Apêndice I – Resultados do Capítulo 2

Demonstração dos resultados dos modelos de Dell´Ariccia et ali (2002) e do modelo de Spiegel (2000) estendido.

AI – Modelo de Dell´Ariccia et ali (2002)

A equação do modelo expressa o *spread* para um país *i* em função da taxa de juros livre de risco, da probabilidade de uma crise (que depende dos fundamentos do país) e da probabilidade dos credores serem pagos condicional a uma crise (a qual é uma função da probabilidade do FMI conceder ao país um pacote de empréstimos na eventualidade de uma crise).

$$s_i = R^* \frac{(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)}{1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)}$$

Proposição 1: Mantendo constantes os fundamentos, a equação para o *spread* implica que $\frac{\partial \lambda}{\partial b} > 0$ se e somente se $\frac{\partial s_i}{\partial b} < 0$ para qualquer país *i*.

Prova: $$\frac{\partial s_i}{\partial b} = -R * \frac{\frac{\partial \lambda(b)}{\partial b}\theta(\mathbf{x}_i)}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2}$$

Logo, $\frac{\partial s_i}{\partial b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial b} > 0$.

Proposição 2: Mantendo constantes os fundamentos, a equação para o *spread* implica que $\frac{\partial\lambda}{\partial b} > 0$ se e somente se $\frac{\partial s_i^{\ 2}}{\partial x_{ij}\partial b} < 0$ para qualquer país i e qualquer fundamento x_{ij} .

Prova: $\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_{ij}\partial b} = -R * \frac{\frac{\partial\lambda(b)}{\partial b}\frac{\partial\theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}}\left[1+(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^3}$

Como temos $\frac{\partial\theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}} > 0$, isso significa que $\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_{ij}\partial b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial b} > 0$.

Proposição 3: Mantendo constantes os fundamentos, a equação para o *spread* implica que $\frac{\partial\lambda}{\partial b} > 0$ se e somente se $\frac{\partial\Delta s}{\partial b} < 0$ para quaisquer países *m* e *n*, $m \neq n$, para os quais possamos aproximar $\Delta s \equiv s_m - s_n$ por uma expansão de Taylor de primeira ordem.

Prova: Temos $s_i = s(\mathbf{x}_i, b)$. Definindo $\Delta s \equiv s_m - s_n$ (>0 , sem perda de generalidade). A expansão de Taylor de primeira ordem de s_m nos dá:

$$s(\mathbf{x}_m, b) \cong s(\mathbf{x}_n, b) + \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial s(\mathbf{x}_m, b)}{\partial x_{mj}}(x_{mj} - x_{nj})$$

Ainda: $\frac{\partial s(\mathbf{x}_i, b)}{\partial x_{ij}} = R * \frac{(1-\lambda(b))\frac{\partial\theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}}}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2}$. Assim,

$$s(\mathbf{x}_m, b) \cong s(\mathbf{x}_n, b) + \sum_{j=1}^{K} R * \frac{(1-\lambda(b))\frac{\partial\theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}}}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2}(x_{mj} - x_{nj})$$

Podemos reescrever a expressão acima, uma vez que $\Delta\theta \equiv \theta(\mathbf{x}_m) - \theta(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}}(x_{mj} - x_{nj})$, da seguinte forma:

$$\Delta s \cong R * \frac{(1-\lambda(b))}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2} \cdot \Delta\theta$$

Observe que $\Delta s > 0 \Leftrightarrow \Delta\theta > 0$.

$$\frac{\partial \Delta s}{\partial b} \cong \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial^2 s(\mathbf{x}_i, b)}{\partial b \partial x_{ij}}(x_{mj} - x_{nj}) = \sum_{j=1}^{K} - R * \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial b}\frac{\partial \theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_j}\left[1+(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^3}(x_{mj} - x_{nj}) =$$

$$= -R * \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial b}\left[1+(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^3} \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_j}(x_{mj} - x_{nj}) = -R * \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial b}\left[1+(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]}{\left[1-(1-\lambda(b))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^3} \cdot \Delta\theta$$

Portanto, como $\Delta\theta > 0$, isso implica que $\frac{\partial \Delta s}{\partial b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial b} > 0$.

Dell´Arccia et ali mostram que as três proposições continuam válidas caso λ, a probabilidade dos credores serem pagos condicional a uma crise, seja também uma função dos fundamentos do país, $\mathbf{x}_i$, contanto que sejam assumidas duas condições adicionais.

A Proposição 1 não depende dessa hipótese e, assim, continua válida mesmo que $\lambda(b, \mathbf{x}_i)$.

A Proposição 2 depende apenas da primeira condição adicional. Essa condição é que a probabilidade dos credores serem pagos condicional a uma crise aumente em resposta a uma mudança da probabilidade do FMI “socorrer” um país de maneira uniforme entre os países. Isto é,

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_{ij} \partial b} = 0$$

Temos:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_{ij} \partial b} = -R * \frac{\partial \lambda(b, \mathbf{x}_i)}{\partial b} \frac{\left\{ \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}} [1 + (1 - \lambda(b, \mathbf{x}_i))\theta(\mathbf{x}_i)] - 2[\theta(\mathbf{x}_i)]^2 \frac{\partial \lambda(b, \mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}} \right\}}{[1 - (1 - \lambda(b, \mathbf{x}_i))\theta(\mathbf{x}_i)]^3}$$

Como $\frac{\partial \theta(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}} > 0$ e assumimos $\frac{\partial \lambda(b, \mathbf{x}_i)}{\partial x_{ij}} < 0$ (quanto piores os fundamentos, menor é a probabilidade dos credores serem pagos numa crise) isso implica que $\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_{ij} \partial b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial b} > 0$.

Quando temos $\lambda(b, \mathbf{x}_i)$ a prova da Proposição 3 depende da condição de que a diferença na probabilidade de uma crise entre os países, $\Delta\theta$, não seja muito grande em relação à diferença na probabilidade de que os credores sejam pagos condicional a uma crise, $\Delta\lambda$.

Podemos aproximar Δs por uma expansão de Taylor de primeira ordem da seguinte maneira:

$$\Delta s \cong \frac{R *}{[1 - (1 - \lambda(b, \mathbf{x}_i))\theta(\mathbf{x}_i)]^2} \cdot [(1 - \lambda(b, \mathbf{x}_i))\Delta\theta - \theta(\mathbf{x}_i)\Delta\lambda]$$

$$\Delta s > 0 \Rightarrow (1 - \lambda(b, \mathbf{x}_i))\Delta\theta - \theta(\mathbf{x}_i)\Delta\lambda > 0$$

A derivada parcial de Δs em relação a *b* é dada por:

$$\frac{\partial \Delta s}{\partial b} \cong \frac{-R^*}{\left[1-(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\theta(\mathbf{x}_i)\right]^3} \cdot \frac{\partial \lambda(b,\mathbf{x}_i)}{\partial b} \left\{ \left[1+(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\Delta\theta\right] - 2\left[\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2 \Delta\lambda \right\}$$

Se assumirmos que $\Delta s > 0 \Rightarrow \Delta\theta \geq 0$ (países com *spreads* maiores tem maior probabilidade de sofrer uma crise, ou de outra forma, que a ordem dos *spreads* é determinada pela probabilidade de uma crise e não pela probabilidade de pagamento condicional a uma crise), então teremos:

Caso $\Delta\lambda < 0$, $\left[1+(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\Delta\theta\right] - 2\left[\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2 \Delta\lambda > 0$ e, portanto, $\frac{\partial \Delta s}{\partial b} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial b} > 0$.

Caso $\Delta\lambda > 0$, a condição que $(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\Delta\theta - \theta(\mathbf{x}_i)\Delta\lambda > 0$ implica que $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} > \frac{\theta}{1-\lambda} > \frac{2\theta^2}{1+(1-\lambda)\theta}$. Portanto, multiplicamos o termo $(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\Delta\theta$ por um número positivo maior que o número pelo qual multiplicamos o termo $\theta(\mathbf{x}_i)\Delta\lambda$ e $\left[1+(1-\lambda(b,\mathbf{x}_i))\Delta\theta\right] - 2\left[\theta(\mathbf{x}_i)\right]^2 \Delta\lambda > 0$.

Se $\Delta\theta < 0$, devemos ter $\Delta\lambda < 0$ e $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} < \frac{2\theta^2}{1+(1-\lambda)\theta}$.

AII – Modelo de Spiegel (2000) estendido

i) Sinais das derivadas $\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}$, $\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial \hat{r}_2}$, $\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial r_2}$ e $\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial \lambda}$ para $j=g,b$.

Temos que $\hat{\Lambda}_j$ é dado por:

$$\hat{\Lambda}_j = \lambda r_1 + (1-\lambda)\left[\int_0^{\hat{z}*}\frac{r_1 r_2}{\hat{z}*} zj(z)dz + r_1 r_2 \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz\right] - l$$

para $j=g,b$.

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial r_1} = \lambda + (1-\lambda)\left\{r_2 \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz\right\} > 0$$

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial \hat{r}_2} = -\lambda r_1(1-\lambda)\left\{\frac{r_1 r_2}{(\hat{z}*)^2}\int_0^{\hat{z}*} zj(z)dz\right\} < 0$$

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial r_2} = r_1(1-\lambda)\left\{\frac{\lambda r_1 \hat{r}_2}{(\hat{z}*)^2}\int_0^{\hat{z}*} zj(z)dz + \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz\right\} > 0$$

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial \lambda} = r_1 - \frac{r_1 r_2}{\hat{z}*}\int_0^{\hat{z}*} zj(z)dz - r_1 r_2 \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz + (1-\lambda)\frac{r_1 \hat{r}_2}{(\hat{z}*)^2}\left[r_1(r_2 - \hat{r}_2)\right]\int_0^{\hat{z}*} zj(z)dz < ou > 0$$

Observação A1: $\frac{\partial\hat{\Lambda}_b(\lambda, r_2^*, r_2^*)}{\partial \lambda} > 0$

Prova: Por hipótese temos que $\hat{\Lambda}_b(0, r_2^*, r_2^*) = \left[\int_0^{\hat{z}*} \frac{r_1 r_2^*}{\hat{z}*} zb(z)dz + r_1 r_2^* \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} b(z)dz \right] - l < 0$, ou seja, $\left[\int_0^{\hat{z}*} \frac{r_1 r_2^*}{\hat{z}*} zb(z)dz + r_1 r_2^* \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} b(z)dz \right] < l$. De fato, isso é verdadeiro para qualquer r_2.

Como $r_1 > l > \left[\int_0^{\hat{z}*} \frac{r_1 r_2^*}{\hat{z}*} zb(z)dz + r_1 r_2^* \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} b(z)dz \right]$ e $\frac{\partial \hat{z}*}{\partial \lambda} = 0$, então $\frac{\partial \hat{\Lambda}_b(\lambda, r_2^*, r_2^*)}{\partial \lambda} = r_1 - \left[\int_0^{\hat{z}*} \frac{r_1 r_2^*}{\hat{z}*} zb(z)dz + r_1 r_2^* \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} b(z)dz \right] > 0$.

ii) Sinais das derivadas $\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right]$, $\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right]$ e $\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right]$ para $j = g,b$ (esses resultados serão utilizados abaixo).

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right] = -(1-\lambda) r_2 \left[\lambda \hat{r}_2 + (1-\lambda) r_2\right] < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right] = (1-\lambda)\left\{ \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz - (1-\lambda) r_1 r_2\, j(\hat{z}*) \right\} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_j}{\partial r_1}\right] = 1 - \left\{ r_2 \int_{\hat{z}*}^{\bar{z}} j(z)dz \right\} + (1-\lambda) r_2\, j(\hat{z}*)\left[r_1(r_2 - \hat{r}_2)\right] < ou > 0$$

iii) Derivadas da taxa de juros em relação às variáveis do contrato do FMI, $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$, no caso de equilíbrio separador:

A taxa de juros é dada implicitamente pela seguinte equação:

$$E(R^{i}_{separador}) = \omega_i(1-\rho)r_1 + \omega_i\rho(\hat{\Lambda}_g + l) + (1-\omega_i)l - 1 = 0$$

Resultado 6 (para o caso de equilíbrio separador): As taxas de juros, r_1, são tanto menores quanto mais leniente for o contrato do FMI. Isto é, quanto menor for $\hat{r}_2$ e maior for r_2. Com relação a λ o sinal é ambíguo; depende de se $\hat{r}_2 < r_2$ e dos valores específicos das variáveis do contrato.

Prova:

$$\frac{\partial r_1}{\partial \hat{r}_2} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial\hat{r}_2}\right]}{\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}} > 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r_2} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_2}\right]}{\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}} < 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \lambda} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial\lambda}\right]}{\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}} < ou > 0$$ Para o caso que consideramos relevante temos $\frac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial\lambda} > 0$ e assim o sinal dessa derivada é negativo.

$$\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} = \frac{-\left[(1-\rho)r_1 + \rho\left(\hat{\Lambda}_g + l\right) - l\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}} < 0$$, pois pela equação (A II.0)

$$\left[(1-\rho)r_1 + \rho\left(\hat{\Lambda}_g + l\right) - l\right] = \frac{1-l}{\omega_i} > 0 .$$

iv) Sensibilidade de $\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}$ às variáveis do contrato oferecido pelo FMI $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$ no caso de equilíbrio separador.

Resultado 7 (para o caso *j=g*): A sensibilidade de r_1 aos fundamentos do país, resumidos no parâmetro ω_i, é tanto maior quanto mais favoráveis são os termos do contrato do FMI dado λ. Ou seja, $\frac{\partial^2 \hat{\Lambda}_j}{\partial \hat{r}_2 \partial w_i} < 0$ e $\frac{\partial^2 \hat{\Lambda}_j}{\partial r_2 \partial w_i} > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}\right] = -\left(\frac{1-l}{\omega_i}\right) . \frac{-1}{\left[\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right]^2} . \omega_i\rho\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right] < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}\right] = -\left[\frac{1-l}{\omega_i}\right] . \frac{-1}{\left[\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right]^2} . \omega_i\rho\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right] > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}\right] = -\left[\frac{1-l}{\omega_i}\right] . \frac{-1}{\left[\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right]^2} . \omega_i\rho\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right] > ou < 0$$

v) Derivadas da taxa de juros em relação às variáveis do contrato do FMI, $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$, no caso de equilíbrio *pooling* com empréstimos:

A taxa de juros é dada implicitamente pela seguinte equação:

$$E(R^{i}_{pool-c/emp}) = \omega_i(1-\rho)r_1 + \omega_i\rho(\hat{\Lambda}_g + l) + (1-\omega_i)(\hat{\Lambda}_b + l) - 1 = 0$$

Resultado 6 (para o caso de equilíbrio *pooling* com empréstimos): As taxas de juros, r_1, são tanto menores quanto mais leniente for o contrato do FMI. Isto é, quanto menor for $\hat{r}_2$ e maior for r_2. Com relação a λ o sinal é ambíguo; depende de se $\hat{r}_2 < r_2$ e dos valores específicos das variáveis do contrato.

$$\frac{\partial r_1}{\partial \hat{r}_2} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial\hat{r}_2} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial\hat{r}_2}\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}} > 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r_2} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_2} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_2}\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}} < 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \lambda} = \frac{-\left[\omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial\lambda} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial\lambda}\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}} < ou > 0$$

, lembrando que consideramos o caso relevante como aquele no qual $\dfrac{\partial\hat{\Lambda}_j}{\partial\lambda} > 0$ e que, portanto, essa derivada tem sinal negativo.

$$\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} = \frac{-\left[(1-\rho)r_1 + \rho\left(\hat{\Lambda}_g + l\right) - \left(\hat{\Lambda}_b + l\right)\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}} =$$

$$= \frac{-\left[\frac{1-l-\hat{\Lambda}_b}{\omega_i}\right]}{\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}} < ou > 0$$

Para $\hat{\Lambda}_b$ pequeno teremos que $\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} < 0$. Consideramos que esse seja o caso relevante.

vi) Sensibilidade de $\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}$ às variáveis do contrato oferecido pelo FMI $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$ no caso de equilíbrio *pooling* com empréstimos.

Resultado 7 (para o caso *j=b*): A sensibilidade de r_1 aos fundamentos do país, resumidos no parâmetro ω_i, é tanto maior quanto mais favoráveis são os termos do contrato do FMI dado λ. Ou seja, $\frac{\partial^2\hat{\Lambda}_j}{\partial\hat{r}_2\partial w_i} < 0$ e $\frac{\partial^2\hat{\Lambda}_j}{\partial r_2\partial w_i} > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial\hat{r}_2}\left[\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}\right] = \left\{\left(-\frac{1}{\omega_i}\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial\hat{r}_2}\right)\left[\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1-l-\hat{\Lambda}_b}{\omega_i}\right]\left\{\omega_i\rho\frac{\partial}{\partial\hat{r}_2}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right] + (1-\omega_i)\frac{\partial}{\partial\hat{r}_2}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]\right\}\right\} \cdot \frac{1}{\left[\omega_i(1-\rho) + \omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1} + (1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]^2} < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}\right]=\left\{\left(-\frac{1}{\omega_i}\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_2}\right)\left[\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}+(1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1-l-\hat{\Lambda}_b}{\omega_i}\right]\left\{\omega_i\rho\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right]+(1-\omega_i)\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]\right\}\right\}.\frac{1}{\left[\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}+(1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]^2}>0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i}\right]=\left\{\left(-\frac{1}{\omega_i}\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial \lambda}\right)\left[\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}+(1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1-l-\hat{\Lambda}_b}{\omega_i}\right]\left\{\omega_i\rho\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}\right]+(1-\omega_i)\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]\right\}\right\}.\frac{1}{\left[\omega_i(1-\rho)+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g}{\partial r_1}+(1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b}{\partial r_1}\right]^2}>ou<0$$

vii) Derivadas do retorno do país em eventos de crise em relação às variáveis $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$ para j= g,b.

O retorno do país é dado por:

$$\hat{\Lambda}_j^p=\int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}}(z-\hat{z}^*)\,j(z)dz=\int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}}[z-(\lambda r_1\hat{r}_2+(1-\lambda)r_1r_2]\,j(z)dz$$

para j= g,b.

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1}=-\left(\lambda\hat{r}_2+(1-\lambda)r_2\right)\int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}}g(z)dz<0$$

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}_g^p}{\partial \hat{r}_2}=-\lambda r_1\int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}}g(z)dz<0$$

$$\frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_2} = -(1-\lambda) r_1 \int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}} g(z)dz < 0$$

$$\frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial \lambda} = \left[r_1 \left(r_2 - \hat{r}_2 \right) \right] \int_{\hat{z}^*}^{\bar{z}} g(z)dz > 0$$

viii) Derivada do retorno total do país no caso de equilíbrio separador em relação aos fundamentos, ω_i, e como essa derivada depende dos termos do contrato do FMI $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$.

$$\frac{\partial R_{separador}^p}{\partial \omega_i} = (1-\rho)\left[E_g(z) - r_1\right] - \omega_i (1-\rho) \frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \rho \hat{\Lambda}_g^p + \omega_i \rho \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial R_{separador}^p}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial \hat{r}_2} - \omega_i (1-\rho) \frac{\partial r_1^2}{\partial \hat{r}_2 \partial \omega_i} + \rho \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial \hat{r}_2} + \omega_i \rho \left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g^{p\,2}}{\partial \hat{r}_2 \partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1} \frac{\partial r_1^2}{\partial \hat{r}_2 \partial \omega_i} \right] < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial R_{separador}^p}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial r_2} - \omega_i (1-\rho) \frac{\partial r_1^2}{\partial r_2 \partial \omega_i} + \rho \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_2} + \omega_i \rho \left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g^{p\,2}}{\partial r_2 \partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1} \frac{\partial r_1^2}{\partial r_2 \partial \omega_i} \right] < ou > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial R_{separador}^p}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial \lambda} - \omega_i (1-\rho) \frac{\partial r_1^2}{\partial \lambda \partial \omega_i} + \rho \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial \lambda} + \omega_i \rho \left[\frac{\partial \hat{\Lambda}_g^{p\,2}}{\partial \lambda \partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1} \frac{\partial r_1^2}{\partial \lambda \partial \omega_i} \right] < ou > 0$$

ix) Derivada do retorno total do país no caso de equilíbrio *pooling* com empréstimos em relação aos fundamentos, ω_i, e como essa derivada depende dos termos do contrato do FMI $(\lambda, \hat{r}_2, r_2)$.

$$\frac{\partial R^{p}_{pool-c/-emp}}{\partial \omega_i} = (1-\rho)\left[E_g(z) - r_1\right] - \omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \rho\hat{\Lambda}^{p}_{g} + \omega_i\rho\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} - \hat{\Lambda}^{p}_{b} + (1-\omega_i)\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{b}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_2}\left[\frac{\partial R^{p}_{pool-c/-emp}}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial \hat{r}_2} - \omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \hat{r}_2\partial \omega_i} + \rho\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial \hat{r}_2} + \omega_i\rho\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{g}}{\partial \hat{r}_2\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \hat{r}_2\partial \omega_i}\right] +$$
$$+(1-\omega_i)\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{b}}{\partial \hat{r}_2\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{b}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \hat{r}_2\partial \omega_i}\right] < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left[\frac{\partial R^{p}_{pool-c/-emp}}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial r_2} - \omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial r_2\partial \omega_i} + \rho\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial r_2} + \omega_i\rho\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{g}}{\partial r_2\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial r_2\partial \omega_i}\right] +$$
$$+(1-\omega_i)\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{b}}{\partial r_2\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{b}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial r_2\partial \omega_i}\right] < ou > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial R^{p}_{pool-c/-emp}}{\partial \omega_i}\right] = -(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial \lambda} - \omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \lambda\partial \omega_i} + \rho\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial \lambda} + \omega_i\rho\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{g}}{\partial \lambda\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{g}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \lambda\partial \omega_i}\right] +$$
$$+(1-\omega_i)\left[\frac{\partial \hat{\Lambda}^{p\,2}_{b}}{\partial \lambda\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \hat{\Lambda}^{p}_{b}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1^{\,2}}{\partial \lambda\partial \omega_i}\right] < ou > 0$$

x) Comparação das derivadas para o retorno total do país nos equilíbrios separador e *pooling* com empréstimos.

Vamos determinar sob quais condições vale: $\frac{\partial R^{p}_{pool-c/-emp}}{\partial \omega_i} < \frac{\partial R^{p}_{separador}}{\partial \omega_i}$, de forma que o incentivo para o país se esforçar seja menor sob o equilíbrio *pooling*.

Assim, queremos determinar quando

$$(1-\rho)\left[E_g(z)-r_1\right]-\omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}+\rho\hat{\Lambda}_g^p+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}>(1-\rho)\left[E_g(z)-r_1\right]-\omega_i(1-\rho)\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}+$$
$$+\rho\hat{\Lambda}_g^p+\omega_i\rho\frac{\partial\hat{\Lambda}_g^p}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}-\hat{\Lambda}_b^p+(1-\omega_i)\frac{\partial\hat{\Lambda}_b^p}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}$$

Desprezaremos os termos das derivadas cruzadas, admitindo que o efeito de segunda ordem seja pequeno o suficiente para não sobrepor-se aos efeitos de primeira ordem. Portanto, analisaremos para quais contratos vale

$$(1-\rho)\left[-r_1^{sep}\right]-\omega_i(1-\rho)\left(\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}\right)^{sep}+\rho\left(\hat{\Lambda}_g^p\right)^{sep}>(1-\rho)\left[-r_1^{pool}\right]-\omega_i(1-\rho)\left(\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}\right)^{pool}+\rho\left(\hat{\Lambda}_g^p\right)^{pool}-\left(\hat{\Lambda}_b^p\right)^{pool}$$

Consideraremos contratos nos quais $r_2^{sep}>r_2^{pool}$ e $\hat{r}_2^{sep}>\hat{r}_2^{pool}$. Assim, pelos resultados do item (iv) e (vi) $-\omega_i(1-\rho)\left(\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}\right)^{sep}>-\omega_i(1-\rho)\left(\frac{\partial r_1}{\partial\omega_i}\right)^{pool}$.

Suponha que o contrato $(\lambda^{sep},\hat{r}_2^{sep},r_2^{sep})$ induza um equilíbrio separador. Considere um contrato $(\lambda^{pool},\hat{r}_2^{pool},r_2^{pool})$ com $\lambda^{sep}<\lambda^{pool}$, $r_2^{sep}>r_2^{pool}$ e $\hat{r}_2^{sep}>\hat{r}_2^{pool}$ que induza um equilíbrio *pooling* com empréstimos. Para que seja válido que $\frac{\partial R^p_{pool-c/-emp}}{\partial\omega_i}(\lambda^{pool},\hat{r}_2^{pool},r_2^{pool})<\frac{\partial R^p_{separador}}{\partial\omega_i}(\lambda^{sep},\hat{r}_2^{sep},r_2^{sep})$ devemos ter que $\left(\hat{\Lambda}_g^p\right)^{pool}$ é somente pouco maior que $\left(\hat{\Lambda}_g^p\right)^{sep}$ e que $\left(\hat{\Lambda}_b^p\right)^{pool}$, o retorno do país numa crise de insolvência seja grande o suficiente. Vale notar ainda que teremos necessariamente $r_1^{sep}>r_1^{pool}$. Deve ser o caso também de que a queda da taxa de juros não seja muito grande (ou seja, leva pouco "*moral hazard* por parte dos investidores"). Formalmente, é suficiente a seguinte condição:

$$(1-\rho)r_1^{sep} + \rho\left\{\int_{(\hat{z}*)^{pool}}^{(\hat{z}*)^{sep}}\left[z-(\hat{z}*)^{pool}\right]g(z)dz + \int_{(\hat{z}*)^{pool}}^{\bar{z}}\left[(\hat{z}*)^{sep}-(\hat{z}*)^{pool}\right]g(z)dz\right\} < (1-\rho)r_1^{pool} + \int_{(\hat{z}*)^{pool}}^{\bar{z}}\left[z-(\hat{z}*)^{pool}\right]b(z)dz$$

Podemos interpretar essa condição da seguinte maneira: a mudança no contrato que leva ao equilíbrio *pooling* aumenta substancialmente o retorno esperado do país numa situação de crise de solvência, mas não modifica o retorno dos credores de maneira significativa, isto é, não modifica demasiadamente as taxas de juros.