3
Formulações

O Problema de Alocação Generalizada consiste em alocar um conjunto de tarefas a um conjunto de agentes buscando o custo mínimo. Cada agente tem uma quantidade limitada de um único recurso e, cada tarefa deve ser alocada a um único agente. A ação de alocar uma tarefa a um agente consome uma certa quantidade de recursos deste agente e acarreta um custo.

3.1
Formulações do PAG

3.1.1
Formulação Clássica do PAG

O Problema de Alocação Generalizada pode ser formulado como:

I: conjunto de agentes $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

J:conjunto de tarefas $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

$b_i =$ capacidade do agente i

$a_{ij} =$ recurso consumido pela tarefa j quando ela é alocada ao agente i

$c_{ij} =$ custo de se alocar a tarefa j ao agente i

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; \text{tarefa } j \text{ é alocada ao agente } i \\ 0; \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{PAG-C} \begin{cases} (1) & \min f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ & \text{sujeito a} \\ (2) & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i; i = 1, 2, \ldots, m \\ (3) & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1; j = 1, 2, \ldots, n \\ (4) & x_{ij} \in \{0, 1\} \; i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

A restricão (2) garante que a capacidade dos agentes não é violada, (3) garante que cada tarefa é associada a um agente e como as variáveis são binárias cada tarefa fica associada a um único agente.

3.1.2
Formulação do PAG com um número exponencial de variáveis

A formulação com um número exponencial de variáveis pode ser vista como uma versão desagregada da formulação clássica, já que não leva em consideração separadamente as capacidades dos agentes e a obrigatoriedade de alocação de cada tarefa. Cada coluna representa uma alocação viável de tarefas em um agente específico. Uma alocação viável é uma alocação que não excede a capacidade do agente.

Seja $K_i = \left\{v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{k_i}\right\}$ o conjunto de todas as alocações possíveis de tarefas para o agente i. Desta maneira v_i^k é a k-ésima alocação possível para o agente i. Denota-se por $v_i^k = \left\{v_{i1}^k, v_{i2}^k, \ldots, v_{in}^k\right\}$ uma solução viável de:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_{ij}^k \leq b_i$$

$$v_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

onde $v_{ij}^k = 1$ se o elemento j está no agente i na alocação k. Seja y_i^k para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $k \in K_i$ uma variável binária indicando se uma alocação viável v_i^k é selecionada para o agente i $\left(y_i^k = 1\right)$ ou não $\left(y_i^k = 0\right)$. O PAG pode agora ser formulado como:

$$\text{PAG-Exp} \begin{cases} (1) & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_i} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_{ij}^k \right) y_i^k \\ & \text{sujeito a} \\ (2) & \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_i} v_{ij}^k y_i^k = 1 \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \\ (3) & \sum_{k=1}^{k_i} y_i^k \leq 1 \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \\ (4) & y_i^k \in \{0, 1\} \quad i \in \{1, \ldots, m\}, k \in K_i \end{cases}$$

O conjunto de restrições (2) assegura que cada tarefa é associada precisamente a um único agente e o conjunto de restrições (3) assegura que no máximo uma alocação viável é selecionada para cada agente.

O problema da mochila inteira associada com o agente i na formulação clássica (PAG-C) é:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

As restrições referentes à capacidade dos agentes e consideradas no problema da mochila acima, são equivalentes a

$$\sum_{k=1}^{k_i} y_i^k \leq 1,$$

permitindo que a solução ótima para esta i-ésima mochila (agente do PAG), seja obtida ao se otimizar segundo a função objetivo

$$\min \sum_{k=1}^{k_i} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_{ij}^k \right) y_i^k$$

onde $v_i^1, \ldots, v_i^{k_i}$ são as soluções inteiras do problema da mochila. (PAG-EXP) acopla as mochilas correspondentes a todos os agentes impondo que cada tarefa seja executada exatamente por um único agente.

Devido ao fato da relaxação linear do problema da mochila conter o envoltório convexo das soluções inteiras, a relaxação linear da formulação por geração de colunas fornece um limite que é no mínimo tão apertado quanto o limite fornecido pela formulação clássica.

Qualquer solução viável para a formulação por número exponencial de variáveis tem uma solução equivalente para a formulação clássica.

Seja y qualquer solução viável para a relaxação linear da formulação por número exponencial de variáveis e seja $z_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq k_i} x_{ij}^k y_i^k$. Então z é uma solução viável da relaxação linear da formulação clássica. E mais que isso se y_i^k é fracionária, então deve haver um j tal que z_{ij} é fracionário. A demonstração para estas duas proposições é dada em [20].

3.2
Formulação da Aplicação PCC

O PCC pode ser formulado usando a mesma formulação clássica do PAG bastando acrescentar as restrições de valor máximo por tipo de produto, para que sejam respeitadas as normas de seguro. E acrescentar as variáveis e restrições relativas a existência de produtos químicos e alimentícios em um mesmo carregamento.

$MaxFrete$	:Frete da carga j.
$Frete_j$	:Frete de maior valor entre todas as cargas.
$Peso_j$	:Peso da carga j
Cap_i	:Capacidade de peso do caminhão i.
$Valor_j$	:Valor de mercado da carga j.
$ValorTipo_t$	:Valor máximo de mercadorias do tipo t em um carregamento.
T_t	:conjunto das cargas j que pertencem à família t.
Al	:conjunto das cargas j que são alimentícias
Qu	:conjunto das cargas j que são químicas.

Modelo Matemático:

x_{ij} : carga j no caminhão i.

Q_i : se o caminhão i é químico.

A_i : se o caminhão i é alimentício.

$$(1) \quad Min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (MaxFrete - Frete_j)\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (MaxFrete + Frete_j)\, x_{(m+1)j}$$

sujeito a

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} Peso_j x_{ij} \leq Cap_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = 1; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{n} Valor_j x_{ij} \leq ValorTipo_t; \qquad \forall_t \in T, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$(5) \quad Q_i + A_i \leq 1; \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$(6) \quad x_{ij} \leq Q_i; \qquad \forall_j \in Qu, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$(7) \quad x_{ij} \leq A_i \qquad \forall_j \in Al, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

A restrição 2 é a mesma restrição de capacidade do PAG, no PCC ela garante que a capacidade de peso do caminhão não é violada. A restrição 3 assegura que todas as cargas ou são associadas a um caminhão ou ficam no armazém. A restrição 4 garante que nenhum carregamento excede o valor máximo por tipo de mercadoria. A restrição 5 não permite que cargas químicas e alimentícias estejam no mesmo caminhão. A restrição 6 faz com que se uma carga química j for associada ao caminhão i a variável Q_i seja 1. A variável $Q_i = 1$ significa que o caminhão i possui alguma carga química. Analogamente, a restrição 7 faz o mesmo para as cargas alimentícias.

A Formulação por geração de colunas do PCC é dada a seguir.

Seja $K_i = \left\{v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{k_i}\right\}$ o conjunto de todos os possíveis carregamentos para o caminhão i. Desta maneira v_i^k é o k-ésimo carregamento possível para o caminhão i. Deve ser notado que $v_i^k = \left\{v_{i1}^k, v_{i2}^k, \ldots, v_{in}^k\right\}$ é uma solução viável para:

$$\sum_{j=1}^{n} Peso_j v_{ij}^k \leq b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} Valor_j x_{ij} \leq ValorTipo_t; \qquad \forall_t \in T$$

$$Q + A \leq 1$$

$$x_{ij} \leq Q \qquad \forall_j \in Qu$$

$$x_{ij} \leq A \qquad \forall_j \in Al$$

$$v_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Seja y_i^k para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $k \in K_i$ uma variável binária indicando se um carregamento viável v_i^k é selecionado para o caminhão i $\left(y_i^k = 1\right)$ ou não $\left(y_i^k = 0\right)$. O PCC pode agora ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(MaxFrete - Frete_j \right) v_{ij}^k \right) y_i^k + \\
& \sum_{k=1}^{k_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(MaxFrete + Frete_j \right) v_{(m+1)j}^k \right) y_{m+1}^k
\end{aligned}
$$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_i} v_{ij}^k y_i^k + \sum_{k=1}^{k_{m+1}} v_{(m+1)j}^k y_{m+1}^k = 1 \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \\
& \sum_{k=1}^{k_i} y_i^k \leq 1 \quad i \in \{1, \ldots, m, m+1\}, \\
& y_i^k \in \{0, 1\} \quad i \in \{1, \ldots, m, m+1\}, k \in K_i.
\end{aligned}
$$