

5 Descrição do modelo geomecânico elasto-plástico

5.1 Introdução

O modelo numérico utilizado nesta pesquisa é bastante simples e baseado na plasticidade de Mohr-Coulomb.

Como se sabe, o comportamento de materiais geológicos quando submetidos a carregamentos externos são descritos satisfatória e adequadamente por este modelo.

Além disso, faz uso indistintamente da lei de fluxo plástico associada ou não-associada, quando submetido a uma condição de deformação plana.

O modelo permite, ainda, a variação dos parâmetros de resistência durante a deformação do material, quer seja para endurecê-lo ou amolecê-lo.

5.2 Formulação matemática do modelo elasto-plástico

A formulação do problema de valor inicial é dada pelas seguintes equações ([119,120]) (em que as forças de amortecimento foram, momentaneamente, desprezadas):

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \mathbf{R} \ddot{\mathbf{u}} \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) \quad (5.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{m}, \dot{\lambda} \geq 0 \quad (5.4)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \leq 0, f \dot{\lambda} = 0 \quad (5.5)$$

onde o ponto sobre a variável indica derivada com relação ao tempo, e o ponto duplo, derivada segunda temporal.

Na equação do movimento (5.1), $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor que armazena as *componentes de tensão* (σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy}), \mathbf{u} é o vetor das *componentes de deslocamento* (u_x e u_y), \mathbf{R} é a *matriz densidade*, igual a $\text{diag}[\rho, \rho, \rho]$ com densidade ρ , \mathbf{p} é o vetor de forças

de massa, e \mathbf{L} é o operador diferencial matricial que, para o caso bidimensional em estudo, toma a forma

$$\mathbf{L}^T \bullet = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bullet}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \bullet}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & \frac{\partial \bullet}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde o superescrito T indica transposição.

A equação (5.2) estabelece a compatibilidade entre as *componentes de deformação* (ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{xy}) e as de deslocamento.

Nas *equações constitutivas* (5.3), (5.4) e (5.5), a matriz \mathbf{D}_e é o *tensor constitutivo elástico*.

A direção da *taxa de deformação plástica* $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ é dada pelo *multiplicador escalar* $\dot{\lambda}$, visto que, durante o escoamento plástico, o ponto representativo de um dado estado de tensão deverá permanecer na *superfície de escoamento* $f = 0$ (*condição de consistência de Prager*); do contrário, se $f < 0$, então $\dot{\lambda} = 0$.

O vetor \mathbf{m} é o gradiente da *função potencial plástico* g :

$$\mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.7)$$

Em plasticidade clássica [121,122], a *função de escoamento* f depende do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e de um número finito de variáveis internas que, para o caso de *endurecimento/amolecimento isotrópico*, podem ser representadas por uma única variável interna escalar κ , a *deformação plástica equivalente*. Mais precisamente,

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \quad (5.8)$$

em que $\kappa = \int \dot{\kappa} dt$, sendo $\dot{\kappa}$ uma dada *medida invariante* do tensor de deformações plásticas, definida por:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)} \quad (5.9)$$

Para um *material de Coulomb* [119,123], as funções de escoamento e de potencial plástico são dadas por:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen } \phi_m - c_m \cos \phi_m \quad (5.10)$$

$$g = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen } \psi_m - c_m \cos \psi_m \quad (5.11)$$

onde σ_1 e σ_3 são as *tensões principais maior e menor*, e c_m , ϕ_m e ψ_m , a *coesão*, *ângulo de atrito* e *ângulo de dilatação mobilizados* durante a história de deformações plásticas.

Para o caso em que $f = g$ ou $f \neq g$, diz-se que a plasticidade é *associada* ou *não-associada*, respectivamente.

A aludida *condição de consistência de Prager* [119,120]

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (5.12)$$

pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \dot{\kappa} = 0 \quad (5.13)$$

ou

$$\mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \dot{\kappa} = 0 \quad (5.14)$$

já que

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.15)$$

é o gradiente da função de escoamento.

Por outro lado, sabe-se que solos e rochas podem apresentar *endurecimento* (*hardening*) ou *amolecimento* (*softening*) no comportamento pós-pico (pós-ruptura) do material, razão pela qual pode-se definir

$$h = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\mathcal{F}}{\partial \kappa}\right)\dot{\kappa} \quad (5.16)$$

em que h é o módulo de endurecimento/amolecimento (hardening/softening modulus).

Assim, a equação (5.14) pode ser colocada sob a forma

$$\mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h \dot{\lambda} = 0 \quad (5.17)$$

que fornece o multiplicador plástico

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{h} \quad (5.18)$$

Ademais, de acordo com (5.3) e (5.4), tem-se que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_e^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\mathbf{m} \mathbf{n}^T}{h}\right) \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{D}_e - \left(\frac{\mathbf{D}_e \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}_e}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}_e \mathbf{m}}\right) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.19)$$

Definindo o *preditor elástico (elastic predictor)*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.20)$$

e o *corretor plástico (plastic corrector)*

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{D}_e}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}_e \mathbf{m}}\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.21)$$

a equação (5.19) pode ser colocada como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{corrigido}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{m} \quad (5.22)$$

que possibilita o cálculo do estado tensão total corrigido, i.é., tendo-se em conta as deformações plásticas.

Além disso, de (5.19)

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \left(\frac{\mathbf{D}_e \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}_e}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}_e \mathbf{m}} \right) \quad (5.23)$$

é a matriz de rigidez tangente elasto-plástica (elastoplastic tangent stiffness matrix).

5.3 Forma variacional das equações de campo

As equações (5.1) e (5.2) foram formuladas pelo *método dos elementos finitos* (*finite element method*) [124,125].

Especificamente, o método prescreve a maneira pela qual os graus de liberdade (p/ex., os deslocamentos) variam no interior de um *elemento finito*, a partir de uma malha de elementos de diferentes geometrias, que discretiza o domínio em estudo.

No presente caso, uma rede de elementos triangulares de deformação constante (*constant strain triangular element – CST*) foi utilizada. O emprego de elementos CST relaciona-se ao fato de que simplificam sobremaneira a integração das funções de interpolação sobre os aludidos elementos [126].

Assim, o campo contínuo de deslocamentos \mathbf{u} e acelerações $\ddot{\mathbf{u}}$ em cada elemento pode ser interpolado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{a} \quad (5.24)$$

e

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \ddot{\mathbf{a}} \quad (5.25)$$

onde \mathbf{a} e $\ddot{\mathbf{a}}$ são os vetores de deslocamento e aceleração nodais, e \mathbf{H} é uma matriz de polinômios interpolantes.

De forma semelhante, as deformações e suas respectivas taxas podem ser avaliadas a partir dos deslocamentos e velocidades nodais $\dot{\mathbf{a}}$ por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (5.26)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{a}} \quad (5.27)$$

sendo \mathbf{B} a matriz de deformação - deslocamento nodal.

A formulação em *deslocamentos* do método em sua forma *fraca* (i.é., variacional) é obtida fazendo-se

$$\int \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p}] dV = 0 \quad (5.28)$$

em que δ indica a variação de uma dada quantidade.

Aplicando o *teorema da divergência* (*Green*), tem-se que

$$\int \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}] dV = - \int \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (5.29)$$

com as condições de contorno usuais em termos de deslocamento e força, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{prescrito}}$ e $\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{t}$ ($\bar{\mathbf{n}}$ é a normal exterior unitária e $\mathbf{t}^T = (t_x, t_y)$ são as *tractions*, i.é., forças externas por unidade de área da superfície de contorno).

A equação (5.29) fica, então,

$$\int \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}}] dV + \int \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (5.30)$$

Ademais,

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^{t-1} + \int \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\tau \quad (5.31)$$

onde a integração é realizada de (t-1) a t, uma vez que (5.30) é supostamente considerada satisfeita no tempo t. Substituindo (5.31) em (5.30), e levando-se também em consideração (5.19), (5.23), (5.24), (5.25), (5.26) e (5.27), obtém-se

$$\delta \mathbf{a}^T \int \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{a}}^t dV + \delta \mathbf{a}^T \int \left[\int \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}^t d\tau \right] dV = \delta \mathbf{a}^T \int \mathbf{H} \mathbf{p}^t dV + \delta \mathbf{a}^T \int \mathbf{H}^T \mathbf{t}^t dS - \delta \mathbf{a}^T \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t-1} dV \quad (5.32)$$

De maneira análoga a (5.31), é possível definir um *vetor de deslocamento nodal incremental*

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^t - \mathbf{a}^{t-1} = \int \dot{\mathbf{a}} d\tau \quad (5.33)$$

Uma vez que (5.32) é válida para qualquer variação admissível $\delta \mathbf{a}$, tem-se, então, que

$$\int \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H} \dot{\mathbf{a}}^t dV + \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} \Delta \mathbf{a} dV = \int \mathbf{H}^T \mathbf{p}^t dV + \int \mathbf{H}^T \mathbf{t}^t dS - \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t-1} dV \quad (5.34)$$

Se forem introduzindo as seguintes notações:

- *Matriz de massa*

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H} dV \quad (5.35)$$

- *Matriz de rigidez*

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} dV \quad (5.36)$$

- *Vetor de forças nodais externas*

$$\mathbf{f}^t = \int \mathbf{H}^T \mathbf{p}^t dV + \int \mathbf{H}^T \mathbf{t}^t dS \quad (5.37)$$

- *Vetor de forças nodais internas*

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^{t-1} = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t-1} dV \quad (5.38)$$

então, a equação (5.34) poderá ser reescrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{f}^t - \mathbf{f}_{\text{int}}^{t-1} \quad (5.39)$$

Portanto, (5.39) representa a equação não-linear do movimento que governa a resposta do sistema de elementos finitos.

5.4 Relaxação dinâmica

As equações algébricas (5.39) foram resolvidas por um algoritmo de relaxação dinâmica [127] explícito no tempo. Mais precisamente, (5.39) é reescrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{K}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{f}^t - \mathbf{f}_{\text{int}}^{t-1} \quad (5.40)$$

ou, alternativamente,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}^t = \mathbf{R}^t \quad (5.41)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, e

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{f}^t - \mathbf{f}_{\text{int}}^{t-1} - \mathbf{K}\Delta\mathbf{a} \quad (5.42)$$

é a *força nodal desequilibrada*.

A matriz de amortecimento pode ser determinada por um processo clássico utilizado em métodos de integração direta de análises dinâmicas de oscilações amortecidas denominado *amortecimento Rayleigh (Rayleigh damping)* [124]. Para tanto, admitindo-se, um tanto arbitrariamente, que \mathbf{M} seja diagonal (ou, por outra, que é uma matriz de massas concentradas), e que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez (i.é., $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, onde α e β são coeficientes de amortecimento viscoso) - como, aliás, é usual em análise

de *superposição modal* -, a equação (5.41) admite uma discretização no tempo em um esquema de *diferenças finitas centrais* [128] da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+0.5} = [\zeta_1 \dot{\mathbf{a}}^{t-0.5} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}^t \Delta t] \zeta_2 \quad (5.43a)$$

e

$$\mathbf{a}^{t+1} = \mathbf{a}^t + \dot{\mathbf{a}}^{t+0.5} \Delta t \quad (5.43b)$$

no qual $\zeta_1 = 1 - \alpha \Delta t / 2$, $\zeta_2 = 1 / (1 + \alpha \Delta t / 2)$, e Δt é o passo utilizado na integração temporal. Para o algoritmo de relaxação dinâmica utilizado nesta pesquisa, adotou-se $\beta = 0$.

As expressões (5.42) e (5.43) permitem observar que os deslocamentos em um tempo t qualquer são obtidos diretamente daqueles avaliados em $(t-1)$, o que confere, ao esquema numérico, um caráter explícito. Portanto, de modo a assegurar a estabilidade do esquema de integração, Cassell [129] sugere para Δt um valor menor que o *tempo crítico* Δt_c , correspondente à velocidade de propagação máxima da onda compressiva através dos elementos triangulares que possuam a menor dimensão de toda a malha discretizada.

Assim,

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{H_{\min}}{C_p} \quad (5.44)$$

onde H_{\min} é a menor altura do elemento triangular de menor área e C_p é a velocidade da onda longitudinal. Para um meio elástico, C_p é dada por

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (5.45)$$

em que λ e μ são os *coeficientes de Lamé* [130,131].

5.5 Procedimento de integração numérica

A integração numérica inicia-se com o cálculo dos deslocamentos \mathbf{a} e velocidades $\dot{\mathbf{a}}$ na n -ésima iteração, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sendo avaliados por (5.26) e (5.27). Em seguida, tentativamente, calcula-se $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ em (5.20), supondo-se que o estado de tensão corrente possa ser determinado unicamente por \mathbf{D}_e (ou seja, que só provoque deformações elásticas). Assim, $\boldsymbol{\sigma}^t$ é dado por (5.31), o que fornece, por conseguinte, uma estimativa preliminar do real estado de tensão, que terá, em seguida, sua admissibilidade testada na função de escoamento (5.5).

Caso $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) > 0$, o preditor elástico é plasticamente inadmissível e deverá ser reavaliado. Estimam-se, então, o preditor plástico por (5.21) e $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{corrigido}}$ por (5.22). O novo estado de tensão admissível é levado em (5.38) de modo a se obter as forças internas, e a força nodal desequilibrada \mathbf{R}^t é computada. Calcula-se a matriz de rigidez em (5.36) e, finalmente, os deslocamentos \mathbf{a} e velocidades nodais $\dot{\mathbf{a}}$ são atualizados por (5.43).

Se, por outro lado, $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \leq 0$, o estado de tensão inicialmente avaliado em (5.20) é efetivamente elástico, o que torna a marcha de cálculo mais simples, passando-se, desta feita, diretamente à determinação de \mathbf{R}^t , o restante do cálculo prosseguindo tal como exposto anteriormente.

5.6 Parâmetros e condições de contorno adotados nas simulações numéricas

Em todas as simulações realizadas neste trabalho, o sistema estudado possui a forma geométrica de um quadrado, sendo, como já se observou, submetido a um estado de deformação plana.

Os seus vértices apresentam as seguintes coordenadas, contadas a partir do extremo inferior esquerdo, e fornecidas no sentido anti-horário: (0.00,0.00), (10.00,0.00), (10.00,10.00) e (0.00,10.00).

A figura (5.1) ilustra o aspecto da malha discretizada em elementos finitos (400 elementos e 221 nós).

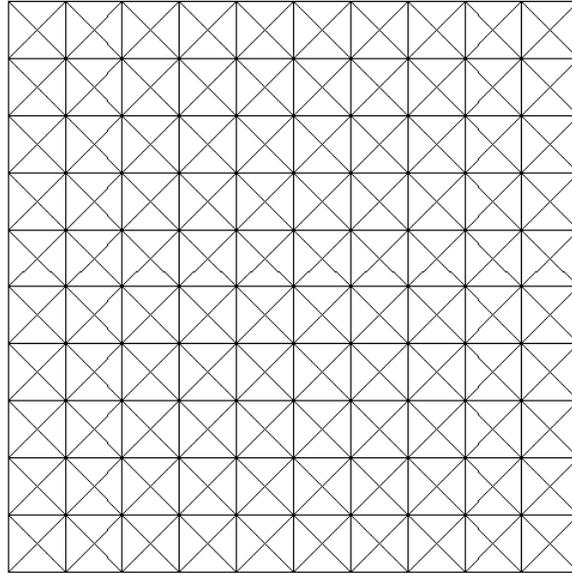


Figura 5.1 - Malha de elementos finitos (400 elementos e 221 nós).

Apenas as condições de contorno e os valores dos parâmetros de resistência são diferenciados, estando na dependência dos objetivos que se queira alcançar.

5.6.1 Para as simulações dos capítulos 6 e 7

Para a análise do modelo geomecânico no que concerne à criticalidade auto-organizada e à não-extensividade estatística, 3 (três) condições de contorno distintas -doravante referidas como CC1, CC2 e CC3 - foram utilizadas, cada qual com as seguintes características:

- *CC1*
 - Contorno inferior: nenhum deslocamento horizontal e vertical é permitido (u_x e $u_y = 0$);
 - Contorno superior: nenhum deslocamento horizontal permitido, pequenas velocidades aplicadas verticalmente (comprimindo a amostra);
 - Contornos laterais: forças confinantes horizontais aplicadas.

- *CC2*
 - Contorno inferior: nenhum deslocamento vertical é permitido, deslocamento horizontal é permitido;
 - Contorno superior: deslocamento horizontal permitido, pequenas velocidades aplicadas verticalmente (comprimindo a amostra);
 - Contornos laterais: como em CC1.

- *CC3*
 - Contorno inferior: como em CC1;
 - Contorno superior: como em CC1;
 - Contornos laterais: contornos livres.

De acordo com o comportamento estipulado para os parâmetros de resistência, a coesão mobilizada, o ângulo de atrito mobilizado e o ângulo de dilatação mobilizado tomaram os seguintes valores:

1. Para um material *perfeitamente plástico* (MPP):
 - $c_m = 0$ MPa (constante)
 - $\phi_m = 30^\circ$ (constante)
 - $\psi_m = 0^\circ$ (constante)

2. Para um material *plástico com amolecimento* (MPA):
 - $c_m = 0$ MPa (constante)
 - $\phi_m =$ decresce linearmente de 30° para 10° (para κ variando de 0 a 3.00)
 - $\psi_m = 0^\circ$ (constante)

A inclusão do amolecimento no rol de questões analisadas nesta tese deve-se a que a literatura [132] tem sugerido ser o mecanismo de amolecimento (*softening*) o responsável pelo comportamento fortemente caótico encontrado em análises de sistemas dinâmicos não-lineares.

Ressalte-se, ainda, que, a inclusão na análise de um material *já em ruptura*, conforme se depreende de CC3, aliada à restrição de um material puramente friccionante (i.é., $c_m = 0$ MPa), deveu-se à questão importante da determinação do índice da entropia não-extensiva para esta condição de ruína.

Os valores numéricos adotados para o *módulo de elasticidade* (E), *coeficiente de Poisson* (ν) e *densidade* (ρ) foram 100 MPa, 0.25 e 2500 Kg/m³, respectivamente.

Em todos os casos considerados, o passo de tempo Δt utilizado nas integrações numéricas foi sempre de 10% do passo crítico Δt_c .

O valor da velocidade aplicada no contorno superior do meio estudado foi de 0.0001 m/s e as forças confinantes foram de 0.01 N/m.

Finalmente, o valor do coeficiente de amortecimento viscoso α variou de acordo com o caso considerado (0.01 e 0.001), comportando-se o sistema como superamortecido e sub-amortecido, respectivamente.

5.6.2 Para as simulações do capítulo 8

Para as simulações numéricas envolvendo a invariância discreta de escala, as seguintes condições foram estabelecidas:

- Condição de contorno do tipo *CCI*;
- Parâmetros elásticos do material:
 - Módulo de elasticidade $E = 10$ GPa;
 - Coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$;
- Densidade $\rho = 2500$ kg/m³;

- O passo de tempo utilizado nas integrações foi de 10% do passo crítico;
- O valor da velocidade aplicada no contorno superior foi de 0.0001 m/s, e as forças confinantes laterais tomaram valores de 0.01 N/m;

No que se refere aos parâmetros de resistência adotados nas análises, optou-se por gerá-los aleatoriamente, pois, como se observou ainda no capítulo 4, um dos requisitos necessários para a geração da invariância discreta de escala em sistemas físicos diz respeito à heterogeneidade de seus elementos constituintes.

Portanto, a coesão, o ângulo de atrito e o ângulo de dilatância mobilizados adquiriram os seguintes valores, segundo o comportamento MPP:

- Coesão mobilizada: fixa e igual a 0.02 MPa;
- Ângulo de dilatância mobilizado: idem, e igual a 10° ;
- Ângulo de atrito mobilizado: variando *aleatoriamente* entre 10° e 30° .

Cabe observar que, embora não se tenha procedido a uma análise detalhada, os resultados foram muito influenciados pelo grau de heterogeneidade ditado por ϕ_m relativamente a ψ_m .

Assim, quanto maior esta diferença, maior a heterogeneidade, não se conseguindo obter, nem as oscilações log-periódicas no padrão proposto no capítulo anterior, nem a estatística em lei de potência das variáveis em estudo, o que corrobora o reportado na literatura [17].

Devido a uma restrição termodinâmica [119], $\psi_m \leq \phi_m$, o processo de geração aleatória dos dados teve de ser realizado com um certo cuidado.

No que respeita ao amortecimento, o valor adotado necessitou de um estudo detalhado, visto que os resultados obtidos também foram por ele fortemente influenciados. Após inúmeras simulações, decidiu-se adotar um valor do coeficiente de amortecimento de sorte a trabalhar-se sempre na faixa compreendida entre o amortecimento crítico e 80% de seu valor (i.é., o sistema comportou-se como levemente sub-amortecido).