2
Teoria Eletromagnética da Polarização da Luz

Há muitos e muitos anos atrás os físicos já se faziam perguntas a respeito da natureza da luz. Historicamente, a primeira teoria consistente, hoje chamada de *óptica de raios* ou *óptica geométrica*, consistia na idéia de que a luz é formada por feixes de pequenas partículas que se propagam em linha reta. Apesar de ser suficiente para descrever muitos fenômenos macroscópicos, como reflexão e refração da luz, essa teoria não é capaz de descrever muitos fenômenos importantes, como a difração e a interferência. No início do século XIX, Fresnel mostrou que a difração poderia ser perfeitamente explicada caso a luz fosse interpretada como uma onda propagante. Essa teoria, que descreve fenômenos ópticos através da representação da luz como uma função de onda escalar, foi devidamente chamada de *óptica ondulatória*.

Foi apenas em 1864 que, através dos trabalhos de Maxwell, chegou-se à teoria que fornece o tratamento mais completo dos fenômenos ópticos dentro dos limites da óptica clássica. A teoria eletromagnética da luz, também chamada de *óptica eletromagnética*, classifica a luz como um fenômeno descrito pelos mesmos princípios que governam todos os tipos de radiação eletromagnética: as equações de Maxwell. A polarização é apenas um exemplo dos vários fenômenos que só podem ser compreendidos através da interpretação da luz como uma onda eletromagnética.

Este capítulo, inicialmente, aborda o conceito de polarização de acordo com a natureza eletromagnética da luz. Em seguida, será fornecido um tratamento matemático formal que permitirá o estabelecimento de representações adequadas aos estados de polarização de ondas eletromagnéticas, em particular as representações vetoriais de Jones e Stokes. No final deste capítulo, serão apresentados alguns dispositivos ópticos que possuem a propriedade de alterar o estado de polarização de uma onda luminosa e como estes dispositivos podem ser modelados matematicamente.

2.1
O que é Polarização?

O conceito de polarização só pode ser bem definido às luzes da teoria eletromagnética [6]. Sabe-se que a luz que se propaga no espaço livre é uma onda transversal eletromagnética (TEM), isto é, os campos elétrico (E) e magnético (H) são ambos perpendiculares à direção de propagação (dada pelo vetor k) da onda em todos os instantes de tempo. Se considerarmos uma onda que se propaga na direção positiva do eixo z, os campos E e H possuirão componentes apenas no plano perpendicular ao eixo z, isto é, no plano xy. A figura 1, abaixo, ilustra um caso especial de uma onda TEM onde o campo elétrico oscila apenas no eixo x e o campo magnético apenas no eixo y.

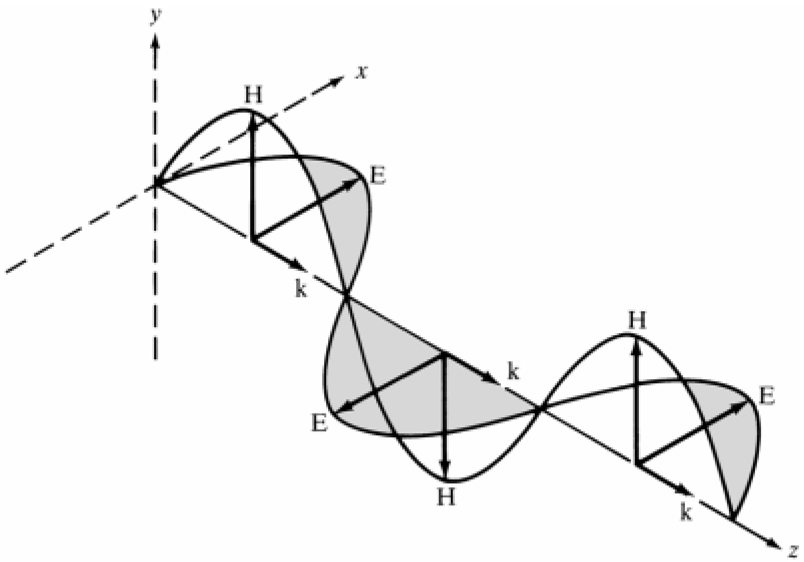


Figura 1: Onda plana se propagando na direção positiva do eixo z.
Fonte: Keiser, G. "Optical Fiber Communications". McGraw-Hill, 2000.

Suponha agora que um observador se posiciona no eixo z, olhando em sua direção positiva, observando o comportamento do vetor campo elétrico. A ponta da seta que representa o vetor irá, ao longo do tempo, oscilar continuamente no eixo x; a *amplitude* e o *sentido* do campo irão variar com o tempo, mas a direção será sempre a do eixo x. O desenho traçado pela ponta do vetor campo elétrico em um plano transversal à direção de propagação é chamado de *polarização* da onda eletromagnética. No caso da figura 1, a onda é dita *polarizada* na direção do eixo x. Repare que a direção da polarização é aquela correspondente ao campo elétrico, não ao campo magnético.

A polarização das ondas eletromagnéticas pode ser classificada em três categorias: *linear, circular* e *elíptica*. Os nomes se referem à figura desenhada no plano perpendicular à direção de propagação. Se o vetor que descreve o campo elétrico em um ponto do espaço como uma função do tempo está sempre em uma mesma direção, a onda é dita *linearmente polarizada*. A onda TEM da figura 1 é um exemplo de onda linearmente polarizada. No entanto, o caso mais geral de onda polarizada é aquele em que a figura traçada pelo vetor campo elétrico é uma elipse, e por esse motivo chamamos a onda de *elipticamente polarizada*. Quando os eixos da elipse são iguais, a figura traçada pelo campo elétrico é uma circunferência e dizemos que a onda é *circularmente polarizada*. Tanto a polarização circular como a linear são simples casos especiais da polarização elíptica. A figura 2 ilustra os três tipos de polarização.

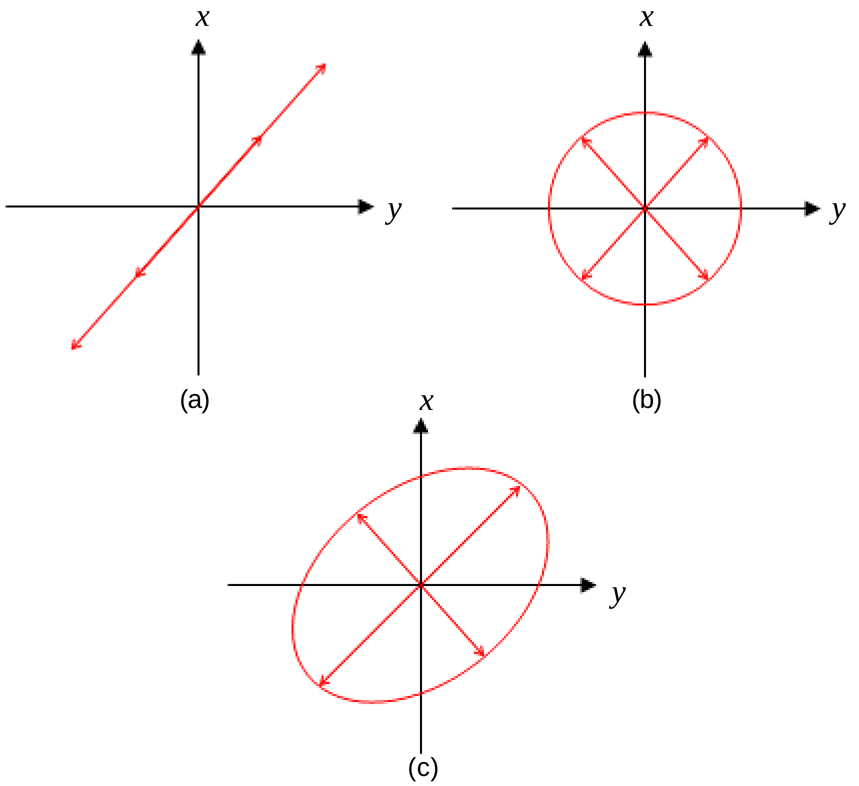


Figura 2: Tipos de polarização: (a) Linear, (b) Circular e (c) Elíptica.

Para que uma onda eletromagnética seja polarizada, no entanto, não é necessário que ela seja uma onda harmônica, ou seja, que as flutuações dos campos elétrico e magnético sejam senoidais; basta que o vetor campo elétrico descreva um desenho como os acima da figura 2. Quando as variações são de fato harmônicas, no entanto, os radiadores elementares responsáveis pela geração da onda atuam em unissonância; esse é o caso dos elétrons em uma antena transmissora de rádio ou dos fótons na cavidade de um laser. Chamamos essas fontes de *coerentes*. Nas fontes comuns de luz, como uma lâmpada incandescente, os radiadores elementares, que são os átomos constituintes da fonte (como o filamento incandescente da lâmpada), atuam de forma independente. Por esse motivo, a luz emitida por essas fontes consiste em uma superposição de várias ondas de freqüências e fases aleatórias. Chamamos esse tipo de radiação de *luz incoerente*. No caso de uma onda eletromagnética incoerente que se propaga na direção do eixo *z*, um observador posicionado nesse eixo irá observar um movimento totalmente aleatório do vetor campo elétrico. Por este motivo, essa luz é chamada de *não-polarizada*. A seção 2.5 trata melhor desse tipo de luz.

Também é possível interpretar a luz não-polarizada como a superposição de duas ondas polarizadas cujos planos de vibração são perpendiculares entre si. Por exemplo, se decompusermos o campo elétrico, em todos os instantes de tempo, em suas componentes vertical e horizontal, obteremos duas ondas polarizadas (obviamente não harmônicas) de mesma intensidade nessas direções.

O meio termo entre luz polarizada e não-polarizada é chamado de *luz parcialmente polarizada*. A quantidade relativa de luz polarizada e não polarizada em uma mesma onda luminosa pode ser expressa através de um parâmetro chamado de *grau de polarização* (*DOP*, do inglês *Degree Of Polarization*), definido como a razão entre a intensidade de luz polarizada e a intensidade total de luz:

$$DOP = \frac{I_{polarizada}}{I_{polarizada} + I_{não-polarizada}} \tag{2.1}$$

Se a luz estiver viajando no espaço livre, sua *DOP* permanecerá inalterada; caso contrário, pode ser que sua *DOP* sofra grandes alterações. Existem muitas formas naturais, por exemplo, de luz não-polarizada tornar-se quase totalmente polarizada, como reflexões em uma superfície, espalhamento em um gás, ou até mesmo na presença de um forte campo magnético nas proximidades da fonte.

Nas seções a seguir, considerar-se-á que a luz é totalmente polarizada, exceto seja dito o contrário. Serão estudados separadamente os casos de polarização linear, circular e elíptica.

2.2
Tipos de Polarização

A expressão geral para o campo elétrico de uma onda TEM se propagando na direção positiva do eixo z é dada por:

$$\begin{aligned} E &= E_x(t)\hat{a}_x + E_y(t)\hat{a}_y \\ &= E_{x0}\cos(wt - kz + f_x)\hat{a}_x + E_{y0}\cos(wt - kz + f_y)\hat{a}_y \end{aligned} \tag{2.2}$$

Na expressão acima, $\hat{a}_x$ e $\hat{a}_y$ são os vetores unitários nas direções x e y, k é a constante de propagação, w é a freqüência angular de oscilação e f_x, f_y são as fases relativas de cada componente à origem do sistema de coordenadas. As expressões para o campo magnético serão omitidas ao longo do texto, já que a polarização é definida como o movimento traçado pelo campo E.

O que vai definir o tipo de polarização (linear, circular ou elíptica) é o valor relativo das amplitudes E_x e E_y e das fases f_x e f_y. O formalismo matemático para descrever cada um dos tipos de polarização se encontra a seguir.

2.2.1
Polarização Linear

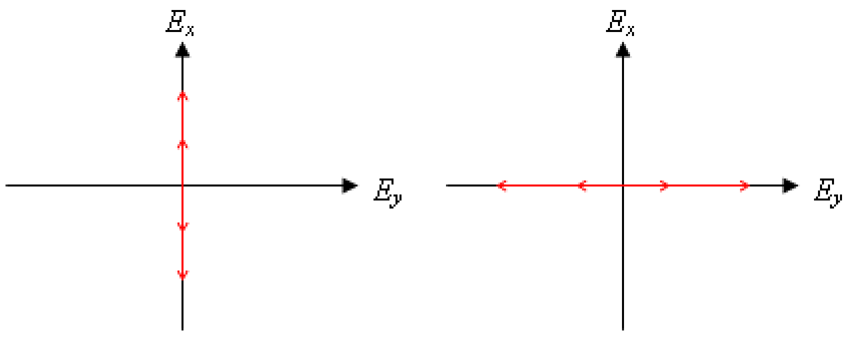
Considere, inicialmente, um caso bastante particular da equação (2.2) em que uma das componentes é sempre nula. Por exemplo:

$$E_{y0} = 0 \tag{2.3}$$

Nesse caso, o vetor campo elétrico iria parametrizar uma curva no plano xy (z = 0) de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{x0}\cos(wt + f_x) \\ E_y(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

É evidente, através da observação de (2.4), que essa curva parametriza um segmento de reta no eixo x. A cada instante de tempo, o módulo do campo elétrico varia harmonicamente, mas sua direção é sempre a do eixo x; chamamos esse caso de *polarização linear na direção x*. Um outro caso muito semelhante seria obtido se a componente E_x fosse anulada; ele é chamado de *polarização linear na direção y*. Os dois casos são ilustrados na figura 3.



(a) (b)

Figura 3: Polarização linear na direção (a) *x* e (b) *y*

Considere agora um outro caso em que nenhum dos campos em x ou y é nulo, e as fases f_x e f_y em (2.2) possuem o mesmo valor. Ou seja:

$$f_x = f_y = f \tag{2.5}$$

Nessas condições, a figura desenhada pelo vetor campo elétrico no plano z = 0 pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{x0}\cos(wt + f) \\ E_y(t) &= E_{y0}\cos(wt + f) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Note que, em todos os instantes de tempo, as duas componentes são proporcionais, isto é,

$$E_y(t) = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x(t) \tag{2.7}$$

Se as componentes em x e em y são sempre proporcionais, significa que o vetor $(E_x(t), E_y(t))$ parametriza uma *reta* que passa pela origem. O ângulo que a reta forma com o eixo x é:

$$q = \tan^{-1}\left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right) \tag{2.8}$$

Por esta razão esse tipo de polarização é chamado de *polarização linear na direção q*. A figura 4 ilustra essa possibilidade.

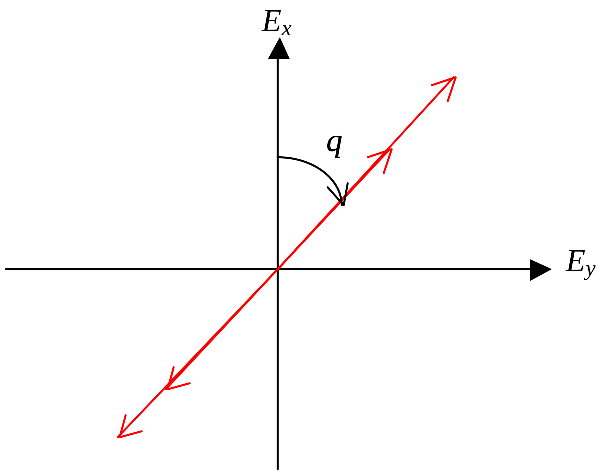


Figura 4: Polarização linear na direção *q*

Observe que um resultado semelhante poderia ser obtido se fosse escolhido $f_x = f_y + p$, pois somar uma fase de π radianos é o mesmo que inverter o sinal do cosseno. A única diferença estaria no valor do ângulo *q*, que nesse caso seria negativo. Desta forma, chega-se à seguinte conclusão:

Uma onda eletromagnética é linearmente polarizada se o seu vetor campo elétrico possuir (a) apenas uma componente ou (b) duas componentes ortogonais em fase ou em oposição de fase.

Para se obter luz linearmente polarizada a partir de luz com outra polarização ou até mesmo de luz despolarizada, utiliza-se um instrumento chamado de *polarizador*. O polarizador possui a propriedade de ser totalmente transparente à luz polarizada em uma certa direção, chamada *eixo de transmissão*, e totalmente opaco à luz polarizada na direção perpendicular. Por este motivo, se luz despolarizada incidir sobre um polarizador, apenas a componente polarizada na direção do eixo irá ser transmitida. A desvantagem de se gerar luz polarizada a partir de despolarizada desse modo é que metade da intensidade será perdida.

A polarização linear é muito comum na natureza. A luz azul do céu, por exemplo, é fortemente polarizada verticalmente, assim como a luz refletida no asfalto quente e seco de uma estrada em um dia de sol é polarizada na horizontal. Por essa razão, os óculos de sol polarizadores possuem seu eixo de transmissão na direção vertical, de forma a bloquear a componente horizontal de alta intensidade que poderia, por exemplo, ofuscar um motorista.

2.2.2 Polarização Circular

Considere agora, na equação (2.2), o seguinte caso particular:

$$\begin{aligned} E_{x0} &= E_{y0} = E_0 \\ f_x &= f_y + \frac{p}{2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Desta forma, obtém-se as seguintes equações paramétricas para o plano do observador ($z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_0 \cos(wt + f_x) \\ E_y(t) &= E_0 \cos\left(wt + f_x - \frac{p}{2}\right) = E_0 \sin(wt + f_x) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Reescrevendo essas equações paramétricas em coordenadas polares, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sqrt{E_x(t)^2 + E_y(t)^2} \\ &= \sqrt{E_0{}^2\left(\cos^2(wt + f_x) + \sin^2(wt + f_x)\right)} = E_0 \\ y(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{E_y(t)}{E_x(t)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{E_0 \cos(wt + f_x)}{E_0 \sin(wt + f_x)}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\tan(wt + f_x)\right) = wt + f_x \end{aligned} \tag{2.11}$$

Isto é: o módulo do vetor campo elétrico permanece constante ao longo do tempo, mas o ângulo que ele forma com o eixo x varia linearmente com o tempo. Essa é justamente a equação paramétrica de uma circunferência, em que a ponta do vetor campo elétrico gira periodicamente no sentido *horário* com freqüência angular w. Por esta razão, dizemos que a onda eletromagnética apresenta uma *polarização circular à direita.*

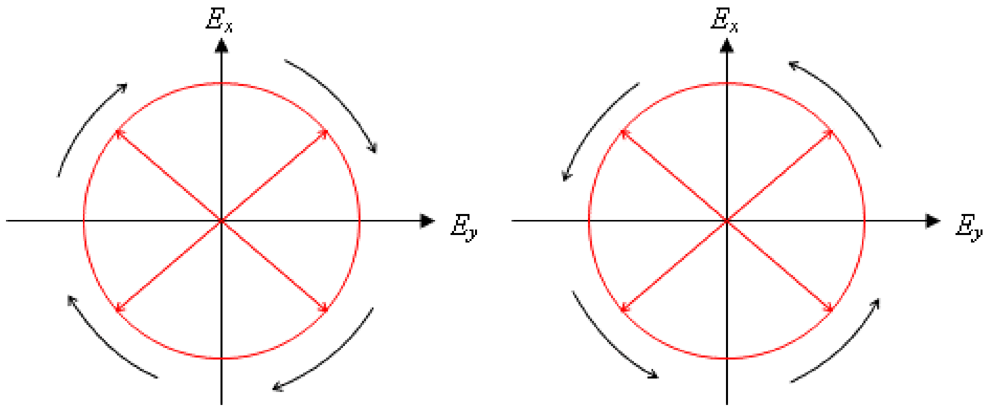
Fazendo agora uma pequena alteração em (2.9):

$$\begin{aligned} E_{x0} &= E_{y0} = E_0 \\ f_x &= f_y - \frac{p}{2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

O mesmo desenvolvimento realizado anteriormente pode ser feito para este caso, para obter as seguintes equações paramétricas em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \\ y(t) &= -wt + f_x \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ou seja, chega-se a outra equação paramétrica de uma circunferência, com a diferença de que nesse momento o vetor campo elétrico gira no sentido *anti-horário*. Por este motivo, este caso é chamado de *polarização circular à esquerda*. A figura 5 ilustra as duas situações.



(a) (b)

Figura 5: Polarização circular (a) à direita e (b) à esquerda

Lembre-se que o observador está posicionado no eixo z e olhando em seu sentido positivo[2]. Pode-se, desta forma, chegar à seguinte conclusão:

Uma onda eletromagnética é circularmente polarizada se o seu vetor campo elétrico possuir componentes ortogonais de mesma amplitude e diferença de fase de +p/2 (polarização circular à direita) ou -p/2 (polarização circular à esquerda).

Diferentemente da polarização linear, é muito difícil encontrar na natureza exemplos de fenômenos que envolvam a polarização circular. Curiosamente, uma família de besouros chamada *Scarabaeidae* possui a surpreendente propriedade de converter luz incidente não-polarizada em luz refletida circularmente polarizada à esquerda; ao mesmo tempo, não se tem conhecimento de insetos que transformem luz despolarizada em circular à direita [7].

[2] Alguns autores estabelecem as orientações esquerda e direita a partir do ponto de vista de um observador que olha no sentido negativo no eixo z e, por isso, os nomes aparecem invertidos. Compare, por exemplo, [1] com [5].

2.2.3 Polarização Elíptica

A polarização elíptica abrange todas as outras configurações das amplitudes E_x e E_y e das fases f_x e f_y. Isso quer dizer que o caso geral de ondas polarizadas corresponde a polarizações elípticas.

Para mostrar que, de fato, o vetor campo elétrico descreve elipses nessas condições, é preciso escrever as equações paramétricas para o caso geral. Seja:

$$f_x = f_y + d \tag{2.13}$$

Assim:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{x0}\cos(wt + f_x) \\ E_y(t) &= E_{y0}\cos(wt + f_x - d) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Somando os quadrados dos campos E_x e E_y, obtém-se de (2.14):

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = \cos^2(wt + f_x) + \cos^2(wt + f_x - d) \tag{2.15}$$

Usando várias identidades trigonométricas para rearrumar a expressão e fazendo substituições usando (2.14), chega-se ao seguinte resultado:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos(d) = \sin^2(d) \tag{2.16}$$

A equação acima é a forma geral da equação de uma elipse, na qual o eixo maior forma um ângulo relativo ao eixo x dado por [8]:

$$a = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2E_{0x}E_{0y}\cos d}{E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2}\right] \tag{2.17}$$

A figura 6 ilustra a situação geral de polarização elíptica. O sentido de rotação da elipse dependerá da diferença de fase d. Se $0 \le d \le p$, o vetor campo elétrico irá rodar no sentido anti-horário, e a elipse é chamada de *elipse esquerda*. Se $-p \le d \le 0$, o vetor campo elétrico irá rodar no sentido horário, e a elipse é denominada *elipse direita*. É importante reafirmar que essas orientações partem do princípio que o observador está posicionado no eixo z e voltado para seu sentido positivo.

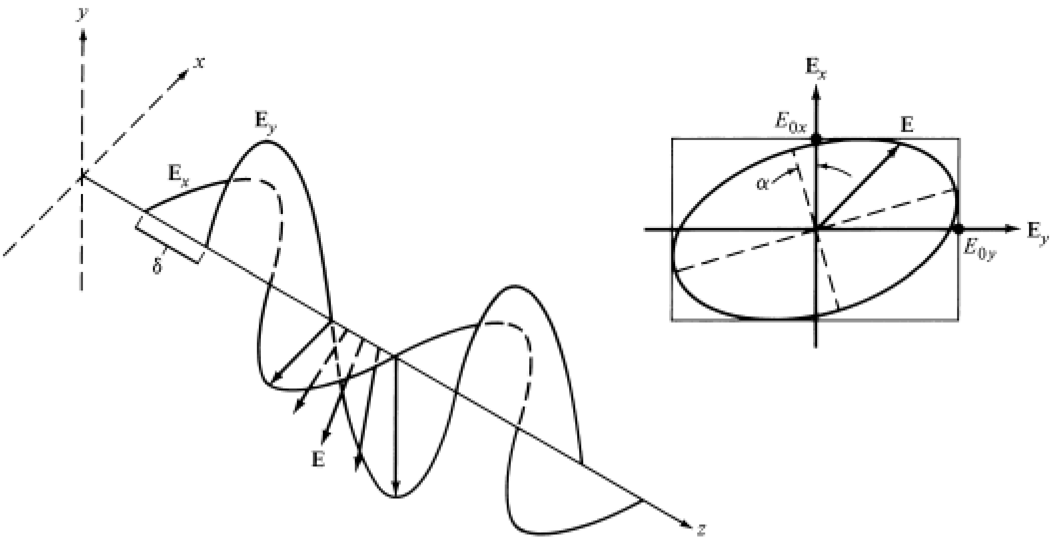


Figura 6: Polarização elíptica. Na situação ilustrada na figura, o vetor campo elétrico roda no sentido anti-horário (elipse esquerda).
Fonte: Keiser, G. "Optical Fiber Communications". McGraw-Hill, 2000.

Quando o ângulo d é da forma $\frac{p}{2}+np$, os eixos da elipse coincidem com os eixos x e y e obtemos a equação:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2=1 \tag{2.18}$$

Essa é provavelmente a equação de elipse mais simples de ser reconhecida. Note que, se $E_{x0}=E_{y0}=E_0$, chega-se à expressão:

$$E_x^{\ 2}+E_y^{\ 2}=E_0^{\ 2} \tag{2.19}$$

Que é a equação de uma circunferência. Isso mostra claramente que a polarização circular é um caso especial da polarização elíptica.

Quando o ângulo d é da forma np , a equação (2.16) se reduz a:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)=0$$

Essa expressão é um quadrado perfeito, e pode ser fatorada como:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}} - \frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 0 \Rightarrow E_x = \frac{E_{x0}}{E_{y0}} E_y \tag{2.20}$$

Esta é a equação de uma reta. Isso mostra que a polarização linear também é um caso especial da polarização elíptica.

2.3 Representação dos Estados de Polarização

Agora que os diferentes tipos de polarização foram estudados, é necessário estabelecer um sistema de coordenadas que consiga representar todas as configurações dos parâmetros E_x, E_y, f_x e f_y sem ambigüidade. Cada uma dessas configurações é chamada de *estado de polarização*[3].

As seções a seguir mostram os resultados dos trabalhos de R. Clark Jones (1948) e de Sir George Stokes no sentido de encontrar uma representação adequada aos estados de polarização.

2.3.1 Representação por Vetores de Jones

A natureza vetorial do campo elétrico sugere uma representação também vetorial dos estados de polarização. Isso é possível se for utilizada uma notação fasorial para os campos E_x e E_y, da seguinte forma:

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{jf_x} \\ E_{0y} e^{jf_y} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

O vetor acima é chamado de *vetor de Jones*. Para se obter o valor da intensidade do campo associado a um vetor de Jones, basta calcular o quadrado do seu módulo:

$$I_0 = E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2 = \mathrm{E}^H \mathrm{E} \tag{2.22}$$

Onde E^H representa o hermitiano (transposto conjugado) de E. Como a intensidade do campo não interessa na determinação do estado de polarização, é

[3] Na realidade, a definição de estado de polarização só leva em conta a elipticidade, inclinação e sentido de rotação da elipse. Isso quer dizer que, se multiplicarmos o campo elétrico por uma constante, o estado de polarização não será alterado.

possível trabalhar com vetores de Jones normalizados, isto é, levando-se em consideração de que a luz possui intensidade unitária.

Ainda assim, as redundâncias não foram eliminadas, pois um vetor de Jones, ao ser multiplicado por qualquer número complexo sobre o círculo unitário, continuará representando um mesmo estado de polarização de um sinal luminoso de intensidade unitária. Para eliminar por completo todas as redundâncias, é preciso escrever o vetor de Jones de uma forma que dependa apenas do defasamento e da razão entre as amplitudes das componentes. Uma das possíveis formas de resolver esse problema é utilizando a seguinte notação:

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \cos c \\ \sin c \, e^{jd} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Onde:

$$d = f_y - f_x \tag{2.24}$$

$$c = \tan^{-1}\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right) \tag{2.25}$$

Nessa representação, $0 \le c \le p/2$ e $0 \le d < 2p$. Note que o vetor de Jones da expressão (2.23) possui módulo unitário, e portanto representa um sinal de luz de intensidade unitária.

A seguir, encontram-se alguns vetores de Jones normalizados para os estados de polarização linear e circular.

A. Estados de Polarização Linear

Conforme vimos na seção 2.2.1, os estados de polarização linear são aqueles em que as componentes em *x* e em *y* estão em fase ou oposição de fase; ou seja,

$$d = 0, p \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.23), obtém-se:

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \cos c \\ \pm \sin c \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Os dois casos especiais, em que a polarização linear está alinhada com o eixo x ou com o eixo y, são obtidas fazendo-se, respectivamente, $c = 0$ e $c = \pi/2$. Esses estados de polarização são chamados de, respectivamente, X e Y:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Os vetores X e Y claramente formam uma base ortonormal para o espaço de estados de polarização. Isso significa que qualquer estado de polarização pode ser facilmente escrito como uma combinação linear desses estados.

B. Estados de Polarização Circular e Elíptica

Conforme a seção 2.2.2, os estados de polarização circular correspondem aos casos em que as componentes em x e y possuem a mesma amplitude de campo e se encontram em quadratura de fase. Ou seja:

$$\begin{gathered} \cos c = \sin c \Rightarrow c = \frac{p}{4} \\ d = \frac{p}{2}, \frac{3p}{2} \end{gathered} \tag{2.29}$$

Assim, para luz de intensidade unitária, os vetores de Jones normalizados para os dois tipos de polarização circular são dados por:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \text{ e } D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Onde o vetor E representa luz circularmente polarizada à esquerda e D representa luz circularmente polarizada à direita. Esses vetores também formam uma base ortonormal para o espaço de estados de polarização, portanto qualquer SOP pode ser facilmente escrito como uma combinação linear dos estados de polarização circular. Os estados X e Y, por exemplo, podem ser escritos como:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (E + D) \text{ e } Y = \frac{j}{\sqrt{2}} (E - D) \tag{2.31}$$

Todos os demais vetores de Jones representam estados de polarização elíptica, estados estes que podem ser escritos como combinações lineares de estados lineares ou circulares.

2.3.2 Parâmetros de Stokes e Representação de Poincaré

Na representação por vetores de Jones, os estados de polarização foram caracterizados pelas amplitudes das componentes E_x e E_y do campo elétrico. Em instrumentação óptica, porém, somente medimos intensidades. Além disso, apenas luz polarizada pode ser representada por vetores de Jones, o que impossibilita sua utilização nos casos freqüentes de luz parcialmente polarizada.

Os parâmetros de Stokes possuem a vantagem de representar intensidades, isto é, quantidades fisicamente mensuráveis, e por isso é possível representar também a luz não-polarizada. Diferentemente dos vetores de Jones, que traziam números complexos, os vetores de Stokes consistem apenas em números reais, sendo que cada um deles possui um significado físico bem definido. Por esta razão, é muito mais simples, a partir de uma medida, calcular os parâmetros de Stokes do sinal de luz do que calcular o vetor de Jones correspondente. Mesmo assim, mostra-se que existe uma correspondência (um isomorfismo) entre as duas representações quando a luz é polarizada.

A notação utilizada para representar a luz em termos dos parâmetros de Stokes é um vetor coluna de 4 elementos:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x + I_y \\ I_x - I_y \\ I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ I_E - I_D \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Nessa notação, I_x e I_y são as intensidades das componentes lineares da onda nos eixos x e y, respectivamente; I_{45^o} e I_{-45^o} são as intensidades das componentes lineares da onda ao longo dos eixos a 45º dos eixos x e y; I_E e I_D são as intensidades das componentes circularmente polarizadas à esquerda e à direita, respectivamente.

Observe que o parâmetro S_0 representa a intensidade total do sinal de luz, isto é, a soma das intensidades das componentes polarizada e não-polarizada:

$$S_0 = I_{polarizada} + I_{não-polarizada} \tag{2.33}$$

Vale destacar que os demais termos (S_1 a S_3) não possuem componente não-polarizada. Isso ocorre pelo fato da luz não-polarizada ser uma superposição de componentes polarizadas de mesma intensidade em eixos ortogonais. Por se tratarem de subtrações dessas intensidades, a componente não-polarizada de cada um dos parâmetros é cancelada.

É possível mostrar [9] que os parâmetros de Stokes se relacionam às componentes do vetor de Jones de (2.21) e à expressão geral da onda plana (2.2) da seguinte forma:

$$\begin{cases} S_1 = |E_x(t)|^2 - |E_y(t)|^2 = E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2 \\ S_2 = \dfrac{1}{2}\left(|E_x(t) + E_y(t)|^2 - |E_x(t) - E_y(t)|^2\right) = 2E_{0x}E_{0y}\cos d \\ S_3 = \dfrac{1}{2}\left(|E_x(t) + jE_y(t)|^2 - |E_x(t) - jE_y(t)|^2\right) = 2E_{0x}E_{0y}\sin d \end{cases} \tag{2.34}$$

A partir de (2.34), é possível mostrar que:

$$S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = \left(E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2\right)^2 = I_{polarizada}{}^2 \tag{2.35}$$

Agora, dividindo todos os termos de (2.35) por $S_0{}^2$, obtemos:

$$\frac{S_1{}^2}{S_0{}^2} + \frac{S_2{}^2}{S_0{}^2} + \frac{S_3{}^2}{S_0{}^2} = \frac{I_{polarizada}{}^2}{S_0{}^2} = \left(\frac{I_{polarizada}}{I_{polarizada} + I_{não-polarizada}}\right)^2$$

$$s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2 = DOP^2 \tag{2.36}$$

Onde cada $s_i = \dfrac{S_i}{S_0}$ é chamado de *parâmetro de Stokes normalizado* e o termo *DOP* é o grau de polarização da luz definido em (2.1). Conforme será visto adiante, é útil trabalhar com números cuja soma dos quadrados é igual a uma constante. Substituindo (2.36), (2.35) e (2.33) em (2.34), obtêm-se definições para os parâmetros de Stokes normalizados:

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_1 = DOP \cdot \dfrac{E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2}{E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2} \\ s_2 = DOP \cdot \dfrac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2}\cos d \\ s_3 = DOP \cdot \dfrac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2}\sin d \end{cases} \tag{2.37}$$

É possível, agora, escrever os parâmetros de Stokes em função do parâmetro c definido em (2.25):

$$\tan c = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \tag{2.38}$$

Utilizando relações trigonométricas e (2.38), obtém-se:

$$\sin 2c = \frac{2\tan c}{1+\tan^2 c} = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2} \tag{2.39}$$

$$\cos 2c = \frac{1-\tan^2 c}{1+\tan^2 c} = \frac{E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2}{E_{0x}{}^2 + E_{0y}{}^2} \tag{2.40}$$

Substituindo (2.39) e (2.40) em (2.37), tem-se:

$$\begin{cases} s_1 = DOP \cdot \cos 2c \\ s_2 = DOP \cdot \sin 2c \cos d \\ s_3 = DOP \cdot \sin 2c \sin d \end{cases} \tag{2.41}$$

Onde $0 \le c \le p/2$ e $0 \le d < 2p$.

A análise das equações (2.41) sugere uma representação esférica para os estados de polarização, em que cada estado de polarização da luz é associado a um ponto da superfície de uma esfera de raio DOP. Como o grau de polarização pode variar entre 0 (luz não-polarizada) e 1 (luz polarizada), pode ser afirmado que *todas as possíveis combinações DOP-SOP podem ser representadas no interior do volume de uma esfera de raio 1 centrada na origem*.

Para a luz não-polarizada, a partir de (2.41), tem-se que:

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0 \tag{2.42}$$

Isto é: a luz não-polarizada é representada por um ponto na origem do sistema de coordenadas esféricas introduzido por (2.41).

Para a luz polarizada, as equações (2.41) podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} s_1 = \cos 2c \\ s_2 = \sin 2c \cos d \\ s_3 = \sin 2c \sin d \end{cases} \tag{2.43}$$

O espaço geométrico dos pontos (s_1, s_2, s_3) para todas as combinações dos ângulos *c* e *d* é uma superfície esférica de raio 1, correspondendo à borda do volume esférico definido em (2.41). Ela é chamada de *Esfera de Poincaré*.

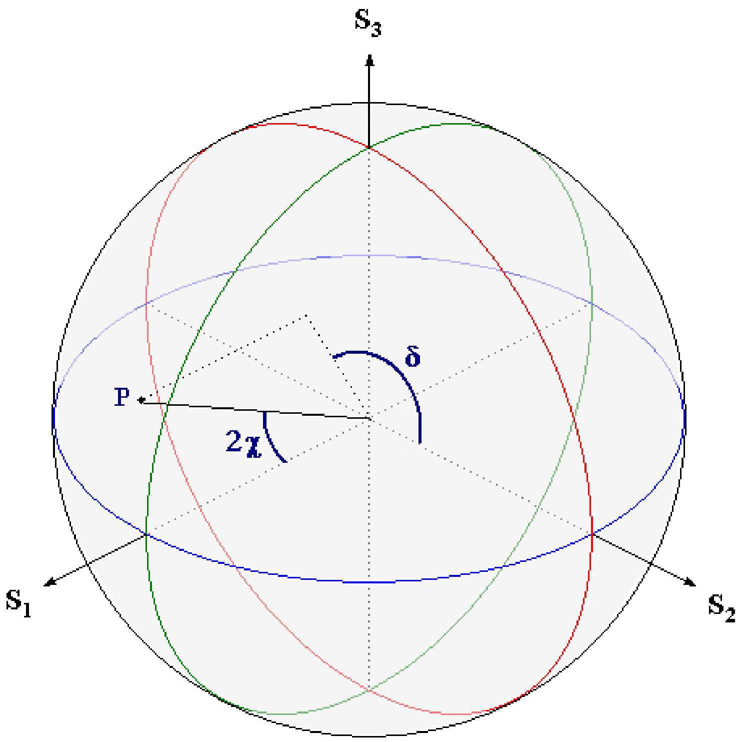


Figura 7: Esfera de Poincaré. A figura mostra um estado de polarização na superfície da esfera, representado pelo ponto **P**, e suas coordenadas esféricas 2*c* e *d*.

A importância da esfera de Poincaré está na correspondência biunívoca que existe entre cada ponto em seu interior e cada estado de polarização. Ou seja: todos os estados de polarização estão representados na esfera de Poincaré, e cada ponto da esfera corresponde a um estado de polarização distinto. Além disso, pontos próximos da esfera de Poincaré correspondem a estados de polarização semelhantes, no sentido de que uma variação contínua do estado de polarização de uma onda luminosa corresponde a uma trajetória contínua na esfera[4].

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na seção 2.3.1 para os vetores de Jones, encontra-se a seguir uma associação entre cada tipo de polarização (linear, circular e elíptica) e cada região da esfera.

4 Ou seja, existe um isomorfismo topológico entre o espaço de estados de polarização e a esfera de raio 1 no R^3 centrada na origem.

A. Estados de Polarização Linear

Das expressões (2.26) e (2.43), conclui-se que os estados de polarização linear correspondem ao conjunto de pontos dado por:

$$\begin{cases} s_1 = \cos 2c \\ s_2 = \pm \sin 2c \\ s_3 = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

Onde o ângulo c varia de 0 a $\pi/2$. Esse conjunto de equações corresponde ao conjunto de todos os pontos da esfera cujo ângulo de elevação é nulo, ou seja, ao *equador* da esfera de Poincaré.

B. Estados de Polarização Circular e Elíptica

A partir de (2.29), obtém-se o conjunto de pontos correspondentes aos estados de polarização circular:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = \pm 1 \end{cases} \tag{2.45}$$

Isto é, aos dois pontos onde a esfera intercepta o eixo S_3 (vertical), chamados de *pólos* da esfera. Ao pólo norte associa-se o estado de polarização circular à esquerda ($d = \pi/2$), e ao pólo sul o estado de polarização circular à direita ($d = 3\pi/2$).

Os estados de polarização elíptica correspondem a todos os demais pontos da esfera. Quanto mais próximo dos pólos está um *SOP*, maior a sua elipticidade, e quanto mais próximo da linha do equador, menor sua elipticidade. Estados de polarização de mesma elipticidade se encontram nos paralelos da esfera.

Comparando (2.30) com (2.45), percebe-se que os estados de polarização circular *E* e *D*, que são ortogonais entre si, encontram-se em pólos opostos da esfera, formando um ângulo de 180º. Na verdade, essa propriedade é válida para todos os demais estados de polarização. Seja o vetor de Jones:

$$SOP_0 = \begin{bmatrix} \cos c_0 \\ \sin c_0 \, e^{jd_0} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

O estado de polarização ortogonal a este, SOP_1, é aquele cujo produto interno com SOP_0 é nulo:

$$SOP_0^{\ H}\, SOP_1 = 0$$
$$\cos c_0 \cos c_1 + \sin c_0 e^{jd0} \sin c_1 e^{-jd1} = 0 \qquad (2.47)$$

Como a primeira parcela de (2.47) é um número real e a segunda é um número complexo, a equação só tem solução em duas situações:

$$d_0 - d_1 = 0 \text{ ou } d_0 - d_1 = p \qquad (2.48)$$

Para o primeiro caso de (2.48), obtém-se:

$$\cos(c_0 - c_1) = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 \pm \frac{p}{2} \qquad (2.49)$$

Para o segundo caso de (2.48), obtém-se:

$$\cos(c_0 + c_1) = 0 \Rightarrow c_0 = -c_1 \pm \frac{p}{2} \qquad (2.50)$$

Como o ângulo c só varia no intervalo [0,π/2], a expressão (2.49) só faz sentido quando c pertence a um dos extremos do intervalo, e (2.50) só produz resultados coerentes quando o sinal é positivo. Visto que (2.50) engloba os resultados de (2.49), para um estado ser ortogonal ao outro é preciso que:

$$\begin{cases} d_0 = d_1 + p \\ c_0 = \dfrac{p}{2} - c_1 \end{cases} \qquad (2.51)$$

Na representação de Poincaré, os estados SOP_0 e SOP_1 seriam representados como:

$$SOP_0 = \begin{bmatrix} \cos 2c_0 \\ \sin 2c_0 \cos d_0 \\ \sin 2c_0 \sin d_0 \end{bmatrix} \text{ e } SOP_1 = \begin{bmatrix} \cos 2c_1 \\ \sin 2c_1 \cos d_1 \\ \sin 2c_1 \sin d_1 \end{bmatrix} \qquad (2.52)$$

Fazendo as substituições (2.51) em SOP_0 da equação (2.52) e fazendo o produto interno usual do $\Re^3$ entre os vetores, obtém-se:

$$SOP_0^{\ T}\, SOP_1 = -1 \qquad (2.53)$$

Esse resultado pode ser expresso da seguinte forma: *estados de polarização ortogonais são representados na esfera de Poincaré como pontos diametralmente opostos, isto é, formando um ângulo de 180º.*

A esfera de Poincaré é um meio muito útil de se observar as transformações de polarização que um sinal de luz sofre ao ser transmitido através de um dispositivo que altere seu estado de polarização. Na seção seguinte, serão apresentadas essas transformações e como elas se comportam quando representadas na esfera.

2.4 Transformações dos Estados de Polarização

Da próxima vez que sair na rua, observe as antenas de televisão que existem em cima de alguns prédios (e que sobreviveram à TV a cabo e à TV via satélite). Não é difícil perceber que as hastes de todas elas se encontram dispostas na horizontal. Por quê?

A resposta para essa pergunta está em uma importante propriedade do canal de radiopropagação: o ar atmosférico é um meio *isotrópico*. Meios isotrópicos são aqueles cujo índice de refração independe da direção de propagação da onda, e que portanto não alteram o estado de polarização do sinal propagante.

No caso da radiodifusão, como as estações de TV, a polarização da onda transmitida não se altera no caminho até as antenas receptoras. Por essa razão, adota-se arbitrariamente uma única orientação de polarização para transmissão e recepção. Por isso, todas as antenas devem ter a mesma orientação da antena transmissora. No caso do Brasil, escolheu-se a polarização horizontal como padrão, logo uma antena na vertical não seria capaz de detectar o sinal transmitido[5].

O meio de propagação mais utilizado em comunicações ópticas, no entanto, se comporta de uma forma bem diferente do ar atmosférico. As fibras ópticas apresentam diferentes índices de refração para diferentes direções de propagação da luz, e por esse motivo constituem um tipo de meio chamado de *anisotrópico* [10]. Isso ocorre pois nenhuma fibra possui simetria cilíndrica perfeita, devido a imperfeições de fabricação e ao stress ao qual elas são submetidas. Como essas imperfeições mudam ao longo da fibra de forma aleatória, a polarização da luz que se propaga se transforma de forma também aleatória. Como vários componentes ópticos exibem características que dependem da polarização, como

[5] Na realidade o sinal é detectado, porém muito atenuado.

ganho ou perda de inserção, surge a necessidade de se estudar essas transformações.

A seguir, será apresentada uma representação para as transformações de polarização realizadas por meios anisotrópicos. Em seguida, alguns dispositivos ópticos serão estudados, com relação a como as transformações por eles efetuadas se refletem na esfera de Poincaré.

2.4.1 O Formalismo de Jones

Foi visto na seção 2.3.1 que é possível representar a luz polarizada na forma de um vetor de Jones. O comportamento dos diversos componentes ópticos, como polarizadores, lâminas retardadoras e fibras ópticas, pode ser representado por um operador linear no espaço de estados de polarização.

Seja, portanto, M a representação matricial do operador linear T que descreve um dispositivo óptico e seja SOP_{in} o vetor de Jones representando o estado de polarização da luz na entrada do dispositivo. O estado de polarização da luz na saída do dispositivo será dado por:

$$SOP_{out} = M \cdot SOP_{in} \tag{2.54}$$

Onde M é uma matriz 2x2 chamada de *Matriz de Jones*. Se a luz estiver atravessando uma série de dispositivos de matrizes de Jones dadas por M_1, M_2, ..., M_n, o estado de polarização emergente será:

$$SOP_{out} = M_n \cdot M_{n-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot SOP_{in} \tag{2.55}$$

Supondo que o dispositivo não altere o grau de polarização (DOP) da luz que o atravessa, ou seja, que ainda seja possível descrever a saída na forma de um vetor de Jones, podemos determinar a matriz de Jones de qualquer dispositivo conhecendo-se as saídas para duas entradas linearmente independentes. Em geral, utiliza-se entradas ortogonais para facilitar os cálculos.

O formato da matriz de Jones de um dispositivo dependerá da escolha de base para o espaço de estados de polarização. Em geral, escolhe-se como base os estados lineares X e Y, dados por (2.28). Assim, qualquer matriz de Jones associada ao operador linear T nessa base será dada por:

$$M = [T(X)\ \ T(Y)] \tag{2.56}$$

Dessa forma, a resposta do dispositivo a um estado de polarização genérico $Z = aX + bY$ será dada por:

$$T(Z) = aT(X) + bT(Y) = M \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

Que é exatamente a expressão (2.54).

2.4.2
Propagação da Luz nos Meios Birrefringentes

A maioria dos materiais ópticos exibe um certo grau de assimetria, de forma que o índice de refração enxergado por dois estados de polarização ortogonais é diferente. Essa propriedade é chamada de *birrefringência*, que é simplesmente a anisotropia observada nas fibras ópticas. Para estruturas usuais, existem dois estados de polarização ortogonais que não sofrem alteração enquanto se propagam. Chamamos esses estados de *auto-estados* ou *estados próprios* da estrutura. Quando os auto-estados são lineares, dizemos que o material apresenta *birrefringência linear*, e quando são circulares dizemos que o material apresenta *birrefringência circular*. Quando os dois tipos de birrefringência coexistem no mesmo meio, os auto-estados são elípticos.

A maioria das aplicações de dispositivos birrefringentes, no entanto, envolve birrefringências lineares, que é o caso dos controladores de polarização e dos defasadores. No presente estudo, o enfoque voltar-se-á somente a essa classe de dispositivos.

Seja, mais uma vez, M a matriz de Jones do dispositivo e sejam:

$$u = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ v = \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Os autovetores normalizados de M correspondentes aos auto-estados do dispositivo, onde x_0 e y_0 são números reais. Note que eles são ortogonais e que correspondem a estados de polarização linear. Deseja-se obter uma expressão para M a partir dos autovetores (2.56) e de seus autovalores associados. Isso pode ser trivialmente obtido através da diagonalização de M:

$$M = P^{-1}DP \tag{2.59}$$

Onde a matriz P é a matriz mudança de base da base canônica (no caso, os vetores *X* e *Y*) para a base dos autovetores, dada por:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

Como a base de autovetores escolhida é ortonormal, significa que a matriz P é uma matriz ortogonal, o que facilita bastante as contas, já que:

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

A matriz *D*, por sua vez, é a matriz *M* em sua forma diagonal, isto é:

$$D = \begin{bmatrix} l_u & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Substituindo (2.60), (2.61) e (2.62) em (2.59), encontra-se a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} l_u x_0^2 + l_v y_0^2 & (l_u - l_v)x_0 y_0 \\ (l_u - l_v)x_0 y_0 & l_u y_0^2 + l_v x_0^2 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Lembrando que os autovetores são normalizados, ou seja,

$$x_0^2 + y_0^2 = 1 \tag{2.64}$$

A matriz encontrada é uma representação genérica de um dispositivo ou meio que apresente birrefringência linear. Observe que, no caso do dispositivo não apresentar ganhos ou perdas, os autovalores de *M* possuirão norma 1 e a matriz representará um operador unitário. Surpreendentemente, muitos dispositivos ópticos são representados por operadores unitários; na seção a seguir serão estudados alguns deles em detalhes.

2.4.3 Matrizes de Jones de Alguns Dispositivos

As matrizes de Jones de diversos dispositivos ópticos podem ser representadas utilizando a expressão (2.63). O exemplo mais simples é o do polarizador linear, que possui autovalores $l_u = 1$ (associado ao eixo de transmissão) e $l_v = 0$ (associado ao eixo ortogonal). Supondo que o eixo de transmissão forma um ângulo q com o eixo horizontal, tem-se que:

$$u = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Assim, usando (2.63), a matriz do polarizador é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 q & \sin q \cos q \\ \sin q \cos q & \sin^2 q \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Obviamente, devido à presença de um autovalor nulo, o polarizador não pode ser representado por um operador unitário. Considere agora uma lâmina birrefringente com anisotropia linear, na qual os auto-estados correspondem às direções que formam um ângulo q com os eixos x e y, conforme a expressão (2.65). Seja f a defasagem introduzida entre as duas componentes, de forma que:

$$l_u = e^{jf/2} \quad \text{e} \quad l_v = e^{-jf/2} \tag{2.67}$$

Observe que os autovalores possuem módulo 1. Substituindo (2.67) e (2.65) em (2.63), e utilizando identidades trigonométricas, chega-se à expressão:

$$M = \begin{bmatrix} \cos f/2 + j\cos 2q \sin f/2 & j\sin 2q \sin f/2 \\ j\sin 2q \sin f/2 & \cos f/2 - j\cos 2q \sin f/2 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Note que essa matriz, diferentemente da matriz de um polarizador, representa um operador unitário. Quando os auto-estados são as polarizações nas direções dos eixos x e y, a expressão (2.63) se reduz a:

$$M = \begin{bmatrix} e^{jf/2} & 0 \\ 0 & e^{-jf/2} \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Que é a forma diagonal de (2.68). Essa transformação pode ser interpretada geometricamente se sua representação na esfera de Poincaré for utilizada. Para isso, considere um estado de polarização genérico na entrada do dispositivo, da forma (2.23). O estado de polarização na saída da lâmina birrefringente de (2.69) será dado por:

$$
\begin{aligned}
SOP_{out} &= M \cdot SOP_{in} \\
&= \begin{bmatrix} e^{jf/2} & 0 \\ 0 & e^{-jf/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos c \\ \sin\, c \cdot e^{jd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c \cdot e^{jf/2} \\ \sin\, c \cdot e^{jd} \cdot e^{-jf/2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

Para manter a mesma forma da expressão (2.23), multiplica-se o vetor de Jones de (2.70) por $e^{-jf/2}$; assim, obtém-se:

$$
SOP_{out} = \begin{bmatrix} \cos c \\ \sin\, c \cdot e^{j(d-f)} \end{bmatrix} \tag{2.71}
$$

Na representação de Poincaré, esse estado de polarização corresponde ao ponto da esfera dado por:

$$
SOP_{out} = \begin{bmatrix} \cos 2c \\ \sin\, 2c\, \cos(d-f) \\ \sin\, 2c\, \sin(d-f) \end{bmatrix} \tag{2.72}
$$

Observando a Figura 7 e a expressão (2.72), percebe-se que a matriz (2.69) representa uma transformação de *rotação de um ângulo f em torno do eixo S_1.* Esse resultado pode ser generalizado para a transformação mais genérica indicada pela expressão (2.68): *a transformação de polarização efetuada por uma lâmina birrefringente pode ser interpretada geometricamente como uma rotação em torno do eixo que representa os auto-estados na esfera de Poincaré.* É importante entender que auto-estados ortogonais são representados em um mesmo eixo na esfera, já que são diametralmente opostos.

A matriz (2.63) é uma transformação genérica que pode representar diversos dispositivos, como controladores de polarização, fibras Hi-Bi, lâminas de meia onda ($f = \pi$), lâminas de quarto de onda ($f = \pi/2$), entre outros. No caso de uma lâmina de quarto de onda, de auto-estados alinhados aos eixos x e y, sua transformação poderia ser representada por:

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \tag{2.73}
$$

Se um estado de polarização linear passa por uma lâmina de quarto de onda, sua polarização torna-se circular, e vice-versa. Portanto, se esse dispositivo for colocado em série com um polarizador, é possível transformar luz não-polarizada em luz circularmente polarizada. Essa idéia é muito utilizada na construção de polarímetros, conforme será mostrado no capítulo seguinte. Antes disso, no entanto, a polarização parcial será brevemente explorada.

2.5
Coerência e Polarização Parcial

Todos os resultados obtidos até o momento têm uma origem em comum: a expressão (2.2). Essa é a expressão geral de uma onda eletromagnética plana e monocromática (isto é, de freqüência bem definida) se propagando na direção do eixo *z*. De fato, muitos fenômenos físicos podem ser explicados utilizando-se essa notação; o que deve ser observado é que a onda plana não passa de uma abstração matemática. Seria muito difícil acreditar que aquela onda de rádio que você captou com sua antena possuía extensão infinita por todo o espaço e tempo, não é verdade? Por essa razão, as ondas eletromagnéticas do mundo real devem apresentar *flutuações* de natureza espacial e temporal. Essas flutuações são geralmente descritas por médias estatísticas das funções de onda, que agora deixam de ser determinísticas e passam a ser *aleatórias*.

Neste trabalho, estamos interessados nos tipos de luz que, apesar de apresentarem flutuações, podem ser tratados como sendo "aproximadamente" coerentes, ou *quase-coerentes*. A função de onda para a luz quase-coerente pode ser descrita como um processo estocástico ergódico estacionário (ao menos no sentido amplo). Nesse caso, temos a seguinte expressão, em analogia com (2.2):

$$E(z,t) = E_x(z,t)\hat{a}_x + E_y(z,t)\hat{a}_y \tag{2.74}$$

Suprimindo o termo espacial *z*, temos cada uma das componentes do campo dada por:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= a_x(t)\cos[q_x(t) - w_0 t] \\ E_y(t) &= a_y(t)\cos[q_y(t) - w_0 t] \end{aligned} \tag{2.75}$$

Onde $a_{x,y}(t)$ e $q_{x,y}(t)$ são funções aleatórias cujas flutuações são muito pequenas em comparação à freqüência de oscilação w_0.

Para melhor representar as ondas eletromagnéticas aleatórias, utiliza-se a notação da função de onda complexa $\hat{E}(t)$, de forma que o campo elétrico no tempo *t* seja dado por:

$$E_x(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{E}_x(t)\right\}$$
$$E_y(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{E}_y(t)\right\} \tag{2.76}$$

Onde

$$\hat{E}_{x,y}(t) = a_{x,y}(t)\exp\left\{q_{x,y}(t) - jw_0 t\right\} \tag{2.77}$$

De forma semelhante, o vetor de Jones instantâneo relacionado ao campo elétrico de (2.74) é dado por:

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t)\exp\{jd(t)\} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

Onde $d(t) = q_y(t) - q_x(t)$.

Note que (2.78) não está normalizado. As seções a seguir explicam, do ponto de vista estatístico, o que é coerência e como ela está relacionada à polarização da luz.

2.5.1 Coerência Temporal

Suponha nesse momento que estamos observando uma luz estacionária em uma posição fixa no espaço (de forma que podemos omitir z). As flutuações da função de onda $\hat{E}(t)$ podem ser caracterizadas por uma escala de tempo representando a "memória" da função aleatória. Flutuações em pontos separados por um intervalo de tempo maior que o tempo de memória são aproximadamente descorrelacionados, de forma que o processo se "esquece" do que já aconteceu antes. Já as flutuações que ocorrem dentro de uma janela de tempo de duração inferior ao tempo de memória são correlacionadas, isto é, o processo se comporta de forma aproximadamente previsível.

Uma medida quantitativa desse comportamento temporal é a *função de autocorrelação*, que descreve o grau de relação linear que existe entre dois instantes de tempo separados por um certo intervalo. Na óptica estatística, a função de autocorrelação é chamada de *função de coerência temporal* e é definida como:

$$G(t) = \left\langle \hat{E}^*(t)\hat{E}(t+t) \right\rangle \tag{2.79}$$

Onde o símbolo $\langle\ \rangle$ representa a média amostral de várias realizações do processo (que, devido à ergodicidade do processo, é igual à média temporal de uma única realização). O valor dessa função em $t = 0$ representa a variância do processo aleatório e pode ser identificado como a *intensidade* da luz, já que

$$\hat{E}^*(t)\hat{E}(t) = \left|\hat{E}(t)\right|^2 \qquad (2.80)$$

Se quisermos uma medida do grau de coerência da luz que seja insensível à intensidade, definimos:

$$g(t) = \frac{G(t)}{G(0)} = \frac{\left\langle \hat{E}^*(t)\hat{E}(t+t)\right\rangle}{\left\langle \hat{E}^*(t)\hat{E}(t)\right\rangle} \qquad (2.81)$$

Que é chamado de *grau complexo de coerência temporal*. Seu valor absoluto sempre está entre 0 e 1, sendo 1 apenas para a luz monocromática definida por (2.2). Em geral, $\left|g(t)\right|$ decresce monotonicamente com o aumento de t, o que quer dizer que, quanto mais distantes são duas flutuações do processo, mais descorrelacionadas elas são. Nesse caso, é conveniente definir um valor de intervalo de tempo até o qual as amostras separadas por esse tempo estão aproximadamente correlacionadas e a partir do qual elas perdem sua correlação. Chamamos esse intervalo de tempo de *tempo de coerência*, e podemos defini-lo de diversas formas como, por exemplo:

$$\left|g(t_C)\right| = 1/e \qquad (2.82)$$

Isso significa que, dentro de um intervalo de tempo inferior ao tempo de coerência, a função de onda pode ser aproximada por uma senóide. Assim, se o tempo de coerência for muito maior que os intervalos de tempo no qual a luz percorre seu caminho em um sistema óptico, podemos assumir que ela se comporta, nesse sistema, como se fosse uma luz coerente. Considerando que a luz se propaga com velocidade *c*, definimos a grandeza:

$$l_C = ct_C \qquad (2.83)$$

Como o *comprimento de coerência* da luz. Se as diferenças nos caminhos ópticos dentro de um sistema forem muito menores que o comprimento de coerência, podemos supor que a luz é coerente dentro desse sistema.

É possível demonstrar que a função de auto-correlação $G(t)$ e a densidade espectral de potência (ou simplesmente *espectro*) do sinal formam um par de transformadas de Fourier; isso significa que o tempo de coerência da luz é inversamente proporcional à largura de linha do sinal, isto é:

$$t_C = \frac{p}{\Delta n} \tag{2.84}$$

Ou seja, quanto mais estreita é a largura de linha Δn do sinal de luz, mais coerente ele é. Por esse motivo a luz proveniente de um Laser pode ser considerada quase-monocromática, isto é, de grande tempo de coerência (já que $\Delta n << n_0$, onde n_0 é a freqüência central do sinal). Isso significa que a coerência de um sinal luminoso pode ser aumentada através de filtros ópticos, às custas da perda de intensidade.

2.5.2
Caracterização da Luz Parcialmente Polarizada

Toda onda plana monocromática é polarizada. Ou seja, as duas componentes de campo elétrico nas direções x e y possuem freqüências e fases bem definidas ao longo do tempo, de forma que a ponta do vetor campo elétrico sempre irá descrever um movimento harmônico e traçar uma elipse em um plano perpendicular à direção de propagação.

No entanto, se as componentes $E_x(t)$ e $E_y(t)$ não mantiverem uma relação de fase constante, a elipse de polarização irá variar com o tempo. O grau de polarização da luz é determinado, portanto, pela correlação que existe entre duas componentes ortogonais quaisquer (que não precisam ser as componentes x e y). Se elas forem totalmente descorrelacionadas, de forma que as relações de fase são totalmente imprevisíveis em qualquer intervalo tempo, a luz é dita *despolarizada*. Se a correlação for parcial, temos o caso da luz *parcialmente polarizada*.

Uma forma conveniente de representar a luz parcialmente polarizada e evidenciar a correlação entre as componentes ortogonais do campo elétrico é através da chamada *matriz de coerência* ou *matriz de densidade*. Se E for o vetor de Jones do sinal, escrevemos a matriz de coerência como:

$$\Phi = \left\langle \mathrm{E}\mathrm{E}^H \right\rangle \tag{2.85}$$

Em termos das componentes do vetor representadas em (2.78), podemos escrever:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \left\langle \left| a_x(t) \right|^2 \right\rangle & \left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{- jd(t)\} \right\rangle \\ \left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{ jd(t)\} \right\rangle & \left\langle \left| a_y(t) \right|^2 \right\rangle \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

Para a luz aleatória, os parâmetros de Stokes serão dados por intensidades médias (em vez de instantâneas), visto que o tempo de integração de qualquer fotodetector é algumas ordens de grandeza superior ao tempo de coerência de um sinal de luz quase-monocromático. Portanto, temos, em analogia com (2.32):

$$\begin{cases} S_0 = \left\langle \left| a_x(t) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| a_y(t) \right|^2 \right\rangle \\ S_1 = \left\langle \left| a_x(t) \right|^2 \right\rangle - \left\langle \left| a_y(t) \right|^2 \right\rangle \\ S_2 = \left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{ jd(t)\} \right\rangle + \left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{ jd(t)\} \right\rangle \\ S_3 = - j\left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{ jd(t)\} \right\rangle + j\left\langle a_x(t) a_y(t) \exp\{ jd(t)\} \right\rangle \end{cases} \tag{2.87}$$

Isso significa que a matriz de coerência contém todas as informações dos parâmetros de Stokes. Na realidade, a quantidade de informação presente em ambas as representações é a mesma, embora a representação (2.86) consiga mostrar com maior clareza que, se a fase $d(t)$ se distribuir uniformemente no intervalo $[0,2\pi]$ e se $a_x(t) = a_y(t)$, os termos fora da diagonal principal serão nulos. Em outras palavras, as componentes do campo elétrico estarão totalmente descorrelacionadas e a luz será despolarizada.

Observando que o parâmetro S_0, que representa a intensidade total do sinal, é obtido pelo traço da matriz de coerência, podemos escrever para um sinal de luz despolarizada de intensidade unitária:

$$\Phi_{não-polarizada} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

Isto é: a componente despolarizada da matriz de coerência aparece apenas na diagonal principal. Essa observação sugere uma decomposição da matriz de coerência em duas outras matrizes, uma referente à luz despolarizada e a outra à luz polarizada. Supondo intensidade unitária, temos:

$$\Phi = (1 - DOP)\Phi_{não-polarizada} + DOP\,\Phi_{polarizada} \tag{2.89}$$

Onde $\Phi_{não-polarizada}$ é dada por (2.88) e $\Phi_{polarizada}$ é dada por:

$$\Phi_{polarizada} = \begin{bmatrix} \cos^2 c & \cos c \sin c \exp(-jd) \\ \cos c \sin c \exp(jd) & \sin^2 c \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Podemos, nesse momento, resumir em uma tabela as três diferentes representações dos estados de polarização para os principais tipos de polarização, considerando um sinal de intensidade unitária.

Polarização	E	S	Φ
Linear horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Linear vertical	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Linear +45º	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Linear -45º	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Circular à esquerda	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix}$
Circular à direita	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 1: Comparação entre as representações de Jones, Stokes e Matriz de Coerência para os principais estados de polarização.

Visto que a luz parcialmente polarizada pode ser tratada como uma superposição de uma componente polarizada com uma despolarizada, os problemas da medida da polarização da luz serão tratados nos capítulos a seguir como se a luz fosse polarizada, exceto seja dito o contrário. Na seção 4.5 o assunto da polarização parcial será revisitado, com o objetivo de nos possibilitar construir um experimento no qual seja possível variar o grau de polarização da luz.