

5 Estudo de Casos

Para a avaliação dos algoritmos *online/batch* evolucionários propostos neste trabalho, foram desenvolvidas aplicações em problemas de filtragem dos estados de um sistema não-linear unidimensional, problemas de otimização de funções e problemas de aprendizado de hiper-parâmetros de um sistema de volatilidade estocástica. Como plataforma de testes foi utilizado um computador com processador Intel Pentium 4 de 1.9 GHz com 500 Mb de memória. E como linguagem de programação foi usado Matlab 6.0.

5.1. Filtragem dos Estados de um Sistema Não-Linear Unidimensional

Considere-se o seguinte MEE [20] expresso por:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t &= \frac{(\boldsymbol{\theta}_t)^2}{20} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\theta}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_{t-1} + \frac{25\boldsymbol{\theta}_{t-1}}{1+(\boldsymbol{\theta}_{t-1})^2} + 8\cos\left(\frac{6}{5}t\right) + \boldsymbol{\eta}_t \end{cases} \quad (84)$$

com $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{R})$ e $\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{Q})$. A seguir mostra-se a aplicação do algoritmo do FPG na estimação dos estados e das observações, o qual será comparado com os resultados do algoritmo do FPB. A figura 4 mostra a simulação do sistema sobre $t=1,2,\dots,T$ períodos de tempo, com $T=100$, $\theta_0=0.1$, $\mathbf{R}=1$, $\mathbf{Q}=10$ e $\pi(\boldsymbol{\theta}_0) \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{P})$ com $\mathbf{P}=5$.

As figuras 5-8 mostram o desempenho do FPB e do FPG na estimativa do sinal dos estados (figura 5 e 6) e na estimativa do sinal de saída do modelo (figura 7 e 8) em 200 simulações. Cada simulação realiza uma estimativa do sinal dos estados e das observações a través da média e da máxima *a posteriori* da densidade dos estados e da densidade da saída do modelo. Posteriormente é calculado o erro entre o sinal verdadeiro dos estados e das observações com os sinais estimados pelo modelo em cada simulação. Finalmente o desempenho é calculado como a média dos erros nas 200 simulações.

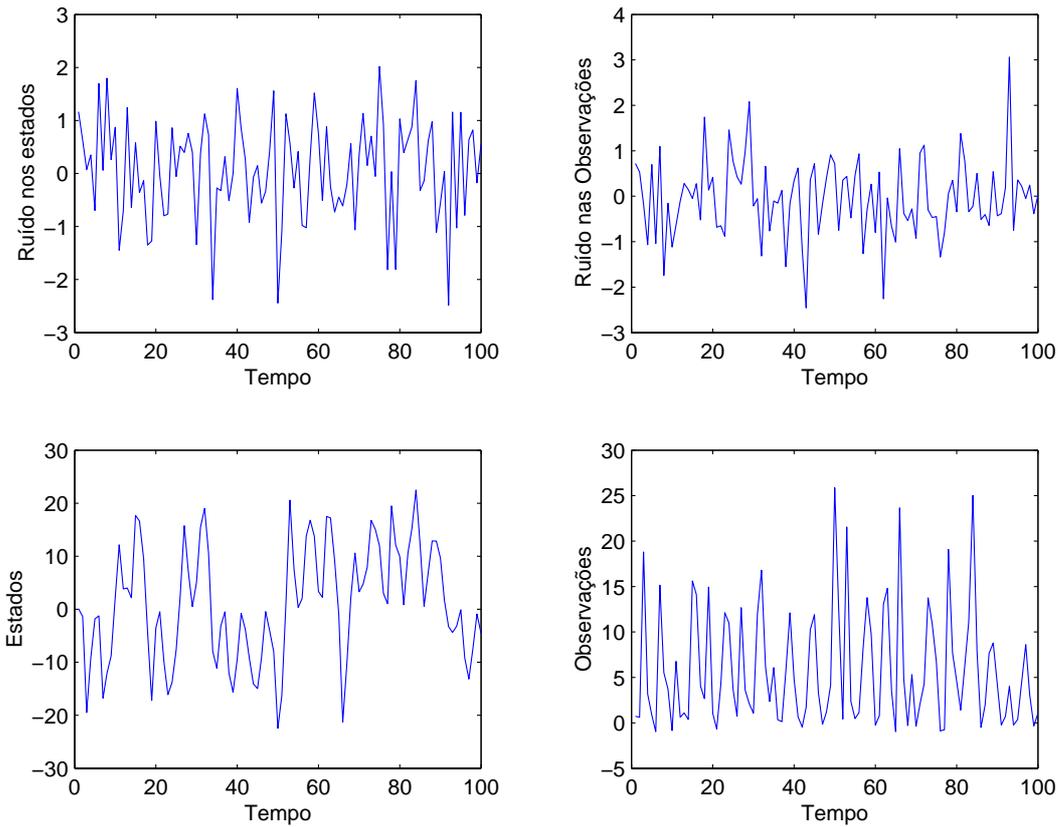


Figura 4 - Simulação do modelo não-linear unidimensional

Com base nas figuras 5-8 pode-se concluir que o FPG possui um melhor desempenho que o FPB. Entretanto, à medida em que se aumenta o número de partículas $N \rightarrow \infty$, o desempenho dos dois algoritmos fica similar. Entretanto, o FPG possui maior grau de adaptabilidade graças à introdução dos operadores genéticos e, desta forma, o FPG é mais robusto a problemas de *outliers* das observações. O custo computacional do experimento foi: FPB = 1.15 horas e o FPG = 3.48 horas.

Como ilustração, as figuras 11 ao 17 mostram a comparação do FPG e FPB considerando uma população de 80 partículas. Para este caso os erros obtidos são mostrados na tabela 1. Além disso o tempo computacional foi de 0.73seg e do FPG de 2.14seg.

Filtro	Erro nos Estados		Erro nas Observações	
	$\sum(\theta - \theta_{\text{Média}})^2$	$\sum(\theta - \theta_{\text{MAP}})^2$	$\sum(y - y_{\text{Média}})^2$	$\sum(y - y_{\text{MAP}})^2$
FPB	1447.24	3603.49	29935.44	16309.43
FPG	1310.84	2953.50	18530.79	5525.75

Tabela 1 - Desempenho do Erro do FPB e FPG

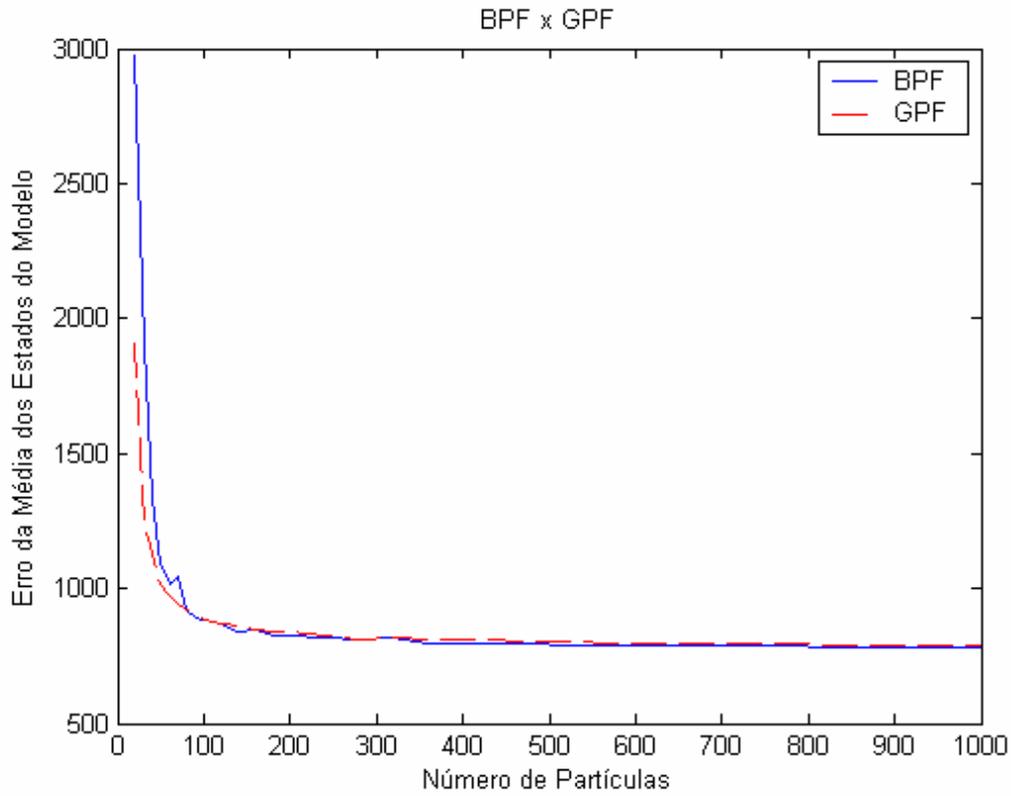


Figura 5 - Desempenho do FPB e do FPG na média dos estados do Modelo

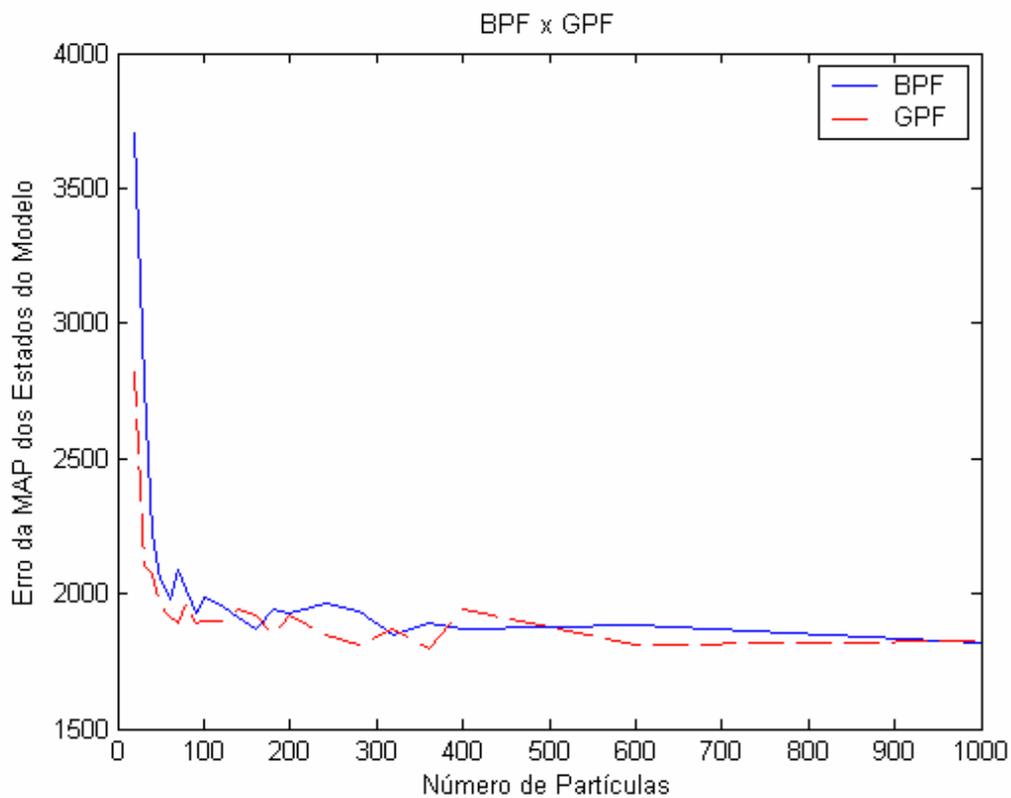


Figura 6 - Desempenho do FPB e do FPG na MAP dos estados do Modelo

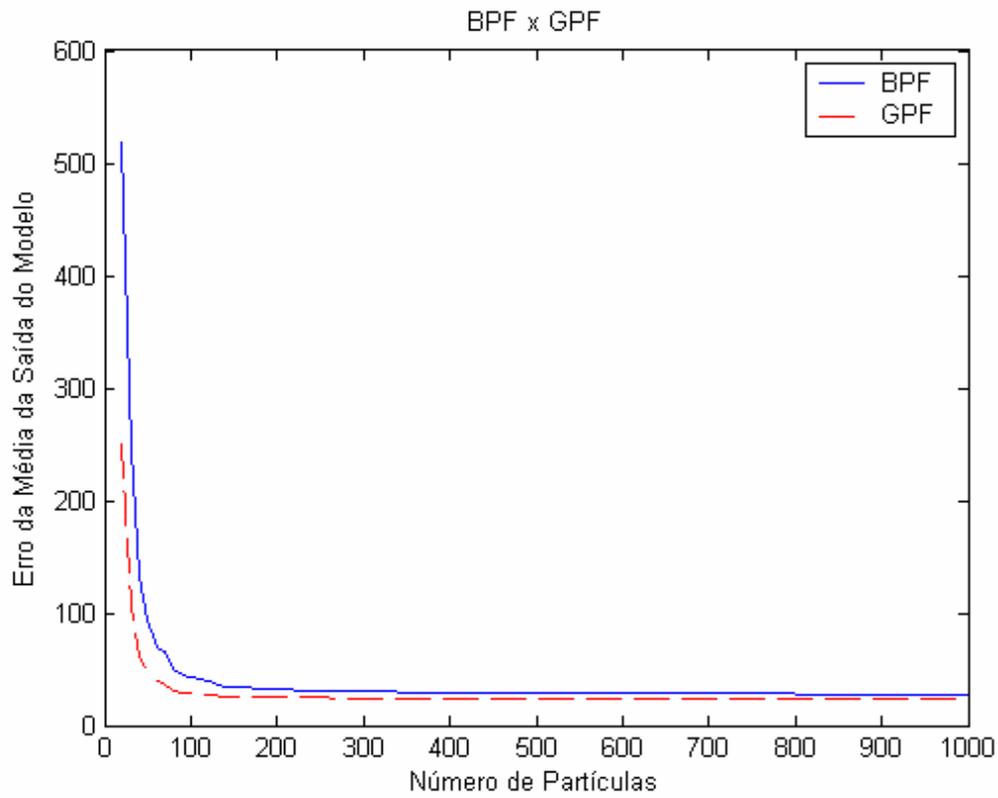


Figura 7 - Desempenho do FPB e do FPG na média da saída do Modelo

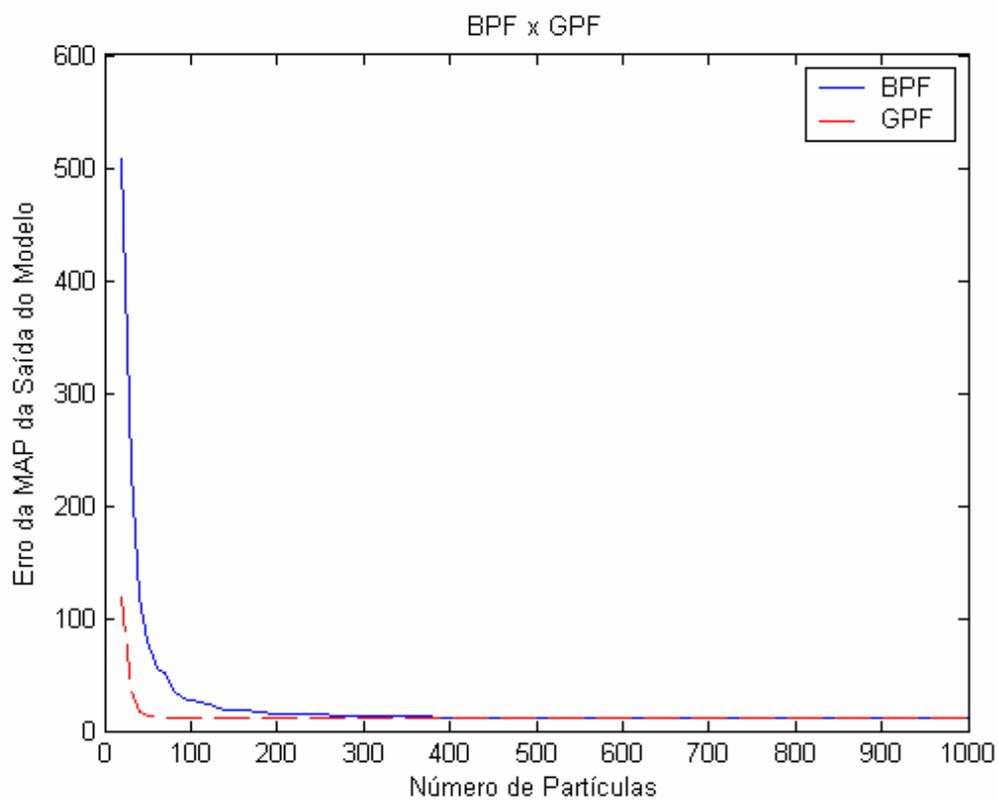


Figura 8 - Desempenho do FPB e do FPG na MAP da saída do Modelo

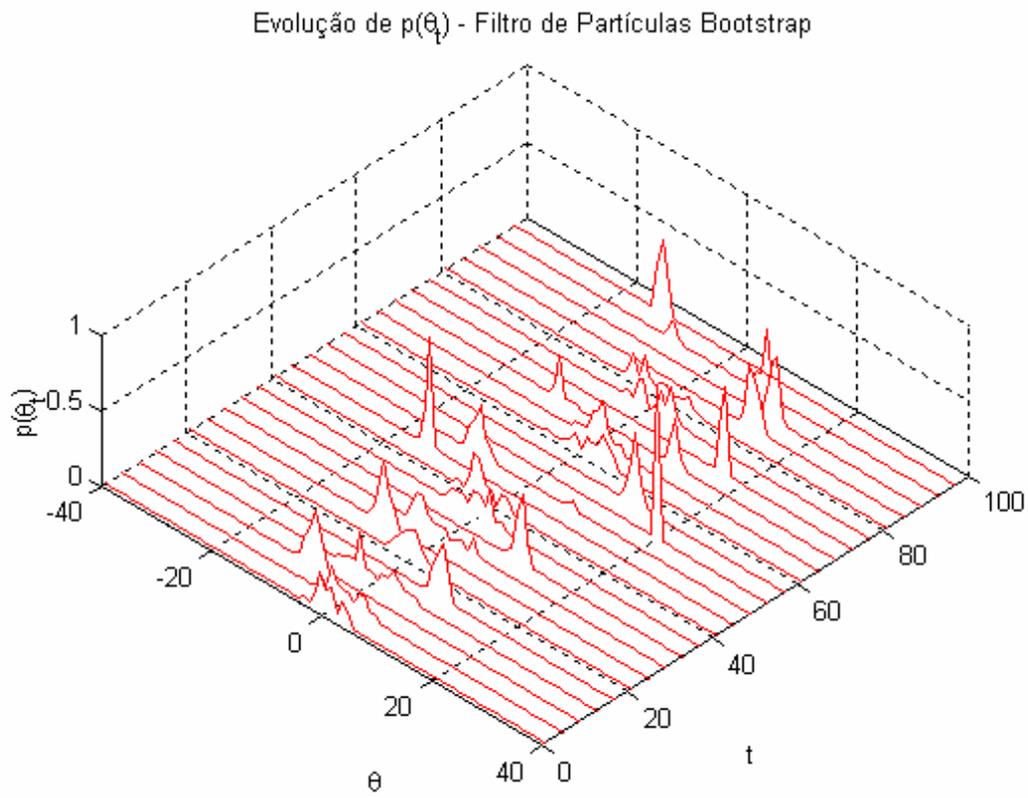


Figura 9 - Desempenho do FPB na evolução da densidade dos estados

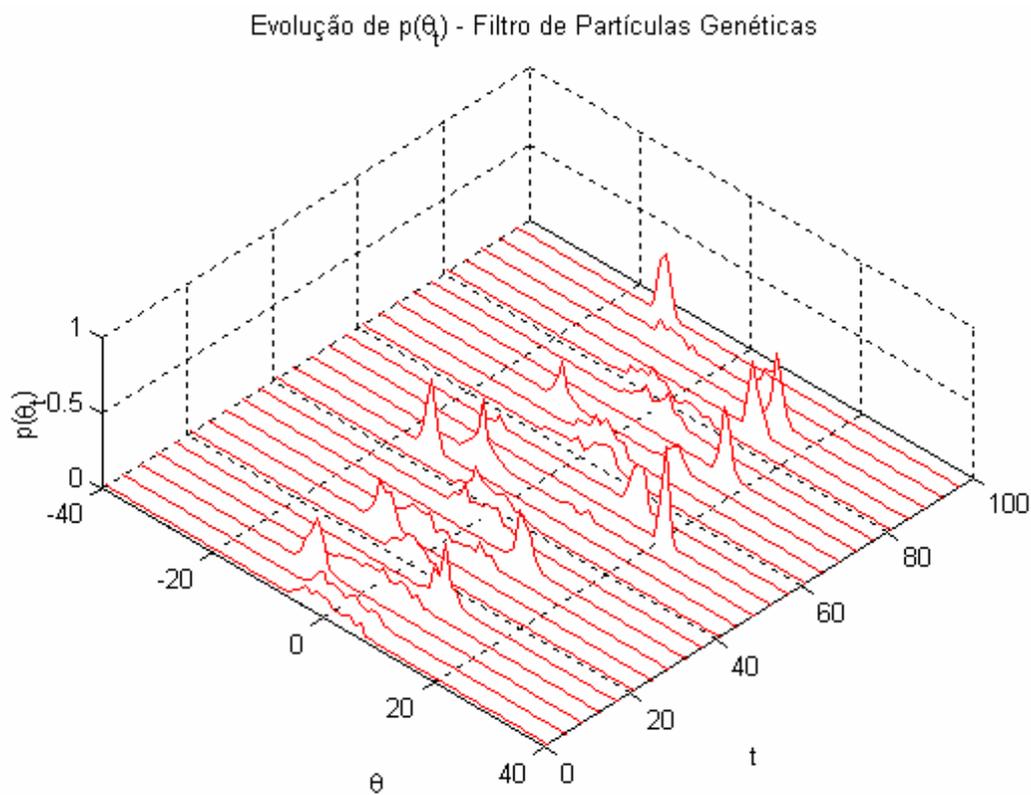


Figura 10 - Desempenho do FPG na evolução da densidade dos estados

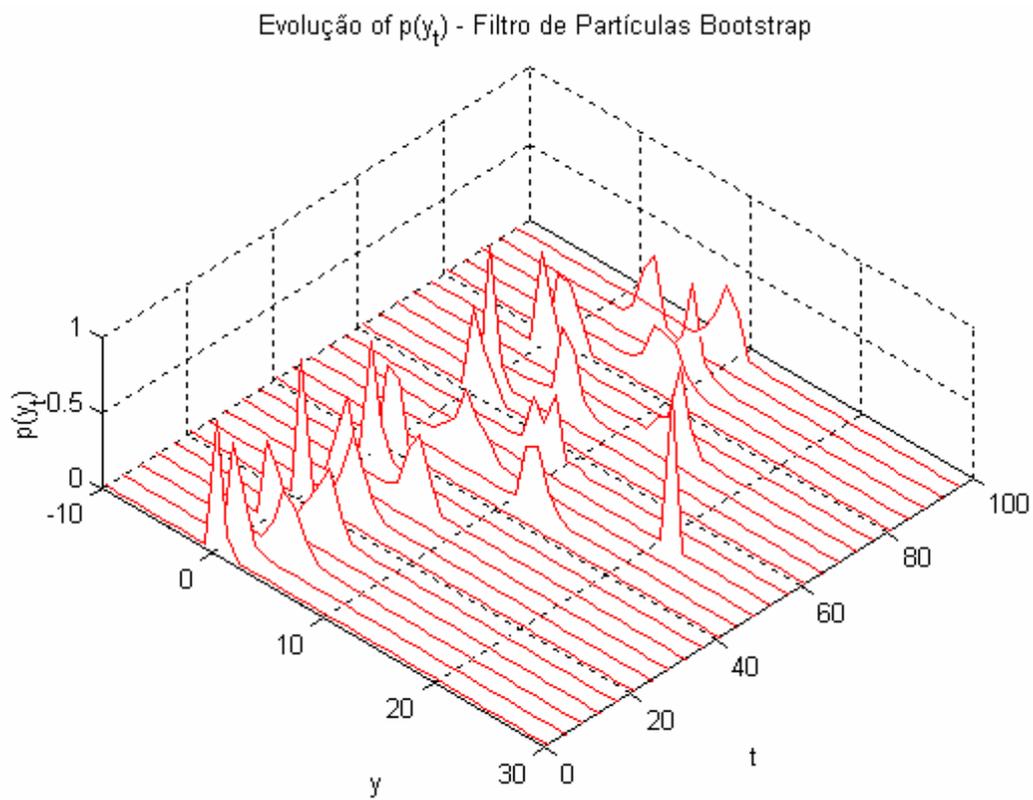


Figura 11 – Desempenho do FPB na evolução da densidade das observações

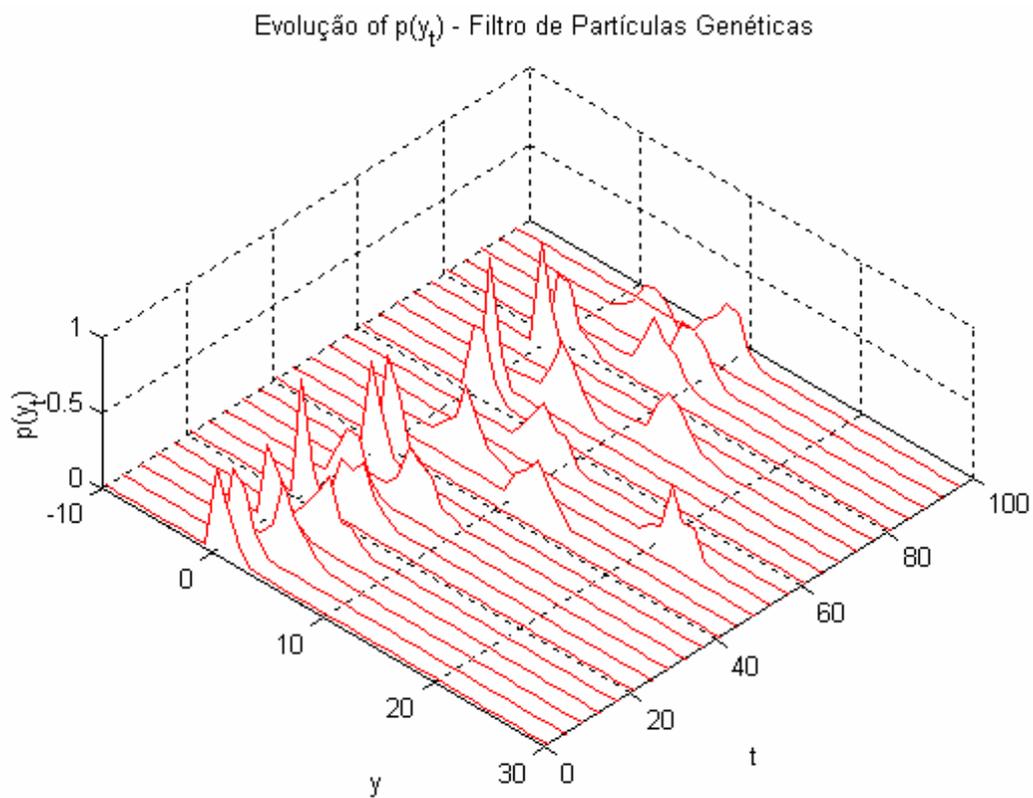


Figura 12 - Desempenho do FPG na evolução da densidade das observações

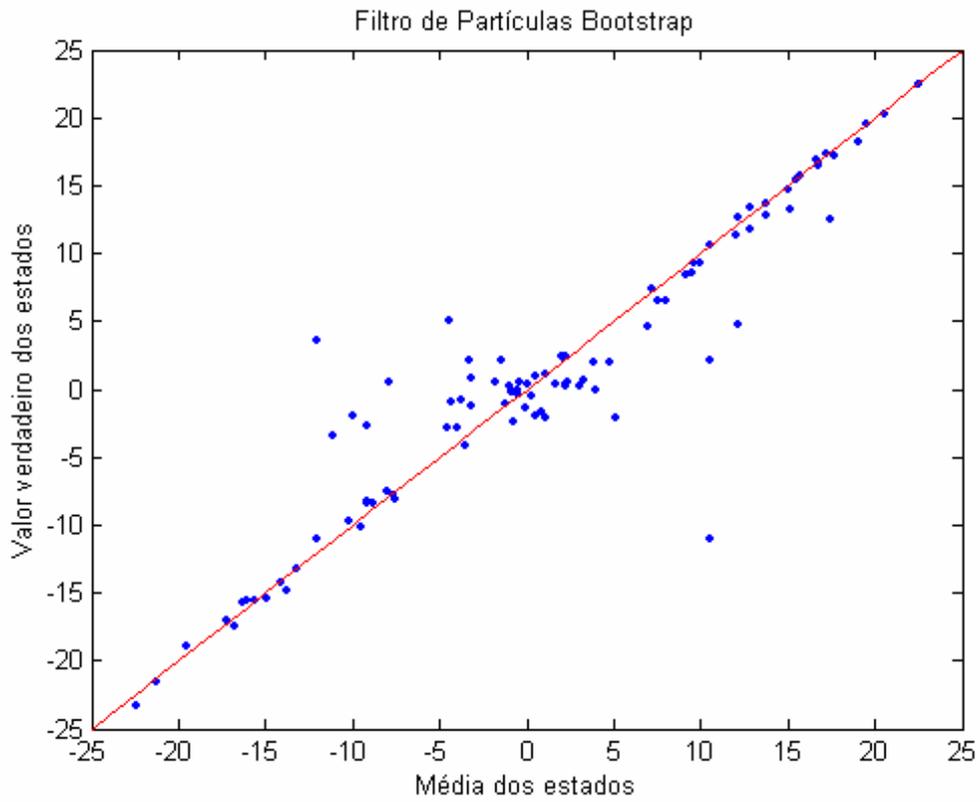


Figura 13 - Desempenho da média dos estados obtido pelo FPB

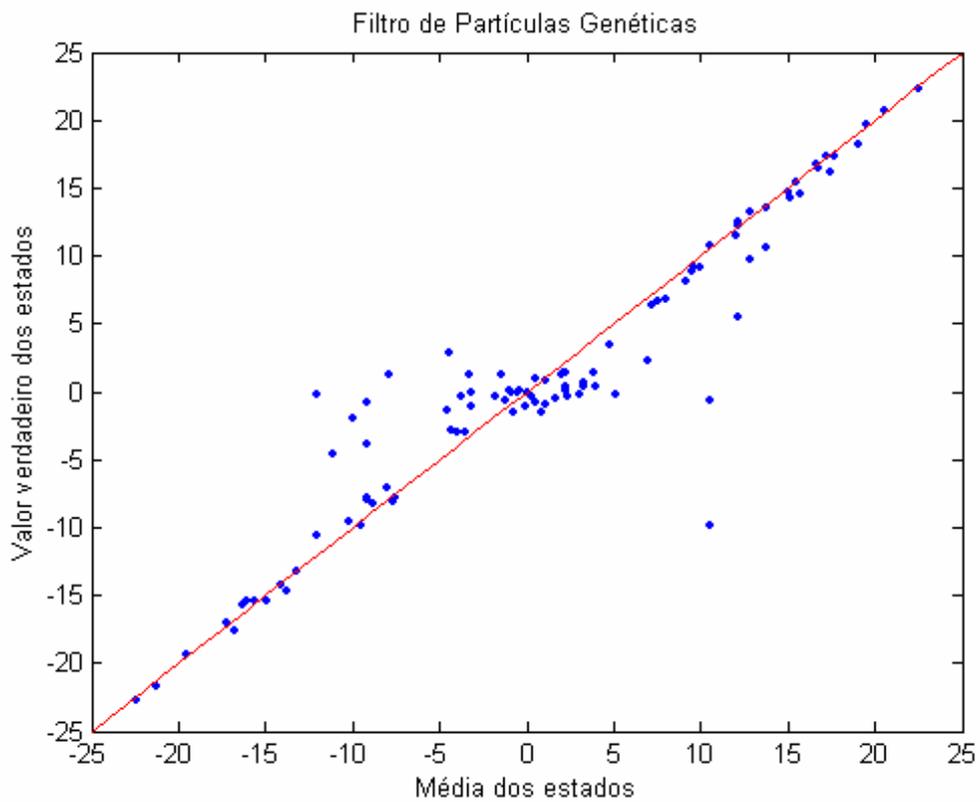


Figura 14 - Desempenho da média dos estados obtido pelo FPG

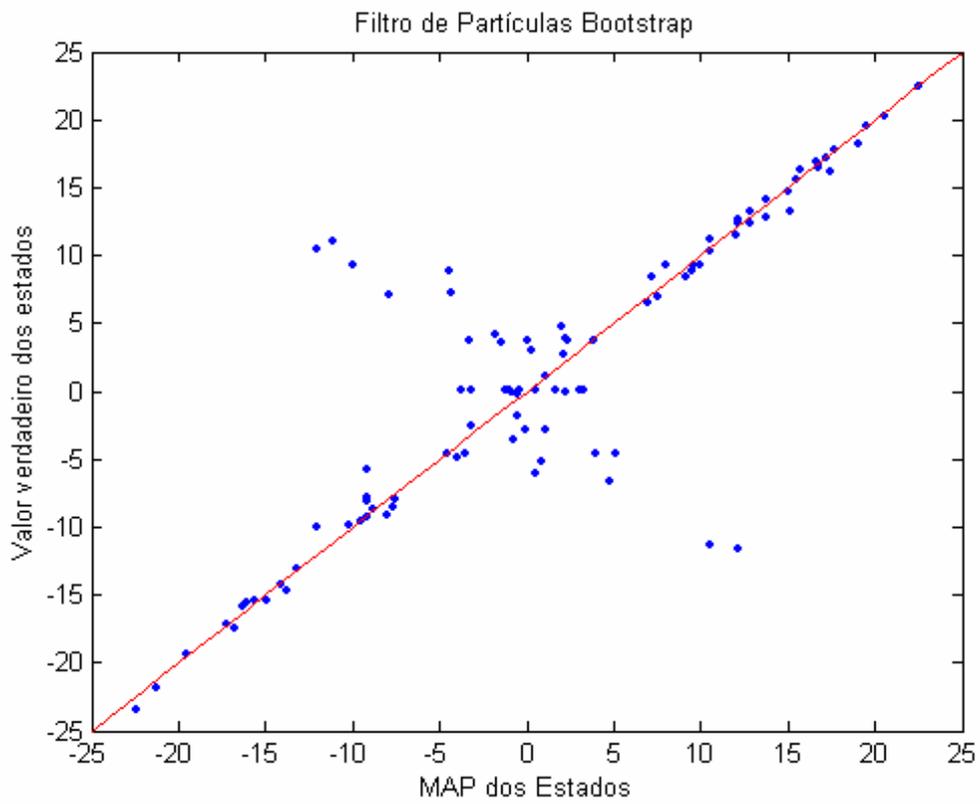


Figura 15 - Desempenho da MAP dos estados obtido pelo FPB

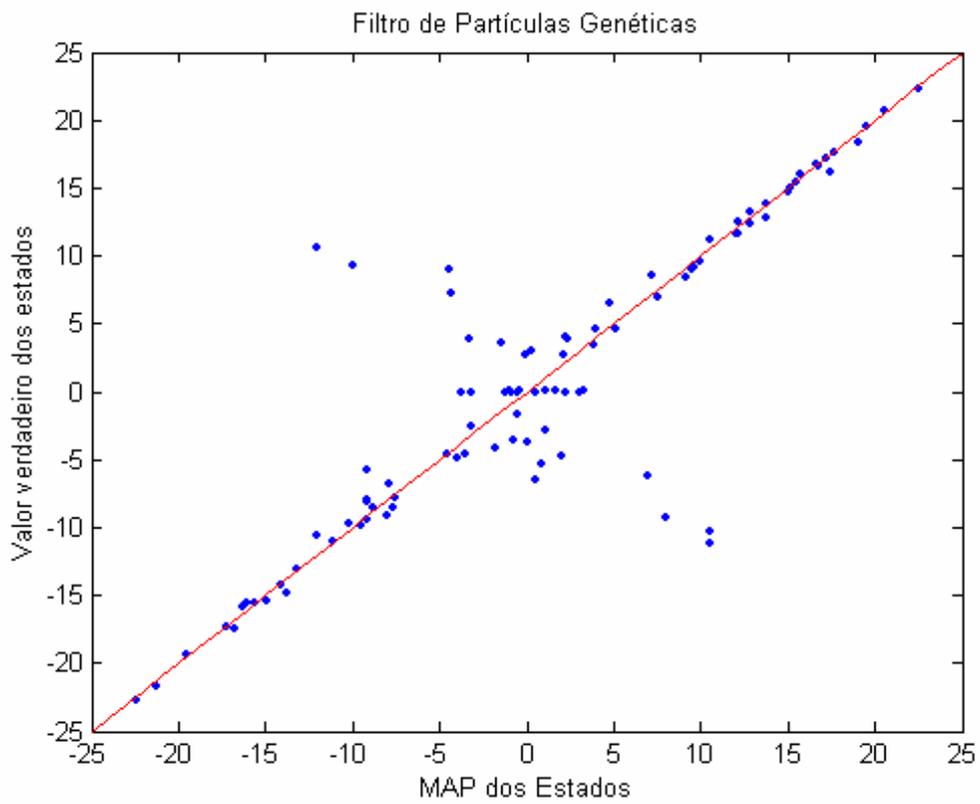


Figura 16 - Desempenho da MAP dos estados obtido pelo FPG

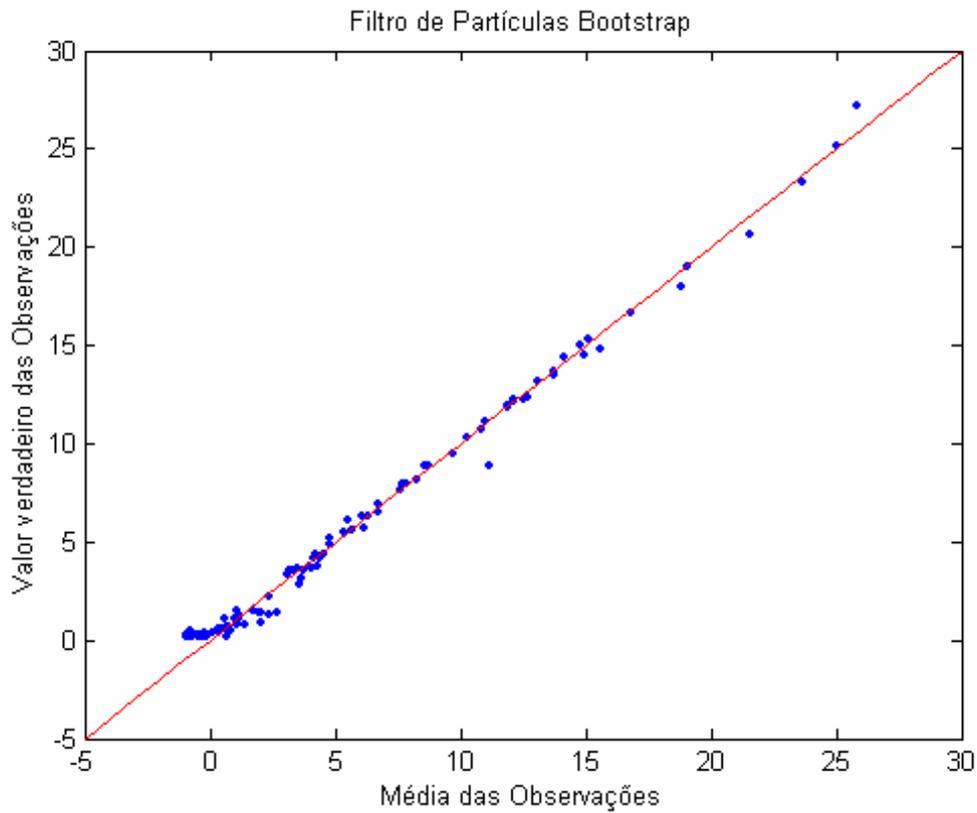


Figura 17 - Desempenho da média das observações obtido pelo FPB

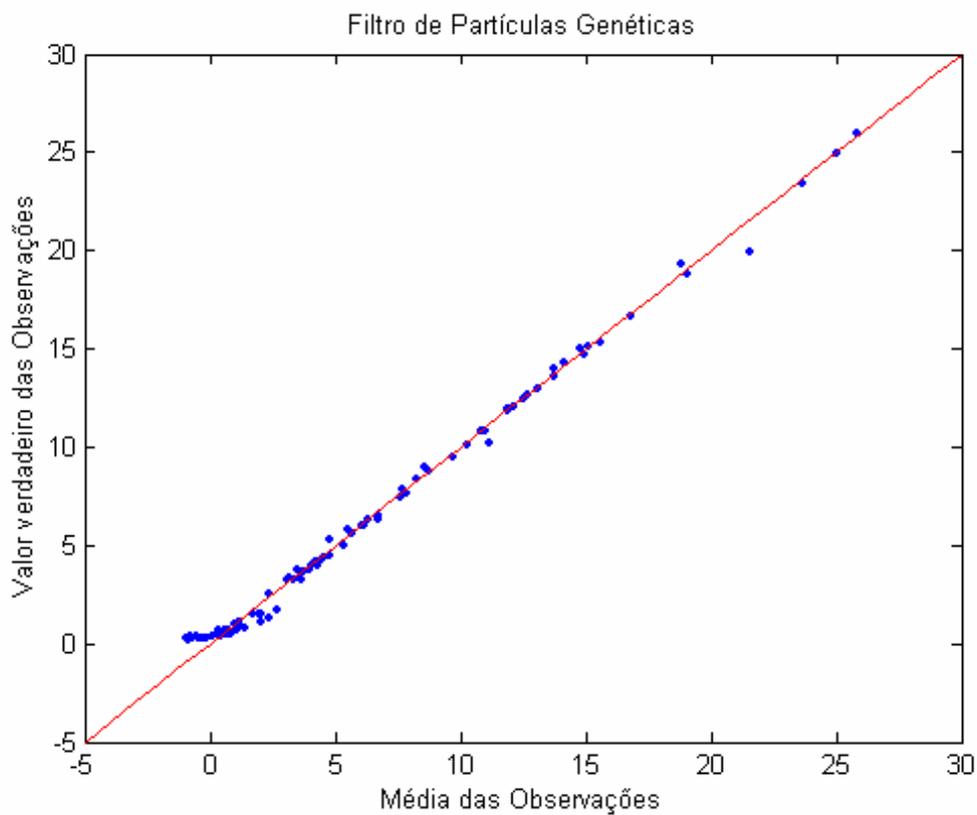


Figura 18 - Desempenho da média das observações obtido pelo FPG

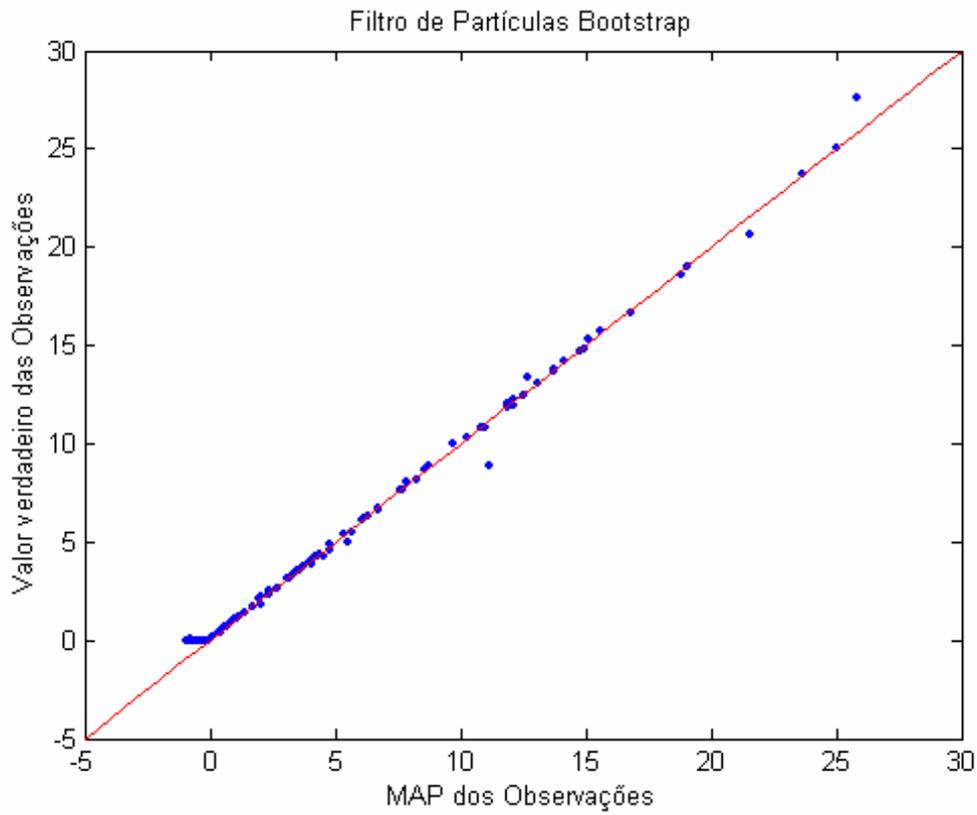


Figura 19 - Desempenho da MAP das observações obtido pelo FPB

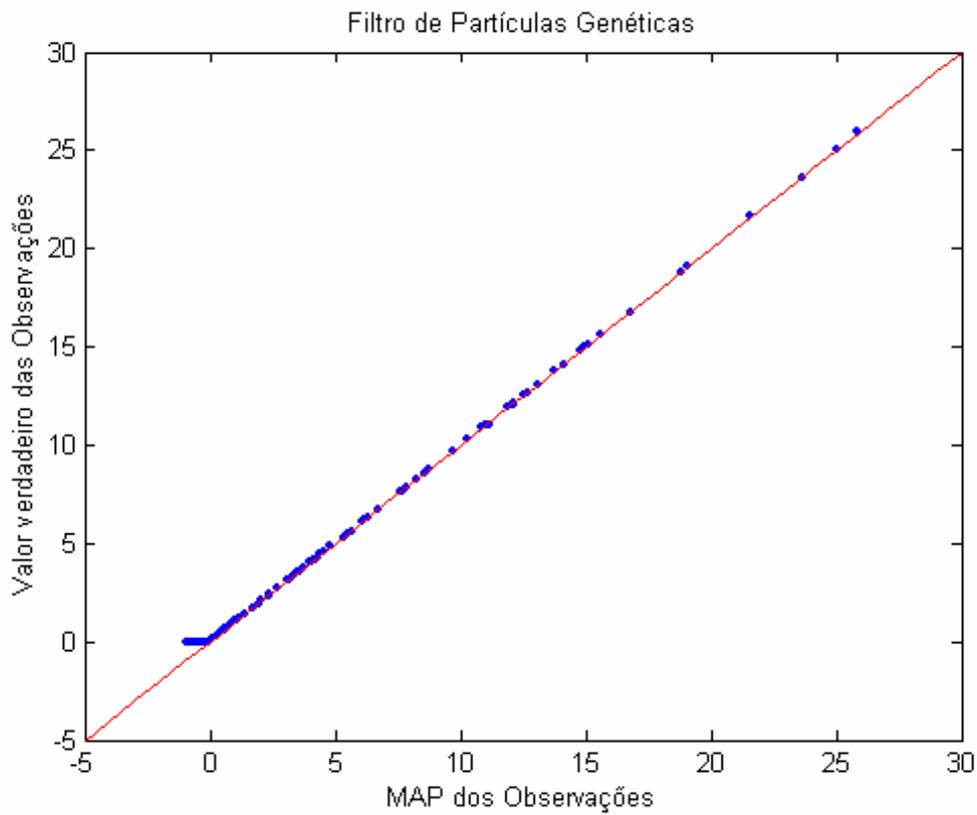


Figura 20 - Desempenho da MAP das observações obtido pelo FPG

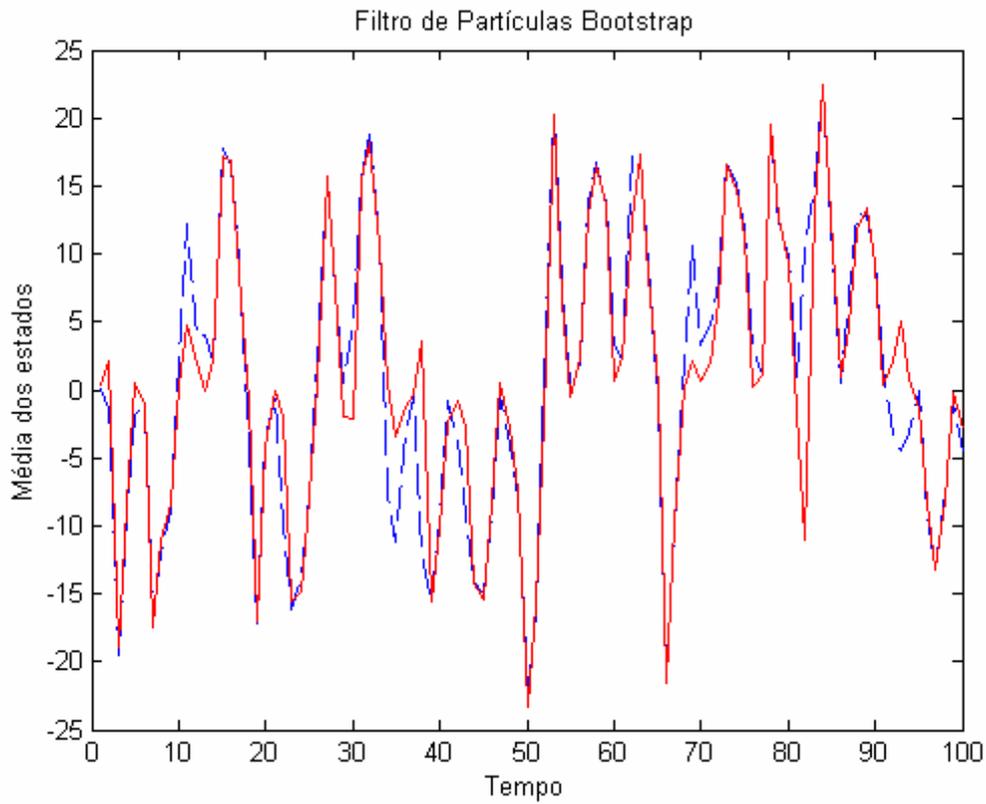


Figura 21 - Desempenho da média dos estados obtido pelo FPB

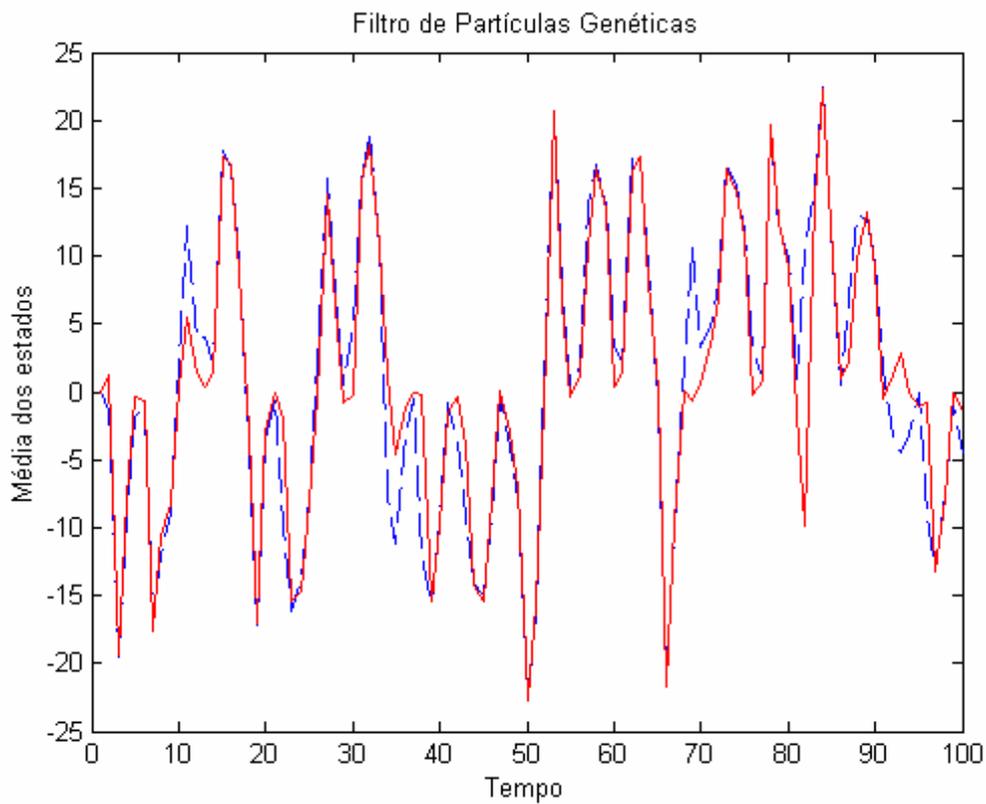


Figura 22 - Desempenho da média dos estados obtido pelo FPG

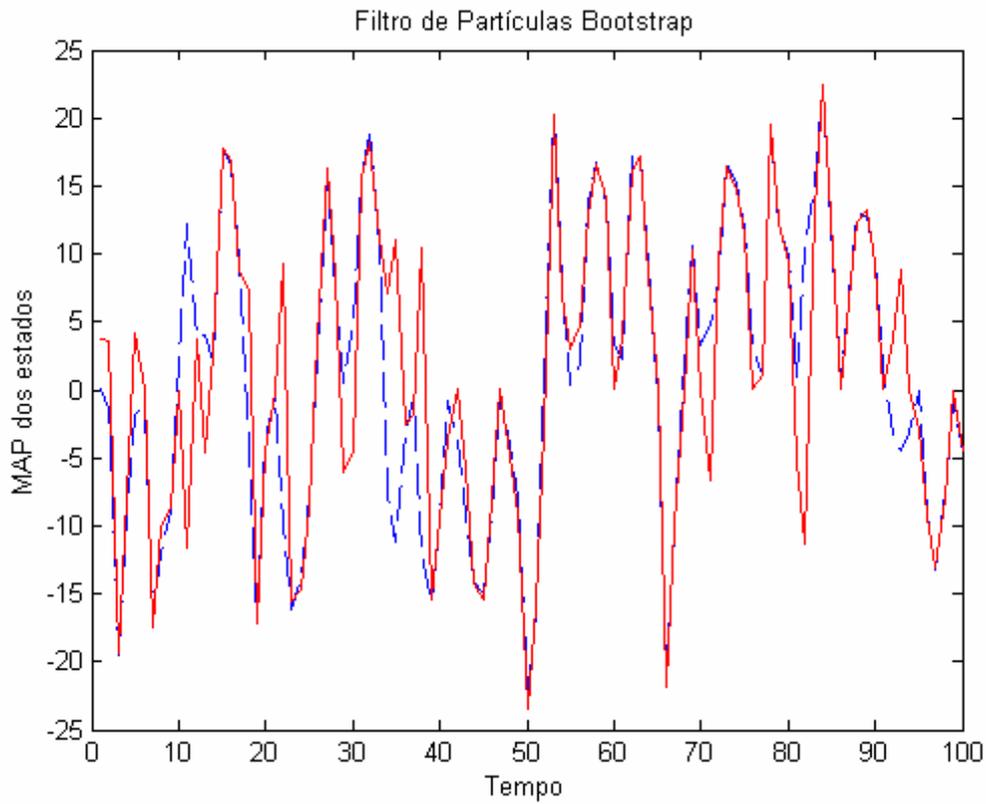


Figura 23 - Desempenho da MAP dos estados obtido pelo FPB

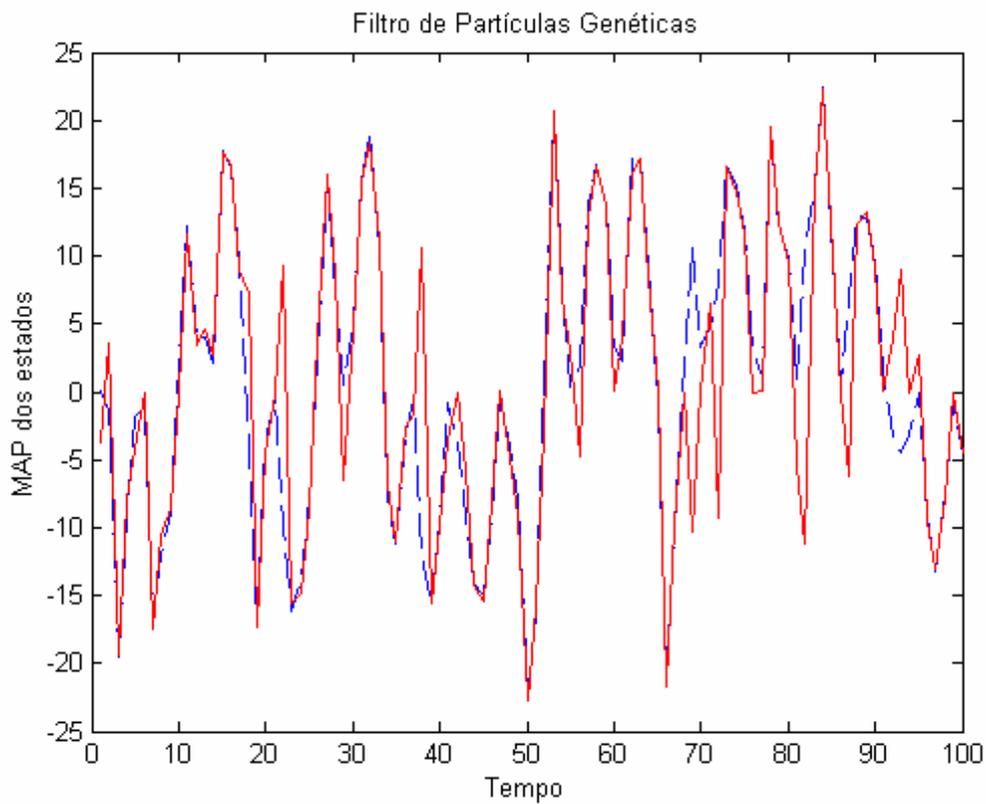


Figura 24 - Desempenho da MAP dos estados obtido pelo FPG

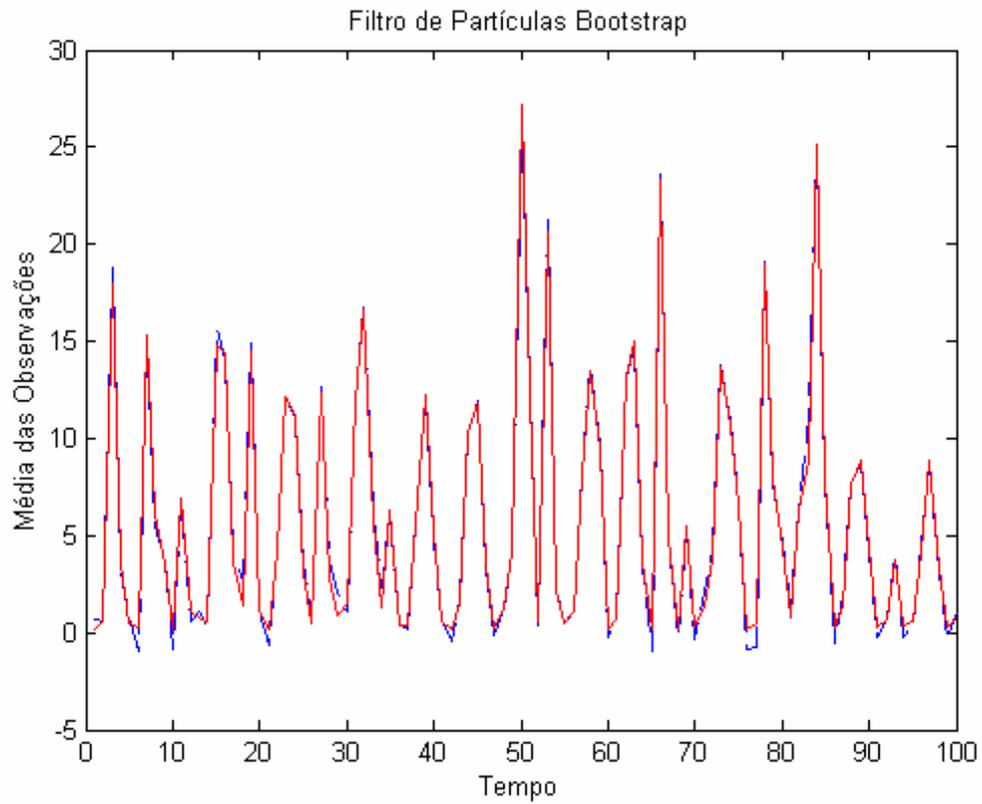


Figura 25 - Desempenho da média das observações obtido pelo FPB

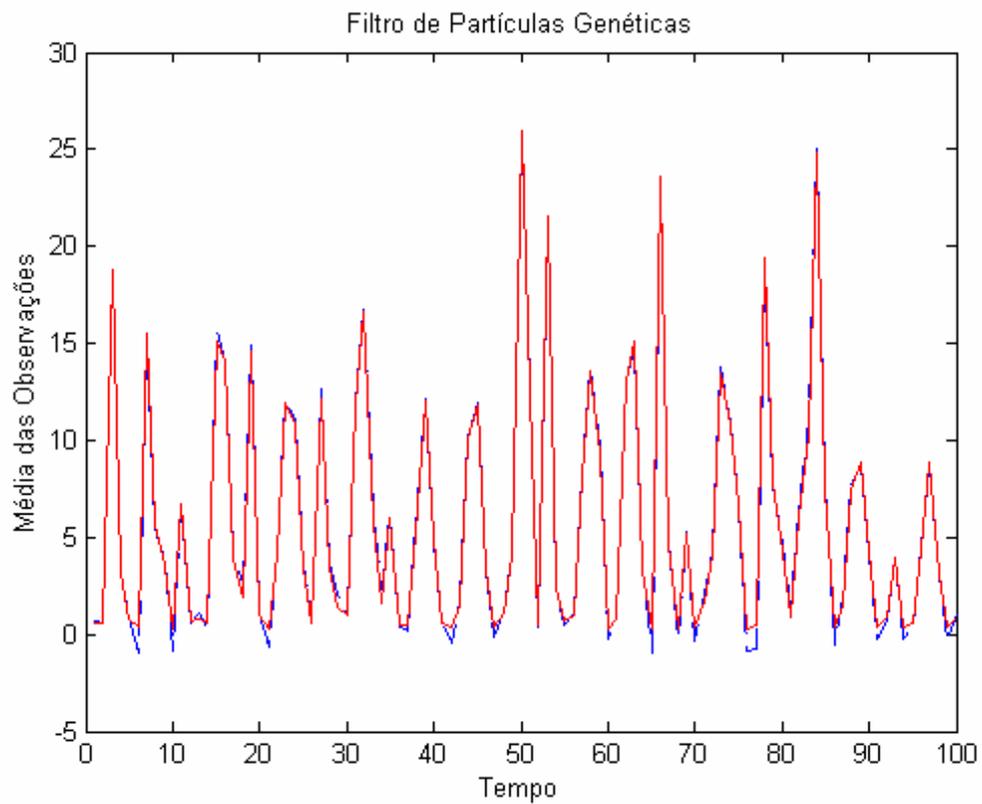


Figura 26 - Desempenho da média das observações obtido pelo FPG

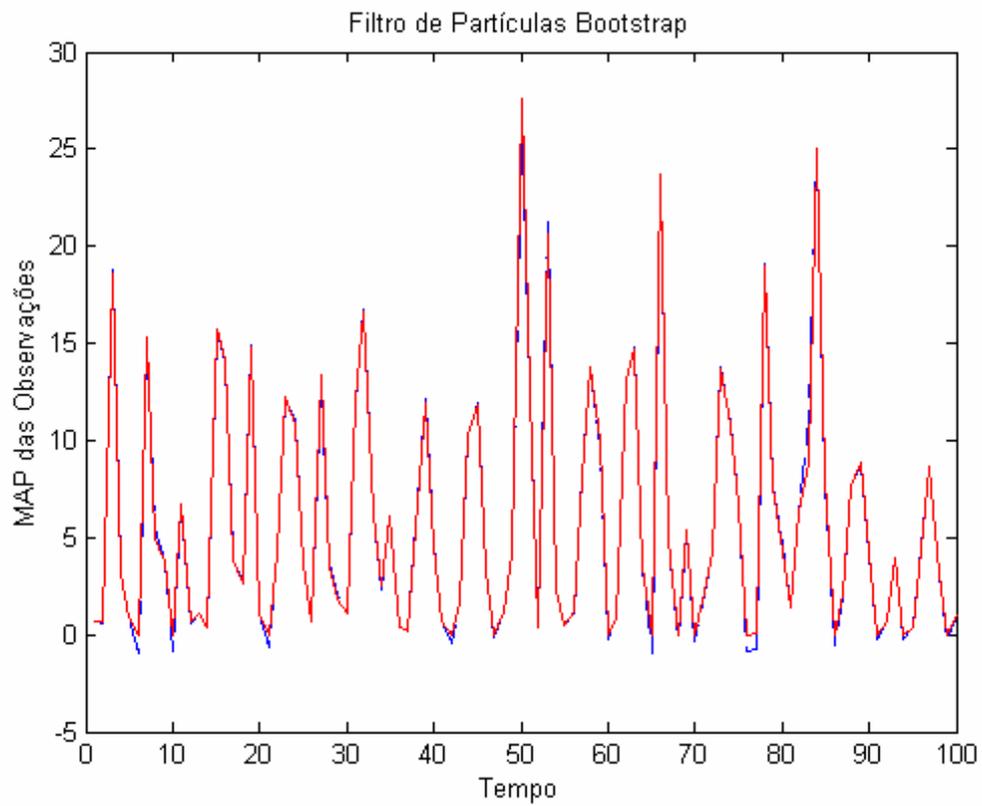


Figura 27 - Desempenho da MAP das observações obtido pelo FPB

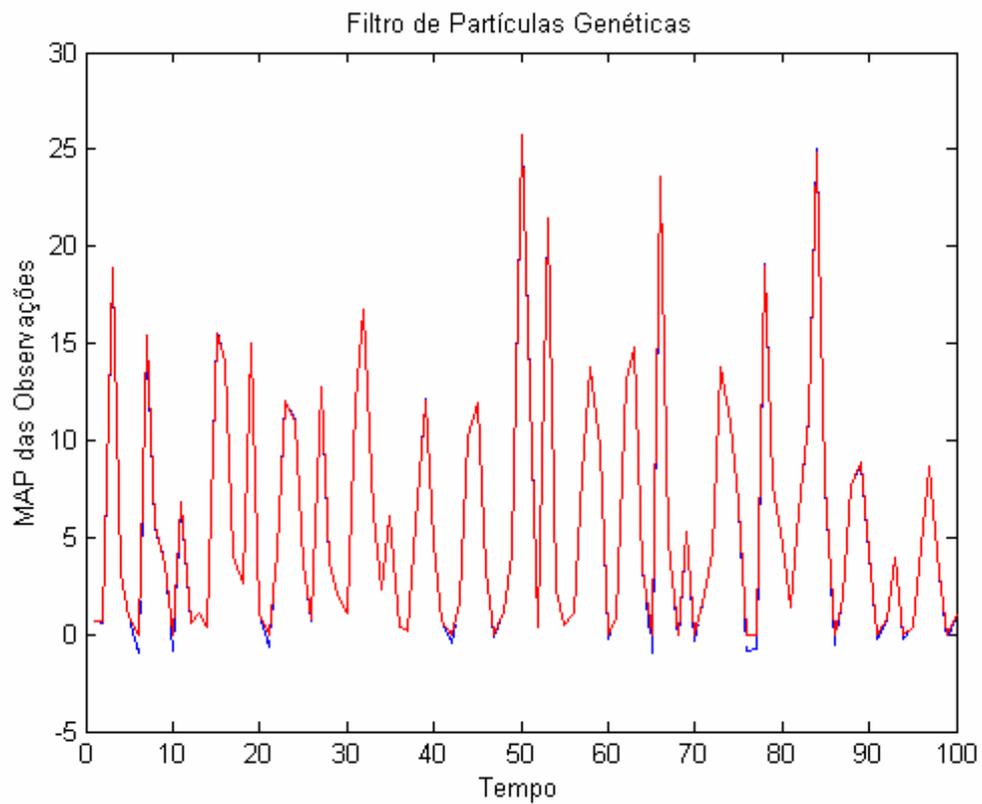


Figura 28 - Desempenho da MAP das observações obtido pelo FPG

5.2. Otimização de Funções

Neste experimento numérico, aplica-se o algoritmo FE na minimização da seguinte função de custo [32]:

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{h}(x, y) = 0.01(x^2 + x^2y^2 + y^2) \quad (85)$$

a qual é mostrada na figura 29. É conhecido que o valor mínimo da função $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ é zero, o qual ocorre em $(x, y) = (0, 0)$. A figura 30 mostra a nova função de custo $p(\boldsymbol{\theta}) \propto \exp[-\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})]$ a ser maximizada.

A fim de se ter uma noção ilustrativa da convergência do algoritmo FE, isto é, mostrar o processo de busca do ponto ótimo $\theta^{MM} = \theta^{\min}$, as figuras 31 e 32 mostram as *densidades de filtragem* para cada uma das marginais de $p(\boldsymbol{\theta})$ obtidas pelo algoritmo FE com *esquema de seleção* $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local. As figuras 33 e 34 mostram, novamente, as *densidades de filtragem* para cada uma das marginais de $p(\boldsymbol{\theta})$ obtidas pelo FE com *esquema de seleção* $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global.

Embora as duas versões do FE mostrem sua convergência ao ponto ótimo $\theta^{MM} = \theta^{\min}$, como mostram as figuras 35 e 36, elas possuem ligeiras diferenças. Por exemplo, a versão FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local necessita de mais iterações para obter a mesma exatidão que o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global. Uma explicação para este fenômeno é que o *esquema de seleção* global combina a informação de todas as partículas para orientar a busca em regiões mais promissoras, o que não ocorre no *esquema de seleção* local e, em conseqüência, o *esquema de seleção* global converge com poucas iterações. Para este experimento o tempo computacional foi de 0.73 seg. para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local, e de 3.12 seg. para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global.

Os parâmetros usados nesta simulação foram $N=200$ partículas, $\pi(\boldsymbol{\theta}_0) = \pi(x_0, y_0) \sim U(-20, 20)^2$, $\rho_c = 1$ e $\rho_m = 1$. O melhor indivíduo após $T=20$ gerações foi $(x, y) = (-0.03985100831241, -0.01330544882694)$ para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local e $(x, y) = (-0.00633761332415, 0.01147637479062)$ para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global.

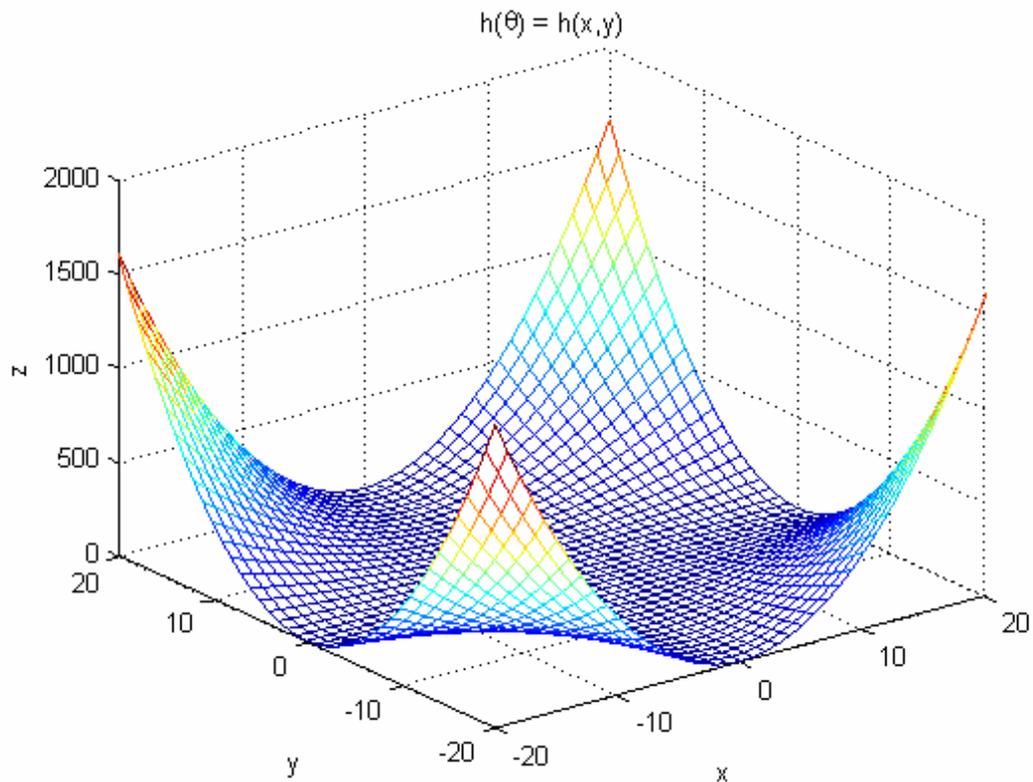


Figura 29 – Função de custo a ser maximizada

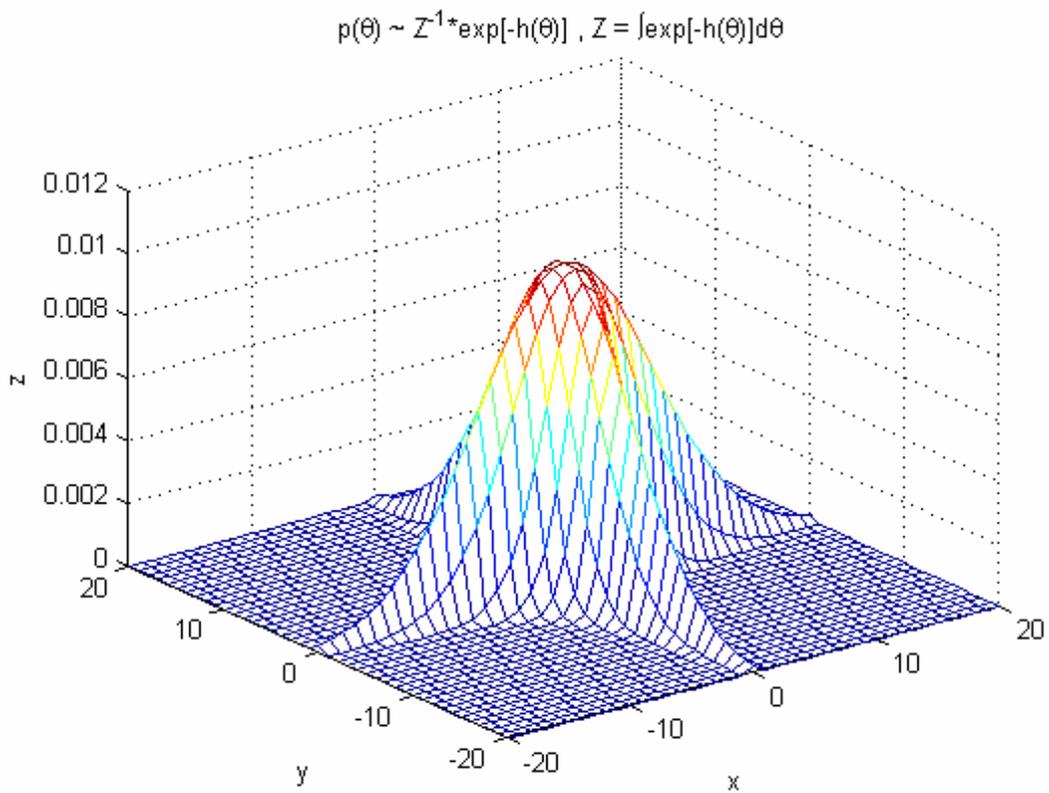


Figura 30 – Função de custo a ser minimizada

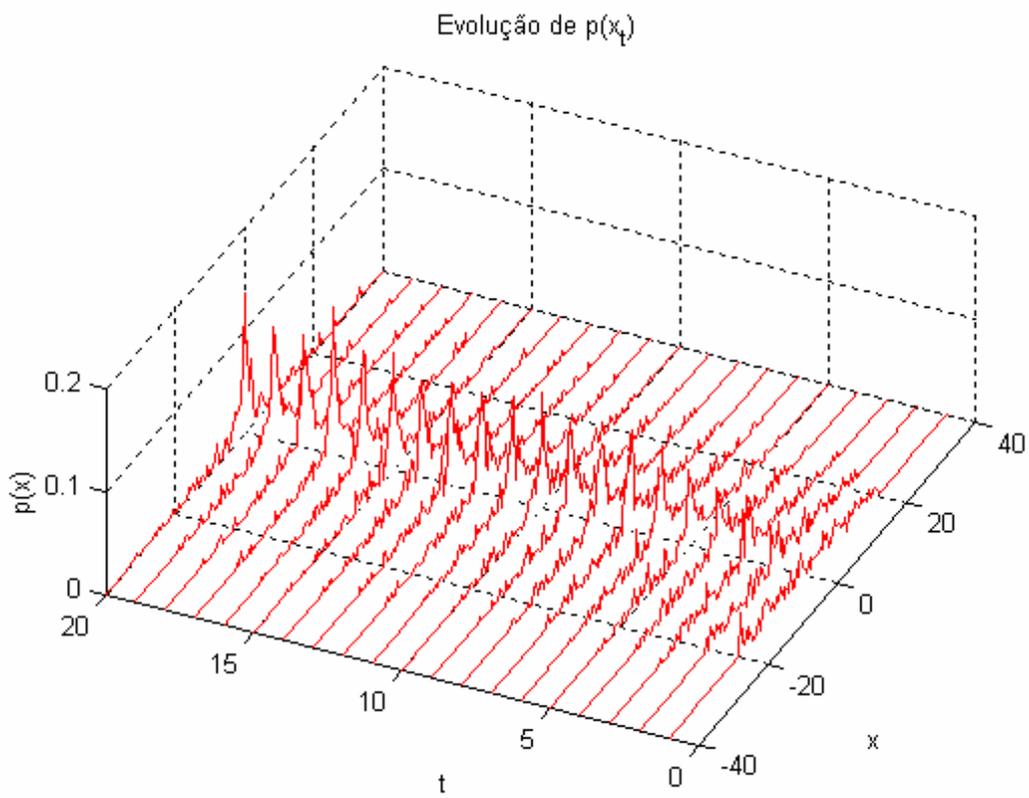


Figura 31 – Convergência em x do FE com esquema de seleção local

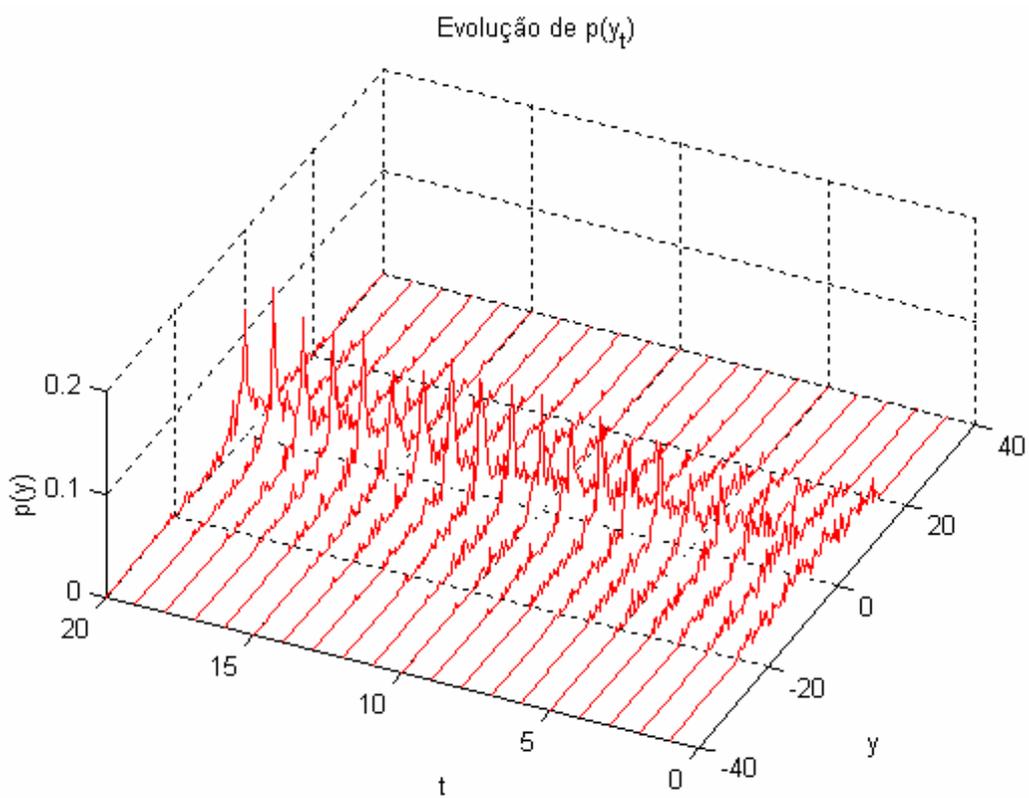


Figura 32 – Convergência em y do FE com esquema de seleção local

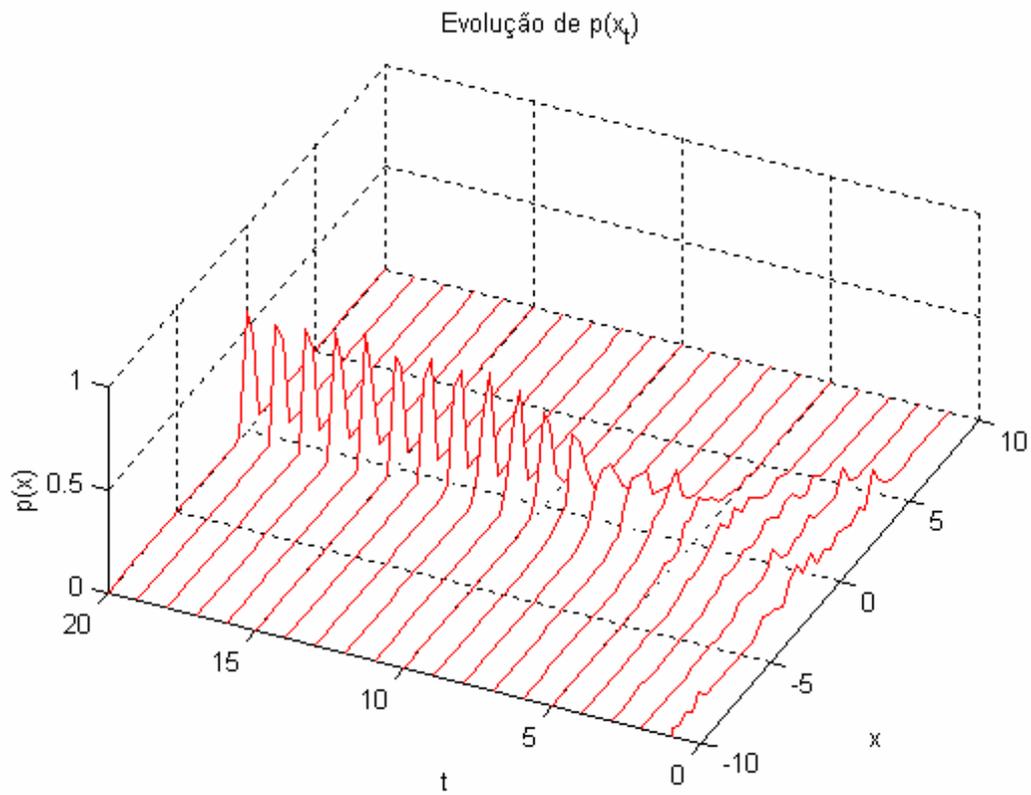


Figura 33 – Convergência em x do FE com esquema de seleção global

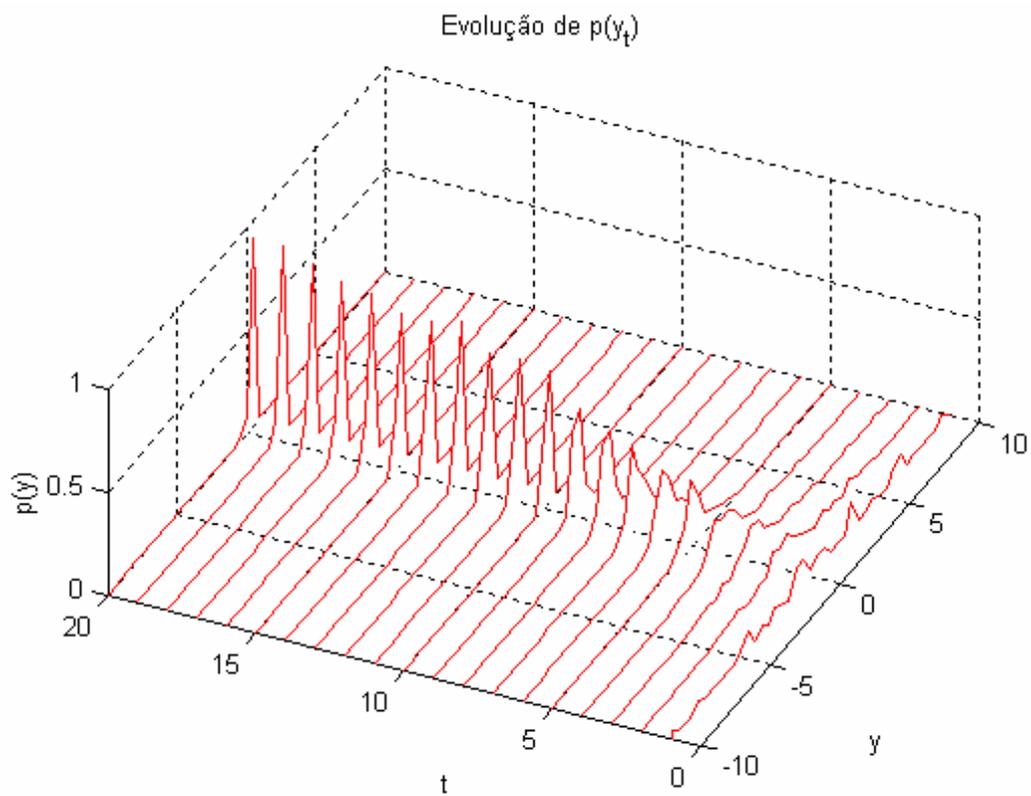


Figura 34 – Convergência em y do FE com esquema de seleção global

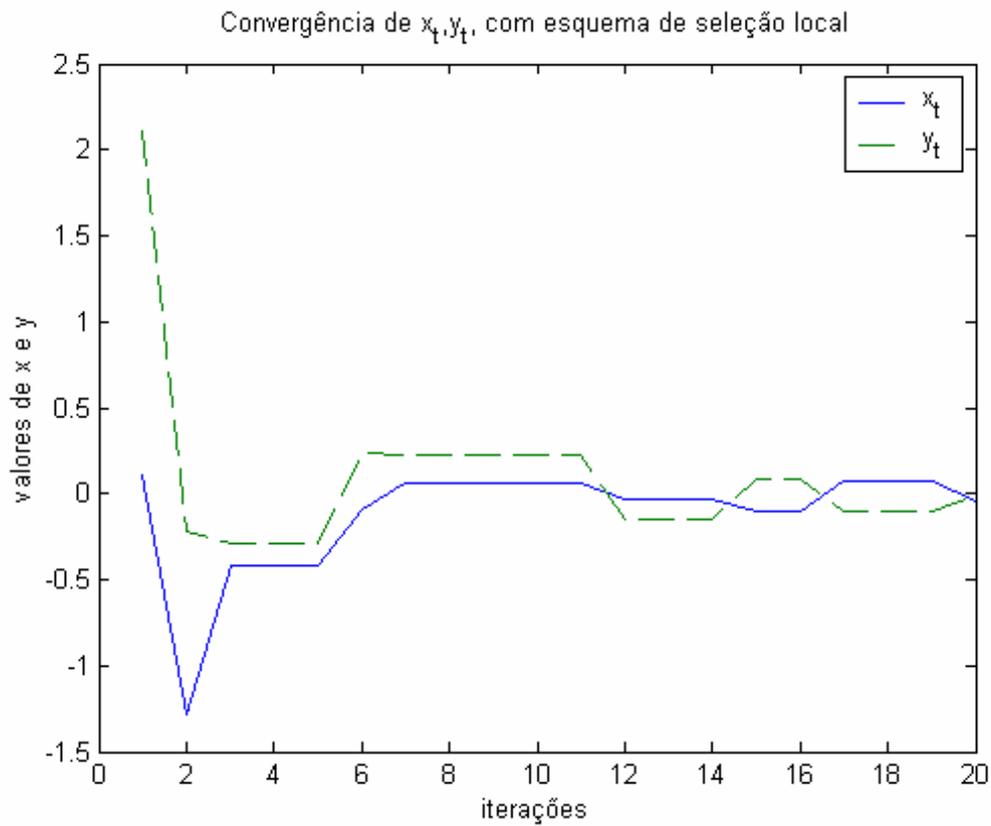


Figura 35 – Convergência de x_t, y_t do FE com esquema de seleção local

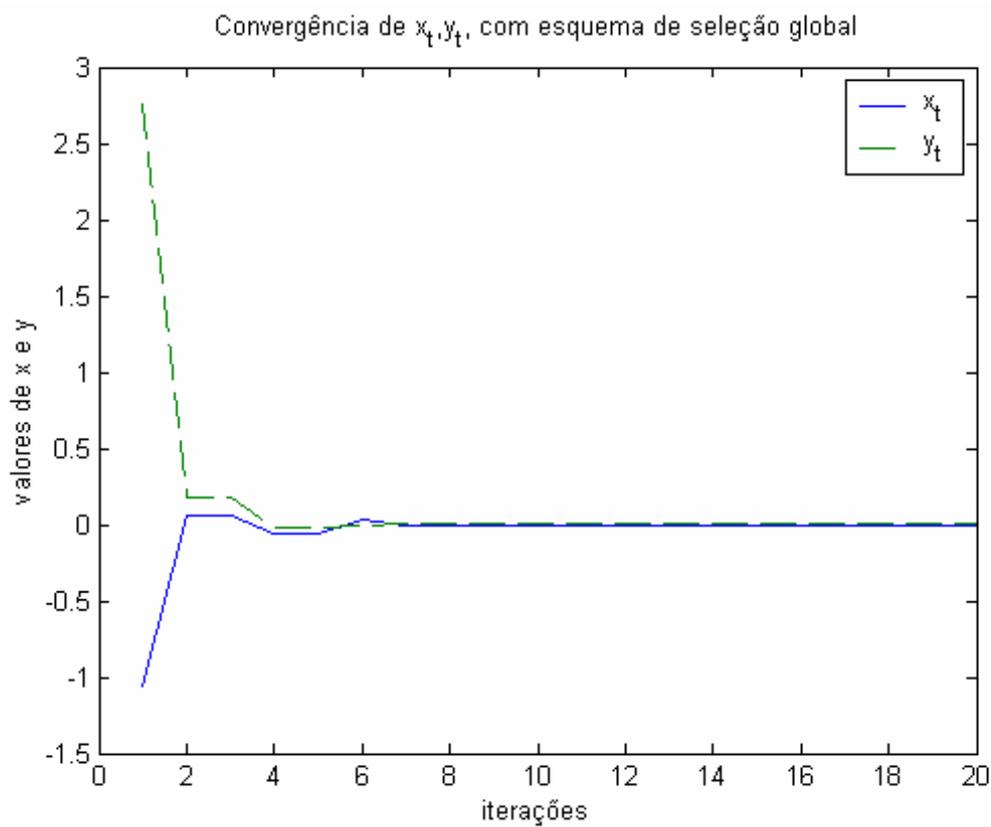


Figura 36 – Convergência de x_t, y_t do FE com esquema de seleção global

A seguir mostra-se outra aplicação do algoritmo FE que consiste na minimização da seguinte função objetivo [28]:

$$\mathbf{h}(x, y) = [x \sin(20y) + y \sin(20x)]^2 \cosh[\sin(10x)x] + [x \cos(10y) + y \sin(10x)]^2 \cosh[\cos(20y)y] \quad (86)$$

a qual é mostrada na figura 37. É conhecido que o valor mínimo da função $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ é zero, o qual ocorre em $(x, y) = (0, 0)$. A figura 38 mostra a nova função de custo $p(\boldsymbol{\theta}) \propto \exp[-\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})]$ a ser maximizada.

A fim de se ter uma noção ilustrativa da convergência do algoritmo FE, isto é, mostrar o processo de busca do ponto ótimo $\theta^{MM} = \theta^{\min}$, as figuras 39 e 40 mostram as *densidades de filtragem* para cada uma das densidades marginais de $p(\boldsymbol{\theta})$ obtidas pelo algoritmo FE com *esquema de seleção* $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local. As figuras 41 e 42 mostram, novamente, as *densidades de filtragem* para cada uma das densidades marginais de $p(\boldsymbol{\theta})$ obtidas pelo FE com *esquema de seleção* $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global.

As figuras 43 e 44 como no exemplo anterior mostram a convergência ao ponto ótimo $\theta^{MM} = \theta^{\min}$ pelo FE com esquema de seleção local e global respectivamente. Note novamente para este exemplo que a versão do FE com esquema de seleção local necessita de mais iterações para obter a mesma exatidão que o FE com esquema de seleção global. Por outro lado o tempo computacional do FE com esquema de seleção local foi de 0.92 seg. E para o FE com esquema de seleção global foi de 3.19 seg.

Os parâmetros usados nesta simulação foram $N=200$ partículas, $\pi(\boldsymbol{\theta}_0) = \pi(x_0, y_0) \sim U(-2, 2)^2$, $\rho_c = 1$ e $\rho_m = 1$. O melhor indivíduo após $T=20$ gerações foi $(x, y) = (-0.00042585753770, -0.00695409537349)$ para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ local e $(x, y) = (0.00000005877940, 0.00270329390413)$ para o FE com $\alpha(\boldsymbol{\Theta}_{0:t}^* | \boldsymbol{\Theta}_{0:t})$ global

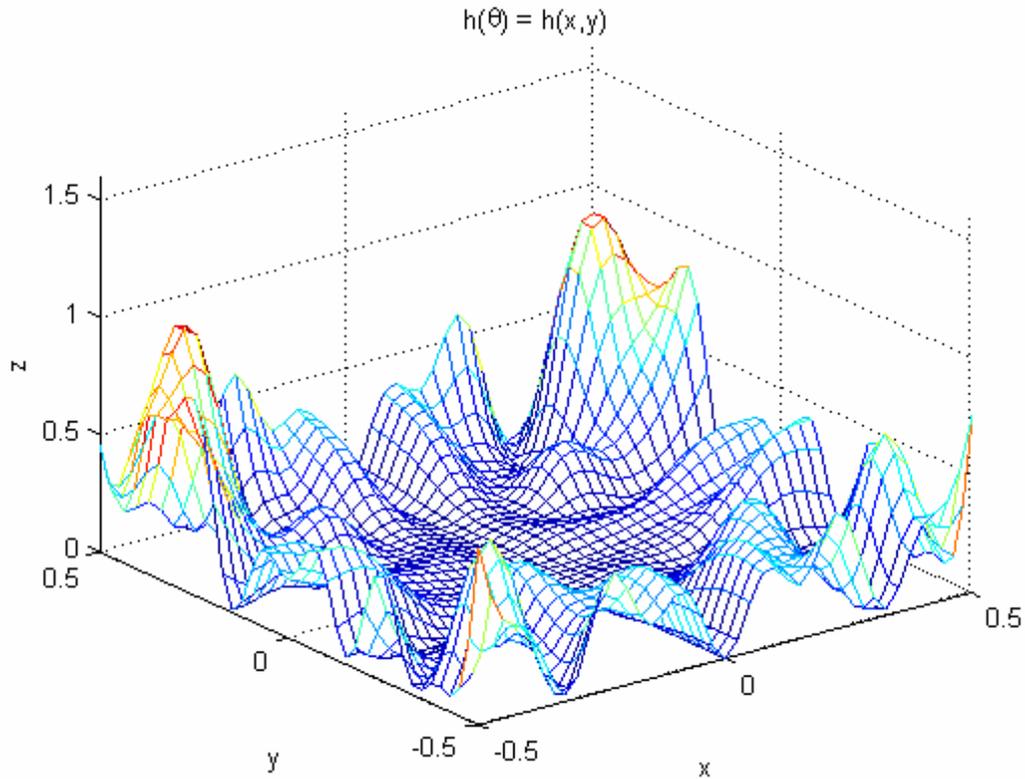


Figura 37 – Função de custo a ser maximizada

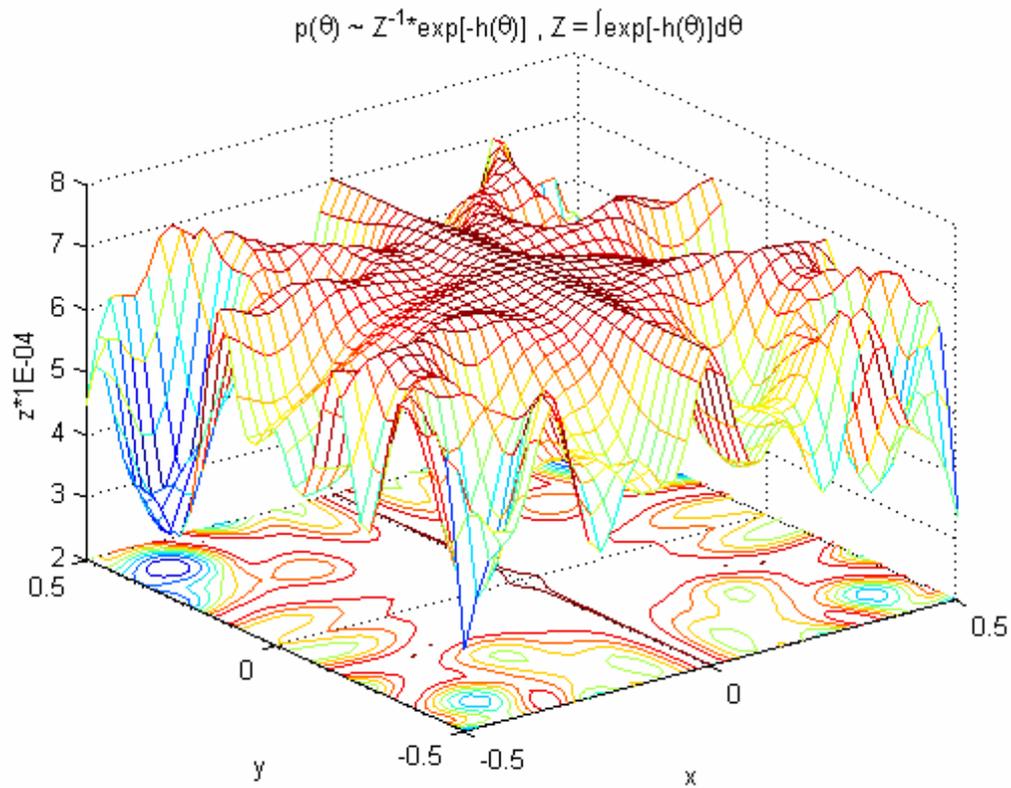


Figura 38 – Função de custo a ser minimizada

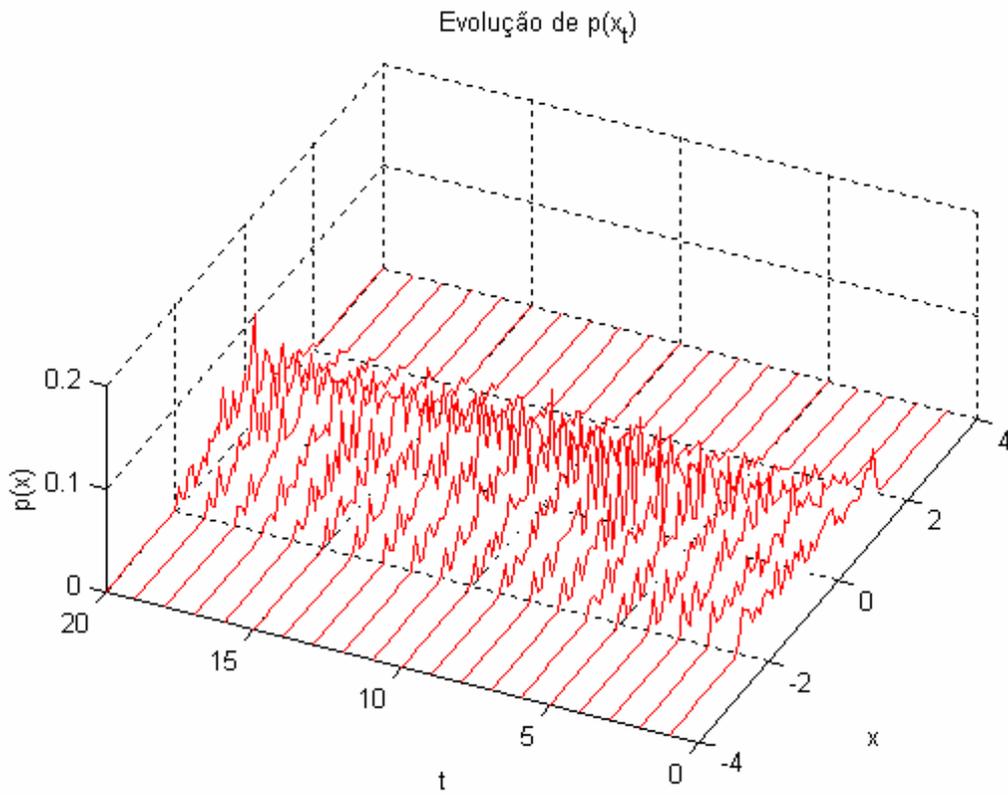


Figura 39 – Convergência em x do FE com esquema de seleção local

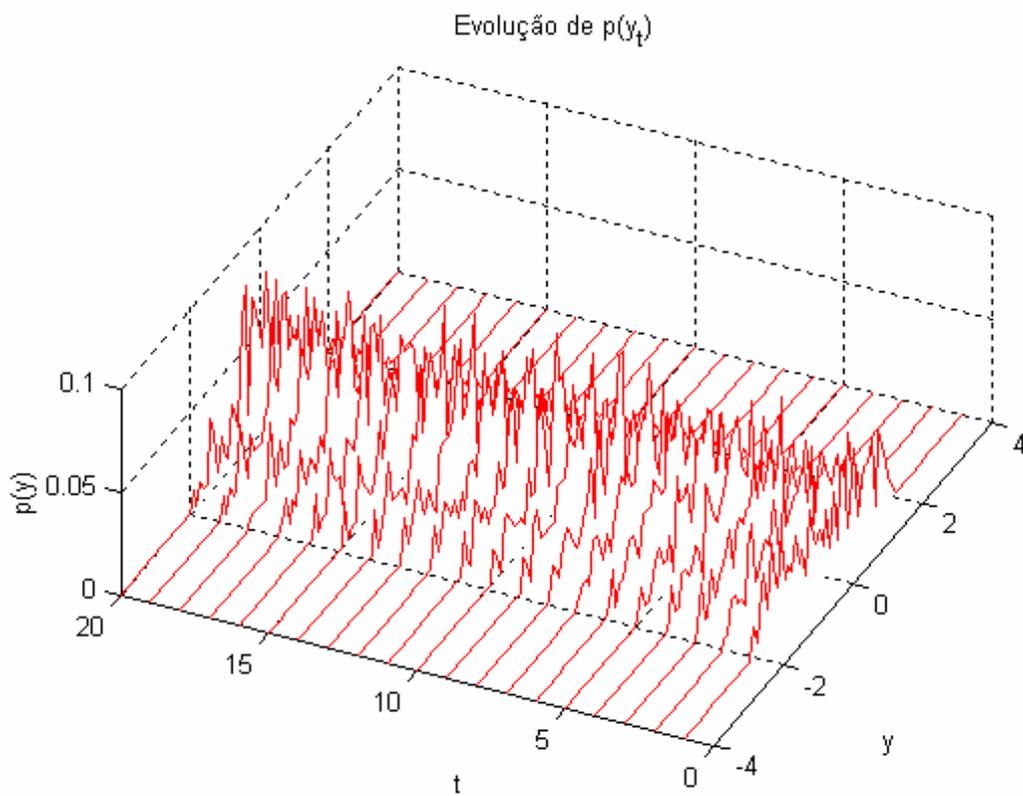


Figura 40 – Convergência em y do FE com esquema de seleção local

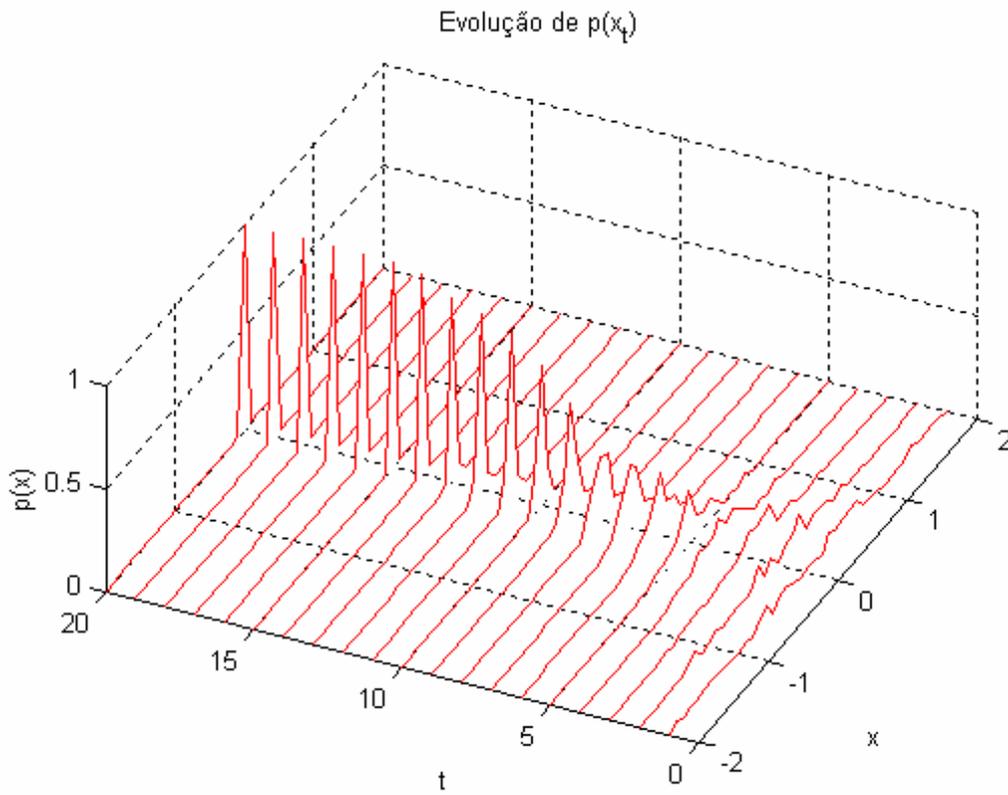


Figura 41 – Convergência em x do FE com esquema de seleção global

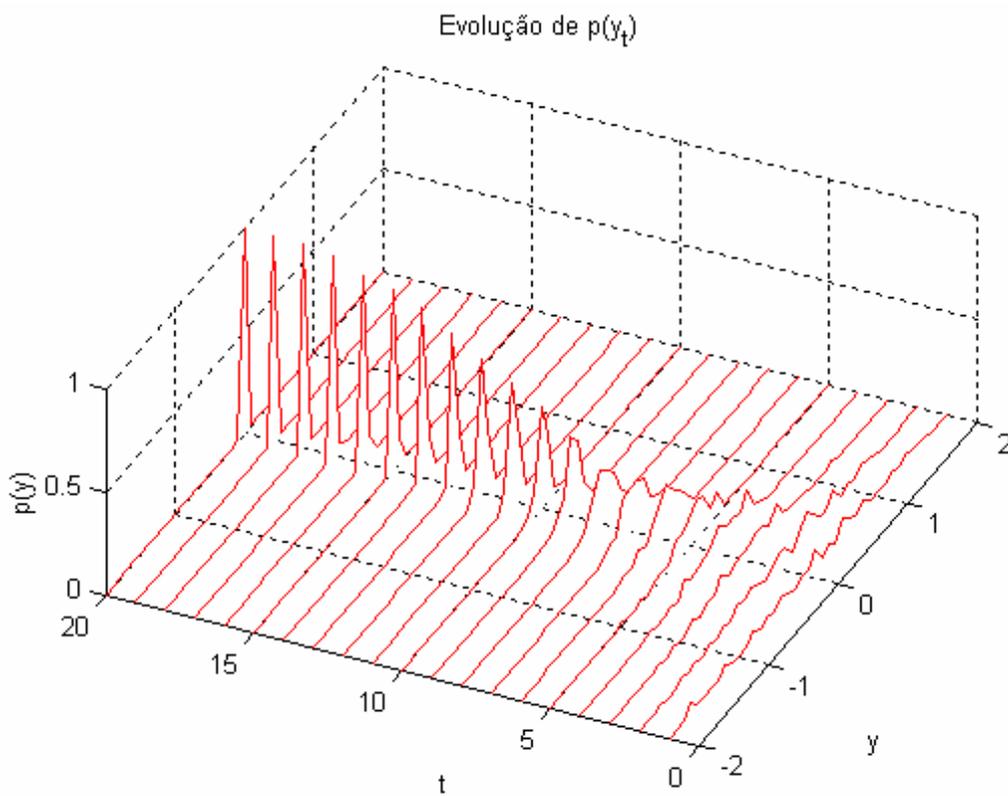


Figura 42 – Convergência em y do FE com esquema de seleção global

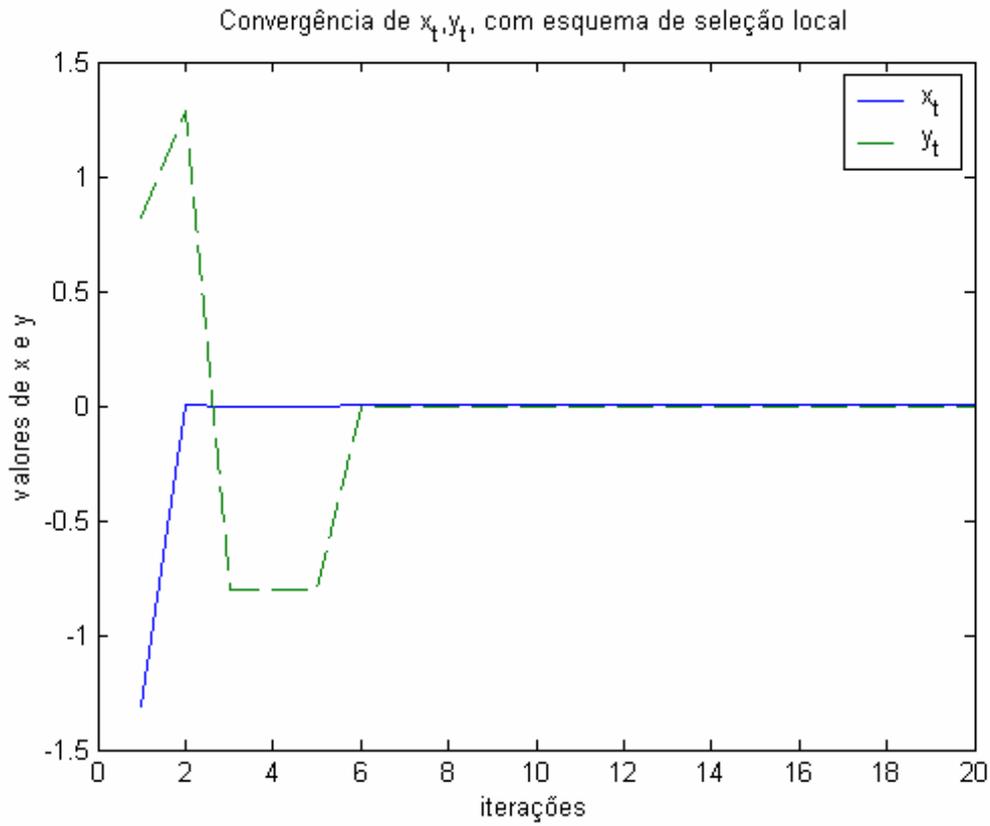


Figura 43 – Convergência de x_t, y_t do FE com esquema de seleção local

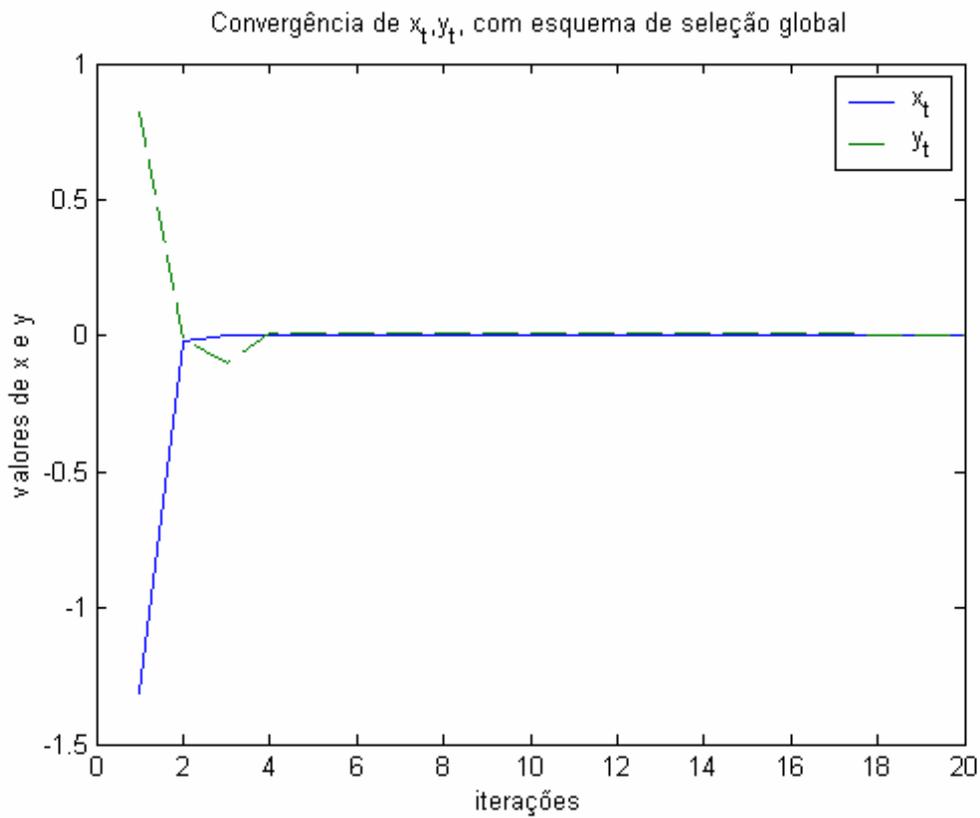


Figura 44 – Convergência de x_t, y_t do FE com esquema de seleção global

5.3. Aprendizado de um Sistema de Volatilidade Estocástica

Considere-se o seguinte modelo de volatilidade estocástica [64]:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t = \mu + \sigma_\varepsilon \exp\left(\frac{\alpha_t}{2}\right) (\rho \eta_t + \sqrt{1-\rho^2} \varepsilon_t) \\ \alpha_t = \phi \alpha_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \end{cases} \quad (87)$$

onde $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(0,1)$, $\eta_t \sim \mathbf{N}(0,1)$, $\alpha_0 \sim \mathbf{N}\{0, \sigma_\eta^2 / (1-\phi^2)\}$, $|\rho| < 1$, $|\phi| < 1$. Para este experimento foram considerados os seguintes valores $\mu = 0.0515$, $\phi = 0.980$, $\sigma_\eta = 0.160$, $\sigma_\varepsilon = 0.799$, $\rho = -0.485$. A figura 16 mostra a simulação do sistema sobre $t = 1, 2, \dots, T$ períodos de tempo, com $T = 200$.

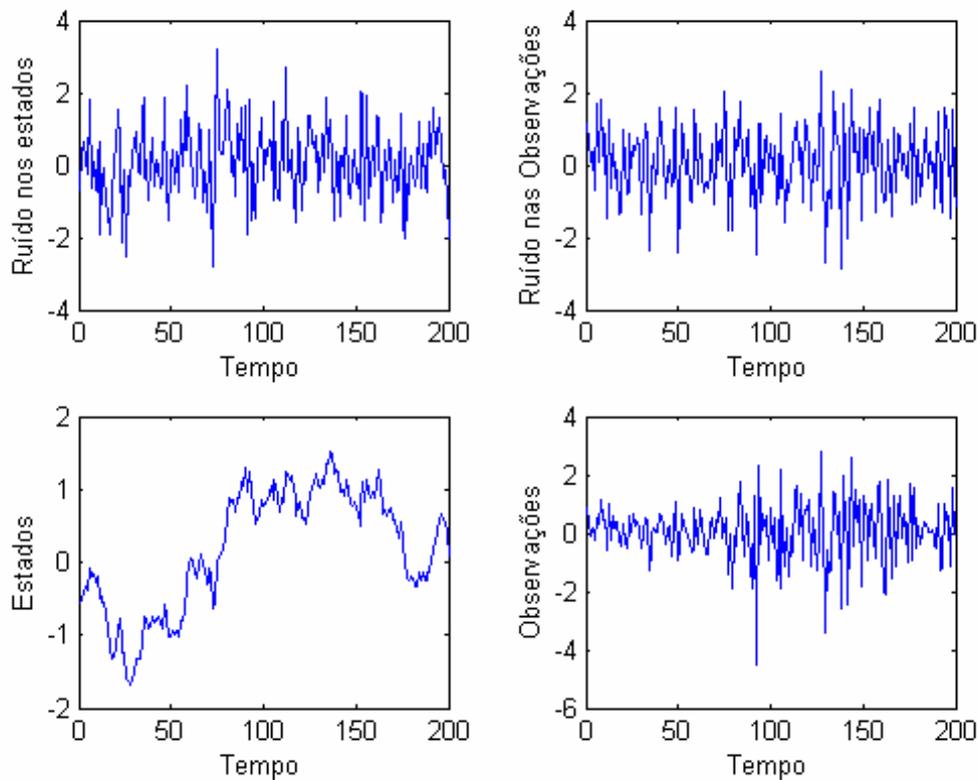


Figura 45 – Simulação do modelo de volatilidade estocástica

Note que os parâmetros adaptativos $\boldsymbol{\theta}_t = \{\boldsymbol{\psi}, \alpha_t\}$ do MEE possuem tanto componentes invariantes $\boldsymbol{\psi} = \{\mu, \phi, \sigma_\eta, \sigma_\varepsilon, \rho\}$ quanto componentes variantes no tempo α_t . Para estimar $\boldsymbol{\theta}_t = \{\boldsymbol{\psi}, \alpha_t\}$ eficientemente é conveniente realizar este cálculo separadamente. Para isto a densidade a *posteriori* $p(\boldsymbol{\Theta}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t})$ pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} p(\Theta_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) &\propto p(\Psi, \mathbf{a}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) \\ &\propto p(\Psi | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t}) p(\mathbf{a}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) \end{aligned} \quad (88)$$

Com esta decomposição, a densidade $p(\mathbf{a}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t})$ pode ser calculada pelo filtro de partículas, enquanto que $p(\Psi | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t})$ pode ser calculada pelo algoritmo genético, uma vez que esta densidade é invariante no tempo.

Entretanto o cálculo de $p(\Psi | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t})$ deve respeitar as restrições de domínio impostas aos elementos do vetor $\Psi = \{\mu, \phi, \sigma_\eta, \sigma_\varepsilon, \rho\}$. Porém, os operadores de *cruzamento* e *mutação* precisam ser adaptados para satisfazer estas restrições. Felizmente, na literatura existem diversas definições de *cruzamento* e *mutação* que manipulam restrições de domínio, tais como *cruzamento* aritmético, *cruzamento* simples, *cruzamento* heurístico, *mutação* uniforme, *mutação* não uniforme e *mutação* de fronteira (para maiores detalhes veja [39]).

Por outro lado, observando o MEE, pode-se concluir que a densidade da verossimilhança do modelo possui um formato Gaussiano da forma:

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{a}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{Var}[\mathbf{y}_t]}} \exp\left\{-0.5 \left(\frac{\mathbf{y}_t - \mathbf{E}[\mathbf{y}_t]}{\mathbf{Var}[\mathbf{y}_t]}\right)^2\right\} \quad (89)$$

Com:

$$\mathbf{E}[\mathbf{y}_t | \mathbf{a}_t] = \mu + \rho \exp\left(\frac{\mathbf{a}_t}{2}\right) \sigma_\varepsilon \eta_t \quad (90)$$

$$\mathbf{Var}[\mathbf{y}_t | \mathbf{a}_t] = \sigma_\varepsilon^2 (1 - \rho^2) \exp^2\left(\frac{\mathbf{a}_t}{2}\right) \quad (91)$$

Logo, substituindo a equação (89) na equação (29) obtém-se a *função de importância* dos filtro FPB e FPG, respectivamente. Por outro lado, lembrando que as observações são condicionalmente independentes aos estados, então a densidade $p(\Psi | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t})$ será igual a:

$$p(\Psi | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t}) = \prod_{i=1}^t p(\mathbf{y}_i | \mathbf{a}_i) \quad (92)$$

Logo, substituindo a equação de acima na equação (80) obtém-se a *função de aptidão* que guiará o processo de busca do AG no cálculo dos parâmetros $\Psi = \{\mu, \phi, \sigma_\eta, \sigma_\varepsilon, \rho\}$ ótimos do modelo. Entretanto, devido a problemas de precisão numérica inerentes à função de custo da equação (92), na prática é utilizada a seguinte função de custo:

$$\ln\{p(\boldsymbol{\psi} | \mathbf{Y}_{1:t}, \mathbf{a}_{0:t})\} = \sum_{i=1}^t \ln\{p(\mathbf{y}_i | \mathbf{a}_i)\} \quad (93)$$

uma vez que a transformação logarítmica garante a preservação dos valores extremos da função de custo expressa pela equação (93).

Com fins ilustrativos foi realizado uma comparação entre as estimativas dos estados e das observações obtidas pelo FPB, FPA e o FPG. Nesta comparação foi usando uma população de 200 indivíduos. Assim as figuras 46-49 mostram o desempenho do FPB, as figuras 50-53 mostra o desempenho do FPA e as figuras 54-57 mostra o desempenho do FPG. Note-se que as estimativas dos três filtros estão muito próximos. Entretanto a diferença entre eles pode ser observado na tabela 2, onde percebe-se a superioridade do FPG. Os tempos computacionais para os três filtros foram: FPB = 8.02 seg., FPA = 16.23 seg. e FPG = 37.88 seg.

Filtro	Erro nos estados	Erro nas observações
	$\sum(\theta - \theta_{\text{Média}})^2$	$\sum(y - y_{\text{Média}})^2$
FPB	30.94	203.72
FPA	52.57	167.68
FPG	40.90	131.30

Tabela 2 - Desempenho do Erro do FPB, FPA e FPG

As figuras 58, 59 e 60 mostram as estimativas dos parâmetros invariantes (hiper-parâmetros) $\boldsymbol{\psi} = \{\mu, \phi, \sigma_{\eta}, \sigma_{\varepsilon}, \rho\}$ do modelo obtidos pela combinação simultânea do algoritmo genético do FE com os filtros de partículas FPB, FPA e FPG, respectivamente, considerando um período de tempo de $T = 200 : 25 : 1000$. As tabelas 3,4 e 5 mostram o desempenho do FE+FPB, FE+FPA e do FE+FPG respectivamente. Além disso o custo computacional neste experimento foi: FE+FPB = 9.66 horas, FE+APF = 17.53 horas e o FE+FPG = 18.22 horas.

As figuras 61, 62 e 63 mostram 50 estimativas de $\boldsymbol{\psi} = \{\mu, \phi, \sigma_{\eta}, \sigma_{\varepsilon}, \rho\}$ obtidos pela combinação simultânea do algoritmo genético do FE com os filtros de partículas FPB, FPA e FPG, respectivamente, considerando um período de tempo de $T = 1000$. As tabelas 6,7 e 8 mostram o desempenho do FE+FPB, FE+FPA e do FE+FPG respectivamente. Além disso o custo computacional neste experimento foi: FE+FPB = 12.87 horas, FE+APF = 28.77 horas e o FE+FPG = 49.14 horas.

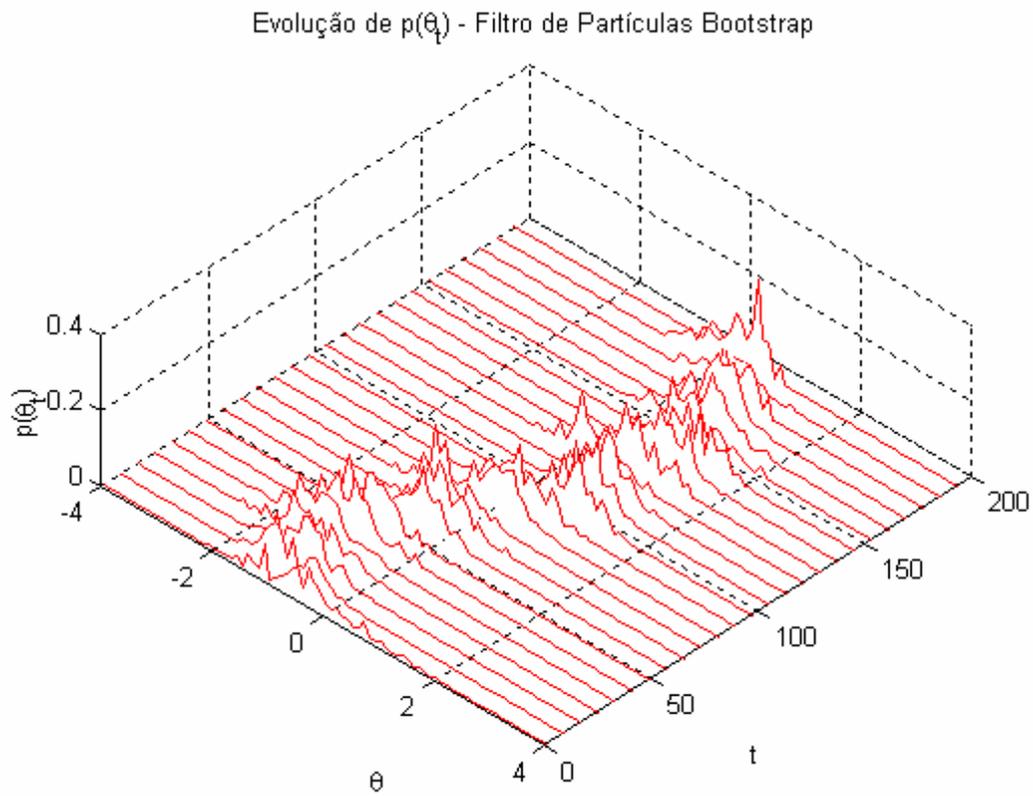


Figura 46 - Desempenho do FPB na evolução da densidade dos estados

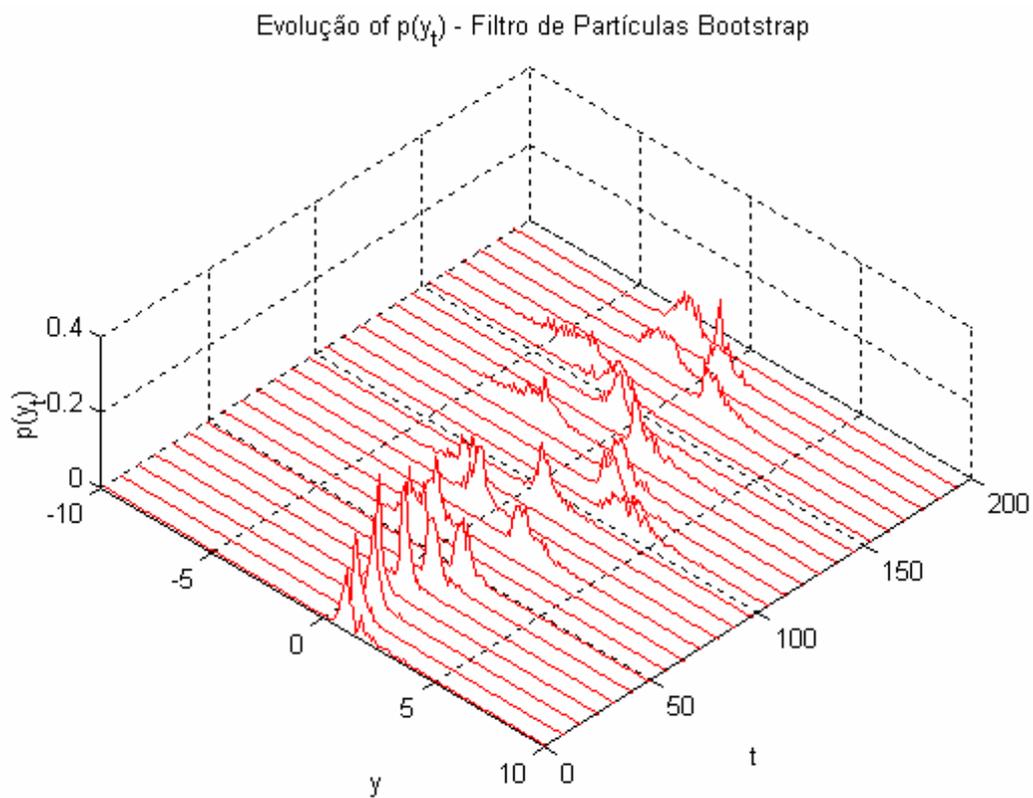


Figura 47 – Desempenho do FPB na evolução da densidade das observações

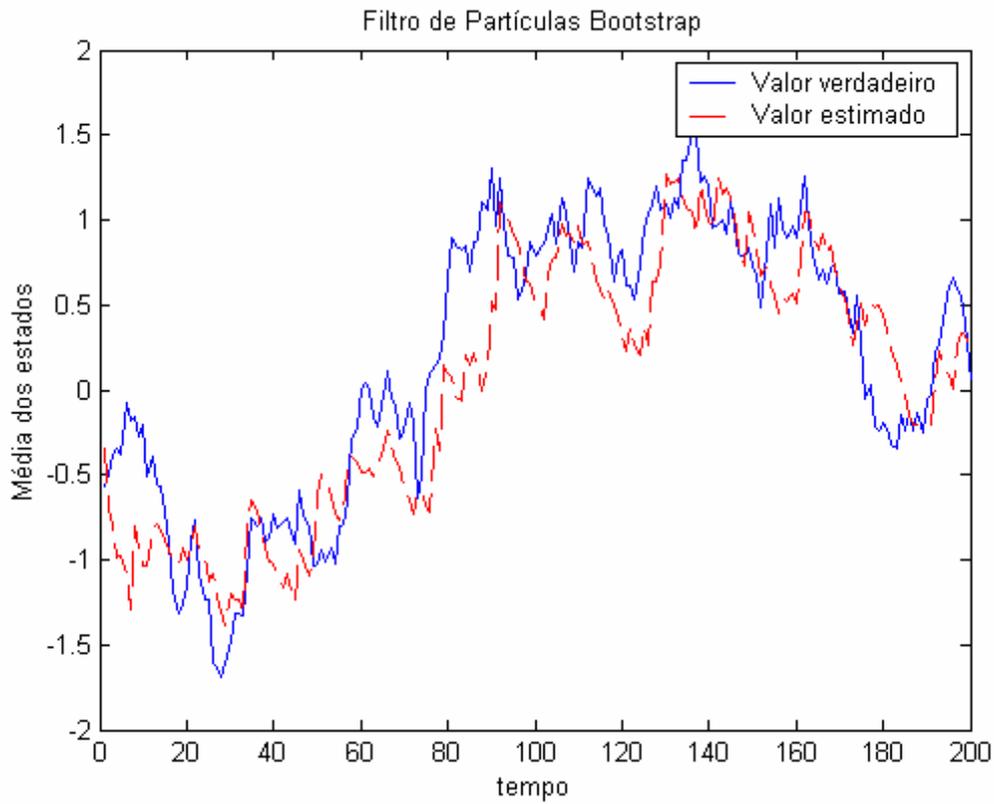


Figura 48 - Desempenho do FPB na estimativa dos estados

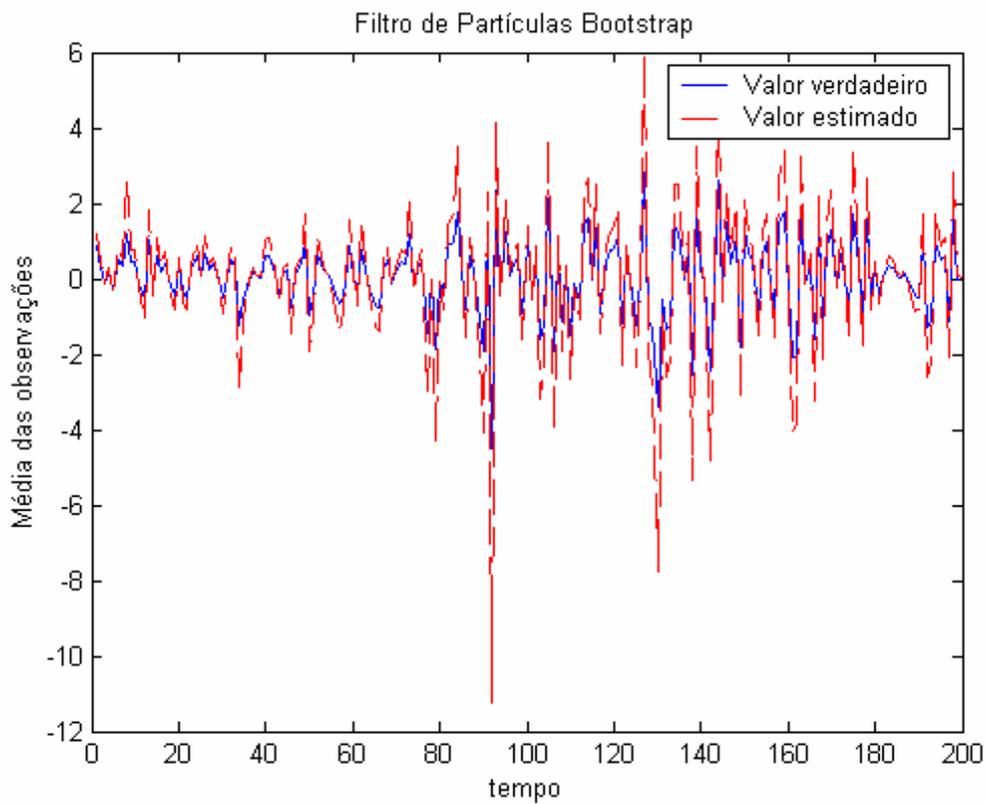


Figura 49 - Desempenho do FPB na estimativa das observações

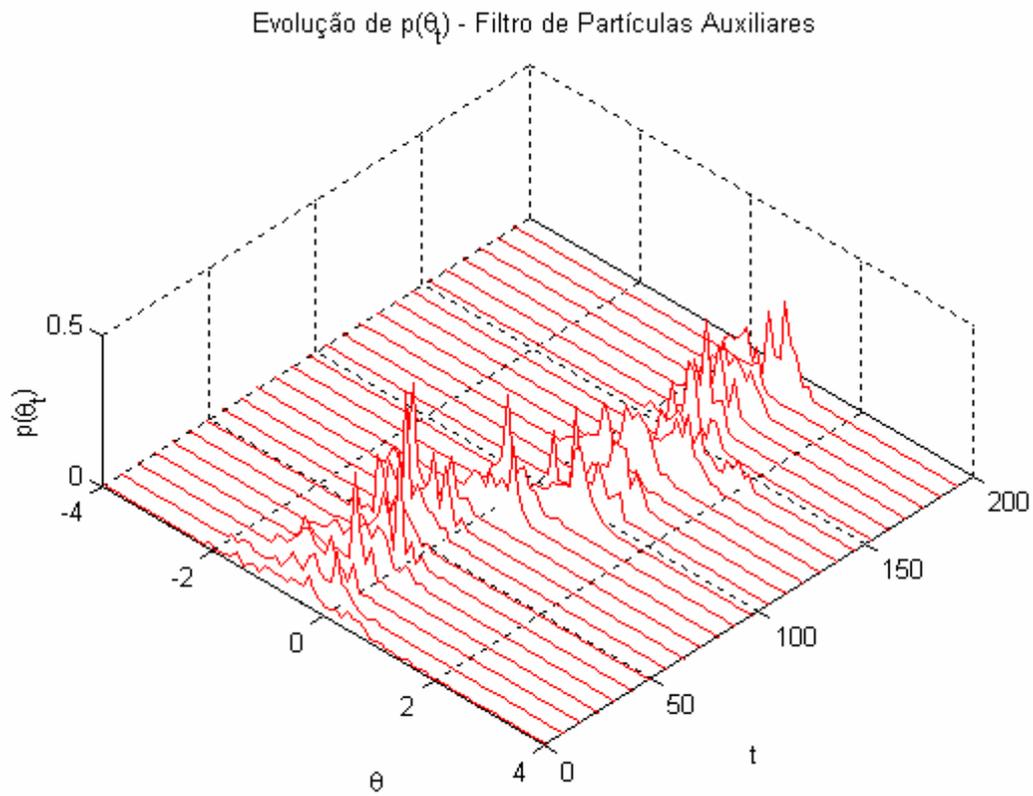


Figura 50 - Desempenho do FPA na evolução da densidade dos estados

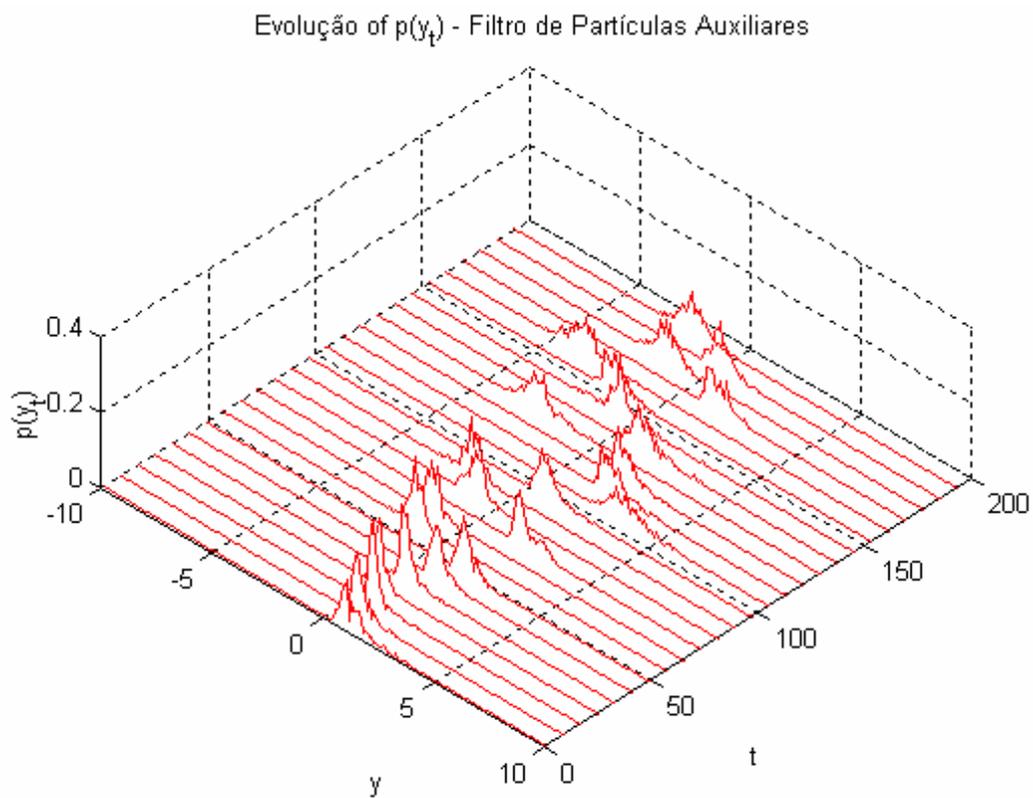


Figura 51 – Desempenho do FPA na evolução da densidade das observações

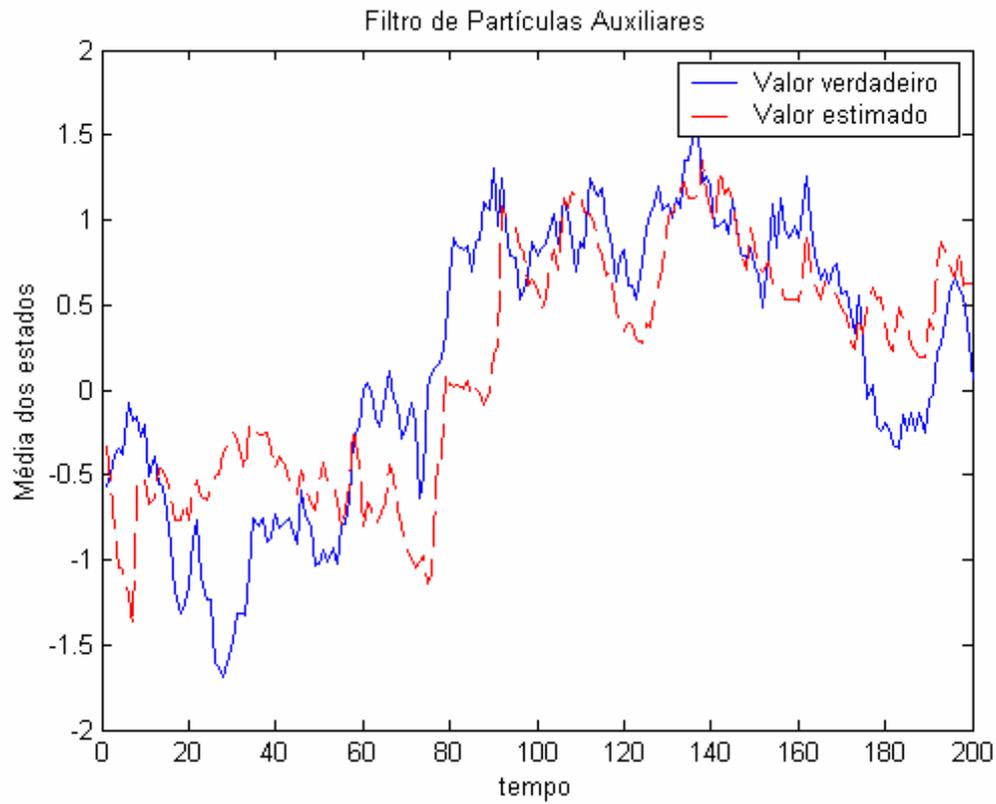


Figura 52 - Desempenho do FPA na estimativa dos estados

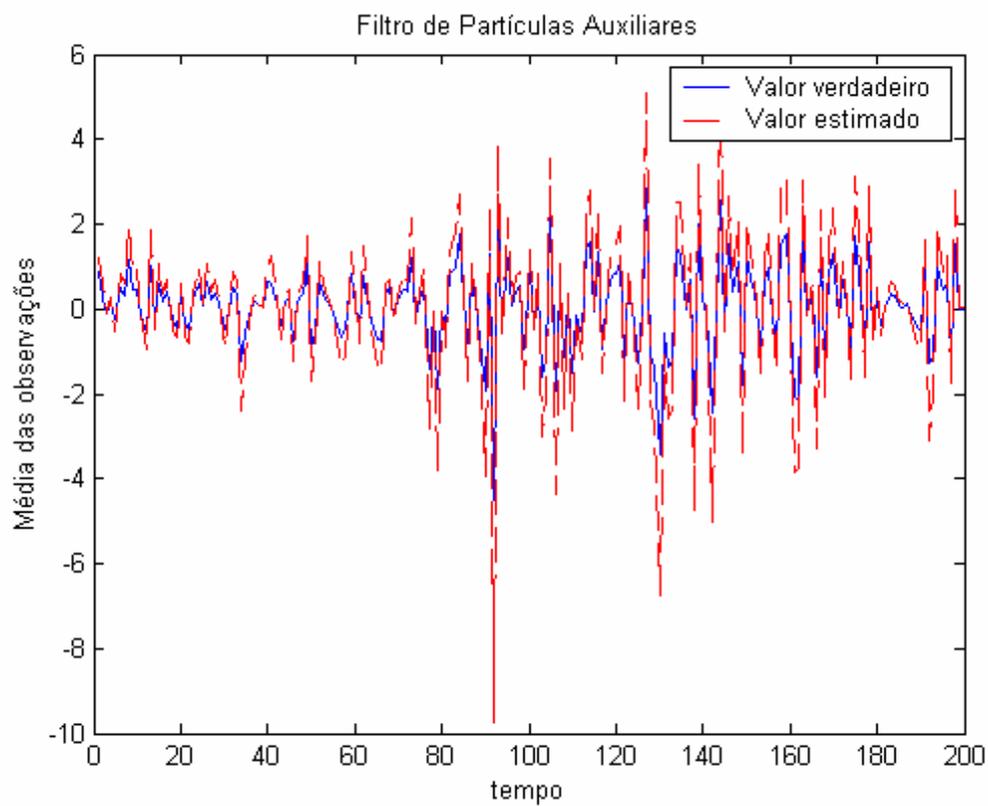


Figura 53 - Desempenho do FPA na estimativa das observações

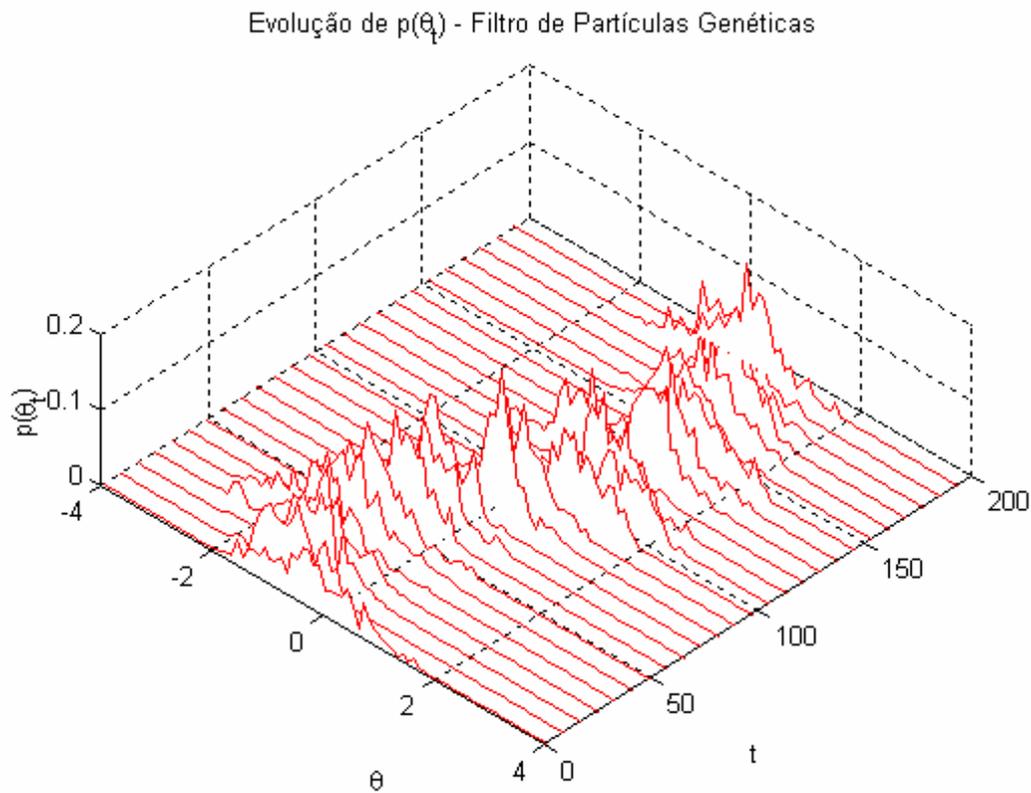


Figura 54 - Desempenho do FPG na evolução da densidade dos estados

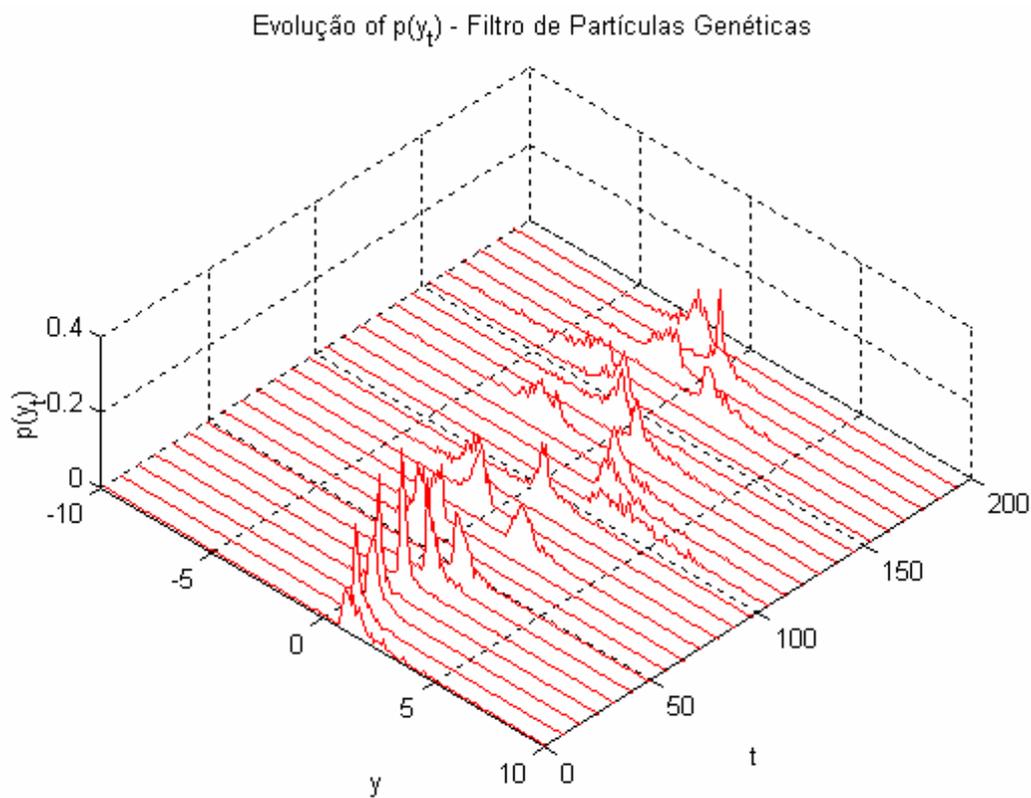


Figura 55 – Desempenho do FPG na evolução da densidade das observações

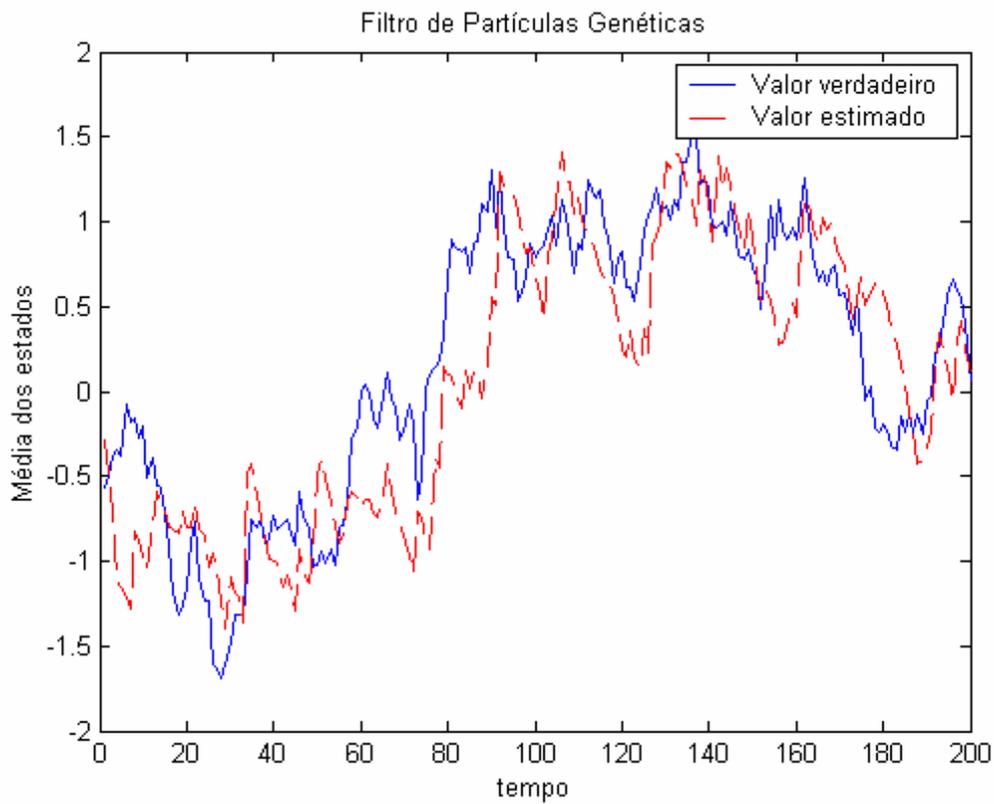


Figura 56 - Desempenho do FPG na estimativa dos estados

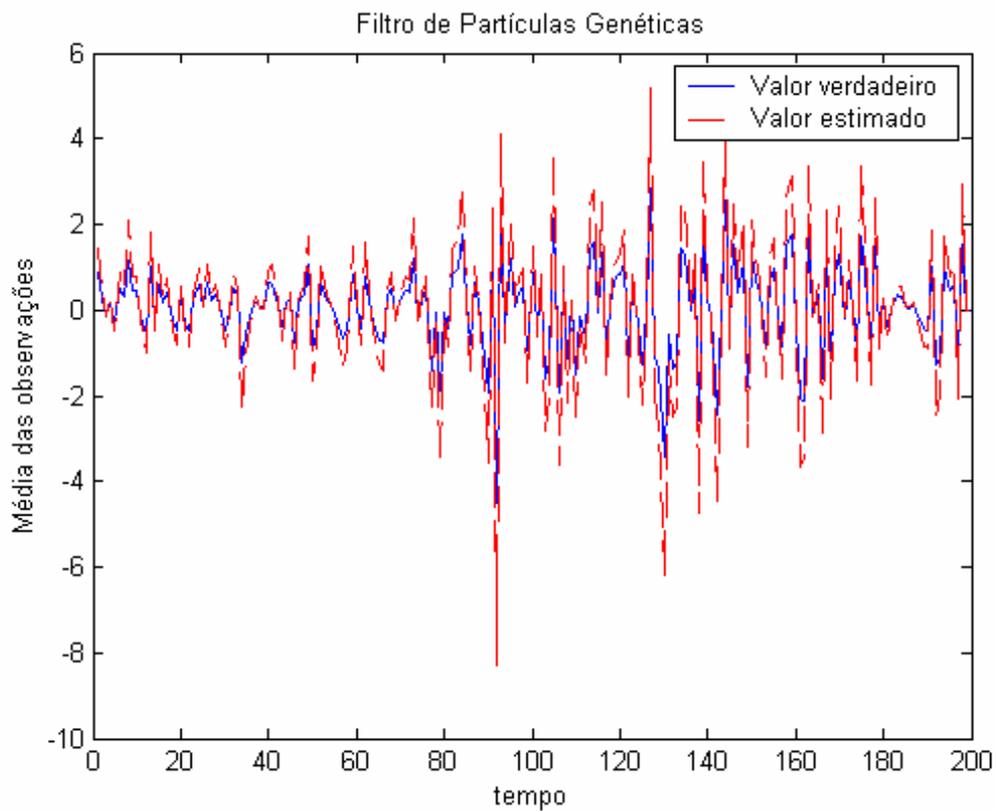


Figura 57 - Desempenho do FPG na estimativa das observações

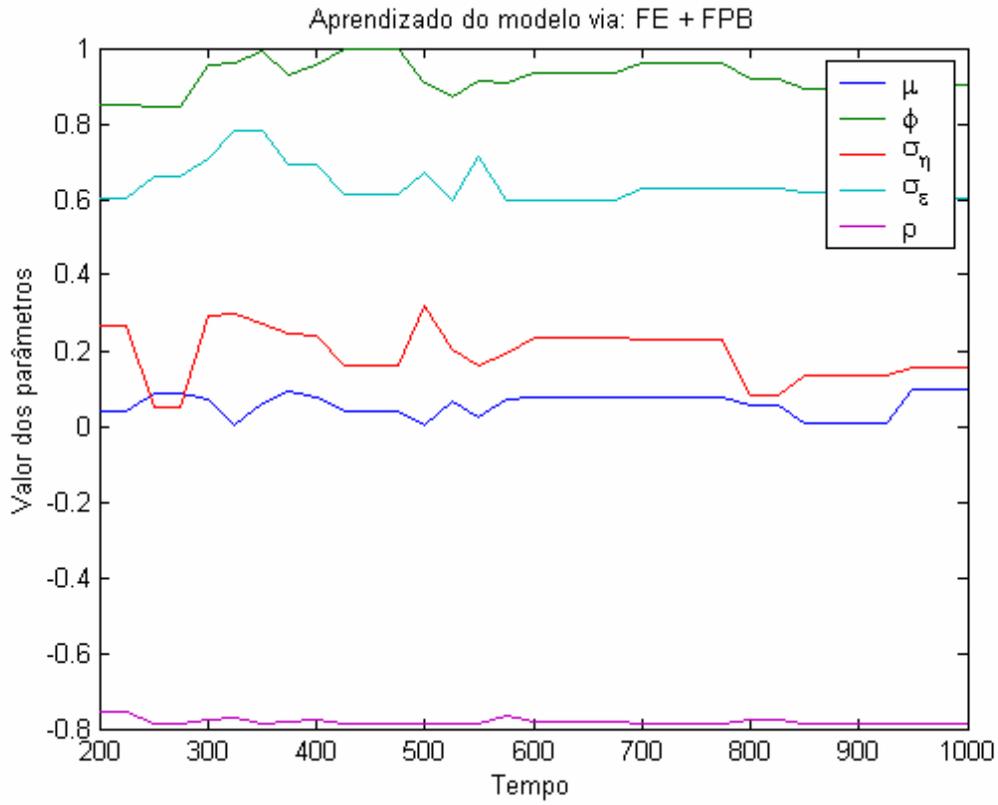


Figura 58 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+FPB

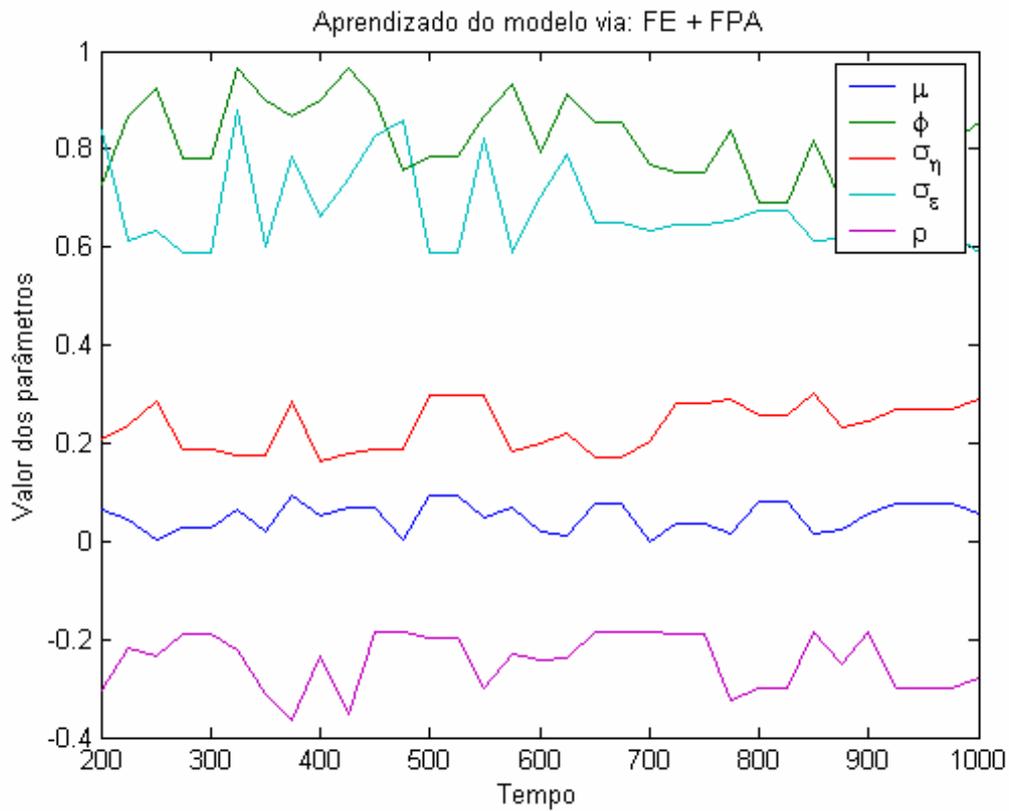


Figura 59 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+FPA

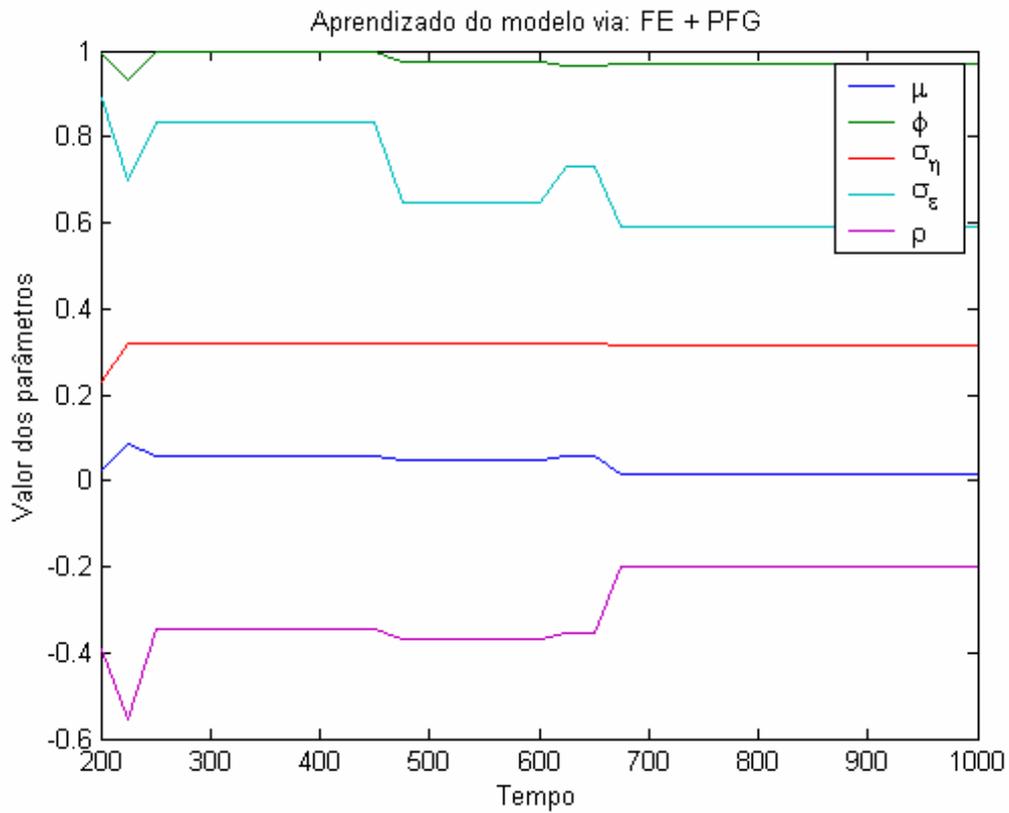


Figura 60 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+PFG

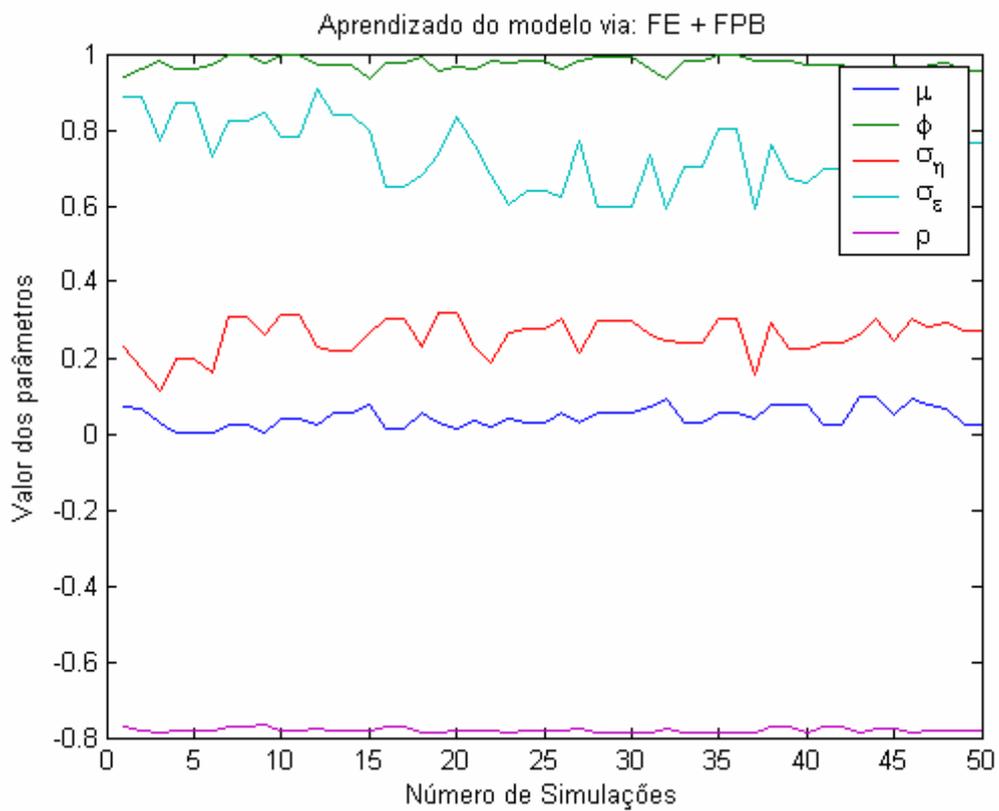


Figura 61 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+FPB

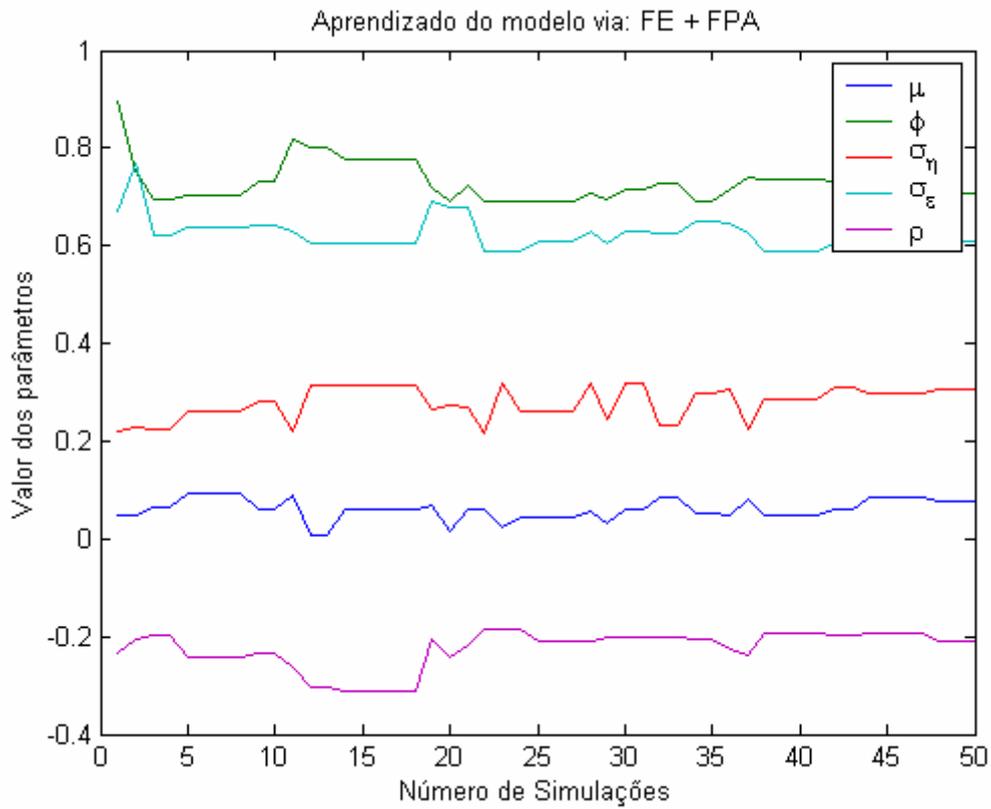


Figura 62 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+FPA

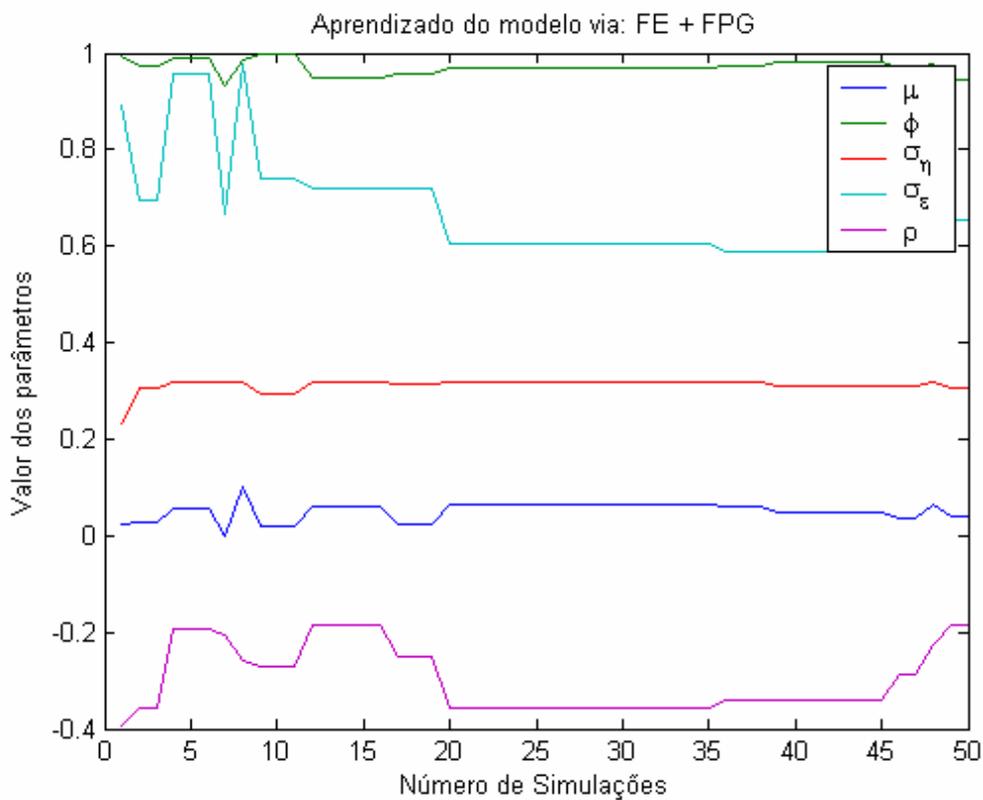


Figura 63 – Aprendizado dos hiper-parâmetros do modelo via: FE+FPG

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPB	Erro ²
μ	0.0515	0.0573	0.0000
ϕ	0.9800	0.9229	0.0033
σ_{η}	0.1600	0.1933	0.0011
σ_{ε}	0.7990	0.6384	0.0258
ρ	-0.4850	-0.7808	0.0875

Tabela 3 - Erro da estimativa do FE+FPB para $T = 200 : 25 : 1000$

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPA	Erro ²
μ	0.0515	0.0503	0.0000
ϕ	0.9800	0.8248	0.0241
σ_{η}	0.1600	0.2345	0.0055
σ_{ε}	0.7990	0.6741	0.0156
ρ	-0.4850	-0.2437	0.0582

Tabela 4 - Erro da estimativa do FE+FPA para $T = 200 : 25 : 1000$

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPG	Erro ²
μ	0.0515	0.0379	0.0002
ϕ	0.9800	0.9775	0.0000
σ_{η}	0.1600	0.3140	0.0237
σ_{ε}	0.7990	0.6878	0.0124
ρ	-0.4850	-0.2966	0.0355

Tabela 5 - Erro da estimativa do FE+FPG para $T = 200 : 25 : 1000$

Com base nos resultados das tabelas 3,4 e 5 pode-se concluir que as estimativas do FE+FPB, FE+FPA e do FE+FPG estão muito próximas. Entretanto, o FE+FPG possui uma ligeira exatidão com relação a os outros dois métodos. Por exemplo, note que ρ estimado por FE+FPB e FE+FPA possui um erro maior em relação com o FE+FPG; já os outros hiper-parâmetros estão próximos. Esta exatidão tem um preço, já que o custo computacional do FE+FPG é maior à dos outros dois métodos.

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPB	Erro ²
μ	0.0515	0.0446	0.0000
ϕ	0.9800	0.9724	0.0001
σ_{η}	0.1600	0.2561	0.0092
σ_{ε}	0.7990	0.7270	0.0052
ρ	-0.4850	-0.7799	0.0870

Tabela 6 - Erro em 50 simulações da estimativa do FE+FPB para $T = 1000$

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPA	Erro ²
μ	0.0515	0.0609	0.0000
ϕ	0.9800	0.7320	0.0615
σ_{η}	0.1600	0.2797	0.0143
σ_{ε}	0.7990	0.6233	0.0308
ρ	-0.4850	-0.2242	0.0680

Tabela 7 - Erro em 50 simulações da estimativa do FE+FPA para $T = 1000$

Hiper-parâmetro	Valor verdadeiro	FE+FPG	Erro ²
μ	0.0515	0.0500	0.0000
ϕ	0.9800	0.9713	0.0000
σ_{η}	0.1600	0.3134	0.0235
σ_{ε}	0.7990	0.6693	0.0168
ρ	-0.4850	-0.2987	0.0347

Tabela 8 - Erro em 50 simulações da estimativa do FE+FPG para $T = 1000$

Com base nos resultados das tabelas 6,7 e 8 pode-se concluir que as estimativas do FE+FPB, FE+FPA e do FE+FPG novamente estão próximas. Entretanto, o hiper-parâmetro ρ estimado por FE+FPB e FE+FPA possui novamente um erro maior em relação com o FE+FPG, já os outros hiper-parâmetros estão próximos.

5.4. Resumo

Neste capítulo foram apresentadas aplicações do FPG e FE em problemas de filtragem dos estados de um sistema não-linear unidimensional, problemas de otimização de funções e problemas de aprendizado de hiper-parâmetros de um sistema de volatilidade estocástica. Os resultados mostram que o FPG e o FE possuem uma eficiência igual ou superior aos métodos convencionais. No próximo capítulo são apresentadas as conclusões finais da tese assim como as sugestões de trabalhos futuros.