

Alexandre E. Farias Frota

**Avaliação de Opções Americanas
Tradicionais e Complexas**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção: Finanças e Análise de Investimentos

Rio de Janeiro
Março de 2003

Alexandre E. Farias Frota.

**Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e
Complexas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: José Paulo Teixeira
Co-orientador: Tara Keshar Nanda Baidya

Alexandre E. Farias Frota

**Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e
Complexas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

José Paulo Teixeira

Orientador
DEI-PUC.Rio

Tara Keshar Nanda Baidya

Co-orientador
DEI-PUC.Rio

Carlos Patrício Semanez

DEI-PUC.Rio

Marco Antônio Guimarães Dias

Petrobrás

Heber Moura

UECE/ Unifor

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador (a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

DEI-PUC.Rio, 27 de março de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre E. Farias Frota

Graduou-se com honra ao mérito em Engenharia de Produção pela PUC.Rio em 2000. Recebeu certificado de excelência acadêmica nos anos de 1995 e 1996. Bolsista de intercâmbio universitário na Universidade de Oklahoma durante o ano de 1998. Participou dos projetos PUC/Petros na área de *asset management* durante o ano de 2000 e PUC/Petrobrás sobre Opções Reais, durante o ano de 2002, coordenado pelo engenheiro Marco Antônio G. Dias. Publicou artigos na área de derivativos na Sociedade Brasileira de Finanças e Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Atualmente trabalha como analista de negócios na Diretoria de Manganês e Ligas da Companhia Vale do Rio Doce.

Ficha Catalográfica

Farias Frota, Alexandre

Aplicação de modelos flexíveis baseados em Simulação de Monte Carlo e Quase-Monte Carlo na avaliação de opções americanas tradicionais ou complexas.

[11] 143 f. il; 30cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial.

Incluí referências bibliográficas.

Opções Americanas; Complexas; Exóticas; Monte Carlo; Quase-Monte Carlo; Método dos Mínimos Quadrados; Métodos Numéricos, Processos Estocásticos.

Agradecimentos

À minha esposa e melhor amiga Amabélia, por todo o amor, carinho e apoio. Sua presença foi imprescindível à realização deste trabalho.

Ao meu pai Manuel pela confiança depositada em mim e por estar sempre presente nos momentos que precisei.

À minha mãe Ruth, pelos momentos de tranquilidade durante o ano de 2002.

Aos grandes amigos Viktor Nigri e Maurício Vidal cuja amizade e momentos de descontração enriqueceram esse mestrado.

Aos professores José Paulo Teixeira e Tara Nanda Badya pela inestimável colaboração.

À Marco Antonio Dias, Kátia Rocha e Edson cuja ajuda e incentivo foram de fundamental importância na elaboração deste trabalho.

Ao professor Carlos Patrício Samanez pelos ensinamentos que enriqueceram minha formação acadêmica.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela ajuda financeira.

Resumo

Farias Frota, Alexandre. **Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas**. DEI-PUC.Rio, 2003. 143p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A maioria das opções negociadas atualmente é do estilo americano, no entanto sua avaliação continua sendo uma tarefa bastante difícil, constituindo-se numa das áreas mais desafiadoras no campo de derivativos financeiros, particularmente quando existem vários fatores afetando o preço da opção. Isso ocorre basicamente porque os métodos de árvores binomiais e diferenças finitas tornam-se impraticáveis na avaliação de opções com mais de três fatores de incerteza. No presente trabalho, faz-se um estudo prévio dos modelos de precificação tradicionais, para posteriormente nos estendermos a modelos mais flexíveis desenvolvidos recentemente baseados em simulações de Monte Carlo e Quase-Monte Carlo, até então considerados inaplicáveis na avaliação de opções americanas. Nesse sentido, pretendemos comprovar a aplicabilidade e versatilidade dos modelos baseados em simulação na avaliação de opções americanas tradicionais ou complexas. Nossa análise baseia-se, sobretudo na ilustração de exemplos práticos, dando especial ênfase à implementação computacional e precisão dos modelos.

Palavras-chave

Opções Americanas; Complexas; Exóticas; Monte Carlo; Quase-Monte Carlo; Método dos Mínimos Quadrados; Diferenças Finitas, Métodos Numéricos; Processos estocásticos.

Abstract

Farias Frota, Alexandre. **Valuation of Ordinary and Complex American Options**. DEI-PUC.Rio, 2003. 143p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Industrial, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The majority of the options negotiated nowadays are of the american style, however its valuation goes on being a very hard job, constituting themselves in one of the most challenging areas in the financial derivative field, particularly when there are several factors affecting the price of the option. It happens basically because the binominal trees and finite differences methods become impracticable in the valuation of options with more than three factors of uncertainty. In this work we are doing a previous study of the traditional methods of american option valuation for later extending this study to more flexible and newly developed models based on simulations of Monte Carlo and Quase-Monte Carlo, which up to the present have been considered inapplicable in the valuation of the american style options. In this sense we intend to prove the applicability and versatility of the models based on simulation in the valuation of traditional and complex american options. Our analysis is, above all based on the illustration of practical examples giving special emphasis to the computational implementation and accuracy of the methods.

Keywords

American Options; Complex; Monte Carlo; Least Square Method; Simulation; Finite Differences, Numerical Methods.

Sumário

Lista de figuras, tabelas, ilustrações e quadros	11
Capítulo 1: Introdução	15
CONCEITOS BÁSICOS	
Capítulo 2: Simulação de Monte Carlo	18
2.1. Conceitos Básicos	18
2.2. Esquemas Básicos de Precificação	21
2.2.1. Opção Européia	21
2.2.2. Opção Barreira	23
2.2.3. Opção Asiática	24
Capítulo 3: Métodos de Aceleração de Convergência	26
3.1. Técnicas de Redução de Variância	26
3.1.1. Variáveis Antitéticas	26
3.1.2. Variáveis de Controle	28
3.1.3. Estratificação	29
3.1.4. <i>Importance Sampling</i>	30
3.1.5. <i>Latin Hypercube (LH)</i>	32
3.2. Seqüências de Baixa Discrepância ou Quase-Monte Carlo (QMC)	34
3.2.1. Geração de Números Quase-Aleatórios Uniformes	36
3.2.2. Associação das Téc. de Redução de Variância e QMC	38
3.2.3. Homogeneidade das Seqüências em Altas Dimensões	39
3.2.4. QMC Híbrido	41
Capítulo 4: Opções Americanas	43
4.1 Conceitos Básicos	43
4.2. Formulação Matemática do Problema	44
4.3. Condição de Contorno Livre	46
4.4. Aproximações Analíticas	48

MODELOS TRADICIONAIS

Capítulo 5: Modelo Binomial	49
5.1. Conceitos Básicos	49
5.2. Tipos de Modelos Binomiais	50
5.2.1. Cox, Ross e Rubinstein (CRR)	50
5.2.2. Modelo de Jarrow e Rudd (JR)	52
5.2.3. Modelo de Hull e White (HW)	52
5.2.4. Modelo de Trigeorgis (TRG)	53
5.3. Variações do Modelo Binomial	53
5.3.1. Método dos Valores Médios (MVM)	53
5.3.2. Método Binomial Black-Scholes (BBS)	53
5.3.3. Método BBS com Extrapolação de Richardson (BBSR)	54
5.3.4. Método das Variáveis de Controle (MVC)	54
5.4. Resultados	55
Capítulo 6: Modelo de Diferenças Finitas	57
6.1. Escolha do <i>GRID</i>	58
6.2. Método Explícito	58
6.2.1. Instabilidade do Método Explícito	60
6.2.2. Interpretação Financeira da Instabilidade	60
6.3. Método Implícito	61
6.4. Método Crank-Nicholson	63
6.5. Gregas	65
6.6. Resultados	67

MODELOS BASEADOS EM SIMULAÇÃO

Capítulo 7: Modelo de Grant, Vora e Weeks (GVW)	70
7.1. Formulação do Problema	71
7.2. Esquema Gráfico de Precificação de uma <i>Call</i> Americana	72
7.3. Extensões do Modelo GVW	74
7.3.1. Técnicas de Quasi-Monte Carlo	74

7.3.2. Método da Bisseção	74
7.3.3. Aplicar a Aproximação de Geske e Johnson (GJ)	75
7.4. Resultados	76
Capítulo 8: Modelo dos Mínimos Quadrados (LSM)	79
8.1. Formulação do Problema	80
8.2. Algoritmo LSM	83
8.3. Exemplo do Cálculo de uma <i>Put</i> Americana	85
8.4. Curva de Gatilho	90
8.5. Resultados	91
Capítulo 9: Avaliação de Opções Americanas Complexas	95
9.1. Modelo Jump-to-Ruin	95
9.2. Opções Barreira	97
9.3. Opções Asiáticas	100
9.4. Opções <i>Lookback</i>	102
9.5. Opções Dependentes de Múltiplos Ativos	104
9.6. Opções com Taxas de Juros Variáveis	106
9.6.1. Taxa de juros em função do tempo	107
9.6.2. Taxas de Juros estocásticas: Modelo CIR	109
9.7. Opções com Volatilidade Estocástica	111
Capítulo 10: Conclusão	113
Referências Bibliográficas	116
Apêndice A: Definições	120
A.1. Processo de Wiener	120
A.2. Lema de Itô	122
A.3. Dedução da Equação Diferencial de Black Scholes	123
A.4. Aproximação Analíticas	125
A.4.1. Barone-Adesi e Whaley	125
A.4.2. Bjerksund e Stensland	126
A.5. Aproximação de Geske e Johnson	127

A.6. Equações de Diferenças: Série de Taylor	129
A.7. Métodos Iterativos	130
A.8. Método da Bisseção	133
A.9. Normalização de Seqüências $U \sim (0,1)$	134
A.10. Discrepância	135
A.11. Método dos Mínimos Quadrados	136
A.12. Polinômios	137
A.13. Fatoração LU	138
A.14. Números de Inicialização de Sobol	139
Apêndice B: Programas	140
B.1. Lista de Programas	141
B.2. Interface Computacional	142
B.2.1. Modelo de Diferenças Finitas	142
B.2.2. Modelo GVW	142
B.2.3. Modelo LSM	143

Lista de figuras, tabelas, ilustrações e quadros

Figura 2.1- Esquema de precificação de uma opção européia.	22
Figura 2.2- Esquema de precificação de uma opção européia barreira.	24
Figura 2.3- Esquema de precificação de uma opção européia asiática.	25
Figura 3.1- Convergência do método <i>Latin Hipercube</i> .	33
Figura 3.2- Uniformidade das seqüências de números aleatórios.	34
Figura 3.3- Distribuições geradas pelas seqüências de NA	35
Figura 3.4- Convergência dos métodos de MC e QMC.	35
Figura 3.5- Seqüências de baixa discrepância em altas dimensões.	39
Figura 3.7- Uniformidade dos modelos de QMC e QMC-Híbrido.	42
Figura 3.8- Simulação de preços no modelo de QMC e QMC-Híbrido.	42
Figura 4.1- Comparação entre opções americanas e européias.	44
Figura 4.2- Soluções de Barone-Adesi e Bjerksund e Stensland.	48
Figura 5.1- Convergência dos modelos binomiais CRR, JR, HW e TRG.	55
Figura 5.2- Convergência dos modelos binomiais CRR, BBS, BBSR e MVM.	55
Figura 5.3- Precisão do modelo binomial CRR.	56
Figura 6.1- Convergência dos métodos de diferenças finitas.	67
Figura 6.2- Convergência do Modelo Crank-Nicholson.	67
Figura 6.3- Representação gráfica do <i>GRID</i> obtido no método de DF.	68
Figura 6.4- Demonstração da instabilidade do método.	68
Figura 6.5- Probabilidades negativas do método explícito.	69
Figura 6.6- Curvas de gatilho (condição de contorno livre).	69
Figura 7.1- Comparação entre opções bermudas e americanas.	70
Figura 7.2- Simulação dos preços de uma ação com exercício antecipado.	76
Figura 7.3- Curvas de gatilho para diversas datas de exercício antecipado.	77
Figura 7.4- Curvas de gatilho com diferentes sementes de inicialização.	77

Figura 7.5- Precisão do modelo GVW.	78
Figura 8.1- <i>Payoff's</i> e curvas de continuação segundo o modelo LSM	92
Figura 8.2- Comparação das curvas de gatilho geradas pelos modelos de DF, LSM e GVW.	93
Figura 8.3- Curvas de gatilho para diversos intervalos de tempo.	93
Figura 8.4- Estratégia de exercício antecipado.	94
Figura 8.5- Informações sobre o risco.	94
Figura 9.1- Curvas de exercício médio do processo <i>jump-to-ruin</i>	97
Figura 9.2- Curvas de exercício antecipado médio para uma opção americana <i>put down-out</i> .	99
Figura 9.3- Estratégia de exercício antecipado para as opções americanas barreira.	99
Figura 9.4- Curva de continuação de uma <i>call</i> americana asiática.	101
Figura 9.5- Estratégia de exercício antecipado para uma opção americana asiática.	102
Figura 9.6- Avaliação de uma opção americana <i>lookback</i> .	103
Figura 9.7- Estratégia de exercício para uma opção americana com múltiplos ativos.	106
Figura 9.8- Representação das curvas de juros USTS e DSTS.	108
Figura 9.9- Trajetórias de taxas de juros segundo o modelo CIR.	109
Figura 9.10- Taxas de desconto considerando juros estocásticos.	110
Figura 9.11- Simulação NGARCH.	112
Figura B.1- Interface computacional do programa <i>American_DF</i> .	142
Figura B.2- Interface computacional do programa <i>American_GVW</i> .	142
Figura B.3- Interface computacional do programa <i>American_LSM</i> .	143
Tabela 2.1- Convergência do modelo de SMC na precificação de uma <i>put</i> europeia.	22
Tabela 2.2- Convergência do modelo de SMC na precificação de uma <i>put</i> europeia barreira.	24
Tabela 2.3- Convergência do modelo de SMC na precificação de uma <i>put</i> europeia asiática.	28
Tabela 3.2- Convergência da SMC com variáveis de controle.	29

Tabela 3.3- Convergência da SMC com estratificação.	30
Tabela 3.4- Convergência da SMC com <i>importance sampling</i> .	32
Tabela 3.5- Convergência de QMC e variáveis de controle.	38
Tabela 7.1- Precisão do Modelo GVW.	91
Tabela 8.2- Modelo LSM em função do grau do polinômio linear utilizado na regressão.	92
Tabela 9.1- Opções americanas e européias cujos preços das ações seguem dois processos estocásticos diversos.	96
Tabela 9.2- Valores de opções americanas <i>put up-out</i> .	98
Tabela 9.3- Valores de opções americanas <i>put up-out</i> a medida que aumentamos o número de datas de exercício .	98
Tabela 9.4- Valores de opções americanas asiáticas .	101
Tabela 9.5- Valores de opções americanas <i>lookback floating strike</i> .	104
Tabela 9.6- Valores de opções americanas baseadas no valor mínimo dentre dois ativos.	105
Tabela 9.7- Valores de opções americanas baseadas no valor máximo dentre três ativos correlacionados.	106
Tabela 9.8- Valor de opções americanas com juros variáveis	108
Tabela 9.9- Opções americanas com juros estocásticos.	110
Tabela 9.10- Opções americanas c/ volatilidade estocástica.	112
Tabela A.1- Parâmetros do método de inversão de Moro.	135
Tabela A.2- Números de inicialização da seqüência de Sobol com seus respectivos polinômios primitivos até a dimensão 32.	139
Ilustração 3.1- Esquema do método de estratificação.	30
Ilustração 3.2- Esquema do método <i>Latin Hipercube</i> .	33
Ilustração 3.3- Esquema do modelo de QMC-Híbrido.	41
Ilustração 4.1- Esquema gráfico da condição de contorno livre.	47
Ilustração 5.1- Esquema gráfico de uma árvore binomial.	49
Ilustração 6.1- Demonstração do <i>GRID</i> e dos métodos de DF	58
Ilustração 7.1- Esquema GVW: PASSO 1	72
Ilustração 7.2- Esquema PASSO 2	73
Ilustração 7.3- Esquema PASSO 3	73

Ilustração 7.4- Esquema PASSO 4	74
Ilustração 7.5- Esquema do método da bisseção.	75
Quadro 8.2- Exemplo modelo LSM: Valores de exercício.	86
Quadro 8.3- Exemplo modelo LSM: Regressão no instante t_2 .	87
Quadro 8.4- Exemplo modelo LSM: Estratégia de exercício em t_2 .	87
Quadro 8.5- Exemplo modelo LSM: Regressão no instante t_1 .	88
Quadro 8.6- Exemplo modelo LSM: Estratégia de exercício em t_1 .	89
Quadro B.1- Lista de programas desenvolvidos.	141