11
Apêndice A

11.1.
Estrutura a termo e risco de taxa de juros

As aplicações de imunização estão intimamente ligadas ao risco de taxa de juros. Por isso, iremos explicar mais detalhadamente o que é este risco. Para se entender o risco de taxa de juros é preciso ter conhecimento da estrutura a termo das taxas de juros.

A estrutura a termo das taxas de juros é a relação entre o tempo para vencimento e suas diferentes taxas de um determinado título. Ou seja, é a curva que representa toda extensão das taxas de juros de mercado através de todas as datas de vencimento.É uma curva que descreve para cada vencimento qual deve ser a taxa correspondente. Apresentamos no gráfico abaixo a estrutura a termo para as datas de 14 de Julho de 1999 e para 9 de Dezembro de 2002.

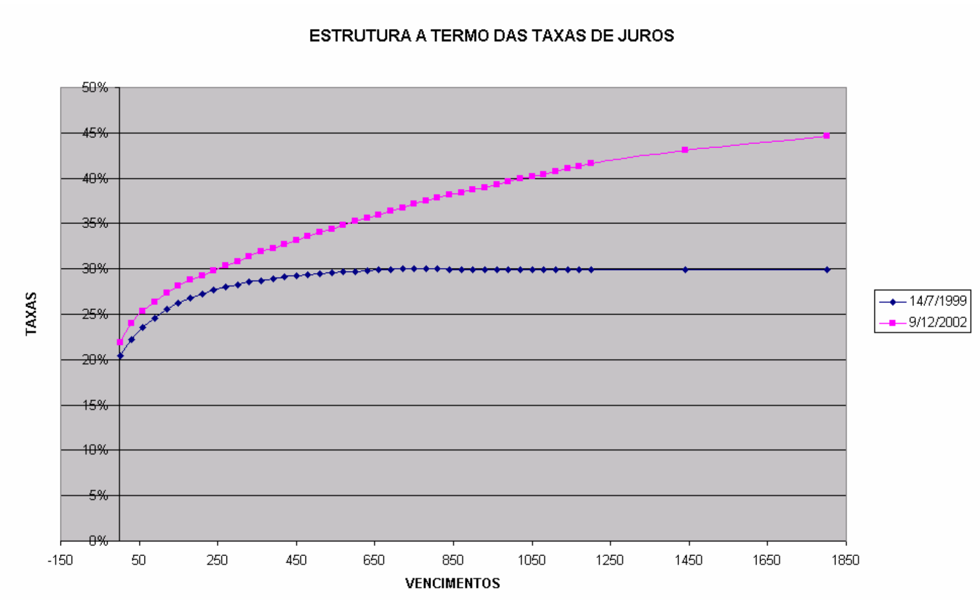

Ilustração 11.1: Evolução da estrutura a termo das taxas de juros brasileiras

A teoria da estrutura a termo das taxas de mercado lida com títulos de desconto puros de diferentes datas de vencimento tendo diferentes taxas internas de retorno.

Comumente, no gerenciamento de ativos e passivos, temos que tomar decisões de investir ou financiar. A estrutura das taxas de juros é o ponto de partida para se tomar este tipo de decisão. Pois, como visto, fornece o conjunto de taxas de juros disponíveis para as datas de vencimento. Além disso, a estrutura contem informação das taxas esperadas futuras que são necessárias para se tomar decisões de exposição às taxas.

11.1.1. Tipos de variações na estrutura a termo

Para estudarmos as implicações de variações na curva de juros nos ativos e passivos, precisamos entender os possíveis componentes responsáveis por esta variação. Dentre eles destacamos os dois mais importantes: mudança no nível da curva e mudança no formato da curva.

O primeiro, é conhecido como o tipo mais básico de mudança na curva de juros. Neste caso, cada ponto da curva de juros varia de um mesmo valor para todas as datas de vencimento, por isso, chamamos de variação paralela. E é neste tipo de movimento que muitos estudos em imunização estão baseados. Isto porque, considerando-se que este é o único movimento possível da estrutura, a teoria de gerenciamento de portfólios de renda fixa se tornaria muito mais simples. No entanto, na realidade, a curva de juros raramente se movimenta em paralelo (veja ilustração 11.1). Quando as taxas se alteram, a curva inevitavelmente sofre mudanças no formato.

O outro tipo de variação, busca explicar variações não-paralelas, mudanças no formato da curva. Existem alguns formatos de curva de juros básicos, são eles: normal, horizontal ou plana (*flat*), dobrada (*humped*) e invertida. No formato normal, a taxa de juros cresce continuamente com o aumento do vencimento, com uma inclinação continuamente decrescente e suave. Na curva plana, a taxa é a mesma para todas as datas de vencimento. No formato *humped*, inicialmente as taxas crescem quando o vencimento cresce, então, a partir de um certo ponto, começam a cair para vencimentos longos. Este tipo de curva é usualmente antecedido por um cenário histórico de taxas de juros altas. Já na curva invertida, as taxas decrescem a medida que o vencimento aumenta.

11.1.2. Métodos de interpolação da curva de juros

Como veremos, em geral, a curva de juros é representada apenas por alguns pontos diretores, conhecidos como vértices da curva de juros. Normalmente, precisamos de outras taxas que não sejam vértice da curva. Por isso, o conceito de interpolação é de extrema importância para esta teoria.

Interpolação nada mais é do que encontrarmos uma função contínua que, dado os vértices, podemos definir valor de taxa de juros para qualquer período compreendido entre estes vértices. A maioria dos métodos de interpolação exige que a função de interpolação passe por estes pontos (*good fitting*). Existem inúmeros métodos de interpolação. A escolha do método a ser utilizado dependerá dos objetivos da aplicação. O método mais utilizado, na prática, é o de polinômios por partes. Neste caso, diferentes polinômios são ajustados de dois em dois vértices e a curva final e a soma de todos estes polinômios.

Devido a sua simplicidade e suavidade, os polinômios mais utilizados são os cúbicos. Dentre os modelos, destaca-se o método de interpolação spline cúbico, que utiliza polinômios de 3º grau, de modo que a curva resultante possua, em todo intervalo, derivada de 1ª e de 2ª ordem.

O método mais difundido, simples e tradicional é o de interpolação linear. Ele consiste em unir cada par de vértices por uma linha reta (polinômio de grau 1). Devido a sua eficácia e simplicidade, utilizaremos apenas este tipo de interpolação durante o trabalho.

11.2. Medidas de risco de taxa de juros

11.2.1. Data de vencimento

A data de vencimento é um indicador de risco de taxa de juros. Títulos com vencimentos mais longos, usualmente, se movimentam mais do que os títulos de mais curto prazo. No entanto, isto nem sempre acontece. O vencimento apenas leva em consideração o timing do fluxo de caixa final, ignorando os outros fluxos que possam ocorrer nesse meio tempo. Além disso o vencimento não é uma medida cardinal, logo, não quantificando risco.

11.2.2.Conceitos básicos sobre duração

Uma famosa medida de volatilidade do preço de um título é sua duração. O conceito de duração foi proposto independentemente por Macaulay (1938), Samuelson (1945), Hicks (1946) e Redington (1952). Frederick Macaulay descobriu que é possível se combinar informações contidas no tamanho e no timing de todos os fluxos de caixa em um único número, chamado de duração, que pode ser uma medida mais proveitosa de risco. Em palavras podemos definir duração como sendo uma média temporal ponderada de todos os fluxos de caixa, com os pesos sendo o valor presente de cada fluxo como um percentual do valor presente de todos os fluxos de caixa.

Podemos então definir duração matematicamente.

Seja A_t o fluxo de caixa de um ativo de renda fixa no tempo $t > 0$ com valor de mercado A. Temos que:

$$A = \sum_{t>0} \frac{A_t}{(1+y)^t} \qquad \text{(A. 1)}$$

Onde y é a taxa interna de retorno (yield to maturity).

Definindo-se w_t como a proporção do preço representado pelo valor do t-esimo fluxo de caixa teremos:

$$w_t = \frac{1}{A}\frac{A_t}{(1+y)^t} \qquad \text{(A. 2)}$$

e

$$\sum_{t>0} w_t = 1 \qquad \text{(A. 3)}$$

Então, a Duração de Macaulay, que chamaremos de D é definida como sendo:

$$D = \sum_{t>0} t w_t \qquad \text{(A. 4)}$$

Da definição surgem algumas relações importantes.

- Para um título sem cupom a duração é igual ao vencimento: $D = n$
- Em geral, para um papel com fluxos intermediários: $D < n$
- Em geral, a duração aumenta ‘a medida que aumenta o prazo de vencimento: $\dfrac{\partial D}{\partial n} > 0$
- Em geral, a duração é tanto maior quanto menor o montante do cupom: $\dfrac{\partial D}{\partial C} < 0$
- Em geral, a duração é tanto menor quanto maior a taxa interna de retorno: $\dfrac{\partial D}{\partial y} < 0$

Onde n é a data de vencimento do título, C é o cupom e y a taxa interna de retorno.

11.2.3.Relação entre duração e a sensibilidade do preço

Como já foi visto sabemos que o valor presente de um fluxo é:

$$A = \sum_{t>0} \frac{A_t}{(1+y)^t} \tag{A. 5}$$

Para encontrarmos a sensibilidade do preço em relação a variações nas taxas, o que devemos fazer é derivar a expressão acima em relação a taxa interna de retorno.

$$\frac{dA}{dy} = -\sum_{t>0} \frac{tA_t}{(1+y)^{t+1}} \tag{A. 6}$$

Reescrevendo a expressão acima e utilizando a definição de duração supracitada, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{dA}{dy} = -A\sum_{t>0} \frac{tA_t}{(1+y)^t} \frac{1}{A(1+y)} = -\frac{1}{(1+y)} DA \tag{A. 7}$$

Ou ainda, definindo $D_m = \dfrac{D}{(1+y)}$ como a duração modificada temos:

$$\frac{dA}{dy} = -D_m A \tag{A. 8}$$

Utilizando a aproximação $\frac{dA}{dy} \approx \frac{\Delta A}{\Delta y}$ podemos reescrever a relação acima como:

$$\Delta A \approx D_m A \Delta y \qquad \text{(A. 9)}$$

Ou ainda:

$$\frac{\Delta A}{A} = \text{variação relativa} \approx -D_m \Delta y \qquad \text{(A. 10)}$$

OBS:

Para se utilizar a formula acima deve se tomar cuidado com as unidades. Se D_m estiver em anos, por exemplo, Δy deve se referir a uma variação por ano.

A duração modificada é relacionada a mudanças percentuais no preço. No entanto, para dois títulos com a mesma duração modificada, a mudança em valor nos seus preços não será a mesma. Para tal, define-se a dólar duração modificada:

$$D_m A \qquad \text{(A. 11)}$$

11.2.4.Conceitos básicos sobre convexidade

Como vimos acima, a duração mede a inclinação da curva preço-yield em um dado ponto da curva. Isto nos leva a uma aproximação da curva preço-yield por uma reta (1a ordem) e é útil como método de acessar risco e controlá-lo.

Esta aproximação irá sempre subestimar o preço final. Além disso, a variação percentual é a mesma para altas ou baixas no yield, o que contradiz o formato convexo da curva. Logo, esta aproximação é boa somente para pequenas variações no yield. Para obtermos uma melhor aproximação devemos incluir o termo de segunda ordem, o qual é baseado na convexidade.

Convexidade é a curvatura relativa da curava em um dado ponto.

Matematicamente temos:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum A_t (1+y)^{-t} \\ f^{'}(y) &= -\sum t A_t (1+y)^{-t-1} \\ f^{''}(y) &= \sum t(t+1) A_t (1+y)^{-t-2} \end{aligned} \qquad \text{(A. 12)}$$

Da expansão de Taylor temos que

$$f(y+\Delta y) \approx f(y) + f'(y)\Delta y + \frac{f''(y)}{2}(\Delta y)^2 + \cdots \quad \text{(A. 13)}$$

$$f(y+\Delta y) - f(y) \approx -D_m A\Delta y + \frac{1}{2}AC(\Delta y)^2 \quad \text{(A. 14)}$$

$$\Delta A \approx -D_m A\Delta y + \frac{1}{2}AC(\Delta y)^2 \quad \text{(A. 15)}$$

$$\frac{\Delta A}{A} \approx -D_m \Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2 \quad \text{(A. 16)}$$

Onde

$$D_m = -\frac{1}{A}\frac{dA}{dy} = \frac{1}{A}\sum tA_t(1+y)^{-t} \quad \text{(A. 17)}$$

$$C = \frac{1}{A}\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{1}{A(1+y)^2}\sum t(t+1)\frac{A_t}{(1+y)^t} \quad \text{(A. 18)}$$

O segundo ajuste (termo de segunda ordem) aproxima a variação percentual de preço devido a convexidade (curvatura).

A convexidade mede a curvatura em um dado ponto da curva preço-yield. Ou seja, a taxa de variação da duration quando o yield varia.

11.2.5.Duração e convexidade de um portfólio

Nesta seção iremos mostrar como se comporta a duração e a convexidade quando nos referimos a um portfólio ao invés de um único título.

Para isso, suponha que tenhamos m papeis de renda fixa com preços A_i e duration D_i, $i = 1,2,\ldots,m$. Todos computados a um mesmo yield. Seja N_j o número de ativos i carregados no portfólio. O valor total do portfólio é:

$$A = \sum_{i=1}^{m} N_i A_i \quad \text{(A. 19)}$$

A duration do portfólio D e convexidade do portfólio C são definidas como sendo:

$$D = \sum_{i=1}^{m} W_i D_i \quad \text{(A. 20)}$$

$$C = \sum_{i=1}^{m} W_i C_i \quad \text{(A. 21)}$$

Onde

$$W_i = \frac{N_i A_i}{A} \tag{A. 22}$$

Ou seja, a duração (ou convexidade) de um portfólio é a média ponderada das durações (ou convexidades) dos papéis que compõe o portfólio, com o peso da duração do título sendo proporcional ao preço do título.

Para provarmos a definição acima, suponha que um portfólio consista de apenas dois títulos com fluxos de caixa A_{1t}, A_{2t}, $t > 0$ e $N_1 = N_2 = 1$. Assumimos também, que ambos os títulos tem o mesmo yield, y. Então, por definição:

$$A_1 = \sum_t \frac{A_{1t}}{(1+y)^t} \tag{A. 23}$$

$$A_2 = \sum_t \frac{A_{2t}}{(1+y)^t} \tag{A. 24}$$

$$D_1 = \frac{1}{A_1} \sum_t t \frac{A_{1t}}{(1+y)^t} \tag{A. 25}$$

$$D_2 = \frac{1}{A_2} \sum_t t \frac{A_{2t}}{(1+y)^t} \tag{A. 26}$$

Sabemos que o fluxo de caixa do portfólio , que chamaremos de A, é a soma dos fluxos de caixa acima. Logo:

$$A = \sum_t \frac{A_{1t} + A_{2t}}{(1+y)^t} = A_1 + A_2 \tag{A. 27}$$

Daí, a duração do portfólio será:

$$D = \frac{1}{A} \sum_t t \frac{A_{1t} + A_{2t}}{(1+y)^t} \tag{A. 28}$$

$$D = \frac{1}{A} \left[A_1 \frac{1}{A_1} \sum_t t \frac{A_{1t}}{(1+y)^t} + A_2 \frac{1}{A_2} \sum_t t \frac{A_{2t}}{(1+y)^t} \right] \tag{A. 29}$$

$$D = \frac{A_1}{A} D_1 + \frac{A_2}{A} D_2 \tag{A. 30}$$

O que completa a prova. Vale ressaltar que assumimos que ambos ativos de renda fixa tem mesma yield. Se este não for o caso, então a duração do portfólio pode ser aproximada assumindo-se um único valor de yield (como a média entre eles, por exemplo).

11.2.6.Limitações da duração

Como vimos ao longo do trabalho, o conceito de duração é muito simples mas, isto se da ao fato de que esta teoria está baseada em suposições muito rígidas, as quais não são percebidas na prática.

A duração mede a sensibilidade do preço em relação a pequenas variações no yield. Se as mudanças nas taxas forem grandes, convexidade (e talvez termos de ordem superior) devem ser levados em consideração. Além disso, a duração mede esta sensibilidade em relação a variações instantâneas nas taxas. Se as taxas mudarem durante um longo período de tempo, a própria duração irá mudar.

Outra importante hipótese que assumimos quando derivamos o conceito de duração e convexidade foi o de que a curva de juros é uma linha reta horizontal (*flat*), ou seja, para cada data de vencimento temos a mesma taxa. Isto não acontece na prática. Uma solução para este problema é considerarmos a duração e convexidade de Fisher-Weil, que veremos a seguir.

11.2.7.Duração e convexidade de Fisher-Weil

Como dito acima, a duração de Fisher-Weil vem para tentar relaxar a hipótese de curva plana. Considere as taxas spot $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Estamos interessados em mudanças no preço de títulos relativas a variações paralelas e instantâneas nas taxas spot. Por exemplo: $\{s_1 + \varepsilon, s_2 + \varepsilon, \ldots, s_n + \varepsilon\}$.

Iremos utilizar capitalização contínua apenas para facilitar os cálculos.

Então, o preço de um ativo será:

$$A = \sum_t e^{-s_t t} A_t \qquad \text{(A. 31)}$$

$$A_\varepsilon = \sum_t e^{-s_t t} A_t e^{-\varepsilon t} \qquad \text{(A. 32)}$$

E por definição a duração de Fisher-Weil, D_{FW} e a convexidade de Fisher-Weil, C_{FW} serão:

$$D_{FW} = \frac{1}{A} \sum_t t e^{-s_t t} A_t \qquad \text{(A. 33)}$$

$$C_{FW} = \frac{1}{A}\sum_t t^2 e^{-s_t t} A_t \tag{A. 34}$$

Clamamos então que:

$$\frac{\Delta A}{A} \approx -D_{FW}\varepsilon + \frac{1}{2}C_{FW}\varepsilon^2 \tag{A. 35}$$

Para provarmos, considere um choque paralelo ε e o novo preço A_ε. A diferença entre este novo preço (após o choque) e o preço inicial é:

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon - A &= \sum A_t e^{-s_t t}\left[e^{-\varepsilon t} - 1\right] \\
A_\varepsilon - A &= \sum A_t e^{-s_t t}\left[-\varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 - \cdots\right] \\
A_\varepsilon - A &= -\varepsilon \sum t A_t e^{-s_t t} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum t^2 A_t e^{-s_t t} \\
A_\varepsilon - A &= -D_{FW} A\varepsilon + \frac{1}{2}C_{FW} A\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{A. 36}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_{FW}\varepsilon + \frac{1}{2}C_{FW}\varepsilon^2 \tag{A. 37}$$

Note que definimos D_{FW} e C_{FW} utilizando as taxas spot e considerando os choques nestas taxas. Podemos generalizar estes conceitos em termos de taxas fowards e considerar os choques a este tipo de taxa.

Em geral,

$$A = \sum_t A_t P(0,t) \tag{A. 38}$$

$$D_{FW} = \frac{1}{A}\sum_t t A_t P(0,t) \tag{A. 39}$$

$$C_{FW} = \frac{1}{A}\sum_t t^2 A_t P(0,t) \tag{A. 40}$$

Onde $P(0,t)$ é o preço no tempo 0 de um papel zero-coupon vencendo, com valor 1, no tempo t, $t \geq 0$.

Quando dizemos mudança paralela da curva de juros, estamos assumindo que a taxa para todos os vencimentos muda por um mesmo número de pontos base.

11.2.8. Outros tipo de duração

11.2.8.1. Duração parcial

Seja $f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ o preço de um ativo para a dada curva de juros spot

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \qquad \text{(A. 41)}$$

Então,

$$A = f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \text{(A. 42)}$$

Usando a expansão de Taylor de primeira ordem em torno da cura de juros spot, temos:

$$f(s_1 + \Delta s_1, \ldots, s_n + \Delta s_n) = f(s_1, s_2, \ldots, s_n) + \frac{\partial f}{\partial s_1}\Delta s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial s_n}\Delta s_n \qquad \text{(A. 43)}$$

Ou

$$\frac{f(s_1 + \Delta s_1, \ldots, s_n + \Delta s_n) - f(s_1, s_2, \ldots, s_n)}{f(s_1, s_2, \ldots, s_n)} = \frac{\Delta A}{A}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial s_1}\Delta s_1 + \cdots + \frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial s_n}\Delta s_n = \qquad \text{(A. 44)}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_{m1}\Delta s_1 + \cdots - D_{mn}\Delta s_n$$

Onde

$$D_{mk} = -\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial s_k} \qquad \text{(A. 45)}$$

são as durações parciais dos k fatores. Mede a sensibilidade relativa dos fatores.

Temos:

$$D_{FW} = D_{m1} + \cdots + D_{mn} \qquad \text{(A. 46)}$$

Exemplo:

Suponha um portfólio composto por um papel de 5 anos e outro de 10 anos, ambos zero-cupom com valor de face 100.

11.2.8.2. Duração nos vértices (key rate duration)

A duração parcial trás uma idéias muito interessante e muito útil para a implementação e criação de novos modelos para controle de risco de taxa de juros. No entanto, se utilizássemos a equação acima para um papel de 30 anos, por exemplo, iríamos precisar 60 durações parciais (uma duração a cada seis meses).

Na prática, a curva de juros é tipicamente definida em termos de subconjuntos de taxas (6 meses, 1,3,5,7,10,15,30 anos). Estas taxas são conhecidas como vértices.

Definindo $s^*_{t_k}, k = 1, \ldots, n^*$, como o k-ésimo vértice da taxa spot com vencimento t_k e $t_i < t_j$ para $i < j$.

As taxas para outros vencimentos são então obtidas destas taxas vértices utilizando aproximações como interpolação linear ou por splines cúbicos, etc.

Utilizando interpolação linear, a taxa s_t, onde $t_k < t \le t_{k+1}$ é obtida da seguinte forma:

$$s_t = w s^*_{t_{k+1}} + (1 - w) s^*_{t_k} \qquad \text{(A. 47)}$$

Onde

$$w = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \qquad \text{(A. 48)}$$

Ainda, para taxas com vencimento menores do que a taxa do primeiro vértice e para vencimentos maiores do que a taxa do último vértice, definimos:

$$\begin{aligned} s_t &= s^*_{t1} \quad t \le t_1 \\ s_t &= s^*_{t_n} \quad t > t_n \end{aligned} \qquad \text{(A. 49)}$$

Exemplo

Se tivermos uma variação apenas em um dos vértices. Isto pode induzir a uma mudança no preço de um ativo.

A sensibilidade do preço a mudança em cada vértice é conhecida como duração no vértice.

Matematicamente, seja A^* o valor de um título após um choque no vértice. Então a duração do k-ésimo vértice, D^*_k é definida como:

$$\frac{A^* - A}{A} = -D_k^* \Delta s_{t_k}^* \tag{A. 50}$$

Para se estimar D_k^*, utilizamos o método de diferenças finitas:

variar o k-esimo vértice (e.g. 1 ponto base)

obter a nova curva de juros após a variação no vértice k

recalcular o valor do ativo

estimar a duração utilizando o método de diferença finita

Após computados a duração de todos os vértices, a mudança no valor do ativo para mudanças arbitrárias na estrutura a termo pode ser aproximado pela soma das variações básicas:

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_1^* \Delta s_{t_1}^* - \ldots - D_n^* \Delta s_{t_n}^* \tag{A. 51}$$

11.3. Propriedade dos vetores e matrizes

11.3.1. Ortogonalidade

Ortogonalidade: o produto interno ou produto escalar entre dois vetores será zero se e somente se estes vetores forem perpendiculares. Chamamos estes vetores de ortogonais.

11.3.2. Propriedades do produto escalar

Sejam a, b e c vetores k_1 e k_2 escalares. Então,

- $a \cdot b = b \cdot a$ (simetria) (A. 52)
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade) (A. 53)
- $k_1(a \cdot b) = (k_1 a) \cdot b = a \cdot (k_1 b)$ (A. 54)
- $(k_1 a + k_2 b) \cdot c = k_1 a \cdot c + k_2 b \cdot c$ (linearidade) (A. 55)

Como $|\cos\theta| \le 1$, teremos:

- $|a \cdot b| \le |a|\ |b|$ (desigualdade de Cauchy-Schwartz) (A. 56)

- $|a+b| \le |a| + |b|$ (desigualdade triangular)

$$\text{(A. 57)}$$

- $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left\{|a|^2 + |b|^2\right\}$(igualdade do paralelogramo)

$$\text{(A. 58)}$$

11.3.3.Normalização de um vetor

A norma de um vetor, nos fornece o comprimento de um vetor de dimensão n. Seja o seguinte vetor:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{A. 59}$$

Seu comprimento é computado da seguinte forma:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \tag{A. 60}$$

O vetor normalizado de $\bar{a}$ é um vetor na mesma direção, mas com comprimento igual a 1. Ele é conhecido como $\hat{\bar{a}}$ e é dado por:

$$\hat{\bar{a}} \equiv \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \tag{A. 61}$$

11.3.4.Cálculo da variância

Sabemos que a formula da covariância para uma série é:

$$Var(P) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{N-1} \tag{A. 62}$$

Seja a seguinte matriz de séries temporais:

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_N & \cdots & Y_N \end{bmatrix} \tag{A. 63}$$

Escrevendo a matriz P em forma de desvio da média temos:

$$p = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & \cdots & y_N \end{bmatrix} \tag{A. 64}$$

Onde:

$$x_i = X_i - \overline{X} \qquad \text{(A. 65)}$$

Fazendo:

$$p'p = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & \cdots & y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + \cdots + x_N^2 & \cdots & x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 x_1 + \cdots + y_N x_N & \cdots & y_1^2 + \cdots + y_N^2 \end{bmatrix}$$

(A. 66)

Escrevendo na forma de somatório:

$$p'p = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i y_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i y_i & \cdots & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 67)}$$

Logo,

$$Var(P) = \frac{p'p}{N-1} \qquad \text{(A. 68)}$$

11.3.5.Matriz positiva definida

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \text{(A. 69)}$$

Sabemos que para uma matriz ser considerada positiva definida o valor do determinante de seus menores principais deve ser estritamente maior do que zero. Caso um ou mais de um destes seja zero, dizemos que a matriz é positiva semi-definida. Logo, para ser positiva definida devemos ter, neste caso (matriz 2x2):

$$a > 0 \qquad \text{(A. 70)}$$

$$ac - b^2 > 0 \qquad \text{(A. 71)}$$

O determinante da matriz A pode ser escrito da seguinte forma:

$$Det(A) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \qquad \text{(A. 72)}$$

Igualando-se a zero encontramos os autovalores da matriz.

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \qquad \text{(A. 73)}$$

Donde podemos concluir que os autovalores tem as seguintes propriedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a + c)$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = (ac - b^2) \tag{A. 74}$$

Então $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, o que implica que os autovetores devem ser ambos positivos ou negativos (devem ter o mesmo sinal. Mas, como $a > 0$ e $c > 0$ (para respeitar a segunda condição), o traço de A deve ser positivo. Logo podemos concluir que:

$$\lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0. \tag{A. 75}$$

Condições para matriz positiva definida:

- $x^T A x > 0$ para todo vetor não nulo x.
- Todos os autovalores são positivos
- Todos os menores principais de A têm determinantes positivos
- Todos os pivôs (sem troca de linha) devem satisfazer $d_i > 0$

11.4. Títulos do Governo

11.4.1. Títulos pós-fixados

Um título pós-fixado é aquele cuja rentabilidade acompanha a variação de um índice de referência - chamado de indexador.

Os títulos pós-fixados negociados pelo Tesouro Direto normalmente utilizam dois indexadores: a taxa de inflação (medida pelo índice IGP-M) ou a taxa básica de juros da economia (a taxa Selic).

O investidor que compra um papel desse tipo sabe que o dinheiro aplicado por ele vai ter um rendimento que acompanha uma dessas duas variáveis da economia.

Existem dois tipos de títulos pós-fixados que são oferecidos pelo Tesouro Direto: a Letra Financeira do Tesouro (LFT) e a Nota do Tesouro Naciona (NTN).

A Letra Financeira do Tesouro (LFT) tem rentabilidade diária vinculada à taxa de juros básica da economia, a Selic. Em geral, as LFTs têm vencimento no médio prazo, entre dois e cinco anos. Já a NTN, série C, utilizada no trabalho, será descrita com mais detalhes a seguir.

11.4.1.1. Nota do Tesouro Nacional série C (NTN – C)

Apesar de ser considerada um título pós-fixado, a NTN-C tem uma rentabilidade determinada por duas taxas somadas, uma prefixada e outra pós-fixada.

Uma parte de sua remuneração acompanha a variação do IGP-M (Índice Geral de Preços-Mercado), o índice mensal de inflação, publicado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). A outra parte da remuneração do título é definida por uma taxa de juro fixa determinada no dia da compra. Em geral, a soma do IGP-M e da remuneração oferecida pelo Governo tende a ser próxima da taxa Selic.

Mas o rendimento real de uma NTN-C só pode ser calculado na hora do resgate. Isso porque o índice de inflação é variável e, dependendo do valor acumulado dele até a data do vencimento, a rentabilidade será maior ou menor.

Dos títulos vendidos pelo Tesouro Direto, as NTN-Cs são os de maior prazo. Em geral o vencimento acontece após mais de dez anos. Há NTN-Cs que vencem somente em 2031.

O Governo paga a parcela de juros do papel a cada seis meses. Este valor é calculado com base no valor de compra, corrigido pelo IGP-M. Ou seja, considere que um investidor comprou uma NTN-C (2011 – 12%aa) por R$ 1.000 no início do ano e que seis meses depois o IGP-M acumulava 3%. Logo, os juros serão calculados em cima de R$ 1030 (1000x(1+3%)). Sendo assim, o valor creditado será de exatamente R$ 61,8 (1030x(1+6%)).

11.4.1.1.1. Vencimentos da NTN-C

Vencimentos
01/07/2005
01/12/2005
01/12/2006
01/04/2008
01/03/2011
01/07/2017
01/04/2021
01/01/2031

Tabela 11.1: Vencimentos das NTN-C

11.4.1.1.2.
Características da NTN-C

Prazo	Definido pelo Ministério da Fazenda, quando da emissão do título
Modalidade	Nominativa e nogociável
Forma de colocação	Oferta pública ou colocação direta, em favor do interessado
Valor nominal	Múltiplo de R$ 1.000,00
Taxa de juros	Definido pelo Ministério da Fazenda, quando da emissão do título, em porcentagem ao ano, aplicada sobre o valor nominal atualizado
Amortização do principal	Em parcela única, na data do vencimento
Atualização do valor nominal	Variação do IGP-M desde a data abse do título
Pagamento de juros	Semestralmente, com ajuste no primeiro dia de fluencia, quando couber. O primeiro cupom de juros a ser pago contemplará a taxa integral, a ser definida para seis meses, independente da data de emissão do título.

Tabela 11.2: Características das NTN-C

11.4.1.1.3.
Fórmula para cálculo do preço da NTN-C

$$P = \frac{IGPM_t}{IGPM_0}\left[\sum_{i=0}^{T}\frac{1000\cdot c_i}{\left(1+r_{IGPM_t}\right)^{\frac{du_i}{252}}} + \frac{1000}{\left(1+r_{IGPM_T}\right)^{\frac{du_i}{252}}}\right]$$

Onde:

P : preço teórico do título;

$IGPM_t$: número índice do IGP-M na data de avaliação;

$IGPM_0$: número índice do IGP-M na data-base do título;

du_i : dias úteis entre o instante de avaliação e a data do fluxo;

T : data de maturidade do título;

r_{IGPM} : taxa spot de cupom de IGP-M;

c_i : taxa de cupom do fluxo “i”;