

2 Comparação dos Índices [Prada, 2002] e [Kessel, 1986]

2.1 Indicador L [Kessel, 1986]

Propõe-se um método para avaliar em tempo real a instabilidade de tensão. Um indicador “L” é definido de modo que varie na escala entre 0 (sem carga no sistema) e 1 (colapso de tensão). O indicador “L” usa informações de um fluxo de carga normal.

2.1.1 Demonstração Analítica

O equivalente π da linha de transmissão, mostrado na Figura 2.1, conecta a barra 1, do tipo PQ, à barra 2, do tipo PV.

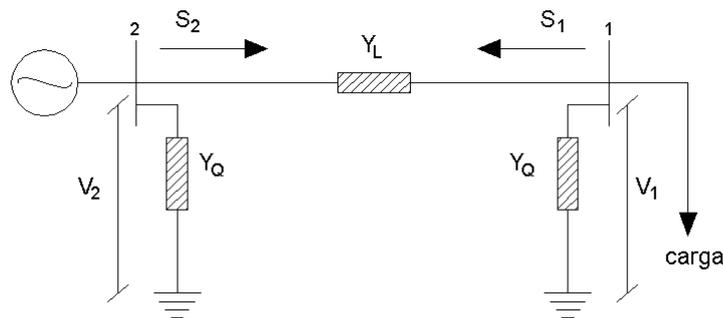


Figura 2.1 – Sistema de Duas Barras

É de interesse estudar o comportamento da tensão na barra de carga. Pode-se escrever os elementos Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} que formam a matriz admitância de barra $[Y_{\text{barra}}]$.

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{Y}_{22} & \overset{\circ}{Y}_{21} \\ \overset{\circ}{Y}_{12} & \overset{\circ}{Y}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{Y}_L + \overset{\circ}{Y}_Q & -\overset{\circ}{Y}_L \\ -\overset{\circ}{Y}_L & \overset{\circ}{Y}_L + \overset{\circ}{Y}_Q \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{I}_2 \\ \overset{\circ}{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{Y}_{22} & \overset{\circ}{Y}_{21} \\ \overset{\circ}{Y}_{12} & \overset{\circ}{Y}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{\circ}{V}_2 \\ \overset{\circ}{V}_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{Y}_{11} \cdot \overset{\circ}{V}_1 + \overset{\circ}{Y}_{12} \cdot \overset{\circ}{V}_2 \quad (2.3)$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \overset{\circ}{Y}_{21} \cdot \overset{\circ}{V}_1 + \overset{\circ}{Y}_{22} \cdot \overset{\circ}{V}_2 \quad (2.4)$$

Multiplicando-se (2.3) por $\overset{\circ}{V}_1^*$ obtém-se :

$$\overset{\circ}{V}_1^* \cdot \overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{Y}_{11} \cdot \overset{\circ}{V}_1^2 + \overset{\circ}{Y}_{12} \cdot \overset{\circ}{V}_2 \cdot \overset{\circ}{V}_1^* \quad (2.5)$$

$$\overset{\circ}{S}_1 = \overset{\circ}{Y}_{11} \cdot \overset{\circ}{V}_1^2 + \overset{\circ}{Y}_{12} \cdot \overset{\circ}{V}_2 \cdot \overset{\circ}{V}_1^* \quad (2.6)$$

$$\frac{\overset{\circ}{S}_1}{\overset{\circ}{Y}_{11}} = \overset{\circ}{V}_1^2 + \frac{\overset{\circ}{Y}_{12} \cdot \overset{\circ}{V}_2 \cdot \overset{\circ}{V}_1^*}{\overset{\circ}{Y}_{11}} \quad (2.7)$$

Da equação (2.7) define-se uma tensão equivalente dada por:

$$\overset{\circ}{V}_0 = \frac{\overset{\circ}{Y}_{12} \cdot \overset{\circ}{V}_2}{\overset{\circ}{Y}_{11}} \quad (2.8)$$

Assim, pode-se substituir (2.8) em (2.7) resultando:

$$\frac{\overset{\circ}{S}_1}{\overset{\circ}{Y}_{11}} = \overset{\circ}{V}_1^2 + \overset{\circ}{V}_0 \cdot \overset{\circ}{V}_1^* = a_1 + j \cdot b_1 \quad (2.9)$$

onde a_1 é a componente real e b_1 a componente imaginária. Pode-se solucionar (2.9) para $\overset{\circ}{V}_1$:

$$\left| \overset{\circ}{V}_1^2 + \overset{\circ}{V}_0 \cdot \overset{\circ}{V}_1^* \right| = |a_1 + j \cdot b_1| \quad (2.10)$$

$$\left| V_1^2 + \dot{V}_0 \cdot \dot{V}_1^* \right| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.11)$$

$$\left| V_1^2 + V_0 \cdot V_1 \cdot e^{i(\theta_0 - \theta_1)} \right| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.12)$$

$$\left| V_1^2 + V_0 \cdot V_1 \cdot \cos(\theta_{01}) + j \cdot V_0 \cdot V_1 \cdot \text{sen}(\theta_{01}) \right| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.13)$$

$$\sqrt{(V_1^2 + V_0 \cdot V_1 \cdot \cos(\theta_{01}))^2 + (V_0 \cdot V_1 \cdot \text{sen}(\theta_{01}))^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.14)$$

$$V_1^4 + 2 \cdot V_1^3 \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{01}) + (V_0 \cdot V_1 \cdot \cos(\theta_{01}))^2 + (V_0 \cdot V_1 \cdot \text{sen}(\theta_{01}))^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad (2.15)$$

$$V_1^4 + 2 \cdot V_1^3 \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{01}) + (V_0 \cdot V_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad (2.16)$$

Pode-se separar a parte real de (2.14):

$$V_1^2 + V_0 \cdot V_1 \cdot \cos(\theta_{01}) = a_1 \quad (2.17)$$

$$\cos(\theta_{01}) = \left(\frac{a_1 - V_1^2}{V_0 \cdot V_1} \right) \quad (2.18)$$

Substituindo-se (2.18) em (2.16) tem-se :

$$V_1^4 + 2 \cdot V_1^3 \cdot V_0 \cdot \left(\frac{a_1 - V_1^2}{V_0 \cdot V_1} \right) + (V_0 \cdot V_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad (2.19)$$

$$V_1^4 + 2 \cdot V_1^2 \cdot a_1 - 2 \cdot V_1^4 + (V_0 \cdot V_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad (2.20)$$

$$V_1^4 - (V_0^2 + 2 \cdot a_1) \cdot V_1^2 + (a_1^2 + b_1^2) = 0 \quad (2.21)$$

A equação (2.21) pode ser solucionada para V_1 como uma solução do segundo grau.

$$V_1 = \sqrt{\frac{(V_0^2 + 2 \cdot a_1) \pm \sqrt{(V_0^2 + 2 \cdot a_1)^2 - 4 \cdot (a_1^2 + b_1^2)}}{2}} \quad (2.22)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{V_0^2}{2} + a_1 \pm \sqrt{\frac{V_0^4}{4} + a_1 \cdot V_0^2 - b_1^2}} \quad (2.23)$$

Observa-se por (2.23) que existem duas soluções de tensões possíveis.

A equação (2.9) pode ser rescrita na forma complexa dada por :

$$\left| S_1 - Y_{11} \cdot V_1^2 \right| = V_0 \cdot V_1 \cdot Y_{11} \quad (2.24)$$

Em uma interpretação geométrica, na Figura 2.2 são mostrados círculos com o módulo da tensão na barra de carga constante, no plano S_1 complexo, de modo que $(Y_{11} \cdot V_{12})$ determina o centro do círculo e $(Y_1 \cdot V_0 \cdot V_1)$ o raio.

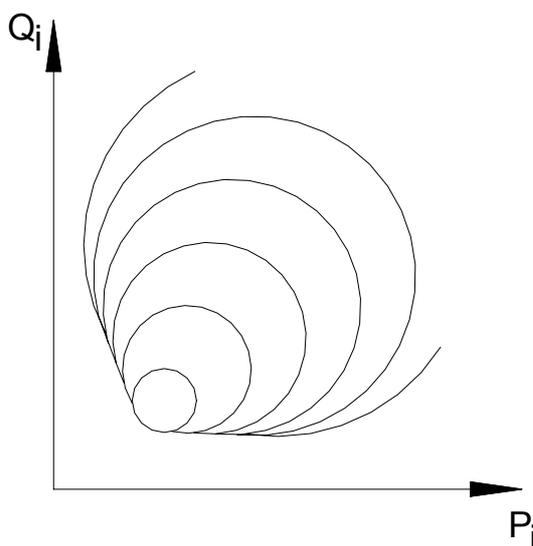


Figura 2.2 – Círculos de Módulo de Tensão Constante

2.1.2 Critério de Estabilidade de Tensão para Sistema Duas Barras

Por (2.24) pode-se estabelecer o limite desejado de estabilidade de tensão para uma barra de carga. Fora deste limite estabelecido, as curvas ilustradas na Figura 2.2 não têm significado físico.

$$S_1 - Y_{11} \cdot V_1^2 = V_0 \cdot V_1 \cdot Y_{11} \quad (2.25)$$

$$\frac{S_1 - Y_{11} \cdot V_1^2}{Y_{11} \cdot V_1^2} = \frac{V_0 \cdot V_1 \cdot Y_{11}}{Y_{11} \cdot V_1^2} \quad (2.26)$$

$$\frac{S_1}{Y_{11} \cdot V_1^2} - 1 = \frac{V_0}{V_1} \quad (2.27)$$

$$\frac{S_1}{Y_{11} \cdot V_1^2} = \frac{V_0}{V_1} + 1 \quad (2.28)$$

A relação (2.28) pode ser usada para definir um indicador L a fim de avaliar a estabilidade de tensão. Esta faixa $R = \{ 0 \leq L \leq 1 \}$ é determinada para módulos de tensão V_1 dados por (2.23).

$$L = \left| 1 + \frac{\overset{\circ}{V}_0}{\overset{\circ}{V}_1} \right| = \left| \frac{\overset{\circ}{S}_1}{\overset{\circ}{Y}_{11} \cdot \overset{\circ}{V}_1^2} \right| = r \pm \sqrt{r^2 - 1} \quad (2.29)$$

Desse modo, foi encontrada uma medida que caracteriza a proximidade do atual estado do sistema para o limite de estabilidade. Portanto, o grau do indicador L expressa o risco de um colapso de tensão, como será visto a seguir.

2.1.3 Critério de Estabilidade de Tensão para Sistema Multi-Nó

Para que o indicador L possa ter utilidade, tem-se que estender o conceito para o sistema multi-nó. O sistema pode ser aproximado por um sistema linear e permite uma representação em termos de uma matriz híbrida (H):

$$\begin{vmatrix} V^L \\ I^G \end{vmatrix} = |H| \cdot \begin{vmatrix} I^L \\ V^G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z^{LL} & F^{LG} \\ K^{GL} & Y^{GG} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^L \\ V^G \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

onde,

- ✓ V^L, I^L - Vetores de tensão e corrente em barras de carga;
- ✓ V^G, I^G - Vetores de tensão e corrente em barras de geração;
- ✓ $Z^{LL}, F^{LG}, K^{GL}, Y^{GG}$ - Submatrizes da matriz H.

A matriz H é gerada da matriz admitância de barra Y_{barra} por uma inversão parcial:

$$\begin{vmatrix} I^G \\ I^L \end{vmatrix} = |Y_{barra}| \cdot \begin{vmatrix} V^G \\ V^L \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

$$\begin{vmatrix} I^G \\ I^L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y^{GG} & Y^{LG} \\ Y^{GL} & Y^{LL} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V^G \\ V^L \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

$$I^L = Y^{GL} \cdot V^G + Y^{LL} \cdot V^L \quad (2.33)$$

$$I^G = Y^{GG} \cdot V^G + Y^{LG} \cdot V^L \quad (2.34)$$

Por (2.33) obtém-se:

$$[Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L = [Y^{LL}]^{-1} \cdot [Y^{GL}] \cdot V^G + V^L \quad (2.35)$$

$$V^L = [Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L - Y^{GL} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot V^G \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.34) tem-se:

$$I^G = Y^{GG} \cdot V^G + Y^{LG} \cdot \left([Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L - Y^{GL} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot V^G \right) \quad (2.37)$$

$$I^G = Y^{GG} \cdot V^G + Y^{LG} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L - [Y^{LG}]^2 \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot V^G \quad (2.38)$$

$$I^G = Y^{LG} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L + \left(Y^{GG} - [Y^{LG}]^2 \cdot [Y^{LL}]^{-1} \right) \cdot V^G \quad (2.39)$$

$$I^G = Y^{LG} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \cdot I^L + Y^{GG} \cdot V^G \quad (2.40)$$

Pelas equações (2.36) e (2.40) pode-se escrever:

$$\begin{vmatrix} V^L \\ I^G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [Y^{LL}]^{-1} & Y^{GL} \cdot [Y^{LL}]^{-1} \\ Y^{GL} \cdot [Y^{LL}]^{-1} & Y^{GG} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^L \\ V^G \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

e finalmente,

$$\begin{vmatrix} V^L \\ I^G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z^{LL} & F^{LG} \\ K^{GL} & Y^{GG} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^L \\ V^G \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

Definiu-se α_L como o conjunto de barras de carga do sistema e α_G o conjunto de barras de geração, logo escreve-se (2.42) na forma de somatórios referente à tensão na barra j.

$$\dot{V}_j = \sum_{i \in \alpha_L} Z_{ji} \cdot \dot{I}_i + \sum_{i \in \alpha_G} F_{ji} \cdot \dot{V}_i \quad (2.43)$$

Multiplicando (2.43) por V_j^*

$$V_j^2 - \sum_{i \in \alpha_G} F_{ji} \cdot \dot{V}_i \cdot \dot{V}_j^* = \sum_{i \in \alpha_L} Z_{ji} \cdot \dot{I}_i \cdot \dot{V}_j^* \quad (2.44)$$

Por analogia ao sistema de duas barras, pode-se definir uma tensão fictícia dada por:

$$\dot{V}_{0j} = - \sum_{i \in \alpha_G} F_{ji} \cdot \dot{V}_i \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.44) obtém-se:

$$V_j^2 + \overset{\circ}{V}_{oj} \cdot \overset{\circ}{V}_j^* = \overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{i \in \alpha_L} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i \quad (2.46)$$

Sabe-se também que por (2.46) pode-se escrever :

$$\overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{i \in \alpha_L} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i = \overset{\circ}{V}_j^* \cdot \overset{\circ}{Z}_{jj} \cdot \overset{\circ}{I}_j + \overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{\substack{i \in \alpha_L \\ i \neq j}} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i \quad (2.47)$$

$$\overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{i \in \alpha_L} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i = \frac{\overset{\circ}{S}_j}{\overset{\circ}{Y}_{jj}} + \overset{\circ}{V}_j^* \cdot \overset{\circ}{Z}_{jj} \cdot \sum_{\substack{i \in \alpha_L \\ i \neq j}} \frac{\overset{\circ}{Z}_{ji}}{\overset{\circ}{Z}_{jj}} \cdot \frac{\overset{\circ}{S}_i}{\overset{\circ}{V}_i} \quad (2.48)$$

Da equação (2.48) define-se $\overset{\circ}{S}_j^{\text{corr.*}}$ como:

$$\overset{\circ}{S}_j^{\text{corr.*}} = \overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{\substack{i \in \alpha_L \\ i \neq j}} \frac{\overset{\circ}{Z}_{ji}}{\overset{\circ}{Z}_{jj}} \cdot \frac{\overset{\circ}{S}_i}{\overset{\circ}{V}_i} \quad (2.49)$$

$$\overset{\circ}{S}_j^{+*} = \overset{\circ}{S}_j^* + \overset{\circ}{S}_j^{\text{corr.*}} \quad (2.50)$$

Substituindo-se (2.49) e (2.50) em (2.48) obtém-se:

$$\overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{i \in \alpha_L} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i = \frac{\overset{\circ}{S}_j^*}{\overset{\circ}{Y}_{jj}} + \frac{\overset{\circ}{S}_j^{\text{corr.*}}}{\overset{\circ}{Y}_{jj}} \quad (2.51)$$

$$\overset{\circ}{V}_j^* \cdot \sum_{i \in \alpha_L} \overset{\circ}{Z}_{ji} \cdot \overset{\circ}{I}_i = \frac{\overset{\circ}{S}_j^{+*}}{\overset{\circ}{Y}_{jj}} \quad (2.52)$$

Substituindo-se (2.52) em (2.46) obtém-se:

$$V_j^2 + \overset{\circ}{V}_{0j} \cdot \overset{\circ}{V}_j^* = \frac{\overset{\circ}{S}_j^{+*}}{\overset{\circ}{Y}_{jj}} \quad (2.53)$$

$$V_j^2 + \overset{\circ}{V}_{0j}^* \cdot \overset{\circ}{V}_j = \frac{\overset{\circ}{S}_j^+}{\overset{\circ}{Y}_{jj}^*} \quad (2.54)$$

$$1 + \frac{\overset{\circ}{V}_{0j}^* \cdot \overset{\circ}{V}_j}{V_j^2} = \frac{\overset{\circ}{S}_j^+}{\overset{\circ}{Y}_{jj}^* \cdot V_j^2} \quad (2.55)$$

Finalmente, pode-se definir o indicador L_j por analogia ao sistema de duas barras. Por uma transformação complexa obtém-se:

$$L_j = \left| 1 + \frac{\overset{\circ}{V}_{0j}^*}{\overset{\circ}{V}_j} \right| = \left| \frac{\overset{\circ}{S}_j^+}{\overset{\circ}{Y}_{jj}^* \cdot V_j^2} \right| \quad (2.56)$$

$$L_j = \frac{S_j^+}{Y_{jj} \cdot V_j^2} \quad (2.57)$$

De acordo com (2.50) pode-se observar que a tensão V_j é afetada pela potência injetada da própria barra S_j e um equivalente de potência S_j^{corr} proveniente de outras barras adjacentes.

Um indicador L_j pode ser calculado para cada barra j onde, para situações estáveis, a condição $L_j \leq 1$ não deve ser violada para qualquer barra j .

Então, um indicador global L , descrevendo a estabilidade do completo subsistema, é dado por (2.58), sendo que somente inclui as barras de carga:

$$L = \text{MAX}_{J \in \alpha_L} \{L_J\} \quad (2.58)$$

ou ainda,

$$L = \max_{j \in \alpha_L} \left| 1 - \frac{\sum_{i \in \alpha_G} F_{ji} \cdot \dot{V}_i}{\dot{V}_j} \right| \quad (2.59)$$

onde α_L é o conjunto de barras de cargas e α_G é o conjunto de barras de geração.

Assim, a importância dessa teoria se deve ao indicador L ser sempre menor do que um ($L < 1$), para que a estabilidade do sistema seja garantida.

2.1.4 Interpretação do Indicador L

O índice L é uma medida quantitativa para a estimação da distância do atual estado do sistema para o limite de estabilidade de tensão.

Pode ser mostrado que o índice L é exato quando todas as tensões nas barras de geração permanecem inalteradas, em módulo e fase. Pode ser visto na Figura 2.3 a relação entre a tensão crítica e o indicador L.

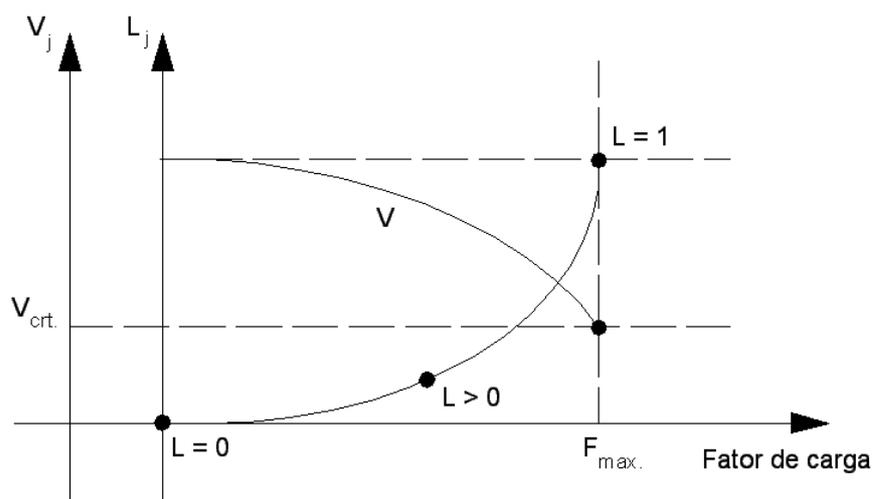


Figura 2.3 – Indicador L e sua Relação com a Tensão Crítica.

O indicador L determina uma estimativa da distância ao máximo carregamento do sistema, somente para região normal de operação da curva V x PQ, e somente para barras de carga.

2.2 Índices Associados à Matriz [D'] [Prada, 2002]

O carregamento da rede de transmissão é representado por condições nodais associadas ao máximo fluxo de potência ativa e reativa que pode ser transmitida dos geradores para as cargas. Desenvolve-se uma ferramenta analítica de avaliação dessas condições nodais com base em modelo matemático simples, mas poderoso, de uma interpretação física direta do fenômeno. Índices abrangentes e significativos de avaliação são deduzidos. Eles indicam a região de operação na curva V x P,Q, a margem em p.u. para o máximo carregamento.

O sistema linearizado das equações estáticas de fluxo de carga é:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Colocando as equações e variáveis relacionadas à barra i em análise para baixo, (2.60) torna-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta P' \\ \Delta Q' \\ \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta' \\ \Delta V' \\ \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde, as submatrizes A, B, C e D são partições da matriz Jacobiano [J].

Assume-se uma variação de carga (ou geração) incremental ΔP_i e ΔQ_i somente para a barra i de um sistema multi-nó, i.e, $\Delta P' = \Delta Q' = 0$, e então (2.61) pode ser reduzido para:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = [D'] \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

onde $[D']$ possui dimensão (2×2) e é dado por:

$$[D'] = [D] - [C][A^{-1}][B] \quad (2.63)$$

Portanto, as relações de sensibilidade entre as injeções de potência ativa e reativa e a magnitude e o ângulo da tensão na barra i , levando em consideração o restante do sistema, podem ser avaliadas por (2.63).

2.2.1 Magnitude do Determinante da Matriz $[D']$

2.2.1.1 Sistema Duas Barras

Em um sistema de duas barras o fluxo de potência que chega na barra i é igual à carga consumida. Com o objetivo de conhecer o significado da magnitude do valor do determinante, desenvolve-se a expressão que o calcula:

$$\det[D'] = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} - \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \quad (2.64)$$

onde:

$$P_i = V_i^2 G_{ii} + V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (2.65)$$

$$Q_i = -V_i^2 B_{ii} + V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (2.66)$$

Resolvendo (2.64) com (2.65) e (2.66) obtém-se:

$$\det[D'] = -V_i V_k^2 (G_{ik}^2 + B_{ik}^2) + 2V_i^2 B_{ii} (V_k G_{ik} \sin \theta_{ik} - V_k B_{ik} \cos \theta_{ik}) - \\ - 2V_i^2 G_{ii} (V_k G_{ik} \cos \theta_{ik} + V_k B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (2.67)$$

Fazendo $Y_{ik}^2 = (G_{ik}^2 + B_{ik}^2)$ e multiplicando ambos os lados de (2.67) por V_i :

$$\det[D'] \cdot V_i = -[V_i V_k Y_{ik}]^2 + 2V_i^2 B_{ii} [V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})] - 2V_i^2 G_{ii} [V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})] \quad (2.68)$$

Por outro lado, a potência aparente injetada na barra i é dada por $S_i = P_i + jQ_i$. De (2.65) e (2.66), escreve-se:

$$S_i^2 = P_i^2 + Q_i^2 = V_i^4 (G_{ii}^2 + B_{ii}^2) + V_i^2 \cdot V_k^2 \cdot Y_{ik}^2 + 2V_i^2 G_{ii} V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) - 2V_i^2 B_{ii} V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (2.69)$$

Fazendo $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$ e comparando (2.68) com (2.69) obtém-se finalmente:

$$\det[D'] \cdot V_i = S_{i0}^2 - S_i^2 \quad (2.70)$$

O resultado obtido em (2.70) é muito importante para o estudo do carregamento da rede. O termo S_{i0}^2 é função do elemento diagonal da matriz admitância de barra e do módulo da tensão na barra i . Aumentando gradualmente o valor da potência injetada S_i , o máximo será alcançado quando S_i^2 for igual a S_{i0}^2 fazendo com que o produto $\det[D'] \cdot V_i$ seja igual a zero.

Dessa forma, pode-se dizer que para um sistema de duas barras:

- ✓ S_i é a potência injetada na barra i (no ponto de operação em análise);
- ✓ S_{i0} é a máxima potência aparente que pode fluir para a barra i , estimada no ponto de operação em análise (dado por $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$);
- ✓ $\det[D'] \cdot V_i$ é o indicador da distância de S_i^2 a S_{i0}^2 .

2.2.1.2 Sistema Multi-Nó

Um importante resultado obtido em (2.70) para um sistema de duas barras agora é estendido ao sistema multi-nó. Seja $[D]$ a matriz que relaciona linearmente as injeções de potência ativa e reativa ao ângulo e módulo da tensão na barra i :

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\text{Seja } [-CA^{-1}B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Como em (2.63): $[D'] = [D] - [CA^{-1}B]$, e usando (2.71) e (2.72) pode-se escrever:

$$\det[D'] = \det \left[\begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \right] \quad (2.73)$$

Pela equação (2.73) obtém-se:

$$\det[D'] = [x.u - y.z] + [x.b_4 - y.b_3] + [b_1.u - b_2.z] + [b_1.b_4 - b_2.b_3] \quad (2.74)$$

Como:

$$\det[D] = [x.u - y.z] \quad (2.75)$$

então:

$$\det[D'] = \det[D] + [x.b_4 - y.b_3] + [b_1.u - b_2.z] + [b_1.b_4 - b_2.b_3] \quad (2.76)$$

O resultado obtido em (2.70) para um sistema de duas barras, onde $[D'] \equiv [D]$, aqui repetido para comodidade, $\det[D] \cdot V_i = S_{io}^2 - S_i^2$ pode ser estendido. Pode-se escrever (2.76) multiplicando todos termos por V_i , na forma:

$$\det[D'] \cdot V_i = \det[D] \cdot V_i - S_{is}^2 \quad (2.77)$$

onde:

$$S_{is}^2 = -V_i \{ [xb_4 - yb_3] + [b_1u - b_2z] + [b_1b_4 - b_2b_3] \} \quad (2.78)$$

A equação (2.70) e (2.77) podem ser rescritas como:

$$\det[D'] \cdot V_i = S_{io}^2 - S_i^2 - S_{is}^2 \quad (2.79)$$

A expressão (2.79) é a generalização de (2.70) para um sistema multi-nó. O novo termo S_{is}^2 pode ser obtido por (2.77):

$$S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i \quad (2.80)$$

Dessa forma, pode-se dizer que para um sistema multi-nó:

- ✓ S_i é a potência injetada na barra i (no ponto de operação em análise);
- ✓ S_{io} é a máxima potência aparente que poderia ser injetada para a barra i, caso o sistema fosse de duas barras (dado por $S_{io} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$);
- ✓ S_{is}^2 está relacionada à potência injetada no restante do sistema que limita a injeção de potência na barra i (dado por $S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i$).

A equação (2.81) é definida como a máxima potência aparente que poderia ser injetada na barra i estimada no ponto de operação em análise.

$$S_m^2 = S_{io}^2 - S_{is}^2 \quad (2.81)$$

2.2.2 Sinal do Determinante da Matriz [D']

Os vetores gradiente de potência ativa e reativa podem ser escritos como:

$$\nabla P = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \hat{\theta} + \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \hat{v} + 0 \cdot \hat{k} \quad \text{e} \quad \nabla Q = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \cdot \hat{\theta} + \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \cdot \hat{v} + 0 \cdot \hat{k} \quad (2.82)$$

onde $\hat{\theta}$, \hat{v} e \hat{k} são vetores de uma base ortonormal.

O produto vetorial é:

$$\nabla P \times \nabla Q = \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right) - \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right) \right] \cdot \hat{k} \quad (2.83)$$

$$\text{e então } \nabla P \times \nabla Q = \det[D'] \cdot \hat{k} \quad (2.84)$$

$$\text{Como } \nabla P \times \nabla Q = \left| \nabla P \right| \cdot \left| \nabla Q \right| \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \hat{k} \quad (2.85)$$

$$\text{Então: } \det[D'] = \left| \nabla P \right| \cdot \left| \nabla Q \right| \cdot \text{sen}(\beta) \quad (2.86)$$

onde β é o ângulo entre ∇P e ∇Q .

Como o sinal de $\det [D']$ é função somente de β , então:

$$\det[D'] > 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) > 0, \text{ i.e. } 0^\circ < \beta < 180^\circ$$

$$\det[D'] < 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) < 0, \text{ i.e. } 0^\circ > \beta > -180^\circ$$

$$\det[D'] = 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) = 0, \text{ i.e. } \beta = \pm 180^\circ$$

Tomando ∇P_i como referência do eixos na Figura 2.4, pode ser observado que $0^\circ < \beta < 180^\circ$ na região normal de operação e que $0^\circ > \beta > -180^\circ$ na região anormal de operação. No máximo, os vetores gradiente ∇P_i e ∇Q_i estão alinhados e o ângulo β é $\pm 180^\circ$. Conseqüentemente, $\det[D'] > 0$ indica a metade superior da curva $V \times P, Q$ e $\det[D'] < 0$ indica a metade inferior. Obviamente, $\det[D'] = 0$ indica o máximo carregamento, ou seja, a “ponta do nariz”.

Devido à ocorrência numérica de $\beta = 0^\circ$ na condição de máximo carregamento em um dos testes, diferente do que sempre ocorreu, isto é, $\beta = \pm 180^\circ$, este assunto é tratado com detalhes no Capítulo 3.

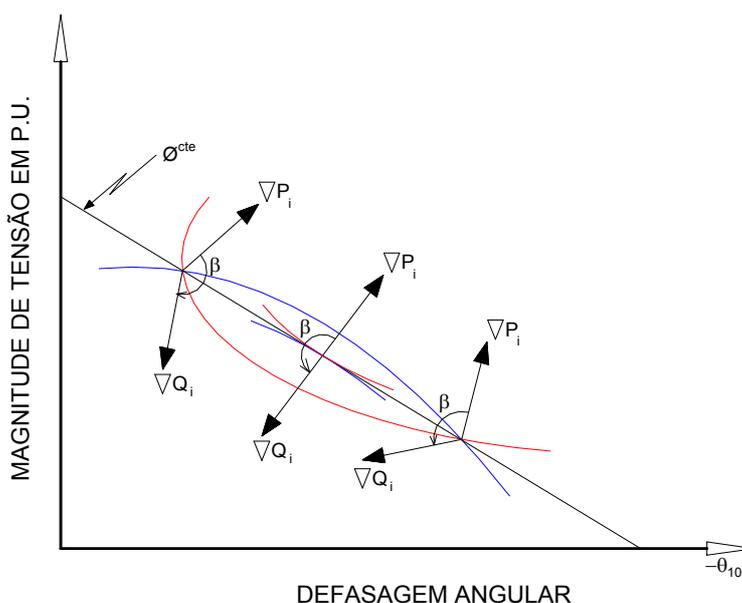


Figura 2.4 – Localização do Vetor Gradiente de P_i e Q_i no Plano $V \times \theta$

2.2.3 Margem de Potência

Observa-se que na região normal de operação, parte superior da curva $V \times P, Q$, tem-se $S_m > S_i$. Com isto, pode-se definir uma margem ou distância do ponto de operação em

análise ao máximo carregamento como $(S_m - S_i)$ em MVA. Quando o ponto de operação em análise é o ponto correspondente ao máximo carregamento, tem-se $S_m = S_i$, o que concorda com a definição de S_m .

Pode-se definir uma margem em p.u. Esta margem seria igual à unidade quando a potência injetada S_i na barra i é nula, e igual a zero quando a injeção é máxima ($S_i = S_m$). Esta margem é definida como:

$$M_i = \left(1 - \frac{S_i}{S_m}\right) \text{ em p.u. de } S_m \quad (2.87)$$

onde:

- ✓ M – é a distância ao máximo carregamento, calculada no ponto de operação em análise;
- ✓ S_i – é a potência aparente injetada na barra i , no ponto de operação em análise;
- ✓ S_m – é máxima potência aparente que poderia ser injetada na barra i , estimada no ponto de operação em análise.

A Figura 2.5 mostra que a margem, de acordo com a definição acima, é positiva na região normal de operação, negativa na região anormal de operação e nula no ponto de máximo carregamento. Deve-se notar que, embora tenha sido definida para a região normal de operação e para o ponto de máximo carregamento, a margem adquire valores também na região anormal de operação. No Capítulo 4, este índice é tratado com maiores detalhes.

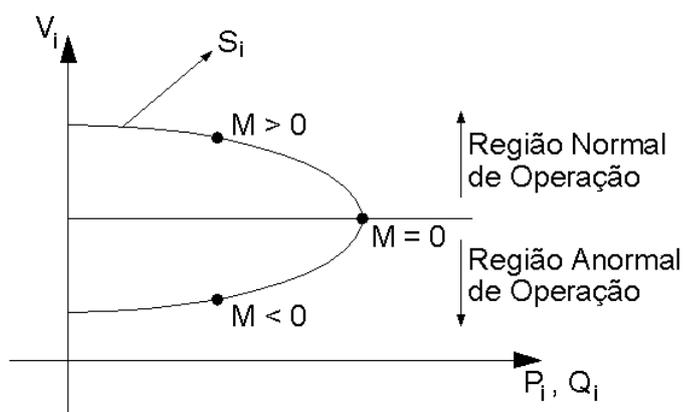


Figura 2.5 – Sinal da Margem na Curva $V \times P, Q$

2.2.4 Índice de Influência

Um outro índice que pode ser útil relaciona as margens de potência entre dois pontos de operação, por exemplo, antes e depois de uma ação de controle. Ficaria caracterizada a eficácia ou não desta ação. Esse índice também pode ser usado para avaliar variações de carga, ou qualquer outro evento. É definido como:

$$II_i = \left[\frac{M_{1_i}}{M_{0_i}} - 1 \right] \quad (2.88)$$

onde:

- II_i índice de influência da ação de controle sobre a margem da barra i ,
- M_{0_i} margem de potência na barra i no ponto de operação de referência,
- M_{1_i} margem de potência na barra i num outro ponto de operação.

A definição do índice também pode ser escrita como:

$$II_i = \frac{M_{1_i}}{M_{0_i}} - 1 \quad \text{quando } M_{0_i} > 0 \quad (2.89)$$

$$II_i = 1 - \frac{M_{1_i}}{M_{0_i}} \quad \text{quando } M_{0_i} < 0 \quad (2.90)$$

O movimento do ponto de operação descrito na curva $V \times P, Q$ da Figura 2.6 corresponde à deterioração do sistema e, conseqüentemente, do índice de influência. Obviamente o movimento contrário ao da Figura 2.6 corresponde à melhoria das condições do sistema.

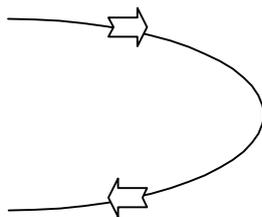


Figura 2.6 – Movimento dos Pontos de Operação na Curva V x P,Q

Se o Ponto B da Figura 2.7 é o ponto de operação de referência, uma ação de controle eficaz faz com que o ponto se desloque na direção do Ponto A; a margem M_1 é maior que a margem original M_0 e o índice II é positivo. Se a ação deteriora o sistema, o ponto de operação se aproxima do Ponto C; a margem M_1 é menor que a margem original M_0 e o índice II é negativo ($II = -1$ em C).

Se o Ponto D da Figura 2.7 é o ponto de operação de referência, uma ação de controle eficaz faz com que o ponto se desloque na direção do Ponto C; a margem M_1 é maior (menos negativa) que a margem original M_0 e o índice II é positivo ($II = +1$ em C). Se a ação deteriora o sistema, o ponto de operação se aproxima do Ponto E; a margem M_1 é menor (mais negativa) que a margem original M_0 e o índice II é negativo.

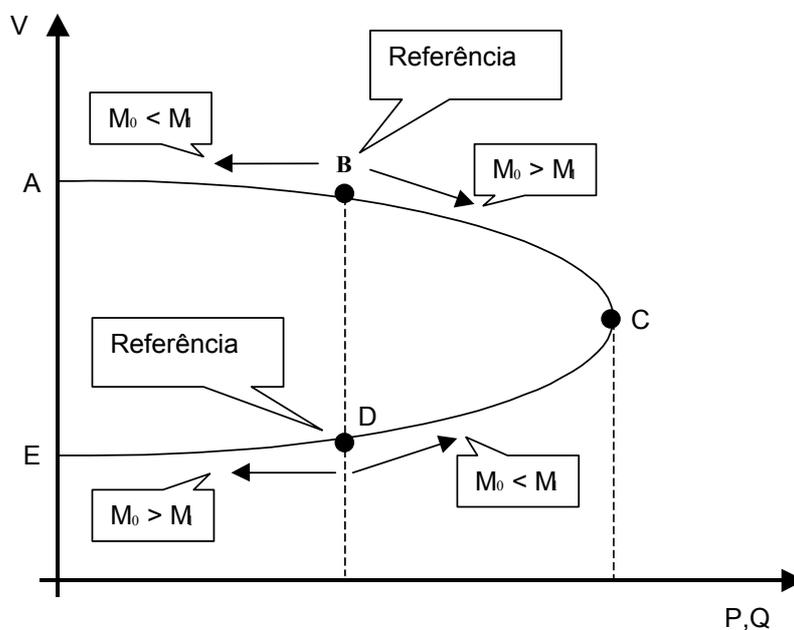


Figura 2.7 – Curva V x P,Q para Análise do Índice de Influência