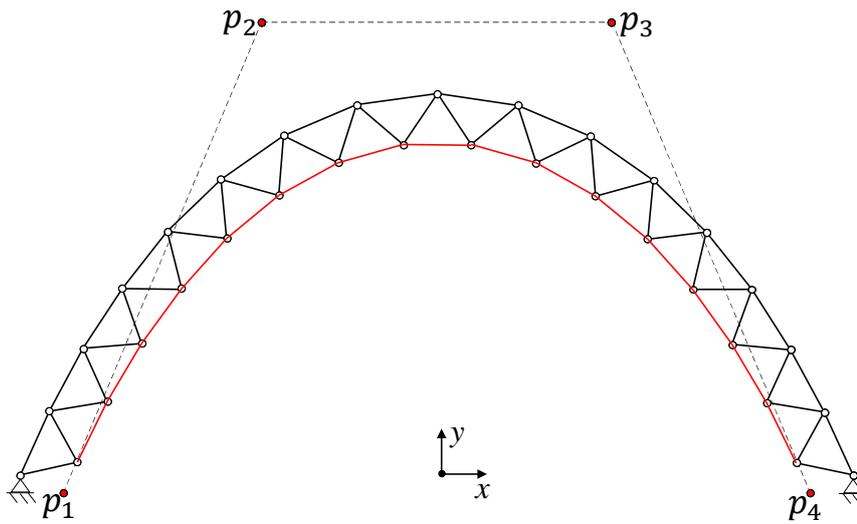
O número total de nós e o de elementos para uma estrutura espacial é da seguinte forma:

$$N_{n,3} = 3t - 1, \quad (2-10)$$

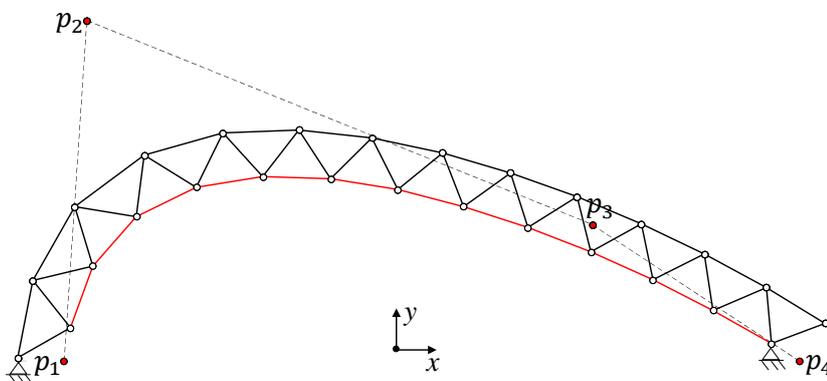
$$N_{e,3} = 9(t - 1). \quad (2-11)$$



(a) Vista isométrica.



(b) Vista frontal.



(c) Mudança na forma da curva Bézier, vista frontal.

Figura 2.5: Estrutura espacial, modelada com a curva de Bézier.

3 Análise Estática Linear de Treliças

3.1 Considerações Gerais

Este capítulo apresenta um breve estudo referente ao comportamento linear estático de estruturas treliçadas no plano e no espaço. Por essa razão, é preciso abordar as equações fundamentais que governam um problema estrutural junto com a sua respectiva solução. O desenvolvimento matemático da análise por elementos finitos se inicia com uma estrutura contínua a qual é dividida em pequenas partes chamadas de elementos, de modo que se mapeie a geometria estudada e se obtenha a resposta da estrutura por meio da solução do sistema de equações de equilíbrio.

O capítulo se encerra com a verificação e a comparação das rotinas de análise de elementos finitos implementadas no MATLAB® com o programa de engenharia SAP2000® V20.

3.2 Estruturas Treliçadas

O projeto de uma estrutura deve atender a diversos requisitos normativos como segurança, resistência e funcionalidade. Além disso, a estrutura deve apresentar um desempenho adequado às finalidades da construção e, desta forma, garantir a integridade e a segurança de pessoas e dos bens materiais que estão na sua redondeza.

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento das estruturas quando submetidas a solicitações externas, ou seja, obter a resposta das estruturas em termos dos deslocamentos.

Uma treliça é um elemento $e \in \{1, \dots, N_e\}$ uniaxial onde o comprimento é muito maior que as dimensões de sua seção transversal, cujas extremidades são conectadas aos pontos concorrentes entre dois ou mais membros conhecidos como nós. Todos os nós da estrutura N_n são tratados como articulados (rotação livre) e lhes são atribuídos um ou mais graus de liberdades que representam a natureza do

sistema discretizado (deslocamentos). Este tipo de estrutura pode ser modelada no plano ou no espaço $d \in \{2,3\}$. Os vetores \mathbf{X}, \mathbf{Y} e $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N_{n,d}}$ contêm as coordenadas nodais da estrutura. As forças externas $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{dN_{n,d}}$ são aplicadas diretamente nas posições nodais. As barras transmitem apenas forças axiais de tração ou compressão na direção longitudinal da barra. Outros tipos de esforços decorrentes como momento fletor, momento torçor e forças cortantes não são ponderados neste tipo de estruturas.

3.3

Formulação para a Análise Linear de Estruturas Reticuladas

Quando se fala de análise estrutural, deve-se referir a seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade, que faz parte da Mecânica dos Sólidos, cujos conceitos proporcionam a relação de tensão-deformação, ou dito em outras palavras, as equações básicas nomeadas como equações de compatibilidade, de equilíbrio e constitutivas.

No Método dos Elementos Finitos o campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_e(x')$ é definido no interior dos elementos a partir dos deslocamentos nodais \mathbf{u}'_e , através da equação (3-1)

$$\tilde{\mathbf{u}}_e(x') = \mathbf{N}(x')\mathbf{u}'_e, \quad (3-1)$$

onde $\mathbf{N}(x') = \left[1 - \frac{x'}{L_e}, \frac{x'}{L_e}\right]$ é uma matriz constituída a partir das funções de interpolação dos deslocamentos. L_e é o comprimento do elemento definido como:

$$L_e = \sqrt{(a_{2,x} - a_{1,x})^2 + (a_{2,y} - a_{1,y})^2 + (a_{2,z} - a_{1,z})^2}, \quad (3-2)$$

onde \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 são as coordenadas cartesianas iniciais e finais de cada elemento, no sistema de referência global como exibido na Figura 3.1.

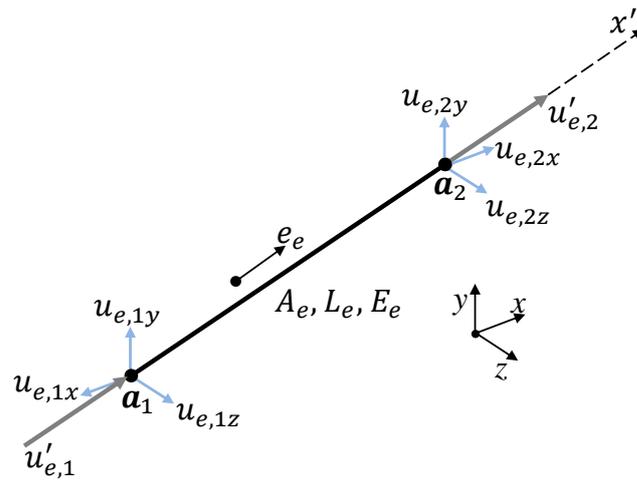


Figura 3.1: Elemento de treliça no sistema de referência natural $\{x'\}$ e global $\{x, y, z\}$.

Na Figura 3.1 são mostrados os deslocamentos nodais \mathbf{u}'_e do elemento no sistema de referência natural e os mesmos deslocamentos nodais \mathbf{u}_e projetados no sistema de referência global por meio dos cossenos diretores.

O estado de deformação normal $\varepsilon_{e,x}$ em um elemento de treliça ao longo do eixo x' do sistema de referência natural é determinado por:

$$\varepsilon_{e,x} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_e(x')}{\partial x'} = \frac{\partial \mathbf{N}(x')}{\partial x'} \mathbf{u}'_e, \quad (3-3)$$

ou ainda

$$\varepsilon_{e,x} = \mathbf{B}'_e \mathbf{u}'_e, \quad (3-4)$$

onde \mathbf{B}'_e representa a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com a deformação do elemento no sistema de referência natural. Assim, a matriz \mathbf{B}'_e pode ser expressa através da equação:

$$\mathbf{B}'_e = \frac{1}{L_e} [-1 \quad 1]. \quad (3-5)$$

No sistema de referência global a matriz que relaciona os deslocamentos e as deformações é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{e,d} = \mathbf{B}'_e \mathbf{c}_d, \quad (3-6)$$

onde \mathbf{c}_d são os cossenos diretores de cada elemento na dimensão d ;

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}, \quad (3-7)$$

assim, os cossenos diretores c_x, c_y e c_z são estabelecidos como apontado nas equações (3-8), (3-9) e (3-10)

$$c_x = \frac{(a_{2,x} - a_{1,x})}{L_e}, \quad (3-8)$$

$$c_y = \frac{(a_{2,y} - a_{1,y})}{L_e}, \quad (3-9)$$

$$c_z = \frac{(a_{2,z} - a_{1,z})}{L_e}. \quad (3-10)$$

Rescrevendo a equação (3-6), tem-se:

$$\mathbf{B}_{e,2} = \frac{1}{L_e} [-c_x, -c_y, c_x, c_y], \quad (3-11)$$

$$\mathbf{B}_{e,3} = \frac{1}{L_e} [-c_x, -c_y, -c_z, c_x, c_y, c_z]. \quad (3-12)$$

Os deslocamentos globais \mathbf{U} são definidos a partir da solução do sistema de equações de equilíbrio;

$$\mathbf{F} = \mathbf{KU}, \quad (3-13)$$

onde \mathbf{K} representa a matriz de rigidez global, obtida pela contribuição das matrizes de rigidez locais $\mathbf{k}_{e,d}$, definida pela integral no volume de cada elemento e escrita na forma de integral como segue:

$$\mathbf{k}_{e,d} = \int_V \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \mathbf{B}_{e,d} dV. \quad (3-14)$$

Resolvendo-se a integral de volume da equação (3-14), tem-se que a matriz de rigidez local $\mathbf{k}_{e,d}$ é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_{e,2} = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & -c_x^2 & -c_x c_y \\ c_x c_y & c_y^2 & -c_x c_y & -c_y^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & c_x^2 & c_x c_y \\ -c_x c_y & -c_y^2 & c_x c_y & c_y^2 \end{bmatrix}, \quad (3-15)$$

$$\mathbf{k}_{e,3} = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix}, \quad (3-16)$$

onde o escalar E_e representa o módulo de elasticidade do material para cada elemento. Neste trabalho são usados perfis circulares de alumínio como indicado na Figura 3.2, onde para um raio médio R_m e espessura t_s pode-se escrever a área A_e e a inércia mínima I_{min} como segue:

$$A_e = 2\pi t_s R_m, \quad (3-17)$$

$$I_{min} = \frac{\pi R_m t_s}{4} (4R_m^2 + t_s^2). \quad (3-18)$$

A tensão axial de tração ou compressão atuante no elemento é obtida da seguinte forma:

$$\sigma_e = E_e \varepsilon_{e,x} = E_e \mathbf{B}_{e,d} \mathbf{u}_e \quad (3-19)$$

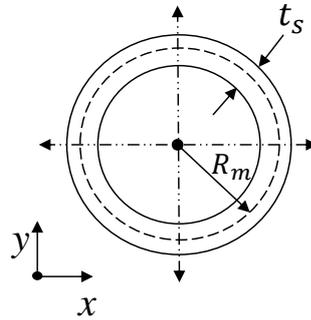


Figura 3.2: Perfil circular de Alumínio.

3.4 Verificação da Análise Estática Linear

Uma estrutura treliçada em forma de arco é analisada a fim de verificar as rotinas de análise de elementos finitos implementadas. A estrutura contém 126 elementos e 44 nós. As posições nodais 1, 2, 29 e 30 encontram-se restritas nas direções x , y e z , como representado na Figura 3.3. A estrutura foi analisada com apenas um caso de carga, correspondente ao peso próprio dos elementos.

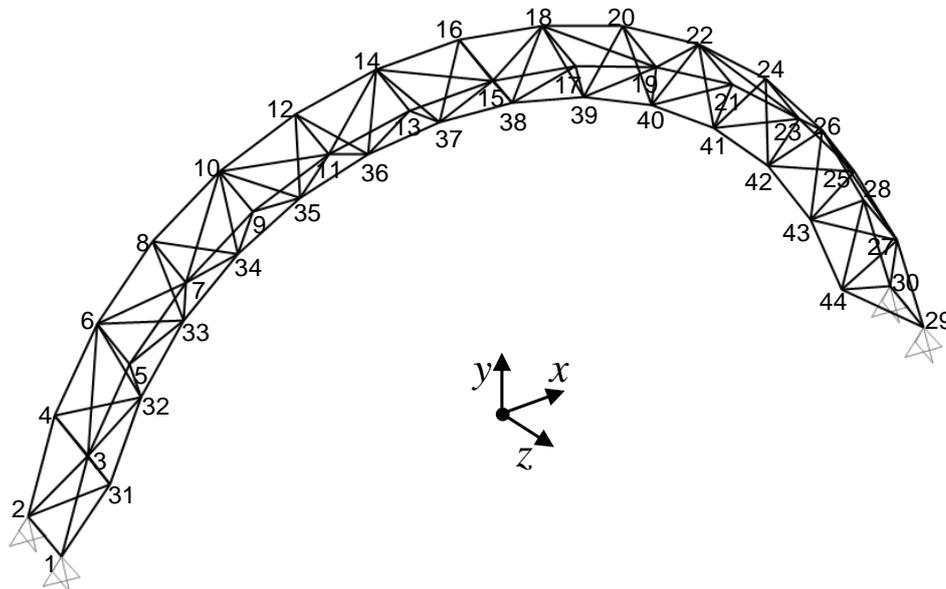


Figura 3.3: Estrutura treliçada em forma de arco.

Na Tabela 3.1 são apresentadas as propriedades do material utilizado de acordo com a norma Aluminum Design Manual 2016 (ADM 2016).

Tabela 3.1: Propriedades mecânicas do Alumínio 6351-T6.

Propriedades Mecânicas		Unidades
F_{cy}	255	<i>MPa</i>
E_e	70	<i>GPa</i>
ρ_e	2700	<i>kg/m³</i>

Como mencionado anteriormente, foram usados perfis circulares de alumínio de espessura constante de $t_s = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ e área $A_e = 6.480 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ para cada elemento na estrutura. A estrutura tem uma massa total de 870.2 *kg*.

O programa SAP2000® é utilizado para verificar a implementação da análise estática linear elaborada no MATLAB®. Dessa forma, a geometria e as condições de contorno da estrutura são exportadas para o programa SAP2000® V20 através da sua OAPI. Da mesma forma, as propriedades dos materiais e os parâmetros da análise são definidos. O desenvolvimento desta integração é apresentado no Apêndice A.

Na Tabela 3.2 é apresentada a comparação entre as duas soluções abordadas para os deslocamentos nas direções x, y e z das posições nodais 6 e 39, além da comparação nas tensões das barras 17 e 52, respectivamente.

Tabela 3.2: Verificação das rotinas implementadas no MATLAB® com SAP2000®.

Nó/Elemento		MATLAB®	SAP2000®
Deslocamento (Nó 6) (<i>m</i>)	x	-2.257×10^{-4}	-2.257×10^{-4}
	y	-1.281×10^{-5}	-1.281×10^{-5}
	z	-2.452×10^{-4}	-2.452×10^{-4}
Deslocamento (Nó 39) (<i>m</i>)	x	2.071×10^{-5}	2.071×10^{-5}
	y	1.505×10^{-4}	1.505×10^{-4}
	z	-1.080×10^{-3}	-1.080×10^{-3}
Tensão (Barra 17) (<i>MPa</i>)		-1.021	-1.021
Tensão (Barra 52) (<i>MPa</i>)		-0.919	-0.919

Na Figura 3.4 é apresentado o campo dos deslocamentos da estrutura, mostrando a variação dos deslocamentos para cada elemento.

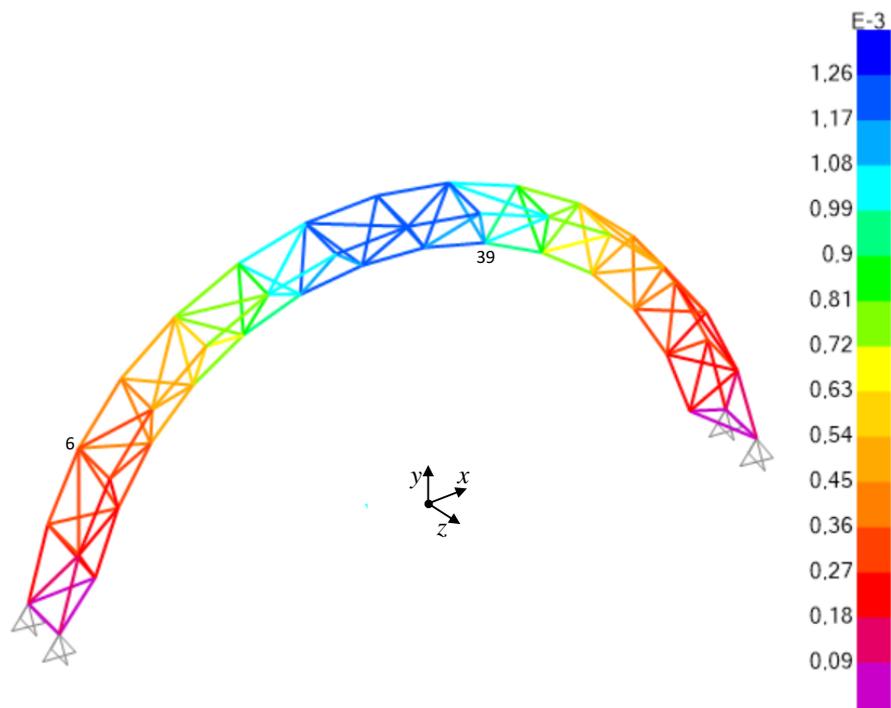


Figura 3.4: Magnitude dos deslocamentos nodais da estrutura (m), programa SAP2000® V20 (CSI, 2019).

4 Análise de Sensibilidade

4.1 Considerações Gerais

A análise de sensibilidade tem como finalidade verificar o comportamento da função objetivo e das restrições quando se aplica uma pequena perturbação em uma determinada variável de projeto, que, conseqüentemente, determina a sua influência no problema de otimização. Neste capítulo é abordado o desenvolvimento matemático de dois métodos para a obtenção da sensibilidade: o método das diferenças finitas e o método da diferenciação direta.

Nas próximas seções serão estudadas a análise de sensibilidade das restrições de desigualdade, dos diferentes tipos de solicitações externas e da curva de Bézier. No final do capítulo, observa-se um exemplo a fim de validar a implementação do cálculo de sensibilidade pelo método analítico.

4.2 Método das Diferenças Finitas (MDF)

O método das diferenças finitas é uma técnica simples e de fácil implementação para o cálculo do gradiente de uma função em torno de um determinado parâmetro ou variável de projeto. Em contrapartida, esta técnica tem um alto custo computacional. Neste trabalho, foi utilizada a aproximação de primeira ordem das diferenças finitas à frente, definida a seguir:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (4-1)$$

onde Δx é uma perturbação realizada na variável de projeto x , pequena o suficiente para permitir a obtenção de resultados satisfatórios e, deste modo, evitar erros de truncamento ou arredondamento.

4.3 Método da Diferenciação Direta (MDD)

O método direto determina a sensibilidade por meio da diferenciação direta das restrições de desigualdade e das equações que governam o problema de equilíbrio estático de uma estrutura em relação às variáveis de projeto \mathbf{x} .

Seja g_l o vetor que contém o conjunto de restrições de desigualdade da tensão de escoamento e da tensão crítica de Euler, pode-se definir as restrições de desigualdade g_l de maneira normalizada como:

$$g_l(\mathbf{x}) = \frac{|\sigma_e(\mathbf{x})|}{\sigma_e^a(\mathbf{x})} - 1 \leq 0, \quad (4-2)$$

onde σ_e é a tensão axial do elemento e e σ_e^a é a tensão admissível. Para $\sigma_e > 0$, elementos tracionados, $\sigma_e^a = \sigma_e^T$, onde σ_e^T é a tensão admissível à tração. Para os elementos comprimidos, $\sigma_e < 0$, $\sigma_e^a(\mathbf{x}) = \min[\sigma_e^c, \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})]$, onde σ_e^c é a tensão admissível à compressão e σ_e^{cr} é a tensão crítica de Euler, dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_e^{cr}(\mathbf{x}) = \frac{k_{flb} \pi^2 E_e I_{min}}{A_e L_e^2}, \quad (4-3)$$

onde k_{flb} é a constante geométrica que depende da seção transversal do elemento.

Assim a sensibilidade das restrições de desigualdade para a tensão de escoamento e tensão crítica de Euler podem ser definidas de forma normalizada como:

$$\frac{\partial g_l(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\text{sign}[\sigma_e(\mathbf{x})]}{\sigma_e^a(\mathbf{x})} \frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\text{sign}[\sigma_e(\mathbf{x})] \sigma_e(\mathbf{x})}{[\sigma_e^a(\mathbf{x})]^2} \frac{\partial \sigma_e^a(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad (4-4)$$

onde $\frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ é o gradiente da tensão axial do elemento, determinado pela derivada da equação (3-19) do capítulo 3, em relação às variáveis de projeto \mathbf{x} , como indicado na equação (4-5)

$$\frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x})}{\partial x_j} = E_e \frac{\partial \mathbf{B}_{e,d}}{\partial x_j} \mathbf{u}_e + E_e \mathbf{B}_{e,d} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_j}, \quad (4-5)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{e,2}}{\partial x_j} = \frac{1}{L_e} \left[-\frac{\partial c_x}{\partial x_j}, -\frac{\partial c_y}{\partial x_j}, \frac{\partial c_x}{\partial x_j}, \frac{\partial c_y}{\partial x_j} \right] - 2 \frac{\mathbf{B}_{e,2}}{L_e} \frac{\partial L_e}{\partial x_j}, \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{e,3}}{\partial x_j} = \frac{1}{L_e} \left[-\frac{\partial c_x}{\partial x_j}, -\frac{\partial c_y}{\partial x_j}, -\frac{\partial c_z}{\partial x_j}, \frac{\partial c_x}{\partial x_j}, \frac{\partial c_y}{\partial x_j}, \frac{\partial c_z}{\partial x_j} \right] - 2 \frac{\mathbf{B}_{e,3}}{L_e} \frac{\partial L_e}{\partial x_j}, \quad (4-7)$$

onde $\frac{\partial c_x}{\partial x_j}, \frac{\partial c_y}{\partial x_j}, \frac{\partial c_z}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial L_e}{\partial x_j}$ são as respectivas derivadas dos cossenos diretores nas direções x, y e z e do comprimento dos elementos em relação aos pontos de controle, como apresentado nas seguintes equações:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x_j} = \frac{1}{L_e} \left(\frac{\partial a_{2,x}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{1,x}}{\partial x_j} \right), \quad (4-8)$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial x_j} = \frac{1}{L_e} \left(\frac{\partial a_{2,y}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{1,y}}{\partial x_j} \right), \quad (4-9)$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial x_j} = \frac{1}{L_e} \left(\frac{\partial a_{2,z}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{1,z}}{\partial x_j} \right), \quad (4-10)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial x_j} = [(a_{2,x} - a_{1,x}), (a_{2,y} - a_{1,y}), (a_{2,z} - a_{1,z})]^T \left[\frac{\partial c_x}{\partial x_j}, \frac{\partial c_y}{\partial x_j}, \frac{\partial c_z}{\partial x_j} \right]. \quad (4-11)$$

Finalmente, para determinar o gradiente da tensão do elemento é necessária a avaliação da sensibilidade dos deslocamentos $\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial x_j}$, por meio da diferenciação da equação de equilíbrio (4-12) em relação às variáveis de projeto \mathbf{x} , de tal forma que:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (4-12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad (4-13)$$

reorganizando, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{U}(\mathbf{x}) \right), \quad (4-14)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ é o vetor com os deslocamentos nodais e $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor que contém os carregamentos aplicados na estrutura.

Por conseguinte, tem-se que a equação da matriz de rigidez global é definida como segue:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_V \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \mathbf{B}_{e,d} dV = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \mathbf{B}_{e,d} A_e L_e, \quad (4-15)$$

entretanto, a sensibilidade da matriz de rigidez global em relação às variáveis de projeto é estabelecida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{e,d}^T}{\partial x_j} E_e \mathbf{B}_{e,d} A_e L_e + \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \frac{\partial \mathbf{B}_{e,d}}{\partial x_j} A_e L_e \right. \\ \left. + \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \mathbf{B}_{e,d} \frac{\partial A_e}{\partial x_j} L_e + \mathbf{B}_{e,d}^T E_e \mathbf{B}_{e,d} A_e \frac{\partial L_e}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (4-16)$$

Por outro lado, a sensibilidade da tensão crítica de Euler é obtida por meio da derivada da equação (4-3) em relação às variáveis de projeto \mathbf{x} , como exposto na equação (4-17)

$$\frac{\partial \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})}{\partial I_{min}} \frac{\partial I_{min}}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})}{\partial A_e} \frac{\partial A_e}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})}{\partial L_e} \frac{\partial L_e}{\partial x_j}, \quad (4-17)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \sigma_e^{cr}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{k_{flb} \pi^2 E_e}{A_e L_e^2} \frac{\partial I_{min}}{\partial x_j} - \frac{k_{flb} \pi^2 E_e I_{min}}{A_e^2 L_e^2} \frac{\partial A_e}{\partial x_j} - \frac{2k_{flb} \pi^2 E_e I_{min}}{A_e L_e^3} \frac{\partial L_e}{\partial x_j}, \quad (4-18)$$

onde para x_j sendo uma área

$$\frac{\partial I_{min}}{\partial x_j} = \frac{\partial I_{min}}{\partial R_m} \frac{\partial R_m}{\partial A_e} = \frac{12R_m^2 + t_s^2}{8}. \quad (4-19)$$

4.4 Sensibilidade dos Carregamentos

Diversos tipos de solicitações externas de diferentes naturezas podem atuar em uma estrutura, que podem ser permanentes, variáveis e excepcionais (ANDRADE; VELLASCO, 2016). Quando estas forças $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ são dependentes das variáveis de projeto é necessário determinar a sensibilidade de cada uma delas em relação as variáveis de projeto.

4.4.1 Carregamentos Permanentes

As cargas permanentes devido ao peso próprio da estrutura se determinam, como o produto da força gravitacional, a densidade do material, área e o comprimento para cada elemento como apresentado na equação (4-20)

$$\mathbf{F}_{pp} = 9.81 \rho_e A_e L_e \left[0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right]^T, \quad (4-20)$$

onde a influência do peso da barra é distribuída para cada posição nodal do elemento e aplicada ao grau de liberdade equivalente como exibido na Figura 4.1.

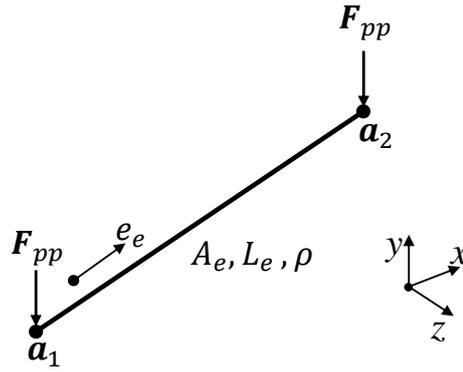


Figura 4.1: Carregamento do peso próprio.

A sensibilidade do carregamento do peso próprio é definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{pp}}{\partial x_j} = 9.81 \rho_e \left(\frac{\partial A_e}{\partial x_j} L_e + A_e \frac{\partial L_e}{\partial x_j} \right) \left[0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right]^T. \quad (4-21)$$

A cobertura tem como função proteger a estrutura em sua parte superior contra intempéries. O carregamento devido ao peso próprio da cobertura é aplicado aos nós dos banzo superior da estrutura. Para uma geometria de 4 nós correspondente a uma telha retangular, a força aplicada aos 4 pontos da telha é definida da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}_{PC} = \frac{QA_c}{4} [0 \quad -1 \quad 0], \quad (4-22)$$

onde Q é a intensidade da pressão exercida referente à telha e A_c é a área da telha projetada no plano xz .

A sensibilidade do peso próprio da cobertura é calculada pelo método das diferenças finitas à frente, onde o valor da perturbação é de $\Delta x = 10^{-8}$.

4.4.2 Carregamento por Unidade de Comprimento

Outros tipos de ações externas podem ser aplicados na estrutura. Na Figura 4.2 se observa um carregamento distribuído por unidade de comprimento para um determinado elemento da estrutura. Por conseguinte, pode-se estipular o carregamento equivalente para cada nó da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_D = qL_e^x \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4-23)$$

Onde q é a carga aplicada por unidade de comprimento horizontal e L_e^x são os elementos localizados no plano xy e projetados ao longo do eixo x .

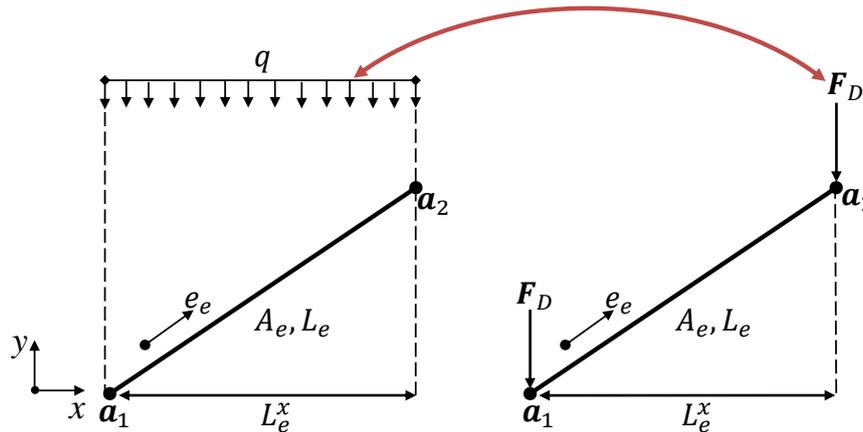


Figura 4.2: Carga linearmente distribuída.

Assim, a sensibilidade do carregamento distribuído por unidade de comprimento é obtida por meio da sensibilidade do comprimento L_e^x como:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial x_j} = q \frac{\partial L_e^x}{\partial x_j} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4-24)$$

onde

$$\frac{\partial L_e^x}{\partial x_j} = [(a_{2,x} - a_{1,x})]^T \left[\frac{\partial c_x}{\partial x_j} \right]. \quad (4-25)$$

4.4.3 Carregamentos Variáveis

Ações variáveis do tipo vento, sobrecarga, entre outras, são também analisadas na estrutura. A sua intensidade é medida como a força por unidade de área e definida matematicamente da seguinte maneira:

$$F_A = WNA_{infl}, \quad (4-26)$$

sendo W a intensidade do carregamento devido ao vento e à sobrecarga, N o vetor normal unitário à superfície de aplicação dos carregamentos como exibido na Figura 4.3 e A_{infl} é a área de influência um nó sobre uma geometria retangular.

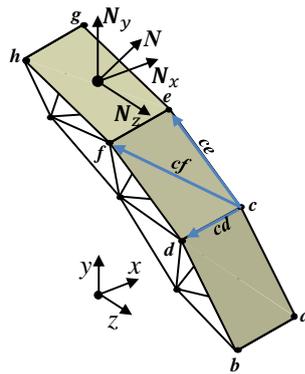


Figura 4.3: Carregamentos devido ao vento e à sobrecarga.

Para determinar o vetor normal unitário à superfície, deve-se:

- 1- Verificar se os pontos que formam a superfície fechada são coplanares, de tal forma que o determinante da matriz A_{cp} seja zero ou próximo de zero. No entanto, para estabelecer a matriz A_{cp} , deve-se traçar três vetores a partir de um ponto de referência local e fixo para cada superfície como apontado na Figura 4.3, de tal forma que:

$$cd = d - c, \quad (4-27)$$

$$ce = e - c, \quad (4-28)$$

$$cf = f - c, \quad (4-29)$$

$$A_{cp} = \det \begin{pmatrix} cd \\ ce \\ cf \end{pmatrix} \cong 0, \quad (4-30)$$

- 2- Determinar o vetor normal à superfície por meio do produto vetorial externo como segue:

$$\mathbf{n} = \mathbf{cd} \times \mathbf{ce}, \quad (4-31)$$

A área da superfície é a norma do vetor normal à superfície é estabelecida como:

$$A_{sup} = \|\mathbf{n}\|, \quad (4-32)$$

A obtenção da área de influência de um nó sobre uma geometria retangular, consiste em dividir a área da superfície A_{sup} entre os 4 pontos que conformam o polígono, de modo que:

$$A_{infl} = \frac{1}{4} A_{sup}, \quad (4-33)$$

- 3- Finalmente, o vetor normal unitário é definido como:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{n}}{A_{sup}}. \quad (4-34)$$

A sensibilidade dos carregamentos variáveis mencionados anteriormente é calculada pelo método das diferenças finitas à frente, sendo o valor da perturbação de $\Delta x = 10^{-8}$.

4.5 Sensibilidade da Curva de Bézier

A sensibilidade da curva de Bézier em relação ao espaço paramétrico t é definida mediante a diferenciação direta da equação (2-4). Dessa forma tem-se:

$$\frac{d\mathbf{Q}_p^n(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^x & p_1^y & p_1^z \\ p_2^x & p_2^y & p_2^z \\ p_3^x & p_3^y & p_3^z \\ p_4^x & p_4^y & p_4^z \end{bmatrix}. \quad (4-35)$$

A sensibilidade da curva de Bézier para o banzo inferior, o banzo superior e a altura da treliça são definidos como:

$$\frac{dQ_L}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dQ_p^n(t_i)}{dt} + \frac{dQ_p^n(t_{i+1})}{dt} \right), \quad p = x, y, z \quad (4-36)$$

$$\frac{dQ_U}{dt} = \frac{dQ_p^n(t_i)}{dt} + \left(\frac{dn^0}{\|n^0\|} - \frac{n^0 (n^0 dn^{0T})}{\|n^0\|^3} \right) h, \quad p = x, y, z \quad (4-37)$$

derivando a equação (2-7) em relação a variável de projeto x_j como a altura da treliça h tem-se:

$$\frac{dQ_U}{dh} = n^0. \quad (4-38)$$

4.6 Verificação da Análise de Sensibilidade

Nesta seção é apresentado um exemplo de uma estrutura treliçada em forma de arco, cuja modelagem é feita com a curva paramétrica de Bézier, conforme apresentado na Figura 4.4. A estrutura a ser analisada foi apresentada no capítulo 3, na etapa de verificação da análise estática linear. O presente exemplo trata da sensibilidade dos pontos de controle p_2 e p_3 nas direções x , e y , da altura da treliça h , das áreas A_e dos elementos, da tensão axial e da tensão crítica de Euler. Os objetivos deste exemplo são validar as expressões abordadas neste capítulo e comparar a precisão com os métodos discutidos anteriormente.

O MDF à frente foi utilizado para verificar as sensibilidades calculadas pelo MDD, sendo considerada para o primeiro método uma perturbação de $\Delta x = 10^{-8}$. A calibração do MDF à frente é realizada por meio da mudança do tamanho do passo Δx . A escolha do passo é feita através da comparação entre o MDD com o MDF à frente para a tensão axial do elemento 17 em relação ao ponto de controle p_2 na direção x .

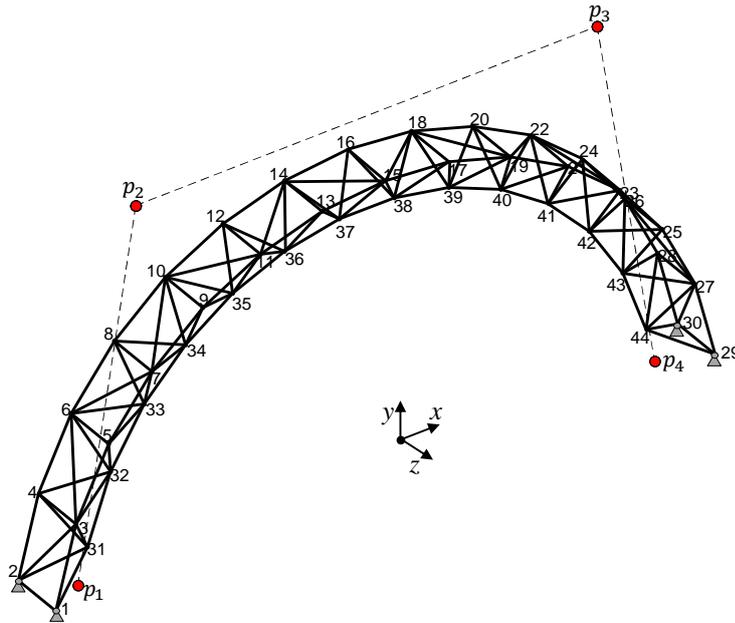


Figura 4.4: Estrutura treliçada modelada com a curva de Bézier.

Na Figura 4.5 pode-se perceber a variação do erro normalizado em função da alteração do valor da perturbação Δx da aproximação tratada. Observa-se que o valor da perturbação Δx para uma aproximação de primeira ordem varia de 10^{-4} a 10^{-8} para o MDF à frente, proporcionando resultado apropriado para diversas aplicações na engenharia.

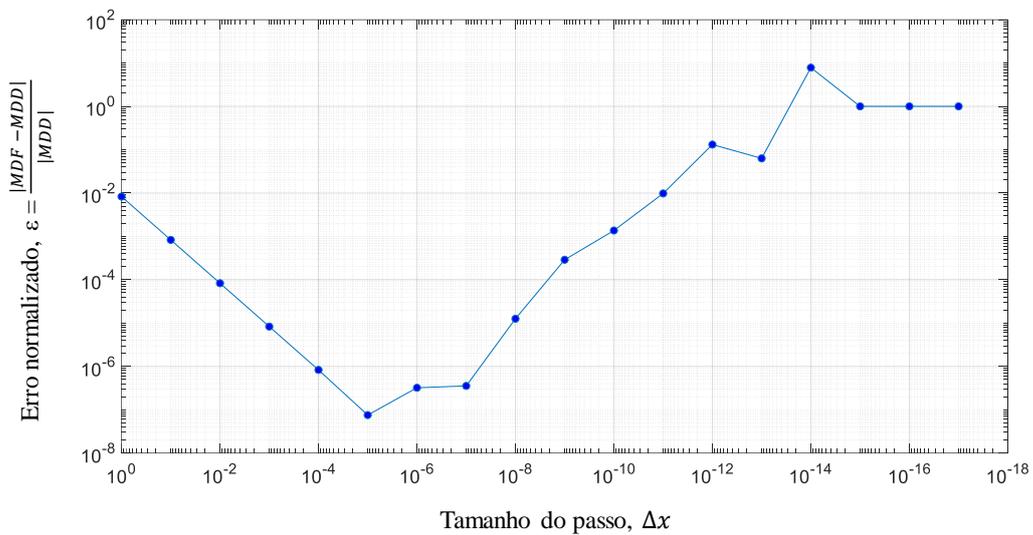


Figura 4.5: Erro relativo para o cálculo da sensibilidade, método das diferenças finitas à frente e método da diferenciação direta.

Na Tabela 4.1 são apresentadas as sensibilidades calculadas pelos MDD e MDF à frente para os elementos 17 e 52 em relação às variáveis de projeto x_j . É considerado para a tensão crítica de Euler uma constante geométrica $k_{flb} = 0.85$.

Tabela 4.1: Verificação da análise de sensibilidade em relação às variáveis de projeto.

Variáveis de Projeto	Direção	Elemento e		Sensibilidade	
				MDD	MDF
p_2	x	17	$\frac{\partial L_e}{\partial p_2^x}$	2.305×10^{-2}	2.305×10^{-2}
	y		$\frac{\partial L_e}{\partial p_2^y}$	7.602×10^{-2}	7.602×10^{-2}
p_3	x	52	$\frac{\partial L_e}{\partial p_3^x}$	5.255×10^{-3}	5.255×10^{-3}
	y		$\frac{\partial L_e}{\partial p_3^y}$	-2.393×10^{-3}	-2.393×10^{-3}
h	N/A	17	$\frac{\partial L_e}{\partial h}$	2.029×10^{-1}	2.029×10^{-1}
A_e	N/A	17	$\frac{\partial \sigma_e^{cr}}{\partial A_e}$	8.463×10^{10}	8.463×10^{10}
A_e	N/A	52	$\frac{\partial \sigma_e^{cr}}{\partial A_e}$	1.207×10^{11}	1.207×10^{11}
p_2	x	17	$\frac{\partial \sigma_e}{\partial p_2^x}$	-2.345×10^5	-2.345×10^5
	y	52	$\frac{\partial \sigma_e}{\partial p_2^y}$	1.226×10^5	1.226×10^5

5 Otimização Dimensional e de Forma

5.1 Considerações Gerais

O desejo de obter a configuração ideal de uma estrutura leva engenheiros e pesquisadores a desenvolverem técnicas numéricas que permitam encontrar formas diferenciadas nas estruturas, além de reduzir seu peso. Estas técnicas têm sido de grande importância em diversas áreas da indústria como as engenharias mecânica, aeronáutica, civil, automotiva, entre outras, devido ao impacto produzido no custo final do projeto sem omitir os requisitos normativos definidos.

O presente capítulo propõe a formulação e solução do problema de otimização com restrições, através dos conceitos da programação matemática. Os objetivos principais deste capítulo são de verificar a metodologia implementada, reduzir a massa da estrutura determinando a dimensão das seções de transversais de cada elemento e obter a forma geométrica ótima dos limites externos e internos da estrutura, quando esta se encontra submetida a diversos carregamentos estáticos. No final do capítulo são resolvidos problemas de otimização dimensional e de forma baseado no comportamento linear estático em estruturas.

5.2 Metodologia de Otimização

O código computacional desenvolvido foi escrito em linguagem MATLAB® e tem como finalidade minimizar o peso e determinar a forma ótima em estruturas treliçadas. Para o algoritmo de otimização alcançar o ponto ótimo é necessário, além das equações apresentadas nos capítulos 2, 3, 4 e 5 para a curva de Bézier, a análise de elementos finitos, a análise de sensibilidade e a formulação do problema de otimização, o uso da função `fmincon` do pacote de otimização do MATLAB® para resolver o problema proposto neste trabalho. A função `fmincon` requer como dados de entrada a função objetivo, as restrições de igualdade e desigualdade, o ponto inicial, os limites inferior e superior das variáveis de projeto e o cálculo da

sensibilidade da função objetivo e das restrições de desigualdade em relação às variáveis de projeto. A tolerância de otimalidade e o número máximo de iterações do problema de otimização podem ser também definidos.

5.3 Formulação do Problema de Otimização

A solução de um problema de otimização é determinada através dos fundamentos da programação matemática, área que trata dos problemas de minimização ou maximização de funções, ocupando-se do tratamento teórico e desenvolvimento de algoritmos para a sua solução. Um problema de programação matemática (VAZ; PEREIRA; MENEZES, 2012) pode ser escrito como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^m \\
 & h_k(\mathbf{x}) = 0 & k = 1 \dots b \\
 \text{sujeito a} & g_l(\mathbf{x}) \leq 0 & l = 1 \dots c \\
 & x_j^{lb} \leq x_j \leq x_j^{ub} & j = 1 \dots m
 \end{array} \quad (5-1)$$

onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo a ser minimizada, de m variáveis de projeto contidas no vetor \mathbf{x} e sujeitas a b restrições de igualdade $h_k(\mathbf{x})$, c restrições de desigualdade $g_l(\mathbf{x})$ e m restrições laterais compreendidas nos intervalos mínimo x_j^{lb} e máximo x_j^{ub} das variáveis de projeto x_j . As restrições laterais são consideradas viáveis e delimitam a região de busca para solução do problema de otimização.

Neste trabalho a função objetivo é representada como a massa total da estrutura:

$$f(\mathbf{x}) = m_T = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e A_e L_e, \quad (5-2)$$

onde N_e é o número total de elementos, ρ_e é a densidade do material, A_e e L_e são as áreas das seções transversais e os comprimentos de cada elemento, respectivamente.

As quantidades numéricas que possibilitam a mudança de parâmetros em um problema de otimização são chamadas de variáveis de projeto. Neste trabalho, as

variáveis de projeto são as seções transversais dos elementos, a altura da treliça e as coordenadas dos pontos de controle da curva de Bézier, estabelecidas da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \{A_{bsup}, A_{horz}, A_{diag}, A_{binf}, h, p_1^x, p_1^y, p_2^x, p_2^y, p_3^x, p_3^y, p_4^x, p_4^y\}, \quad (5-3)$$

nos quais, os grupos A_{bsup} , A_{horz} , A_{diag} e A_{binf} são variáveis que armazenam as seções transversais do banzo superior, horizontais, diagonais e banzo inferior dos membros estruturais, como mostrado na Figura 5.1. No entanto, podem ser considerados mais grupos de áreas dos que estão atualmente registrados.

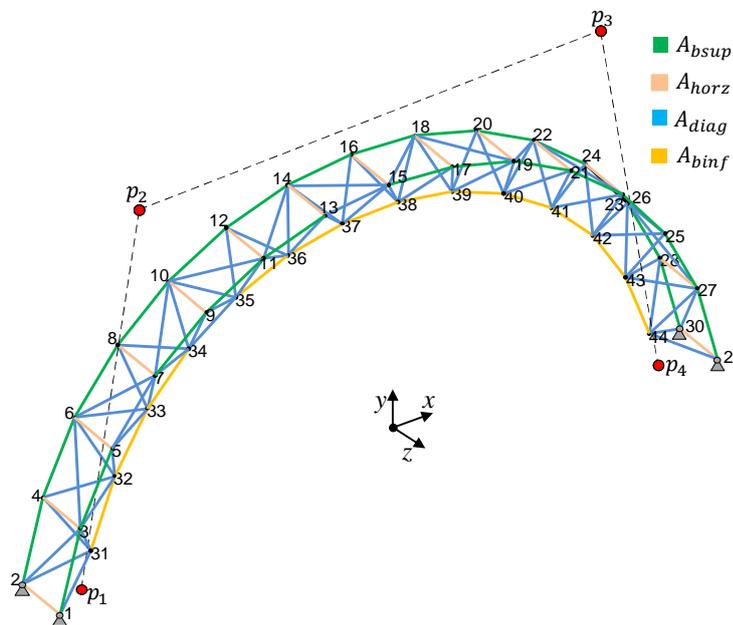


Figura 5.1: Estrutura com grupos de áreas e pontos de controle.

A variável de projeto h é a altura da treliça e separa os banzos inferior e superior. As variáveis de projeto p_1^x até p_4^y da equação (5-3) são definidas como a variação dos pontos de controle nas direções x e y . As alturas e distâncias horizontais dos pontos de controle podem ser definidas como as restrições de igualdade no problema de otimização.

Por outro lado, as restrições de desigualdade $g_l(\mathbf{x})$ tratadas neste estudo são definidas no capítulo 4 por meio da expressão matemática proposta em (4-2).

5.3.1 Fator de Escala

A variação na grandeza dos parâmetros presentes no problema de otimização, pode provocar diferenças significativas entre as suas magnitudes e causar problemas na estabilidade numérica nos algoritmos utilizados para solucionar o problema de otimização. Portanto, as variáveis de projeto \mathbf{x} são definidas como a razão entre o valor corrente das variáveis de projeto x_j e o correspondente valor inicial x^0 , como apresentado na seguinte equação:

$$\bar{y}_j = \frac{x_j}{x^0}, \quad (5-4)$$

da mesma forma, a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as restrições $g_l(\mathbf{x})$ são definidas em função das variáveis de projeto dimensionais \bar{y}_j , e são reescritas da seguinte forma:

$$\bar{f} = \frac{f}{f_0}, \quad (5-5)$$

$$\bar{g}_l = \frac{g_l}{g_l^0}, \quad (5-6)$$

onde f e g_l são os valores correntes da função objetivo e das restrições avaliados no ponto x_j das variáveis de projeto, e f_0 e g_l^0 são os valores correspondentes da função objetivo e das restrições ponderados no ponto inicial x^0 .

Assim, as restrições laterais na condição adimensional são estabelecidas como segue:

$$\bar{x}_j^{lb} \leq \bar{y}_j \leq \bar{x}_j^{ub}. \quad (5-7)$$

5.3.2 Cálculo dos Gradientes

Neste trabalho utilizou-se a função `fmincon` do Toolbox de otimização do MATLAB® que resolve o problema formulado em (5-1). O algoritmo de otimização selecionado foi o de Pontos Interiores (PI), pertencente à classe dos

métodos gradientes (HERSKOVITS, 1995). Onde o gradiente da função objetivo e das restrições de desigualdade são obtidos pelo método da diferenciação direta. O gradiente adimensional da função objetivo se determina por meio da diferenciação direta da equação (5-5) em relação às variáveis de projeto, de modo que:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (5-8)$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = x^0 \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (5-9)$$

com

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e \left(\frac{\partial A_e}{\partial x_j} L_e + A_e \frac{\partial L_e}{\partial x_j} \right). \quad (5-10)$$

A partir da equação (5-6) pode-se escrever o gradiente adimensional das restrições de desigualdade em relação às variáveis de projeto da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{g}_l}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{g_l^0} \frac{\partial g_l}{\partial x_j}, \quad (5-11)$$

onde

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j} = x^0 \frac{\partial g_l}{\partial x_j}, \quad (5-12)$$

sendo $\frac{\partial g_l}{\partial x_j}$ a sensibilidade das restrições de desigualdade calculadas no capítulo 4 pela equação (4-4).

5.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados exemplos de otimização dimensional e de forma em estruturas reticuladas no plano e no espaço, utilizando as técnicas apresentadas neste trabalho e o uso do sistema computacional desenvolvido para determinar o projeto estrutural ótimo.

A configuração do hardware utilizado para determinar as soluções ótimas foi: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v4 de dois processadores de 2.10 GHz e 32.0 GB de memória RAM.

5.4.1 Arco semicircular de Michell

O primeiro exemplo a ser estudado, consiste na minimização do peso do arco semicircular de Michell, que tem solução analítica quando os limites de escoamento do material são iguais a tração e a compressão. Além disso, é feita uma comparação dos resultados entre a solução analítica, a solução apresentada pelos autores Wang, Zhang e Jiang (2002) e a solução proposta neste trabalho. A estrutura é modelada parcialmente com a curva de Bézier (Banzo superior). Este exemplo é estudado com quatro elementos no banzo superior. A estrutura inicial e as condições de contorno do problema tratado são apresentadas na Figura 5.2.

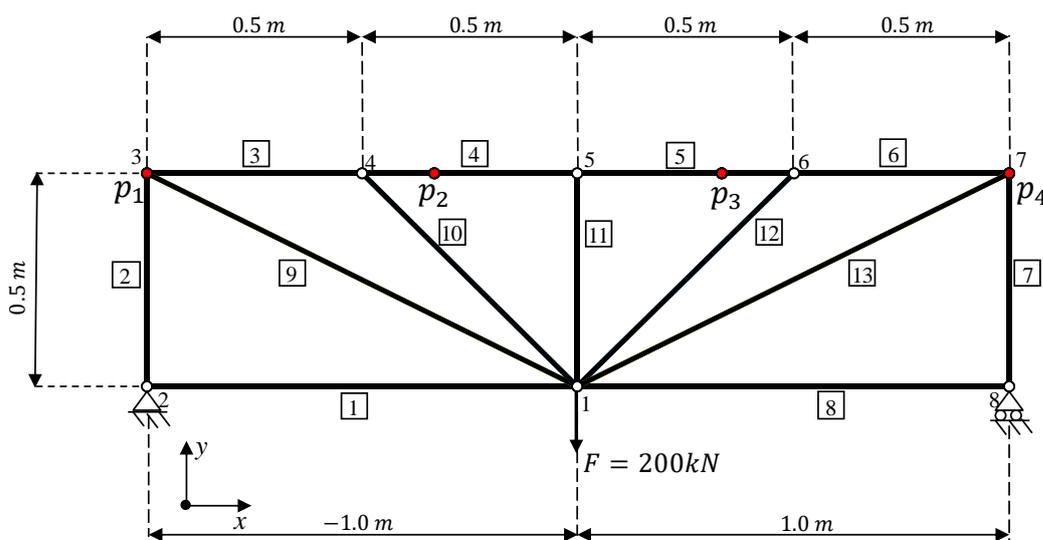


Figura 5.2: Arco semicircular de Michell.

A solução exata para o problema em estudo é dada pela seguinte expressão (QUERIN, 1997):

$$m_f = \frac{2 \times 6}{F_{cy}} l F \rho_e \tan\left(\frac{\pi}{2 \times 6}\right), \quad (5-13)$$

onde F é a força aplicada na estrutura, l é a metade do vão da estrutura $l = 1 \text{ m}$. As propriedades mecânicas do material como o limite de escoamento F_{cy} , o módulo de elasticidade E_e e a densidade ρ_e são expostas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Arco semicircular de Michell, propriedade mecânica do material.

Propriedades Mecânicas		Unidades
F_{cy}	240	MPa
E_e	210	GPa
ρ_e	7800	kg/m ³

As variáveis de projeto são as áreas das seções transversais dos elementos e os pontos de controle da curva de Bézier, como apontado na Figura 5.3.

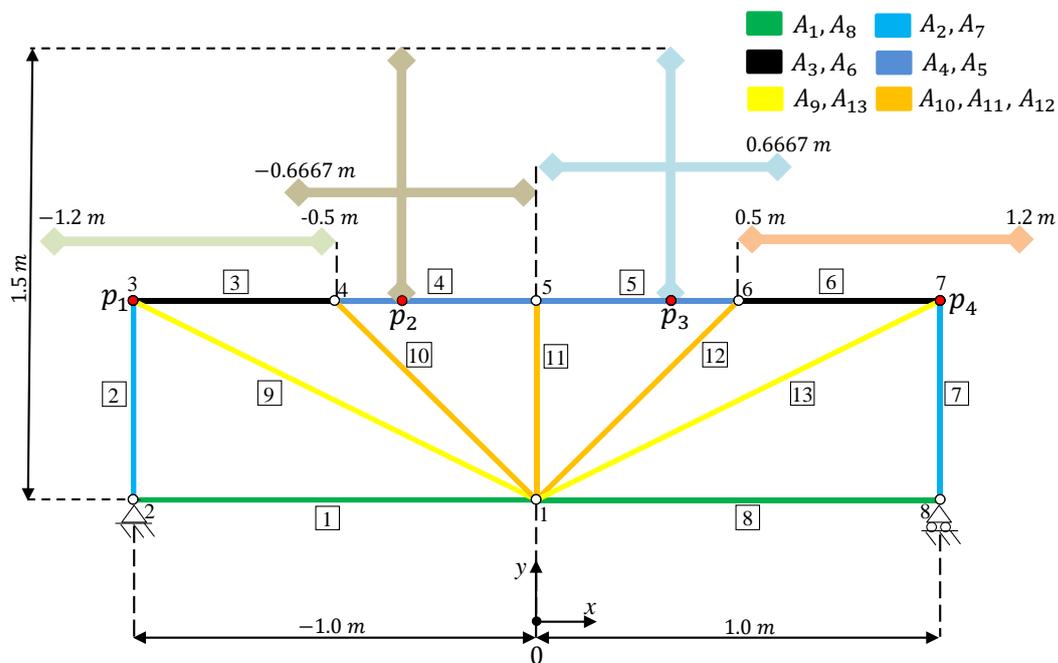


Figura 5.3: Arco semicircular de Michell, grupos de áreas e restrições laterais dos pontos de controle.

O exemplo em estudo não apresenta restrições de igualdade. As restrições de desigualdade foram a tensão de escoamento, a tensão crítica de Euler e as restrições laterais.

A equação da tensão crítica de Euler considerada neste exemplo, é definida da seguinte forma:

$$\sigma_e^{cr}(\mathbf{x}) = \frac{k_{flb} E_e A_e}{L_e^2}, \quad (5-14)$$

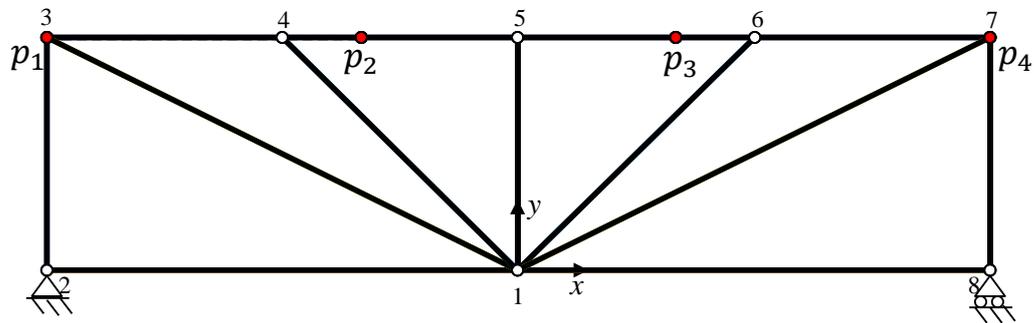
onde a constante geométrica da seção transversal do elemento é $k_{flb} = \frac{\pi}{4}$.

As variáveis de projeto, as restrições laterais e a configuração inicial da estrutura são mostradas na Tabela 5.2.

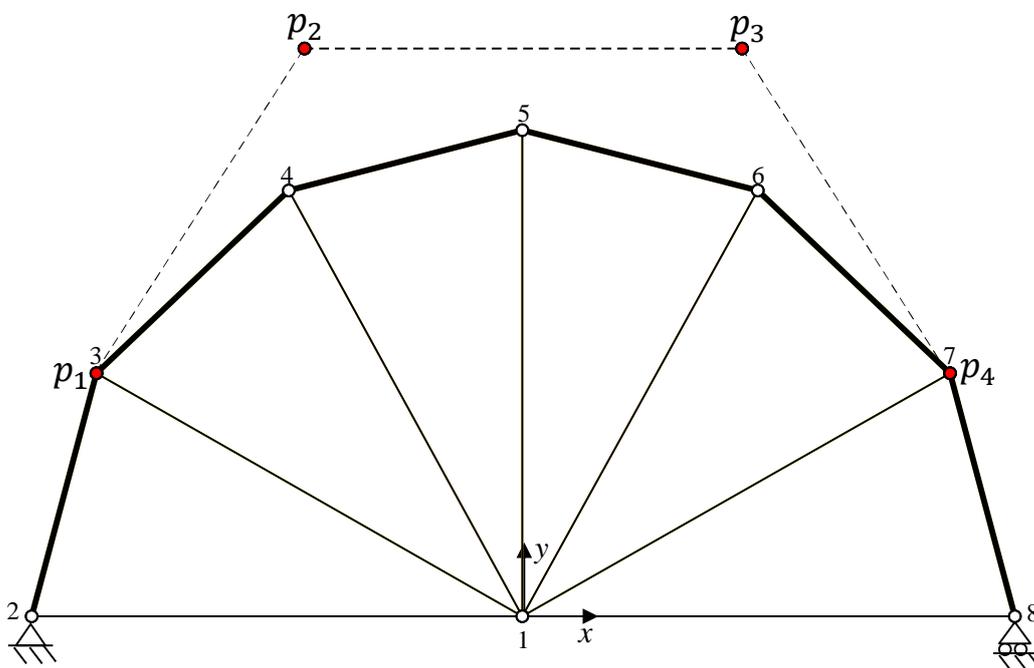
Tabela 5.2: Arco semicircular de Michell, variáveis de projeto, restrições laterais x^{lb} , x^{ub} e ponto inicial x^0 .

Variáveis de projeto	x^{lb}	x^{ub}	x^0	Unidades
A_1, A_8	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
A_2, A_7	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
A_3, A_6	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
A_4, A_5	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
A_9, A_{13}	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
A_{10}, A_{11}, A_{12}	1×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	m^2
p_1^x	0.0	-2.0	-1.0	m
p_2^x	0.0	-0.667	-0.333	m
p_2^y	0.5	1.5	0.5	m
p_3^x	0.0	0.667	0.333	m
p_3^y	0.5	1.5	0.5	m
p_4^x	0.0	2.0	1.0	m

A Figura 5.4 exibe os resultados da mudança de forma entre os arranjos inicial e final da estrutura em análise.



(a) Arco semicircular de Michell na configuração inicial.



(b) Arco semicircular de Michell na configuração ótima.

Figura 5.4: Arco semicircular de Michell, na configuração inicial e ótima.

Na Tabela 5.3 são apresentados os valores das variáveis de projeto no ponto inicial e final, dos grupos de áreas estabelecidos e dos pontos de controle da curva de Bézier.

Tabela 5.3: Arco semicircular de Michell, resultados da otimização.

Variáveis de projeto	x^0	Valor Final	Unidades
A_1, A_8	5×10^{-4}	1.118×10^{-4}	m^2
A_2, A_7	5×10^{-4}	4.314×10^{-4}	m^2
A_3, A_6	5×10^{-4}	4.336×10^{-4}	m^2
A_4, A_5	5×10^{-4}	4.306×10^{-4}	m^2
A_9, A_{13}	5×10^{-4}	2.310×10^{-4}	m^2
A_{10}, A_{11}, A_{12}	5×10^{-4}	2.185×10^{-4}	m^2
p_1^x	-1.0	-0.866	m
p_2^x	-0.333	-0.445	m
p_2^y	0.5	1.167	m
p_3^x	0.333	0.445	m
p_3^y	0.5	1.167	m
p_4^x	1.0	0.866	m
<i>Massa</i>	35.670	20.903	<i>kg</i>
<i>Niterações</i>		37	<i>N/A</i>

Nas Figura 5.5 e Figura 5.6 são apresentadas as parcelas das restrições de desigualdade associadas à tensão de escoamento e à tensão crítica de Euler, respectivamente. Onde valores menores do que zero indicam que a restrição está sendo atendida, enquanto valores acima de zero indicam que as restrições estão sendo violadas. Verifica-se na Figura 5.5 que as barras 1, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 estão próximas do seu limite de escoamento. Da mesma forma, observa-se na Figura 5.6, que as barras 2, 3, 4, 5, 6 e 7 estão com a sua tensão crítica de Euler no valor máximo permitido.

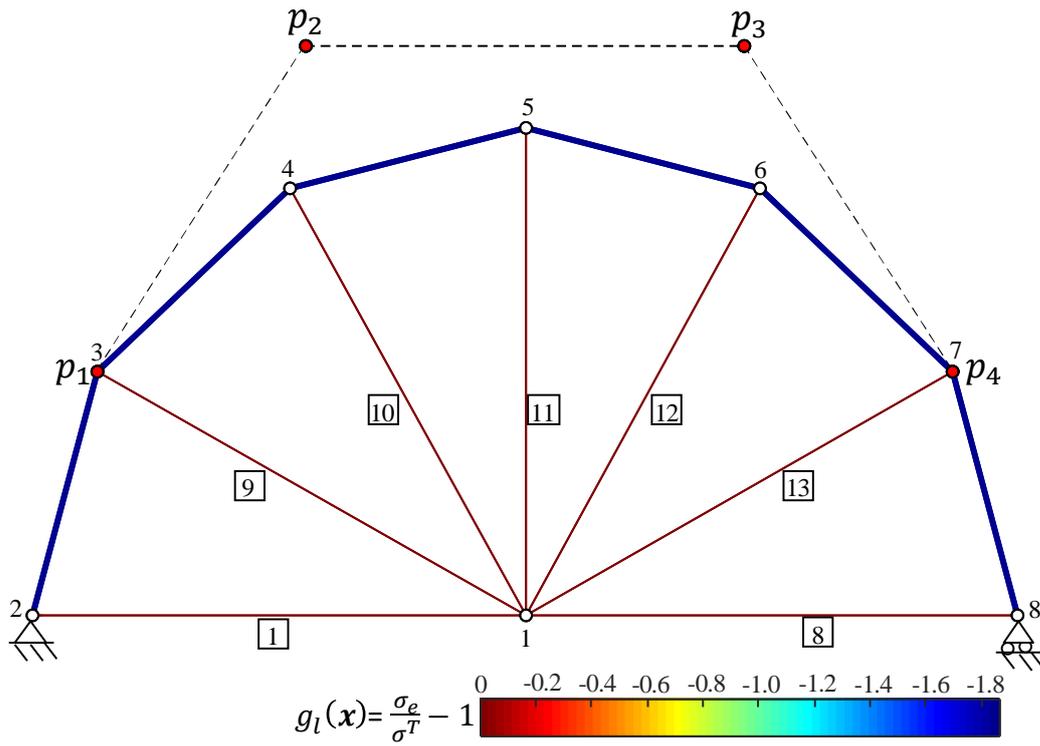


Figura 5.5: Arco semicircular de Michell, restrição de tensão de escoamento.

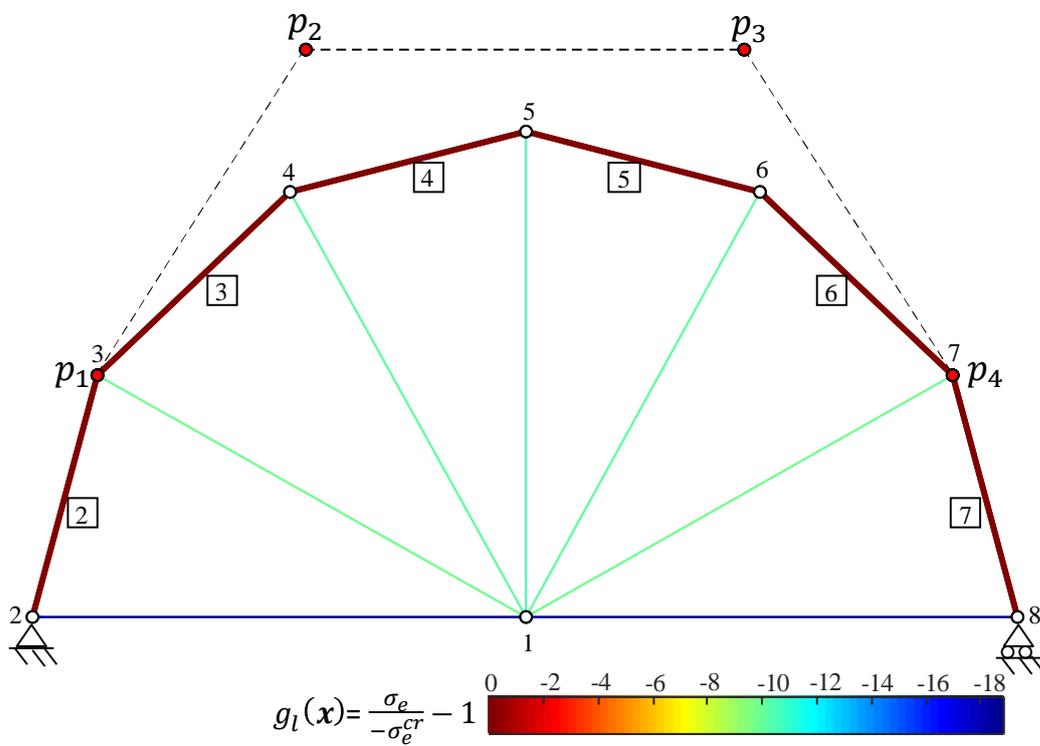


Figura 5.6: Arco semicircular de Michell, restrição de tensão crítica de Euler.

Tabela 5.4: Comparação dos resultados para o Arco semicircular de Michell.

Áreas\Coordenadas nodais\Massa final	Solução analítica	Wang, Zhang e Jiang (2002)	Curva de Bézier	Unidades
A_1, A_8	1.116×10^{-4}	1.132×10^{-4}	1.118×10^{-4}	m^2
A_2, A_7	4.314×10^{-4}	4.318×10^{-4}	4.314×10^{-4}	m^2
A_3, A_6	4.314×10^{-4}	4.315×10^{-4}	4.336×10^{-4}	m^2
A_4, A_5	4.314×10^{-4}	4.311×10^{-4}	4.306×10^{-4}	m^2
A_9, A_{13}	2.233×10^{-4}	2.201×10^{-4}	2.310×10^{-4}	m^2
A_{10}, A_{11}, A_{12}	2.233×10^{-4}	2.262×10^{-4}	2.185×10^{-4}	m^2
X_3, X_7	0.866	0.867	0.866	m
Y_4, Y_6	0.866	0.864	0.8754	m
Y_5	1.000	1.000	1.0005	m
m_f	20.900	20.900	20.903	kg

Na Tabela 5.4 são comparadas as áreas dos elementos e as coordenadas nodais para o arco semicircular de Michell na configuração otimizada. A primeira solução obteve-se de forma analítica. A segunda solução é apresentada pelos autores Wang, Zhang e Jiang (2002) utilizando as coordenadas nodais da estrutura como variáveis de projeto. Por último, temos a solução fundamentada por meio do uso dos pontos de controle da curva de Bézier como variáveis de projeto. Esta última abordagem apresentou um incremento desprezível no peso final da estrutura em comparação com as duas soluções mencionadas anteriormente.

5.4.2 Trelença de 18 Barras

O segundo exemplo, consiste na otimização dimensional e de forma de uma estrutura treliçada de 18 barras. O objetivo são determinar as dimensões das seções transversais das barras e a forma ótima da estrutura de modo a minimizar o peso da estrutura. Além disso, é feita uma comparação dos resultados entre a abordagem usada tradicionalmente, onde as coordenadas nodais são utilizadas como variáveis de projeto e a abordagem considerada neste trabalho. A estrutura em análise somente o banzo inferior é modelado com a curva de Bézier. As seções transversais das barras são perfis circulares de espessura $t_s = 0.003 \text{ m}$. As dimensões e os apoios da estrutura são exibidos na Figura 5.7.

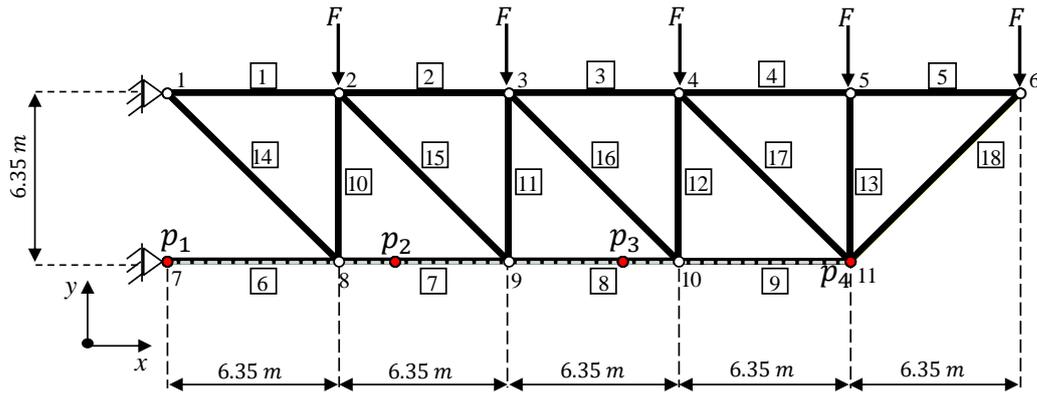


Figura 5.7: Treliça de 18 barras.

O presente estudo é analisado com um único caso de carga, aplicado no banzo superior da estrutura, com uma intensidade $F = 88.964 \text{ kN}$. A seguir, pode-se visualizar na Tabela 5.5, as propriedades mecânicas utilizadas neste exemplo.

Tabela 5.5: Treliça de 18 barras, propriedade mecânicas do material.

Propriedades Mecânicas	Unidades
F_{cy}	137.9 MPa
E_e	68.95 GPa
ρ_e	2768 kg/m ³

Na Figura 5.8 são exibidos os grupos de áreas e as restrições laterais dos pontos de controle.

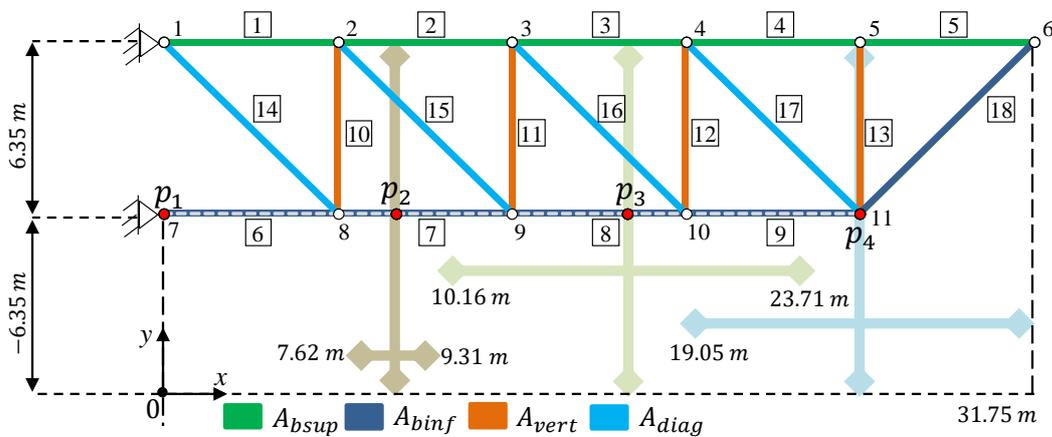


Figura 5.8: Treliça de 18 barras, grupos de áreas e restrições laterais dos pontos de controle.

O exemplo em estudo apresenta duas restrições de igualdade nas coordenadas horizontais dos pontos de controle p_2^x, p_3^x e p_4^x . Estas restrições de igualdade são consideradas para evitar colisão entre os pontos de controle. Matematicamente são definidas da seguinte forma:

$$1.5p_2^x - p_3^x = 0, \quad (5-15)$$

$$1.5p_3^x - p_4^x = 0. \quad (5-16)$$

Por outro lado, as restrições de desigualdade tratadas neste exemplo foram a tensão de escoamento, a tensão crítica de Euler e as restrições laterais. A tensão crítica de Euler considera uma constante geométrica da seção transversal do elemento de $k_{flb} = 4$.

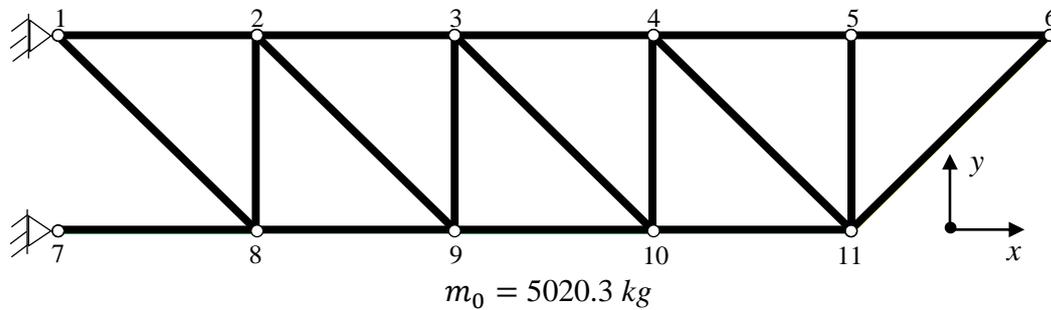
A Tabela 5.6, por sua vez, contém os dados de entrada da configuração inicial da estrutura.

Tabela 5.6: Treliza de 18 barras, variáveis de projeto, restrições laterais x^{lb} , x^{ub} e ponto inicial x^0 .

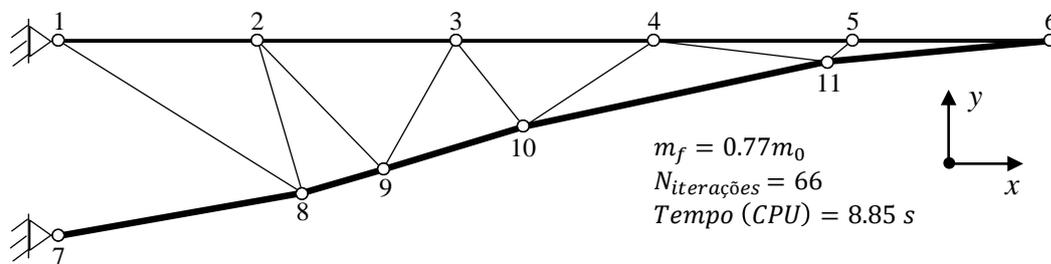
Variáveis de projeto	x^{lb}	x^{ub}	x^0	Unidades
A_{binf}	6.452×10^{-6}	1.290×10^{-2}	6.455×10^{-3}	m^2
A_{bsup}	6.452×10^{-6}	1.290×10^{-2}	6.455×10^{-3}	m^2
A_{diag}	6.452×10^{-6}	1.290×10^{-2}	6.455×10^{-3}	m^2
A_{vert}	6.452×10^{-6}	1.290×10^{-2}	6.455×10^{-3}	m^2
p_2^x	7.620	9.310	8.466	m
p_2^y	-6.350	6.350	0	m
p_3^x	10.160	23.710	16.933	m
p_3^y	-6.350	6.350	0	m
p_4^x	19.050	31.750	25.400	m
p_4^y	-6.350	6.350	0	m

A Figura 5.9 exibe a estrutura na configuração inicial e final das abordagens tratadas. Além disso, é possível observar trechos distorcidos na malha de elementos finitos na configuração final da estrutura como mostrado na Figura 5.9b tornado a

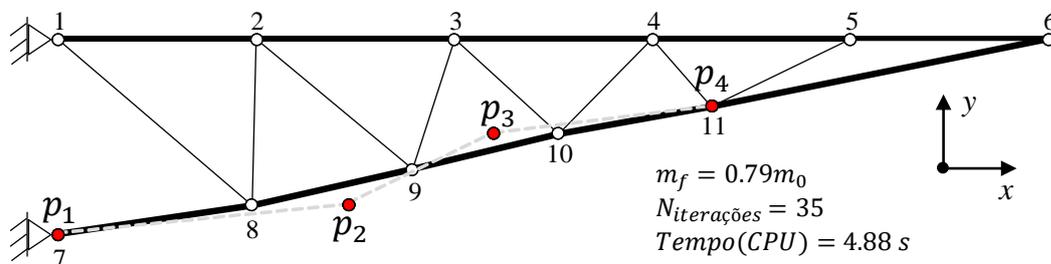
estrutura inadequada ao uso. No entanto, na Figura 5.9c apresenta uma solução melhorada nos contornos internos e externos. Em contrapartida se tem um incremento de massa no arranjo final.



(a) Estrutura na configuração inicial.



(b) Estrutura na configuração ótima. Solução alcançada utilizando as coordenadas nodais como variáveis de projeto.



(c) Estrutura na configuração ótima. Solução obtida usando os pontos de controle da curva de Bézier como variáveis de projeto.

Figura 5.9: Treliza de 18 barras, comparação entre as soluções obtidas.

A estrutura na configuração ótima modelada com a curva de Bézier, apresentou 2 barras ativas para a restrição de tensão de escoamento como apontado na Figura 5.10. Na Figura 5.11 observa-se 4 barras com a restrição de tensão crítica de Euler próxima de zero, indicando que estão ativas, ou seja, que as barras estão com a sua tensão crítica de Euler no seu limite.

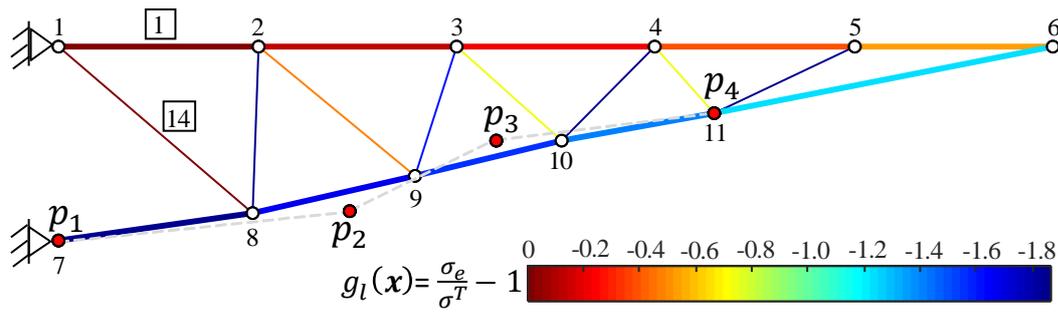


Figura 5.10: Treliça de 18 barras, restrição de tensão de escoamento.

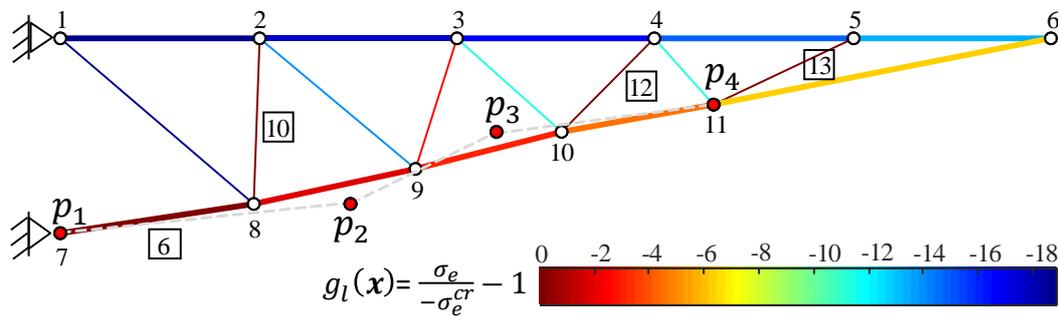


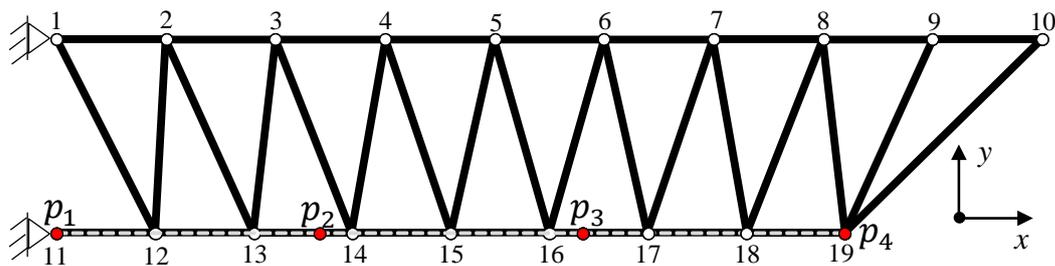
Figura 5.11: Treliça de 18 barras, restrição de tensão crítica de Euler.

A Tabela 5.7 reúne os valores das variáveis de projeto no ponto inicial e final.

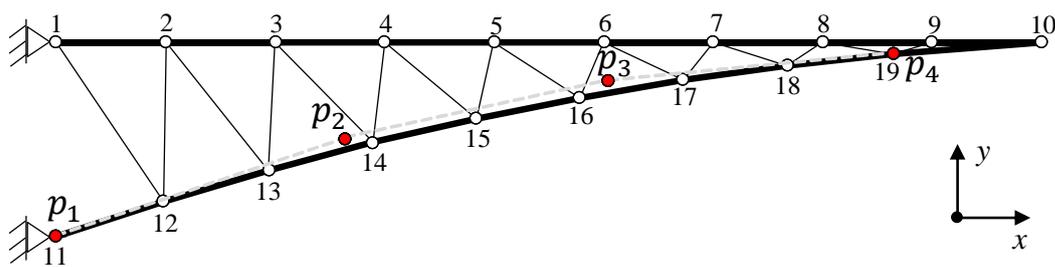
Tabela 5.7: Treliça de 18 barras, resultados da otimização.

Variáveis de projeto	x^0	Valor Final	Unidades
A_{binf}	6.455×10^{-3}	7.650×10^{-3}	m^2
A_{bsup}	6.455×10^{-3}	9.787×10^{-3}	m^2
A_{diag}	6.455×10^{-3}	1.4706×10^{-3}	m^2
A_{vert}	6.455×10^{-3}	2.687×10^{-3}	m^2
p_2^x	8.466	9.313	m
p_2^y	0	0.977	m
p_3^x	16.933	13.970	m
p_3^y	0	3.291	m
p_4^x	25.400	20.955	m
p_4^y	0	4.180	m

A estrutura inicial da Figura 5.12a é definida a partir da treliça de 18 barras estudada anteriormente, onde o número de elementos do banzo inferior desta estrutura é duplicado, com a finalidade de demonstrar que através do uso dos pontos de controle da curva de Bézier o problema de otimização deixa de depender da malha de elementos finitos e as variáveis de projeto que definem a forma da estrutura permanece constante. O algoritmo de otimização alcançou a configuração ótima em 52 iterações e a forma final da estrutura é mostrada na Figura 5.12b.



(a) Estrutura na configuração inicial.



(b) Estrutura na configuração ótima.

Figura 5.12: Mudança no número de elementos do banzo inferior da Treliça de 18 barras, solução obtida através do uso dos pontos de controle da curva de Bézier como variáveis de projeto.

5.4.3

Cobertura Treliçada para Armazenamento de Grãos

O terceiro exemplo a ser otimizado é uma cobertura em forma de arco para armazenamento de grãos. Neste exemplo é tratada novamente a otimização dimensional e de forma em estruturas treliçadas. Os objetivos deste exemplo são de minimizar o peso e obter a forma ótima da estrutura, de modo, que sejam dimensionadas as seções transversais dos elementos, os pontos de controle da curva de Bézier e a altura da treliça. A modelagem da estrutura é realizada somente pela discretização da curva de Bézier.

A discretização da curva de Bézier é feita mediante elementos de barra para o banzo inferior e superior. As coordenadas nodais para estes elementos são definidas

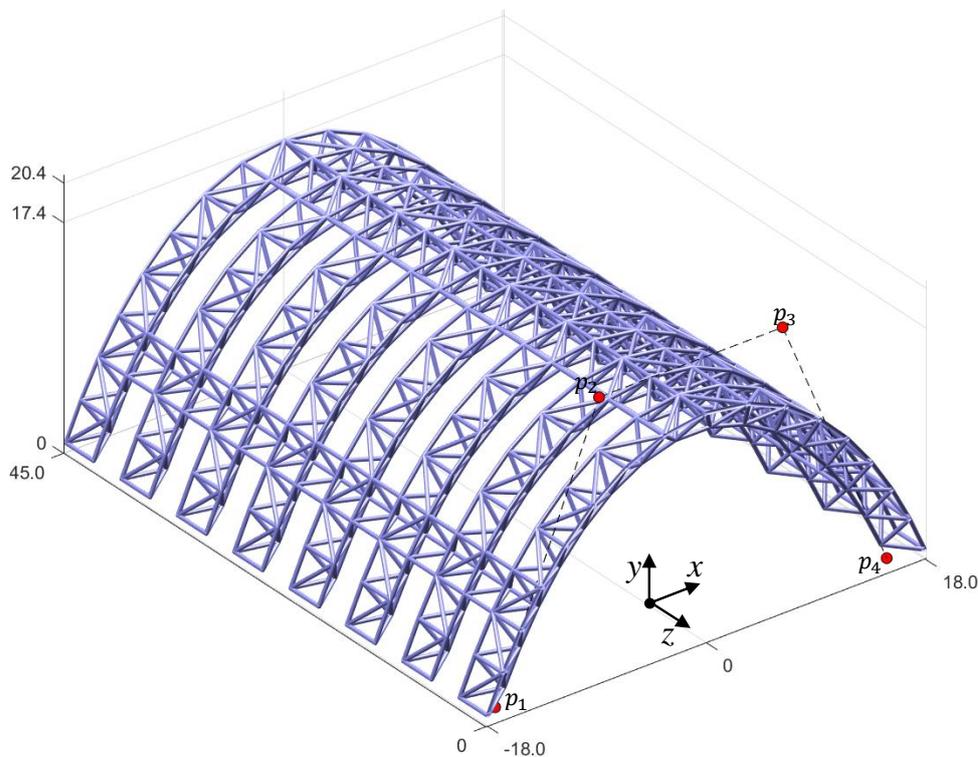
através das equações (2-5) e (2-7) tratadas no capítulo 2. A geração da malha consiste primeiramente em estabelecer as coordenadas nodais dos banzos inferiores com uma separação de 6 m. A partir dos banzos inferiores, são definidas as posições nodais dos banzos superiores com uma separação de 3.0 m. Logo, são conectados cada conjunto isolado de arco, por meio de uma ligação nas laterais e o topo da estrutura. Estas coordenadas são definidas por meio de um novo banzo inferior inserido utilizando somente quatro posições, as quais duas são nas laterais e duas na parte superior da estrutura. A representação gráfica da malha da estrutura é exposta na Figura 5.13.

O número total de nós e o de elementos para a estrutura são estabelecidos nas equações (5-17) e (5-18):

$$N_{n,3} = (3t - 1)N_{Arc} + 4(N_{Arc} - 1), \quad (5-17)$$

$$N_{e,3} = 9(t - 1)N_{Arc} + 32(N_{Arc} - 1), \quad (5-18)$$

onde N_{Arc} representa o número de banzos inferiores na estrutura.



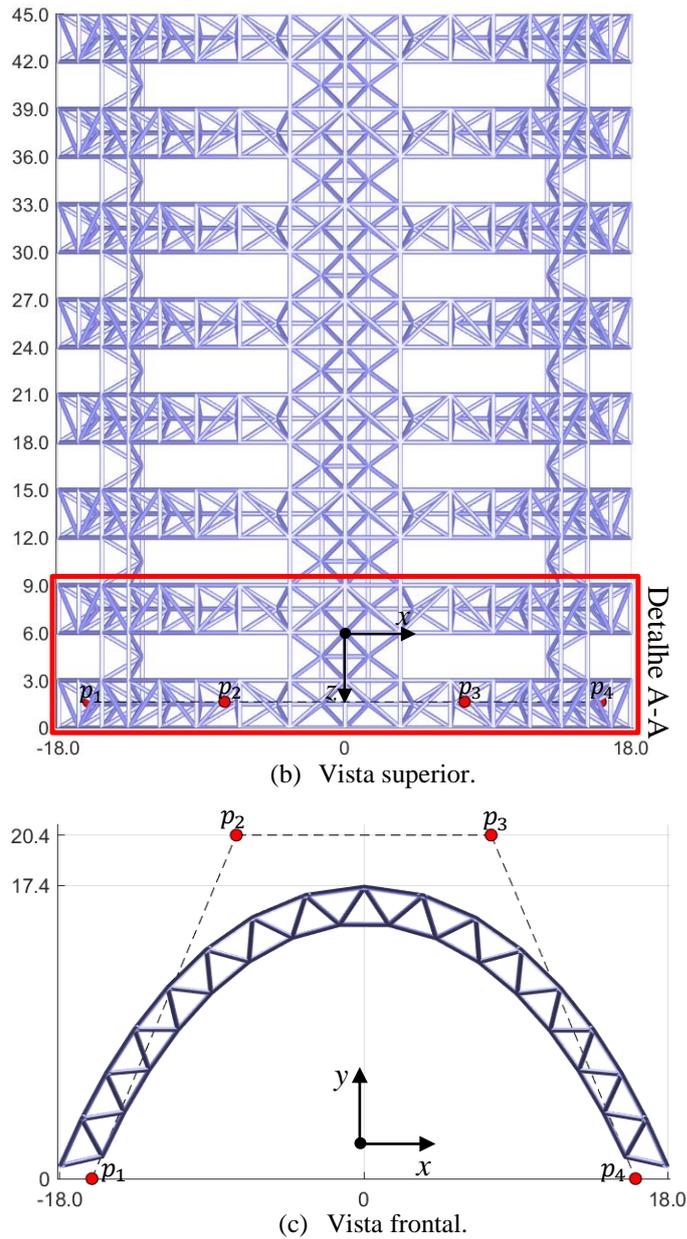
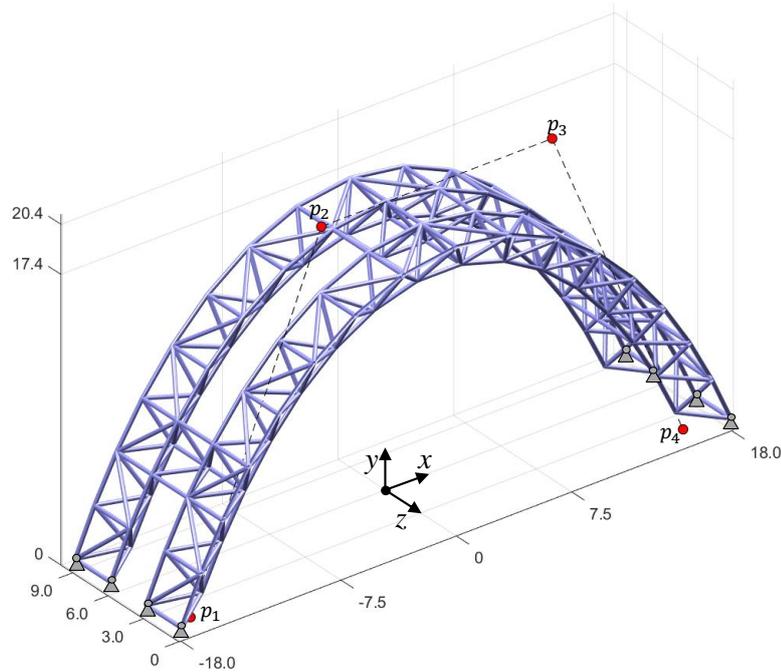
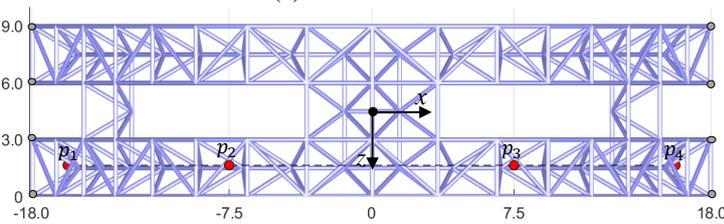


Figura 5.13: Cobertura treçada para armazenamento de grãos, coordenadas em metros (m).

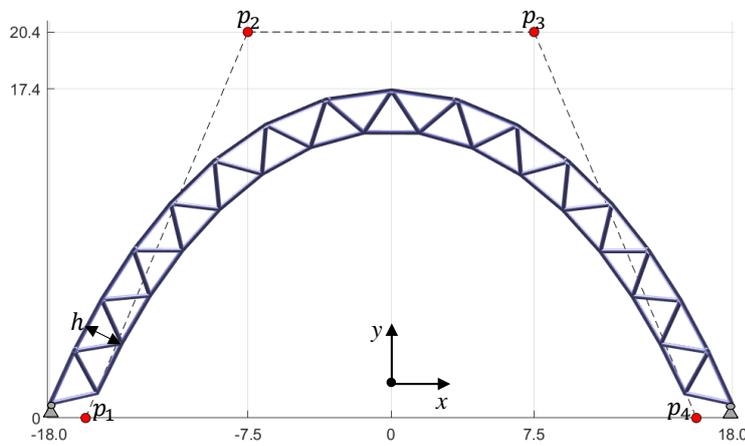
Na Figura 5.13b observa-se a vista superior da estrutura. Pode-se notar que esta possui padrões de repetição ao longo do eixo z . Assim é possível destacar o detalhe A-A em linhas vermelhas indicando a fração da estrutura que será utilizada no processo de otimização para exemplificar a metodologia tratada nesta Dissertação. Na Figura 5.14 são denotadas as dimensões principais da estrutura, com uma altura entre os banzos inferior e superior $h = 1.5\text{ m}$. Para $t = 17$ e $N_{Arc} = 2$ são definidos o número total de nós e o de elementos na estrutura como $N_{n,3} = 104$ e $N_{e,3} = 320$ respectivamente. Cabe destacar os oito pontos de apoio da estrutura.



(a) Vista isométrica.



(b) Vista superior.



(c) Vista frontal.

Figura 5.14: Detalhe A-A, coordenadas em metros (m).

O material utilizado neste exemplo é o alumínio 6351-T6, cujas propriedades mecânicas são indicadas na Tabela 3.1, do capítulo 3.

Os carregamentos e as combinações de carga, contemplados neste estudo encontram-se de acordo com o item B.2.1 *Building-Type Structures* da norma ADM 2015 (ADM, 2015), o que, por sua vez, faz referência à norma ASCE 7 (*Minimum*

Design Loads for Buildings and Other Structures, em inglês) (ASCE 7, 2016). No capítulo 2, desta norma, estabelecem-se os tipos de cargas atuantes na estrutura e os métodos que definem o número de combinações no projeto. O método utilizado neste estudo é o *Combining Nominal Loads Using Allowable Stress Design*. Assim, nas Tabela 5.8 e Tabela 5.9 observam-se os casos de carga e as combinações no projeto.

Tabela 5.8: Casos de cargas.

Peso Próprio	PP
Carga Pontual	CP
Peso Cobertura	PC
Sobrecarga	LL
Vento na direção x^+	$V(x^+)$
Vento na direção x^-	$V(x^-)$
Vento na direção y^+	$V(y^+)$

Tabela 5.9: Combinações de cargas.

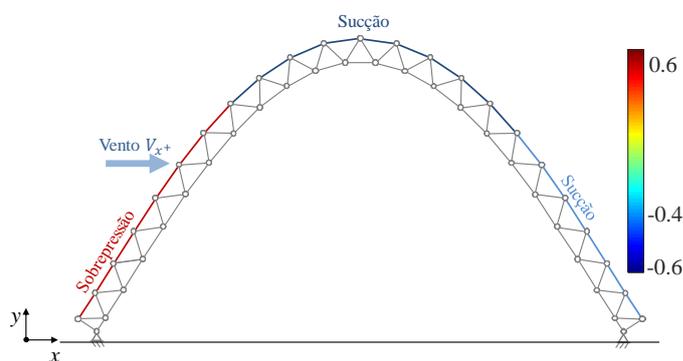
Item	PP	CP	PL	LL	$V(x^+)$	$V(x^-)$	$V(y^+)$
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	0.75	0.75	0	0	0
5	1	1	0	0	0.6	0	0
6	1	1	0	0	0	0.6	0
7	1	1	0	0	0	0	0.6
8	1	1	0.75	0.75	0.45	0	0
9	1	1	0.75	0.75	0	0.45	0
10	1	1	0.75	0.75	0	0	0.45
11	1	1	0	0.75	0	0	0
12	0.6	0.6	0	0	0.6	0	0
13	0.6	0.6	0	0	0	0.6	0
14	0.6	0.6	0	0	0	0	0.6
15	0.6	0.6	0	0	0	0	0

O estado limite da estrutura é definido de acordo com o Design for *Strength Using Allowable Strength Design* (ASD), definido pela norma ADM 2015 no item B.3.2.2.

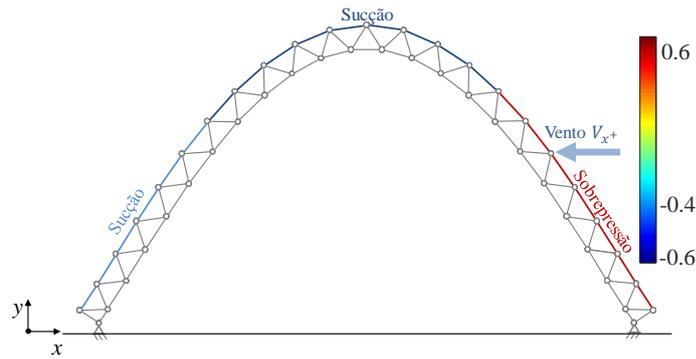
O fator de segurança utilizado é de 1.65 para a tensão de escoamento e para a tensão crítica de Euler, os quais são definidos nos capítulos D.1 e E.1 da norma ADM 2015.

Cumpra esclarecer que quando os carregamentos de vento são considerados na estrutura, deve-se fazer referência à norma NBR-6123 – Forças Devidas ao Vento em Edificações (1988), onde se apresenta o regulamento para o projeto de edificações e estruturas. No entanto, quando a geometria da estrutura não corresponde a nenhum dos modelos geométricos apresentados por esta norma, deve-se realizar a análise experimental da estrutura no túnel de vento ou a análise computacional, mediante de um modelo matemático simulado com programas comerciais como é o caso de Ansys® (DEPERON, 2015). Este programa fornece ao projetista uma série de parâmetros de saída, que auxilia na compreensão do comportamento da estrutura devido à ação do vento.

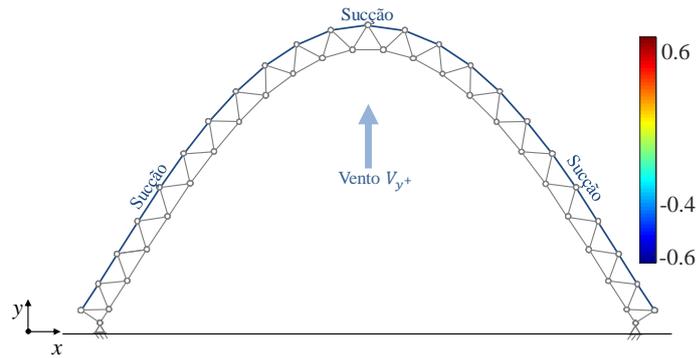
Na Figura 5.15 são mostrados a direção do vento e os coeficientes de pressão utilizados no projeto. No entanto, como o enfoque desta pesquisa não é a análise de fluidos, não se adentrará em detalhes referentes à obtenção destes. Contudo, citam-se as referências de Alves (2014) e Deperon (2015) como base teórica para auxiliar na determinação dos coeficientes de pressão em estruturas convencionais e não convencionais.



(a) Vento atuando na direção x^+ .



(b) Vento atuando na direção x^- .



(c) Vento atuando na direção y^+ .

Figura 5.15: Coeficientes de pressão.

A velocidade característica do vento considerada neste trabalho é $V = 40 \text{ m/s}$ e a pressão dinâmica equivalente é dada pela seguinte equação (ABNT, 1988):

$$W = 0.613V^2. \tag{5-19}$$

Na Tabela 5.10 são apresentadas as intensidades dos carregamentos aplicados na estrutura.

Tabela 5.10 Intensidade dos carregamentos.

Tipo de Solicitação	Intensidade	Unidades
PP	Ver equação (4-20)	N
CP	-49.0333	N
F_{PC}	-9.80665	Pa
W_{LL}	-250.16625	Pa
W_{x^+}		
W_{x^-}	980.80	Pa
W_{y^+}		

Este exemplo não apresenta restrições de igualdade. As restrições de desigualdade foram a tensão de escoamento, a tensão crítica de Euler e as restrições laterais. A constante geométrica da seção transversal do elemento para a tensão crítica de Euler é de $k_{flb} = 0.85$.

Este exemplo considera como variáveis de projeto 320 grupos de áreas, a altura da treliça e os pontos de controle P_2 e P_3 da curva de Bézier, como expostos na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Variáveis de projeto, restrições laterais x^{lb} , x^{ub} e ponto inicial x^0 .

Variáveis de projeto	x^{lb}	x^{ub}	x^0	Unidades
A_1 até A_{320}	2.714×10^{-4}	2.072×10^{-3}	1.172×10^{-3}	m^2
h	1	3	1.5	m
p_2^x	-1.0	-14.0	7.5	m
p_2^y	18.2	22.6	20.4	m
p_3^x	1.0	14.0	7.5	m
p_3^y	18.2	22.6	20.4	m

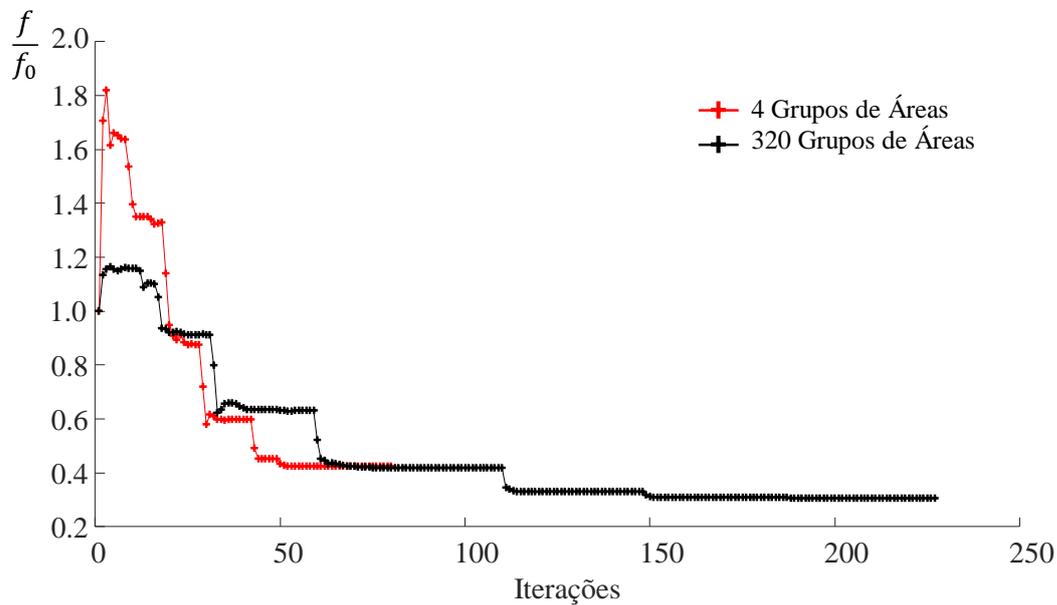
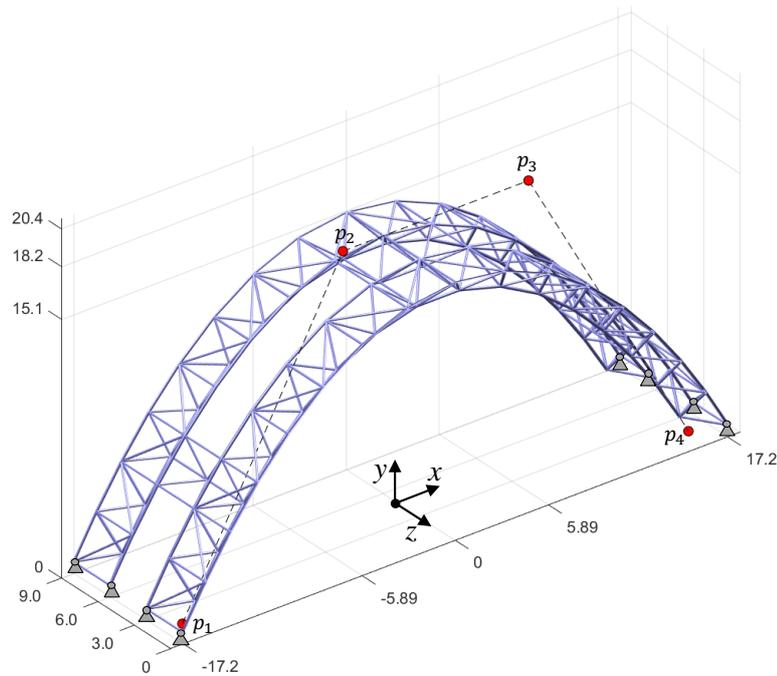


Figura 5.16: Histórico de convergência da função objetivo.

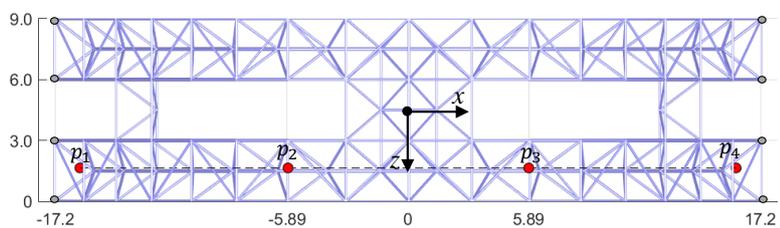
Na Figura 5.16 pode-se observar o comportamento da função objetivo quando se considera o mesmo problema com 320 e 4 grupos de áreas como variáveis de projeto, em que as duas abordagens partem do mesmo ponto inicial x^0 . A estrutura parte de um ponto não viável, ou seja, a estrutura nessa configuração não atende a

todas as restrições, o que implica em um incremento na função objetivo até a estrutura estar dentro de uma região viável e posteriormente minimizar o valor da massa da estrutura até atingir a solução ótima do problema, que neste caso se obteve com 227 iterações.

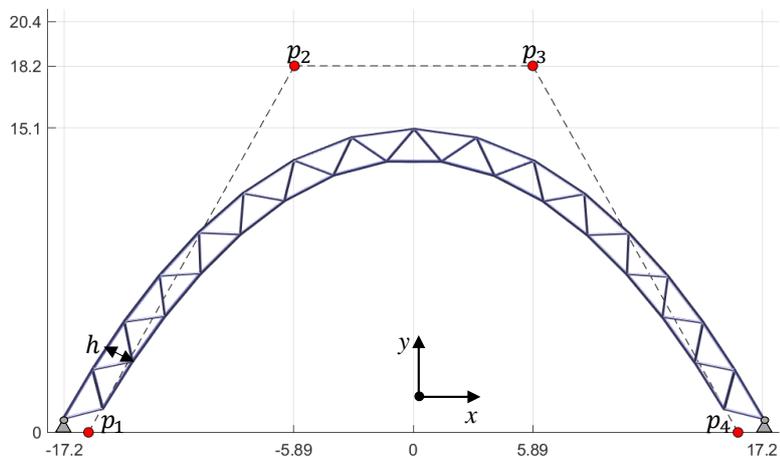
A Figura 5.17 apresenta a estrutura na configuração ótima.



(a) Vista isométrica.



(b) Vista superior.



(c) Vista frontal.

Figura 5.17: Estrutura ótima, coordenadas em metros (m).

As Tabela 5.12 e Tabela 5.13 por sua vez, contêm os diferentes resultados conseguidos por meio das duas considerações estipuladas.

Tabela 5.12: Resultados da otimização, 320 grupos de áreas.

Variáveis de projeto	x^0	Valor Final	Unidades
A_1 até A_{320}	1.172×10^{-3}	Áreas otimizadas	m^2
h	1.5	1.413	m
p_2^x	-7.5	-5.89	m
p_2^y	20.4	18.2	m
p_3^x	7.5	5.89	m
p_3^y	20.4	18.2	m
Massa	3200.13	979.01	kg
Restrições ativas		242	N/A
$N_{iterações}$		227	N/A
Tempo (CPU)		18.875	horas

Tabela 5.13: Resultados da otimização, 4 grupos de áreas.

Variáveis de projeto	x^0	Valor Final	Unidades
A_{bsup}	1.172×10^{-3}	6.758×10^{-4}	m^2
A_{horz}	1.172×10^{-3}	3.601×10^{-4}	m^2
A_{diag}	1.172×10^{-3}	5.270×10^{-4}	m^2
A_{binf}	1.172×10^{-3}	7.601×10^{-4}	m^2
h	1.5	1.457	m
p_2^x	-7.5	-2.829	m
p_2^y	20.4	18.2	m
p_3^x	7.5	2.744	m
p_3^y	20.4	18.2	m
Massa	3200.13	1356.13	kg
Restrições ativas		7	N/A
$N_{iterações}$		80	N/A
Tempo (CPU)		4.304	horas

Os dados geométricos e as condições de contorno da estrutura ótima são exportados para o programa SAP2000® V20 por meio da OAPI. A análise estática

linear elástica é compilada e são exibidos os deslocamentos máximos na estrutura correspondentes à combinação 5 da Tabela 5.9 como mostrado na Figura 5.18.

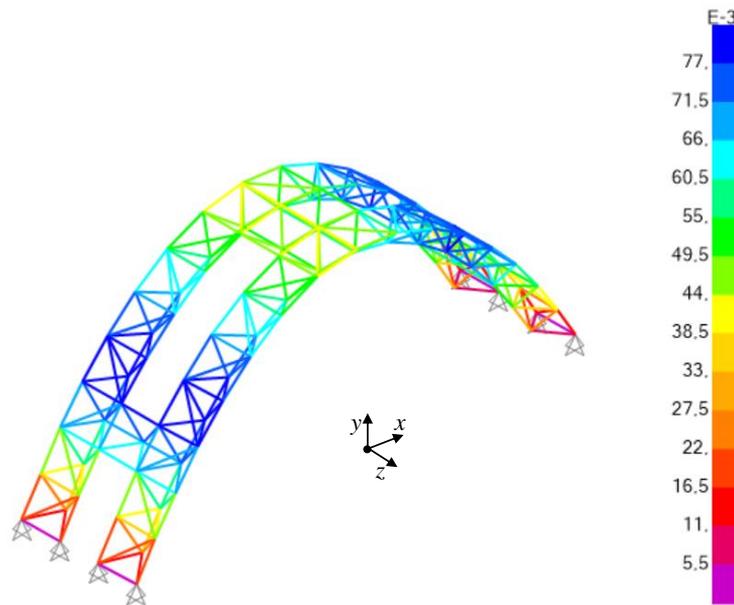


Figura 5.18: Estrutura ótima, magnitude dos deslocamentos nodais da estrutura (m), programa SAP2000® V20 (CSI, 2019).

A verificação da estrutura foi feita mediante o código interno do programa SAP2000® pelo método ASD da norma ADM 2015. Na Figura 5.19 mostra que nenhuma das barras na estrutura excede os limites permissíveis adotados neste projeto. Desse modo, pode-se determinar que o projeto atende os critérios estabelecidos pela norma ADM 2015.

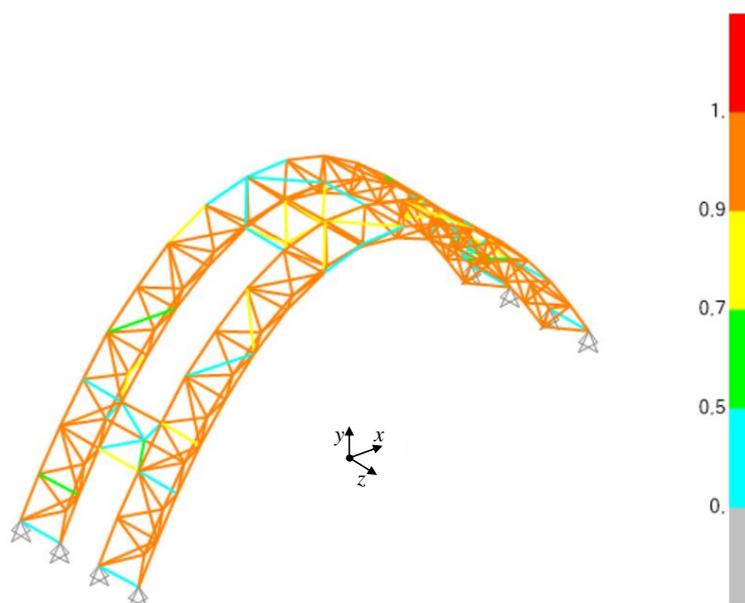


Figura 5.19: Verificação da estrutura ótima com o programa SAP2000® V20 pelo método ASD, (CSI, 2019).

Finalmente determinam-se os diâmetros externos de cada barra, a partir das áreas otimizadas e a espessura considerada, de modo, que se permita padronizar as barras da estrutura nas medidas comercializáveis de espessura e diâmetro. Na Tabela 5.14 são apresentados os diâmetros e espessura das barras que serão utilizadas no projeto.

Tabela 5.14: Diâmetros e espessura dos tubos redondos.

Diâmetro Externo D_{ext}	Espessura t_s	Unidades
38.1×10^{-3}		m
50.8×10^{-3}		m
63.5×10^{-3}		m
76.2×10^{-3}	0.0025	m
88.9×10^{-3}		m
101.6×10^{-3}		m
114.4×10^{-3}		m

Devido à mudança do diâmetro do perfil otimizado, obteve-se um incremento de massa de 105 kg em relação à massa final determinada no processo de otimização denotada na Tabela 5.12. Uma nova verificação da estrutura é efetuada de acordo com a norma ADM 2015, indicando que a estrutura está dentro dos limites admissíveis adotados no projeto como mostrado na Figura 5.20.

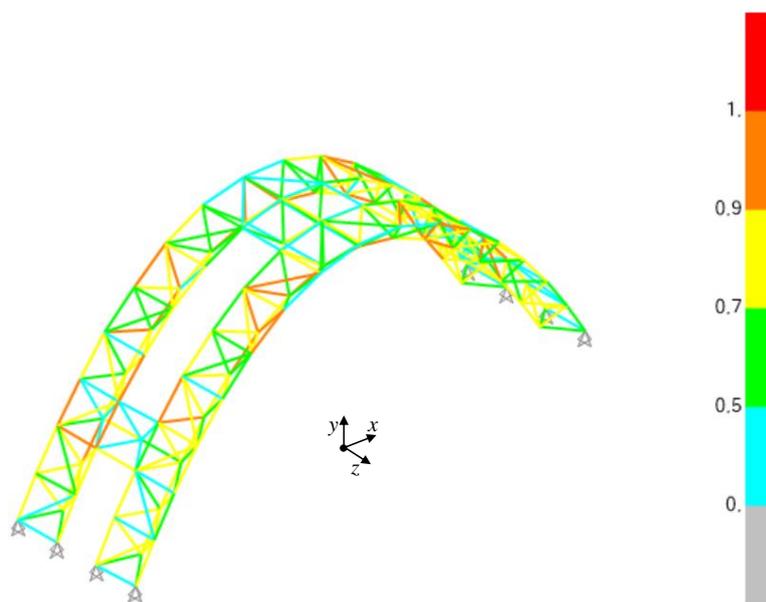


Figura 5.20: Verificação da estrutura com os diâmetros dos elementos padronizados, método ASD do programa SAP2000® (CSI, 2019).

6 Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia computacional para a otimização dimensional e de forma de estruturas treliçadas, buscando o mínimo peso. Este desenvolvimento requereu a implementação e integração dos módulos de modelagem geométrica, análise de elementos finitos, análise de sensibilidade e algoritmos de otimização.

A modelagem da estrutura foi feita através da parametrização da curva de Bézier, onde os pontos de controle foram considerados como variáveis de projeto. Desta forma, obteve-se um impacto positivo no problema de otimização, devido à redução no número de variáveis de projeto que definem a forma ótima na estrutura.

O cálculo do gradiente da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto foi feito através do método da diferenciação direta. Estas expressões foram verificadas pelo método das diferenças finitas à frente, apresentando os mesmos resultados para em ambos casos. As soluções ótimas para os três problemas tratados foram obtidas através da função `fmincon` do Toolbox de otimização do MATLAB®.

A comunicação com o SAP2000® foi feita por meio de uma integração entre a OAPI do SAP2000® e o MATLAB®. Deste modo, a geometria ótima, as condições de contorno, os casos de carga e as combinações de carga da estrutura foram exportadas para o SAP2000®, reduzindo os tempos de modelagem e de configuração das diversas análises estáticas lineares. Além disso, foi possível importar via OAPI os deslocamentos e as forças axiais dos elementos para verificar a implementação no MATLAB®.

A partir dos resultados obtidos nos exemplos numéricos analisados neste trabalho, verificou-se a aplicabilidade da otimização dimensional e de forma em estruturas treliçadas modeladas com a curva de Bézier. Nos exemplos analisados as tensões dos elementos da estrutura estiveram dentro dos critérios aceitáveis definidos.

6.1 Trabalhos Futuros

Através da pesquisa bibliográfica e dos resultados alcançados neste trabalho, consideram-se importantes as seguintes possibilidades de trabalhos futuros:

- Implementar um modelo geométrico considerando superfícies de Bézier, visando facilitar a otimização de domos.
- Incluir outros tipos de restrições como: deslocamentos e frequências naturais.
- Considerar elementos de pórticos na modelagem da estrutura.
- Incluir outros tipos de análise como: análise não linear e análise dinâmica.
- Incorporar requisitos reais de projeto de estruturas metálicas.
- Implementar a otimização dimensional e de forma em programas comerciais de Projeto Assistido por Computador (CAD) com o intuito de aproveitar a geometria modelada e, posteriormente, otimizá-la.

7

Referências bibliográficas

ALVES, O. J. M. **Análise da Influência do Vento em Galpões Industriais**. 2014, 59 f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil/Estruturas) – Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste (CAA), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Caruaru, 2014.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 7. ed. São Paulo: Erica Ltda., 2002.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (ASCE-7 – 16 STANDARD). **Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures**, 16. ed. Reston, Virginia. -: ASCE, Copyright ©, 2016.

ANDRADE, S.; VELLASCO, P. **Comportamento e Projeto de Estruturas de Aço**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda., 2016.

ANSOLA, R.; CANALES, J.; TARRAGO, JA. **On Simultaneous Shape and Material Layout Optimization of Shell Structures**. Structural and Multidisciplinary Optimization. 24, 175–184, 2002.

ANSYS, **Programa para a Análise de Fluidos em Estrutural**. Disponível em: <<https://www.ansys.com/>>, Acesso em: 10 jan.2019.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 4. ed. Iowa: Elsevier Editora Ltda., 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT)., **Forças Devidas ao Vento em Edificações NBR 6223**. 1. ed. Rio de Janeiro. -: ABNT, Copyright ©, 1988.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 3 ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BEHEAD, S. A.; PARKER, G. A. R. **Half a Century with the Space Structures Research Centre of the University of Surrey**. IASS – SLTE, 2014.

BRUNO, H. B. S. **Shape Optimization with Symmetric Galerkin Boundary Element Method**. 2017. 75f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2017.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING A. **An Introduction to Structural Optimization**. 1. ed. Linköping: ©Springer, 2008.

COMPUTER & STRUCTURES (CSI), **Open Application Programming Interface (OAPI) SAP2000.** Disponível em: <<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/OAPI>>, Acesso em: 30 mar.2019.

COMPUTER & STRUCTURES (CSI). **Programa para a Análise de Estruturas SAP2000 V20.** Disponível em: <<https://www.csiamerica.com/products/sap2000/>>, Acesso em: 20 fev.2019.

DEPERON, G. M. **Ação do Vento em Casca de Forma Livre de Planta Pentagonal Apoiada nos Vértices.** 2015. 152 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Geotécnica) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

DESCAMPS, B. **Computational Design of Lightweight Structures: Form Finding and Optimization.** 1. ed. Grã-Bretanha: ISTE Ltd. and John Wiley & Sons, Inc., 2014.

FOX, R. L. **Optimization Methods for Engineering Design.** 1. ed. Cleveland: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1971.

GEOMETRICA, - **Cobertura de Abóbada Cilíndrica.** Disponível em: <<http://geometrica.com/en>>, Acesso em: 6 jan.2019.

HAFTKA, T. R; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization.** 3. ed. Waterloo: G.M.L GLADWELL, 1992.

HANSEN, S. R.; VANDERPLAATS, G. N. **Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses.** Califórnia: AIAA SDM, 1988.

KEGL, M.; BRANK, B. **Shape Optimization of Truss-Stiffened Shell Structures with Variable Thickness.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 2611-2634, 2006.

KORDOUT, - **Aeroporto internacional Salgado Filho em Porto Alegre – RS e Shelter Estaleiro.** Disponível em: <<http://sphere-system.com/industrial-home/big-structures/?lang=pt-br>>, Acesso em: 6 jan. 2019.

LANIK, - **Estrutura monocapa Victoria Square em Belfast – Irlanda do Norte.** Disponível em: <<http://www.lanikdobrasil.com.br/br/estruturas-monocapa.html>>, Acesso em: 15 jan.2019.

LEE, J. S. **A Form-finding Technique for Three-dimensional Spatial Structures.** Coreia: Architectural Institute of Korea, 2013.

LUCENA, R. J. C. F.; **Construção de um Modelador de Curvas e Superfícies de Bézier.** 26 f. Monografia (Graduação em Ciências da Computação) – Faculdade de Ciências da Computação, Centro Universitário Farias Brito, Fortaleza, 2007.

MARTINS, J. R. R. A; STURDZA, P; ALONSO J. J. **The Complex-Step Derivative Approximation**. New York: ACM Transactions on Mathematical Software, 2003.

OHSAKI, M. **Optimization of Finite Dimensional Structures**. 1 ed. Japão: Taylor and Francis Group, LLC, 2010.

PALUSZNY, M.; PRAUTZSCH, H.; BOEHM, W. **Bézier and B-splines techniques**. 1. ed. Karlsruhe: ©Springer, 2002.

PEREIRA, A. **Projeto Ótimo de Pórticos Planos com Restrição à Flambagem**. 2002. 99 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2002.

QUERIN, O. M. **Evolutionary Structural Optimization: Stress Based Formulation and Implementation**. 1997. 261 f. Tese (Doutorado em Estruturas) - Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia, 1997.

RAMM, E.; MAUTE, K.; SHAWARS S. **Adaptive Topology and Shape Optimization**: Barcelona: ©CIMNE,1998.

THE ALUMINUM ASSOCIATION, Inc. **Aluminum Design Manual 2015** (ADM 2015), 10. ed. Arlington: ADM, 2015.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications**. 1. ed. Califórnia: McGraw-Hill, 1984.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2011.

VAZ, L. E.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M. **Programação Matemática: Teoria, Algoritmos e Aplicações na Engenharia**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2012.

VINCE, J. **Mathematics for Computer Graphics**. 2 ed. Bournemouth: ©Springer – Verlag London Limited, 2006.

VUCINA, D.; LOZINA, Z.; PEHNEC, I. **A Compact Parameterization for Shape Optimization of Aerofoils**. Proceedings of the World Congress on Engineering, London, UK, 2008.

WANG, D.; ZHANG, W. H.; JIANG, J. S. **Combined Shape and Sizing Optimization of Truss Structure**. Computational Mechanics 29 (2002) 307 - 312, ©Springer – Verlag, 2002.

ZOZ, J. **Estudo de Métodos e Algoritmos de Splines Bézier, Casteljaou e B-Spline**. 1999. 76 f. TCC (Graduação em Ciência da Computação) – FURB, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 1999.

Apêndice A

Integração MATLAB® - SAP2000®

A OAPI (Open Application Programming Interface) é uma ferramenta que possibilita a conexão de programas terceiros ao SAP2000®. Esta integração permite aos usuários o desenvolvimento de aplicativos de engenharia personalizados. A comunicação entre a OAPI do SAP2000® pode ser feita através de VBA, Visual Basic 2012, Visual C# 2012, Intel Visual Fortran, Microsoft Visual C++ 2012, MATLAB® e Python. O acoplamento é feito mediante o *SAP2000.exe* onde o controle *ActiveX* admite que aplicativos externos façam referência e seja possível utilizar as funções internas da OAPI do SAP2000® (CSI, 2019).

Nesta Dissertação é usado o programa MATLAB® para aceder à OAPI do SAP2000® na versão V20 e utilizar suas funcionalidades. O programa SAP2000® tem como padrão o elemento de barra, então é necessário rotular as extremidades de todos os elementos para se considerar elementos de treliça.

Os dados da estrutura estudada na seção 5.4.1 do capítulo 5, correspondente ao arco semicircular de Michell na configuração ótima são utilizados para exemplificar o uso da OAPI do SAP2000® V20 com o programa MATLAB®. Os valores de entrada das coordenadas nodais e das áreas dos elementos para este exemplo são apresentadas na Tabela 5.4.

Arquivo MichellArch.m

```
% Integração MATLAB® - SAP2000® V20
% Autores: Waldy J. Torres Z. & Anderson Pereira
% Data: 12/05/2019
% Dados de entrada
% Coordenadas nodais
NODE = [0.00 0.00 0.00;
        -1.00 0.00 0.00;
        -0.87 0.00 0.50;
        -0.48 0.00 0.88;
         0.00 0.00 1.00;
         0.48 0.00 0.88;
         0.87 0.00 0.50;
         1.00 0.00 0.00];
% Conectividade
ELEM = [1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;1 8;3 1;4 1;5 1;6 1;7 1];
% Número de Nós
Nnode = 8;
% Número de Elementos
Nelem = 13;
```

Continuação: Arquivo MichellArch.m

```

% Nós restritos em y
FIX1 = [1,3,4,5,6,7];
% Nós restritos em x e z
FIX2 = 8;
% Nós restritos em x, y e z
FIX3 = 2;
% Forças nodais
FNn = zeros(3*Nnode,1); FNn(3,1) = -200000;
% Espessura
ti = (3.0)/1000;
% Áreas dos elementos
A = [0.000112;
     0.000431;
     0.000434;
     0.000431;
     0.000431;
     0.000434;
     0.000431;
     0.000112;
     0.000231;
     0.000219;
     0.000219;
     0.000219;
     0.000231];
% Módulo de elasticidade
E = ones(Nelem,1)*210e9;
% Limite de escoamento do material
Fyc = 240e6;
% Densidade
rho = 7800;
% Gravidade
G = 9.81;
% Casos de Cargas
IdLoadCase = {'CP'};
% Combinações
LoadNFCb = 1;
% Nome do arquivo
SAP2000Nome= 'Structure_OT';
% Função para configurar e extrair dados do SAP2000
[AxialF,Ug] = SetGet_SAP2000 (NODE,ELEM,Nnode,Nelem, FIX1, FIX2, FIX3, ...
                             FNn,ti, A, E, Fyc, rho, G, IdLoadCase, LoadNFCb, SAP2000Nome);

```

A função chamada `SetGet_SAP2000` tem como objetivo imputar os dados geométricos e configurar a análise estática linear no SAP2000® V20. Além disso, extrair os deslocamentos nodais e a força axial dos elementos na estrutura para o MATLAB®.

Função SetGet_SAP2000

```

% Início da função SetGet_SAP2000
function [AxialF,Ug] = SetGet_SAP2000 (NODE,ELEM,Nnode,Nelem, ...
FIX1, FIX2, FIX3, FNn, ti, A, E, Fyc, rho, G, IdLoadCase, LoadNFCb, SAP2000Nome)
% Pasta onde o SAP2000 está instalado, acessando ao executável
% SAP2000.exe
ProgramPath = 'C:\Program Files\Computers and Structures\...
              SAP200020\sap2000.exe';
% Pasta onde o SAP2000 está instalado, acessando à dll do
% SAP2000
APIDLLPath = 'C:\Program Files\Computers and Structures\...
             SAP200020\sap2000v20.dll';
% OAPI helper object
a = NET.addAssembly(APIDLLPath);

```

Continuação: Função SetGet SAP2000

```

helper = SAP2000v20.Helper;
helper = NET.explicitCast(helper, 'SAP2000v20.cHelper');% SAP2000 object
SapObject = helper.CreateObject(ProgramPath);
SapObject = NET.explicitCast(SapObject, 'SAP2000v20.cOAPI');
feature('COM_SafeArraySingleDim', 1);
feature('COM_PassSafeArrayByRef', 1);
helper = 0;
% Abrir SAP2000
SapObject.ApplicationStart;
% Criar SapModel object
SapModel = NET.explicitCast(SapObject.SapModel, 'SAP2000v20.cSapModel');
% Inicializar
ret = SapModel.InitializeNewModel;
% Abrir um documento novo
File = NET.explicitCast(SapModel.File, 'SAP2000v20.cFile');
ret = File.NewBlank;
% Configurar unidades
ret = SapModel.SetPresentUnits(SAP2000v20.eUnits.N_m_C);
% Definir as propriedades do material
PropMaterial = NET.explicitCast(SapModel.PropMaterial, ...
'SAP2000v20.cPropMaterial');
ret = PropMaterial.SetMaterial('6351-T6', SAP2000v20.eMatType.Aluminum);
ret = PropMaterial.SetWeightAndMass('6351-T6', 1, rho*G);
ret = PropMaterial.SetMPIsotropic('6351-T6', E(1), 0.33, 2.358E-05);
ret = PropMaterial.SetOAluminum('6351-T6', 1, '6351T6', Fyc, Fyc, ...
2.900E+08, 1.740E+08, 1);
% Definir as propriedades da seção
PropFrame = NET.explicitCast(SapModel.PropFrame, ...
'SAP2000v20.cPropFrame');
ret = PropFrame.SetPipe('TUBE', '6351-T6', 0.05, ti);
% Adiciona um Elemento a partir das coordenadas e conectividade ni e nj
FrameObj = NET.explicitCast(SapModel.FrameObj, 'SAP2000v20.cFrameObj');
PointObj = NET.explicitCast(SapModel.PointObj, 'SAP2000v20.cPointObj');
View = NET.explicitCast(SapModel.View, 'SAP2000v20.cView');
FrameName = System.String(' ');
for i = 1:Nelem
    Idframe = num2str(i);
    [~, ~] = FrameObj.AddByCoord(NODE(ELEM(i,1),1), ...
        NODE(ELEM(i,1),2), NODE(ELEM(i,1),3), NODE(ELEM(i,2),1), ...
        NODE(ELEM(i,2),2), NODE(ELEM(i,2),3), FrameName, ...
        'TUBE', Idframe, 'Global');
    Point1 = ' ';
    Point2 = ' ';
    [~, Point1, Point2] = FrameObj.GetPoints(char(Idframe), ...
        Point1, Point2);
    nodei = num2str(ELEM(i,1));
    nodej = num2str(ELEM(i,2));
    ret = PointObj.ChangeName(Point1, nodei);
    ret = PointObj.ChangeName(Point2, nodej);
end
% Atribuir uma seção a um determinado elemento
for i = 1:Nelem
    Idframe = num2str(i);
    Rm = ( ( A(i) ) / (2*pi*ti) ); % Rádio Médio Rm
    Re = Rm + ti/2; % Radio Externo da Seção
    esp = num2str(round((1000*ti), 2)); % Espessura
    D = num2str(round(1000*(2*Re), 2));
    section = strcat('TB-', D, 'x', esp);
    % Definir a seção
    ret = PropFrame.SetPipe(char(section), '6351-T6', 2*Re, ti);
    ret = FrameObj.SetSection(Idframe, char(section));
end
% Configurar os nós sem deslocamentos, 1 grau de liberdade fixo
for i = 1:length(FIX1)
    node = num2str(FIX1(i));
    Value = NET.createArray('System.Boolean', 6);
    Value(1) = false(); Value(2) = true(); Value(3) = false();

```

Continuação: Função SetGet SAP2000

```

Value(4) = false(); Value(5) = false(); Value(6) = false();
ret = PointObj.SetRestraint(node, Value);
end
% Configurar os nós sem deslocamentos, 2 graus de liberdades fixos
for i = 1:length(FIX2)
    node = num2str(FIX2(i));
    Value = NET.createArray('System.Boolean',6);
    Value(1) = false(); Value(2) = true(); Value(3) = true();
    Value(4) = false(); Value(5) = false(); Value(6) = false();
    ret = PointObj.SetRestraint(node, Value);
end
% Configurar os nós sem deslocamentos, 3 graus de liberdades fixos
for i = 1:length(FIX3)
    node = num2str(FIX3(i));
    Value = NET.createArray('System.Boolean',6);
    Value(1) = true(); Value(2) = true(); Value(3) = true();
    Value(4) = false(); Value(5) = false(); Value(6) = false();
    ret = PointObj.SetRestraint(node, Value);
end
% Extremidades Rotuladas, elementos de treliça
SelectObj = NET.explicitCast(SapModel.SelectObj, 'SAP2000v20.cSelect');
ret = SelectObj.All;
for i = 1:Nelem
    FrameID = num2str(i);
    pointi = NET.createArray('System.Boolean',6);
    pointj = NET.createArray('System.Boolean',6);
    pointi(6) = true(); pointj(6) = true();
    StartValue(6) = 0; EndValue(6) = 0;
    pointi(5) = true(); pointj(5) = true();
    StartValue(5) = 0; EndValue(5) = 0;
    pointj(4) = true(); StartValue(4) = 0;
    ret = FrameObj.SetReleases(FrameID, pointi, pointj, StartValue, ...
    EndValue);
end
% Atualizar
View = NET.explicitCast(SapModel.View, 'SAP2000v20.cView');
ret = View.RefreshView(0, false());
% Configurar os Casos de Carga e as cargas nodais
LoadPatterns = NET.explicitCast(SapModel.LoadPatterns, ...
'SAP2000v20.cLoadPatterns');
ret = LoadPatterns.ChangeName('DEAD', 'DL');
LoadCases = NET.explicitCast(SapModel.LoadCases, ...
'SAP2000v20.cLoadCases');
ret = LoadCases.Delete('DEAD');
ret = LoadCases.Delete('MODAL');
ret = LoadPatterns.Delete('DL');
for i = 1:length(IdLoadCase)
    LoadName = char(IdLoadCase{i});
    ret = LoadPatterns.Add(LoadName, ...
    SAP2000v20.eLoadPatternType.Other,0,true);
    for j = 1:Nnode
        Value = NET.createArray('System.Double',6);
        Value(1) = FNn(3*j-2,i);
        Value(2) = FNn(3*j-1,i);
        Value(3) = FNn(3*j ,i);
        ret = PointObj.SetLoadForce(num2str(j), LoadName, Value);
    end
end
% Configurar as combinações
RespCombo = NET.explicitCast(SapModel.RespCombo, 'SAP2000v20.cCombo');
for i = 1: LoadNFCb
    NameCombo = strcat('COMB-', num2str(i));
    ret = RespCombo.Add(char(NameCombo),0);
    for j = 1:1:length(IdLoadCase)
        NameCase = char(IdLoadCase{j});
        ret = RespCombo.SetCaseList(NameCombo, ...
        SAP2000v20.eCNameType.LoadCase, NameCase, 1);
    end
end

```

Continuação: Função SetGet SAP2000

```

end
end
% Salvar
ModelPath = strcat(cd, filesep, SAP2000Nome);
ret = File.Save(ModelPath);
% Compilar a análise estática
Analyze = NET.explicitCast(SapModel.Analyze, 'SAP2000v20.cAnalyze');
Analyze.RunAnalysis();
AnalysisResults = NET.explicitCast(SapModel.Results, ...
'SAP2000v20.cAnalysisResults');
AnalysisResultsSetup= NET.explicitCast(AnalysisResults.Setup, ...
'SAP2000v20.cAnalysisResultsSetup');
% Extrair os deslocamentos nodais
Ug = zeros(3*Nnode, length(IdLoadCase));
for i = 1:length(IdLoadCase)
    NameLocalCase = char(IdLoadCase{i});
    for j = 1 : Nnode
        PointName = num2str(j);
        NumberResults = 0;
        Obj = NET.createArray('System.String', 1);
        Elm = NET.createArray('System.String', 1);
        ACase = NET.createArray('System.String', 1);
        StepType = NET.createArray('System.String', 1);
        StepNum = NET.createArray('System.Double', 1);
        U1 = NET.createArray('System.Double', 1);
        U2 = NET.createArray('System.Double', 1);
        U3 = NET.createArray('System.Double', 1);
        R1 = NET.createArray('System.Double', 1);
        R2 = NET.createArray('System.Double', 1);
        R3 = NET.createArray('System.Double', 1);
        ret = AnalysisResultsSetup.DeselectAllCasesAndCombosForOutput;
        ret = AnalysisResultsSetup.SetCaseSelectedForOutput(NameLocalCase);
        [~,~,~,~,~,~,~,U1,U2,U3,~,~,~]=AnalysisResults.JointDispl(PointName, ...
SAP2000v20.eItemTypeElm.ObjectElm,NumberResults, Obj, Elm, ACase, ...
StepType, StepNum, U1, U2, U3, R1, R2, R3);
        Ug(3*j-2,i) = U1(1);
        Ug(3*j-1,i) = U2(1);
        Ug(3*j ,i) = U3(1);
    end
end
% Extrair a força axial dos elementos
AxialF = zeros(Nelem, length(IdLoadCase));
for i = 1:length(IdLoadCase)
    NameLocalCase = char(IdLoadCase{i});
    for j = 1:Nelem
        PointElem = num2str(j);
        NumberResults = 0;
        Obj = NET.createArray('System.String', 1);
        ObjSta = NET.createArray('System.Double', 1);
        Elm = NET.createArray('System.String', 1);
        ElmSta = NET.createArray('System.Double', 1);
        ACase = NET.createArray('System.String', 1);
        StepType = NET.createArray('System.String', 1);
        StepNum = NET.createArray('System.Double', 1);
        P = NET.createArray('System.Double', 1);
        V2 = NET.createArray('System.Double', 1);
        V3 = NET.createArray('System.Double', 1);
        T = NET.createArray('System.Double', 1);
        M2 = NET.createArray('System.Double', 1);
        M3 = NET.createArray('System.Double', 1);
        ret = AnalysisResultsSetup.DeselectAllCasesAndCombosForOutput;
        ret = AnalysisResultsSetup.SetCaseSelectedForOutput(NameLocalCase);
        [~,~,~,~,~,~,~,~,P,~,~,~,~] = AnalysisResults.FrameForce(...
PointElem, SAP2000v20.eItemTypeElm.ObjectElm, NumberResults, Obj, ...
ObjSta, Elm, ElmSta, ACase, StepType, StepNum, P, V2, V3, T, M2, M3);
        AxialF(j,i) = P(1);
    end
end

```

Continuação: Função SetGet SAP2000

```
end
% Cálculo das tensões dos elementos
sigma = zeros(Nelem,length(IdLoadCase));
for i = 1:length(IdLoadCase)
    for j = 1:Nelem
        sigma(j,i) = AxialF(j,i)/A(j);
    end
end
% Fechar SAP2000
ret = SapObject.ApplicationExit(false());
% Final da função SetGet_SAP2000
end
```