



**Juliana de Matos Ponte Raimundo**

**Influência da interação não-linear entre flexão e deslocamento lateral na instabilidade estática e dinâmica de um modelo conceitual de coluna**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves  
Co-Orientador: Prof. Diego Orlando



**Juliana de Matos Ponte Raimundo**

**Influência da interação não-linear entre  
flexão e deslocamento lateral na  
instabilidade estática e dinâmica de um  
modelo conceitual de coluna**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo  
assinada.

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Diego Orlando**

Co-Orientador

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Frederico Martins Alves da Silva**

Universidade Federal de Goiás

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de janeiro de 2018.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Juliana de Matos Ponte Raimundo**

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Católica de Petrópolis (UCP), em fevereiro de 2016. Ingressou no mestrado em Engenharia Civil da PUC-Rio em março de 2016, atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas.

#### Ficha Catalográfica

Raimundo, Juliana de Matos Ponte

Influência da interação não-linear entre flexão e deslocamento lateral na instabilidade estática e dinâmica de um modelo conceitual de coluna / Juliana de Matos Ponte Raimundo; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Diego Orlando. – 2018.

143 f. : il. color.; 30 cm

Dissertação (Mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Rio de Janeiro, 2018.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Instabilidade estática. 3. Instabilidade dinâmica. 4. Interação modal. 5. Dinâmica não-linear. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Orlando, Diego. IV. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. V. Título.

CDD: 624

## Agradecimentos

Ao professor Paulo Batista Gonçalves, que soube transmitir cada passo da orientação com dedicação. E acima de tudo, pela amizade e paciência durante todas as etapas da realização deste trabalho.

Ao meu coorientador, professor Diego Orlando, pelo auxílio constante na realização deste trabalho e pelo esclarecimento de tantas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio pelos ensinamentos transmitidos.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

Aos meus amados pais, Luciana e José Francisco, por sempre estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida, me dando incentivo, consolo, conselhos, carinho e muito amor.

Às minhas queridas irmãs, Mariana e Daiana, que sempre me apoiaram e incentivaram.

À minha querida amiga Paula Helene que me recebeu tão carinhosamente na PUC-Rio e por ter me acolhido em sua casa e ainda por todos os cafés acompanhados de conversas enriquecedoras.

A Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

## Resumo

Raimundo, Juliana de Matos Ponte; Gonçalves, Paulo Batista; Orlando, Diego. **Influência da interação não-linear entre flexão e deslocamento lateral na instabilidade estática e dinâmica de um modelo conceitual de coluna.** Rio de Janeiro, 2018. 143p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A estabilidade das colunas de um pórtico plano depende da importância relativa da rigidez à flexão e rigidez lateral de cada coluna e elementos adjacentes. Um exemplo típico é a maior capacidade de carga de pórticos planos com restrição lateral em comparação com pórticos semelhantes, sem restrição lateral. Também esta restrição tem uma influência importante na resposta pós-crítica e na sensibilidade à imperfeição da estrutura. A carga de flambagem pode ser dominada pela rigidez à flexão da coluna ou pela rigidez das restrições laterais. Dependendo dos valores relativos desses parâmetros, pode ocorrer interação modal. Nesse caso, podem surgir vários caminhos pós-críticos, acoplados e desacoplados, levando a uma topologia complexa da energia potencial total com vários pontos críticos (máximos, mínimos e selas). Os caminhos pós-críticos instáveis influenciam na sua capacidade de carga e na sensibilidade da estrutura a imperfeições. Isso leva a um complexo comportamento dinâmico não linear da estrutura carregada axialmente. No presente trabalho, um modelo conceitual de dois graus de liberdade de um elemento de pórtico plano sob compressão é estudado. Uma análise detalhada é realizada a fim de estudar como a rigidez lateral influencia: os comportamentos pré- e pós-crítico, a instabilidade paramétrica do modelo sob uma excitação harmônica axial e o comportamento ressonante do sistema estrutural carregado axialmente sob uma excitação de base; contribuindo para uma melhor compreensão da resposta não linear desta classe de estruturas. A análise das bifurcações mostra que a estrutura pode exibir várias soluções estáveis e instáveis coexistentes, levando a bacias de atração entrelaçadas, cuja topologia controla a integridade dinâmica da estrutura em um ambiente dinâmico. Para estudar o comportamento não linear do modelo, foram utilizadas várias estratégias numéricas para obter os caminhos de equilíbrio não lineares, pontos fixos estáveis e instáveis, diagramas de bifurcação e bacias de atração.

## **Palavras-chave**

Instabilidade estática; instabilidade dinâmica; interação modal; dinâmica não-linear.

## Abstract

Raimundo, Juliana de Matos Ponte; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Orlando, Diego (Co-advisor). **Influence of the nonlinear flexural and sway interaction on the static and dynamic instability of a conceptual model of column.** Rio de Janeiro, 2018. 143p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The stability of columns in a portal frame depends on the relative importance of the flexural and lateral stiffness of the column and connected elements. A typical example is the higher load capacity of non-sway frames as compared with that of similar frames with no lateral restraint. Also this restraint has an important influence on the post-critical response and imperfection sensitivity of the structure. The buckling load may be either dominated by the flexural stiffness of the columns or by the stiffness of the lateral restraints. Depending on the relative values of these parameters, interactive buckling may occur. In such case, several coupled and uncoupled post-buckling paths may arise, leading to a complex topology of the energy landscape with several critical points (maxima, minima and saddles). The resulting unstable post-buckling paths influence the structure's imperfection sensitivity and load carrying capacity of the structure. This leads to an involved nonlinear dynamic behaviour of the axially loaded structure. In the present work, a conceptual two-degree-of-freedom model of a plane-frame column is studied. A detailed analysis is conducted to study how the lateral stiffness influences the static buckling and post-buckling behavior, the parametric instability of the model under axial harmonic excitation and the resonant behavior of the axially loaded structural system under base excitation, contributing to a better understanding of the nonlinear response of this class of structures. The bifurcation analysis shows that the structure may display several coexisting stable and unstable solutions, leading to intertwining basins of attraction, whose topology controls the dynamic integrity of the structure in a dynamic environment. To study the non-linear behavior of the model, several numerical strategies were used to obtain the nonlinear equilibrium paths, stable and unstable fixed points, bifurcation diagrams and basins of attraction.

## **Keywords**

Static instability; dynamic instability; modal interaction; nonlinear dynamics.

## Sumário

1	Introdução	22
1.1.	Objetivo	37
1.2.	Organização do Trabalho	37
2	Formulação do Problema	39
2.1.	Modelo de Raithel e Clemente	39
2.1.1.	Energia Cinética	41
2.1.2.	Energia Potencial Total	42
2.1.3.	Amortecimento	44
2.1.4.	Função de Lagrange	46
2.1.5.	Equações de Movimento	46
3	Análise Estática	49
3.1.	Modelo de Raithel e Clemente Perfeito	49
3.1.1.	Estabilidade das Posições de Equilíbrio	52
3.1.2.	Caminhos Não Lineares de Equilíbrio	53
3.1.3.	Superfícies de Energia Potencial Total	59
3.2.	Modelo de Raithel e Clemente com Imperfeição Geométrica Inicial	64
3.2.1.	Estabilidade das Posições de Equilíbrio	66
3.2.2.	Superfícies de Energia do Modelo Imperfeito	66
3.2.3.	Efeito da Magnitude das Imperfeições	67
4	Análise Dinâmica – Vibração Livre	69
4.1.	Modelo de Raithel e Clemente Perfeito	69
4.1.1.	Frequências Naturais	70
4.1.2.	Princípio da Conservação de Energia	77
4.1.3.	Solução Numérica das Equações de Movimento	86
4.1.4.	Relação Frequência - Amplitude	93
5	Análise Dinâmica – Vibração Forçada: Carregamento Axial Periódico	95

5.1. Instabilidade Paramétrica	95
5.1.1. Equação de Mathieu	96
5.2. Fronteiras de Escape	97
5.3. Diagramas de Bifurcação	98
5.4. Bacias de Atração	102
5.5. Modelo de Raithel e Clemente Perfeito	103
5.5.1. Diagramas de Bifurcação	105
5.5.2. Resposta no Tempo e Mapeamento de Poincaré	109
5.5.3. Fronteiras de Escape	110
5.5.4. Fronteiras de Instabilidade Paramétrica	112
5.5.5. Bacias de Atração	114
6 Análise Dinâmica – Vibração Forçada: Excitação de Base	117
6.1. Modelo de Raithel e Clemente	117
6.1.1. Diagramas de Bifurcação	119
6.1.2. Curvas de Ressonância	122
7 Conclusão	126
7.1. Conclusões	126
7.2. Sugestões	128
8 Referências Bibliográficas	129
Apêndice A	136

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Método do comprimento efetivo de coluna (Canadian Institute of Steel Construction, acesso em 22 dez. 2017).	23
Figura 1.2: Cargas críticas para colunas rotuladas na base.	25
Figura 1.3: Cargas críticas para colunas engastadas na base.	25
Figura 1.4: Influência do contraventamento lateral na capacidade de carga de um pórtico simétrico (adaptado de Kala, 2012).	26
Figura 1.5: Condições de contorno para elementos inseridos em um pórtico plano. (adaptado de Hellesland, 2012).	27
Figura 1.6: Consideração de efeitos de segunda ordem (adaptado de Steel Construction, acesso em 22 nov. 2017).	27
Figura 1.7: Influência das condições de contorno da viga na carga crítica e no comportamento pós-crítico da estrutura (adaptado de Galvão <i>et al.</i> , 2005).	30
Figura 1.8: Influência da posição de carregamento na resposta não linear da estrutura para quatro condições de contorno da viga. (adaptado de Galvão <i>et al.</i> , 2005).	30
Figura 1.9: Modos de flambagem típicos em pórticos de telhados. (adaptado de Silvestre e Camotim, 2000).	31
Figura 2.1: Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	39
Figura 2.2: Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	40
Figura 2.3: Modelo para obtenção da energia cinética. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	41
Figura 2.4: Sistema de Amortecimento. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	44
Figura 3.1: Variação das cargas de bifurcação. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	50

Figura 3.2: Formas dos modos críticos. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	51
Figura 3.3: Formas dos modos críticos, para $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	52
Figura 3.4: Caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,4$ .	54
Figura 3.5: Projeções dos caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,4$ .	54
Figura 3.6: Caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,6$ .	55
Figura 3.7: Projeções dos caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,6$ .	55
Figura 3.8: Caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,8$ .	56
Figura 3.9: Projeções dos caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,8$ .	56
Figura 3.10: Caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	56
Figura 3.11: Projeções dos caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	57
Figura 3.12: Caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	57
Figura 3.13: Projeções dos caminhos pós-críticos, $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	57
Figura 3.14: Projeções dos caminhos pós-críticos, plano $\theta_1 \times \theta_2$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	58

Figura 3.15: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,4$ .	60
Figura 3.16: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,6$ .	61
Figura 3.17: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 0,8$ .	62
Figura 3.18: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	63
Figura 3.19: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel & Clemente Perfeito. $\lambda_{cr} = 1,0$ .	63
Figura 3.20: Composição modal das imperfeições.	65
Figura 3.21: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,10$ , $\theta_{10} = \pi/180$ e $\theta_{20} = 2\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	66
Figura 3.22: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,25$ , $\theta_{10} = 0,0$ e $\theta_{20} = \pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	67
Figura 3.23: Superfícies de energia potencial total, para $\alpha = 0,30$ , $\theta_{10} = 2\pi/180$ e $\theta_{20} = -\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	67
Figura 3.24: Efeito da magnitude da imperfeição nas superfícies de energia potencial total. Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	68
Figura 4.1: Configurações do modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica inicial.	70
Figura 4.2: Modos de vibração, para $\alpha=0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	75

Figura 4.3: Variação das frequências naturais com o parâmetro de rigidez $\alpha$ , para $\lambda = 0,0$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	76
Figura 4.4: Variação das frequências naturais com o parâmetro $\lambda$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	77
Figura 4.5: Variação do quadrado das frequências naturais com o parâmetro $\lambda$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	77
Figura 4.6: Retratos de fase, para $\alpha = 0,10$ e $\lambda = 0,20$ e diferentes condições iniciais (C.I.) $(\theta_1, d\theta_1/dt, \theta_2, d\theta_2/dt)$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	80
Figura 4.7: Seções das bacias de atração conservativas em 2D para $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	81
Figura 4.8: Seções das bacias de atração conservativas em 3D $(\theta_1 \times \theta_2 \times d\theta_1/dt)$ , para $d\theta_2/dt = 0,00$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	82
Figura 4.9: Coordenadas auxiliares. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	83
Figura 4.10: Retratos de fase do sistema desacoplado, para $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	85
Figura 4.11: Resposta no tempo, para $\alpha=0,10$ ; $\lambda=0,20$ ; $\theta_1=0,084$ ; $d\theta_1/dt=0,00$ ; $\theta_2=2,209$ ; $d\theta_2/dt=0,00$ ; $\xi_1=\xi_2=0,00$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	87
Figura 4.12: Resposta no tempo, para $\alpha=0,10$ ; $\lambda=0,20$ ; $\theta_1=0,084$ ; $d\theta_1/dt=0,00$ ; $\theta_2=2,209$ ; $d\theta_2/dt=0,00$ ; $\xi_1=\xi_2=0,01$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	88
Figura 4.13: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para $\alpha = 0,10$ ( $\lambda_{cr} = 0,40$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	89
Figura 4.14: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para $\alpha = 0,15$ ( $\lambda_{cr} = 0,60$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	91

Figura 4.15: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para $\alpha = 0,20$ ( $\lambda_{cr} = 0,80$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	92
Figura 4.16: Seções das bacias de atração conservativas em 2D, para $\alpha = 0,30$ ( $\lambda_{cr} = 1,00$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	93
Figura 4.17: Relações frequência-amplitude para $\alpha = 0,10$ e $\lambda = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	94
Figura 5.1: Diagrama de Strutt no plano ( $\delta - \varepsilon$ ) para equação de Mathieu (Nayfeh & Mook, 1995).	97
Figura 5.2: Bifurcação do tipo nó-sela.	99
Figura 5.3: Bifurcação do tipo pitchfork.	100
Figura 5.4: Bifurcação por duplicação de período.	100
Figura 5.5: Bifurcação do tipo Hopf.	101
Figura 5.6: Diagramas de bifurcação típicos (Orlando, 2010).	101
Figura 5.7: Direção da força no Modelo Perfeito. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	104
Figura 5.8: Diagramas de Bifurcação, para $\alpha = 0,10$ , $\lambda = 0,00$ e $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . $\theta_1 \times F$ . $\omega_1 = 1,45$ e $2\omega_1 = 2,9$ .	106
Figura 5.9: Diagramas de Bifurcação, para $\alpha = 0,10$ , $\lambda = 0,20$ e $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . $\theta_1 \times F$ . $\omega_1 = 1,17$ e $2\omega_1 = 2,34$ .	107
Figura 5.10: Diagramas de Bifurcação, para $\alpha = 0,10$ e $\lambda = 0,00$ . $\omega_1 = 1,45$ e $2\omega_1 = 2,9$ .	108
Figura 5.11: Diagramas de Bifurcação, para $\alpha = 0,10$ ; $\lambda = 0,00$ e $F = 0,60$ . $\omega_1 = 1,45$ e $2\omega_1 = 2,9$ .	108
Figura 5.12: Diagramas de Bifurcação, para $\alpha = 0,10$ e $\lambda = 0,20$ . $\omega_1 = 1,17$ e $2\omega_1 = 2,34$ .	109

- Figura 5.13: Respostas no tempo para diferentes níveis de carregamento, considerando diferentes condições iniciais  $(\theta_1, d\theta_1/d\tau, \theta_2, d\theta_2/d\tau)$ , para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$ ,  $F = 0,60$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 110
- Figura 5.14: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha = 0,10$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 111
- Figura 5.15: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 112
- Figura 5.16: Fronteiras de instabilidade paramétrica para  $\alpha = 0,10$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 113
- Figura 5.17: Fronteiras de instabilidade paramétrica para  $\alpha = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 114
- Figura 6.1: Modelo de Raithel e Clemente perfeito sob excitação de base. 117
- Figura 6.2: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_1 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,446$ . 120
- Figura 6.3: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_2 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,446$ . 120
- Figura 6.4: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ ,  $\theta_1 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,171$ . 121
- Figura 6.5: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ ,  $\theta_2 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,171$ . 122
- Figura 6.6: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,446$  e  $\omega_2 = 3,967$ . 123
- Figura 6.7: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,171$  e  $\omega_2 = 3,098$ . 123
- Figura 6.8: Respostas no tempo para diferentes níveis de carregamento, considerando as condições iniciais (C.I.)  $(\theta_1, d\theta_1/d\tau, \theta_2, d\theta_2/d\tau)$ , para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$ ,  $U_b = 0,15$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ . 124

Figura 6.9: Diagramas de Bifurcação (curvas de ressonância),  
para  $\alpha = 0,20$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,582$  e  $\omega_2 = 5,128$ . 125

Figura 6.10: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância),  
para  $\alpha = 0,20$ ,  $\lambda = 0,40$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,203$  e  $\omega_2 = 3,693$ . 125

## Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Modelos Fenomenológicos (adaptado de Gioncu, 1994a).	34
Tabela 1.2: Modelos Estruturais (adaptado de Gioncu, 1994a).	35
Tabela 3.1: Estabilidade dos pontos críticos para $\alpha = 0,10$ e $\lambda = 0,90$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.	59
Tabela 3.2: Composição modal das imperfeições. Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.	65

## Lista de Símbolos

- $A$ , área transversal da coluna;
- $C$ , constante igual ou menor que à energia associada aos pontos de sela dos modelos;
- $C_i$ , parâmetros de amortecimento, expressos pelas taxas de amortecimento  $\xi_i$ ;
- $E$ , parcela de amortecimento;
- $f$ , amplitude da excitação harmônica axial;
- $F$ ,  $f = Fk_t l$
- $F_{esc}$ , amplitude crítica, carga de escape;
- $P_{cr_i}$ , cargas críticas dos modelos;
- $g$ , Aceleração da gravidade;
- $H$ , Hamiltoniano do modelo;
- $K_t$ , constante de rigidez da mola translacional;
- $K_r$ , constante de rigidez da mola rotacional;
- $l$ , comprimento da coluna;
- $L$ , função de Lagrange;
- $P$ , Carga estática aplicada na extremidade livre da coluna;
- $P(t)$ , Carga aplicada na extremidade livre da coluna;
- $P_{Ma}$ , ponto de máximo;
- $P_{Mi}$ , ponto de mínimo;
- $PS$ , ponto de sela;
- $t$ , tempo;

$T$ ,	parcela de energia cinética;
$u$ ,	coordenada auxiliar, para desacoplar os modelos;
$u_b$ ,	amplitude da excitação harmônica de base;
$u_b(t)$ ,	parcela da excitação harmônica de base na direção $x$ ;
$U$ ,	parcela da energia interna de deformação;
$U_b$ ,	$u_b = U_b l$
$v$ ,	coordenada auxiliar, para desacoplar os modelos;
$V$ ,	parcela da energia potencial total;
$y_i$ ,	deslocamentos dos elementos infinitesimais, em cada segmento da coluna;
$x_i$ ,	deslocamentos dos elementos infinitesimais, em cada segmento da coluna;
$\alpha$ ,	relação entre as constantes de rigidez;
$\alpha_{cr}$ ,	valor da relação entre as constantes de rigidez para o qual as cargas de bifurcação do modelo coincidem;
$\beta$	$\beta = \Omega/\omega$
$\delta$ ,	deformação do amortecedor translacional;
$\delta_r$ ,	deformação da mola torsional;
$\delta_t$ ,	deslocamento linear da mola translacional;
$\Delta$ ,	deslocamento vertical total do topo da coluna medido em relação à configuração indeformada da coluna perfeita;
$\Delta_f$ ,	deslocamento vertical da carga na coluna imperfeita;
$\Delta_0$ ,	deslocamento vertical do topo da coluna devido à imperfeição geométrica;
$\lambda_{cr}$ ,	carga crítica;
$\lambda$ ,	fator de carga;
$\omega_i$ ,	frequências naturais dos modelos;
$\Omega$ ,	frequência da excitação harmônica axial ou de base;

- $\theta_{i0}$ , inclinação da coluna (modelo com imperfeição geométrica);
- $\theta_i$ , rotações impostas nas molas, graus de liberdade do Modelo de Raithel e Clemente;
- $\theta_{Di}$ , deslocamentos dinâmicos, deformações devidas ao movimento;
- $\theta_{esti}$ , rotações estáticas;
- $\theta_{Ti}$ , rotações totais;
- $\theta_{Si}$ , deformações das molas sob carregamento estático;
- $\tau$ ,  $\tau=\omega t$ ;
- $\xi_i$ , taxas de amortecimento;
- $\rho$ , peso específico da coluna;
- $\Pi$ , energia potencial total;
- $\phi$ , deformação do amortecedor rotacional

# 1 Introdução

A crescente demanda por grandes espaços utilizáveis nos centros comerciais tem impulsionado a verticalização das edificações. Para viabilizar a construção de edifícios de múltiplos andares econômicos buscam-se sistemas estruturais mais leves e, conseqüentemente, a elementos estruturais mais esbeltos. No entanto, o aumento da esbeltez desses elementos estruturais pode ocasionar a perda de estabilidade antes de se atingir a capacidade de carga da seção. Além disso, sistemas estruturais esbeltos são mais suscetíveis a problemas de vibração e sofrem uma maior influência da não linearidade geométrica no seu comportamento estático e dinâmico. Assim, para um projeto seguro de uma estrutura esbelta, faz-se necessária a utilização do critério de estabilidade combinado a uma análise não linear precisa do seu comportamento pós-crítico.

Para isto, é necessário um profundo conhecimento do comportamento estrutural. Por exemplo, em estruturas reticuladas com elementos estruturais esbeltos sujeitos a compressão, tem-se que o comportamento destes elementos não depende somente de suas próprias características como comprimento e rigidez, mas também da interação com o resto da estrutura, ou seja, de suas condições de contorno. Assim o fato das conexões serem rígidas, semirrígidas ou flexíveis e se o movimento lateral relativo das extremidades da coluna está ou não impedido, tem importância fundamental na carga crítica e no comportamento pós-crítico da estrutura, quando os efeitos de segunda ordem tornam-se importantes.

O estudo da estabilidade e das vibrações de estruturas na pré e pós-flambagem é um tópico importante na análise e no dimensionamento de colunas e pórticos esbeltos, e vem sendo tema de pesquisas, entre as quais podem ser citadas aquelas realizadas por Trahair (1993); King (1995); Sophianopoulos (2003); Machado e Cortinez (2007); Au e Yan (2008) e Xu e Wu (2008), Galvão (2004) e Galvão *et al.* (2005, 2010, 2013) dentre outros.

Existem diversas maneiras de considerar a rigidez dos membros conectados às extremidades de uma coluna. O método mais utilizado em normas de projeto de

coluna de aço ainda é o conceito de comprimento efetivo. Este conceito foi introduzido no AISC – American Institute of Steel Construction - em 1963 (ASCE, 1997), para verificação da estabilidade de uma barra com restrições elásticas à rotação nas suas extremidades. Este método utiliza a mesma equação de equilíbrio crítico que a coluna ideal de Euler (apud Gautschi, 2008), com as condições de contorno específicas aplicadas, levando à seguinte expressão para a carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (1.1)$$

onde  $EI$  é a rigidez à flexão,  $L$  é o comprimento da coluna e  $K$  é o fator de comprimento de flambagem efetivo, dependente das condições de contorno da coluna.

No método do comprimento efetivo de coluna não se considera os efeitos de segunda ordem e o fator de comprimento de flambagem efetivo é baseado na rigidez dos membros adjacentes. Dependendo desta rigidez a estrutura pode ser classificada como: indeslocável (Figura 1.1(a)) ou deslocável (Figura 1.1(b)). Vários estudos recentes abordam a consideração da rigidez dos membros adjacentes na estabilidade da coluna, dentre eles Hellesland (1998), Mageirou e Gantes (2006), Iwicki (2010), Hellesland (2012), Webber et al. (2015), Zhuang (2013) e Kala (2012).

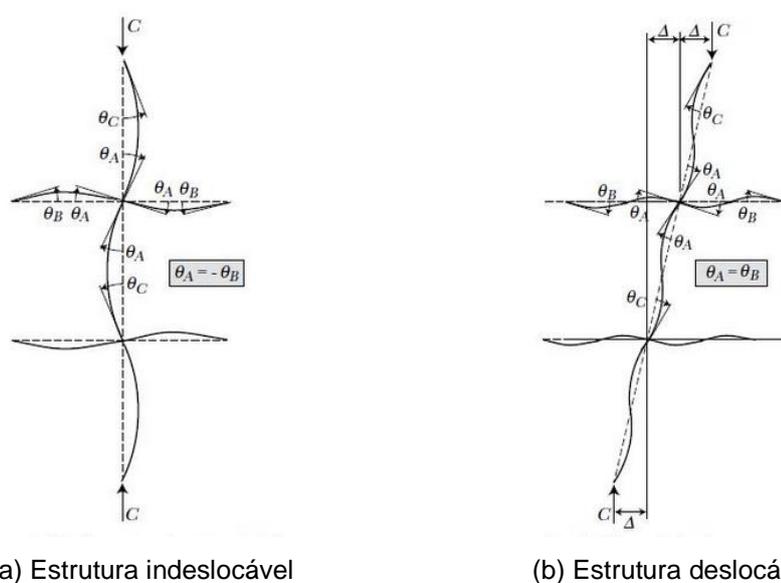


Figura 1.1: Método do comprimento efetivo de coluna (Canadian Institute of Steel Construction, acesso em 22 dez. 2017).

As estruturas deslocáveis são, em geral, não contraventadas, enquanto as estruturas indeslocáveis, em que o deslocamento lateral é efetivamente impedido, são, usualmente, contraventadas. A partir de alguns exemplos simples, pode-se avaliar a influência das restrições ao deslocamento lateral na carga crítica de uma coluna. Como referência é utilizada a expressão da carga crítica de Euler, em que considera-se a carga crítica de flambagem de uma coluna bi-apoiada de comprimento  $L$ , submetida à uma carga axial  $P$ , como obtida por Leonhard Euler (1707-1783) através da seguinte expressão:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.2)$$

Então, para o caso de uma coluna simplesmente apoiada na base com diferentes condições de contorno na extremidade superior (Figura 1.2), verifica-se que se a extremidade superior é livre (Figura 1.2(a)), a carga crítica é igual à zero (estrutura hipostática); se a extremidade superior tem o deslocamento lateral impedido (Figura 1.2(b)), a carga crítica correspondente à carga crítica de Euler  $P_E$ ; e para o caso de uma estrutura com uma mola linear de rigidez  $K_t$  (Figura 1.2(c)) a carga crítica tem um valor intermediário entre os dois valores anteriormente relatados. Seguindo esta mesma linha de raciocínio, apresenta-se na Figura 1.3 o exemplo de uma coluna engastada na base e com diferentes condições de contorno na extremidade superior. Neste caso, a restrição ao deslocamento lateral eleva em mais de oito vezes o valor da carga crítica (vide Figuras 1.3(a) e 1.3(b)). Observa-se assim, que, para estruturas com deslocamento lateral permitido, a carga crítica é bem inferior à carga crítica da estrutura com deslocamento lateral impedido.

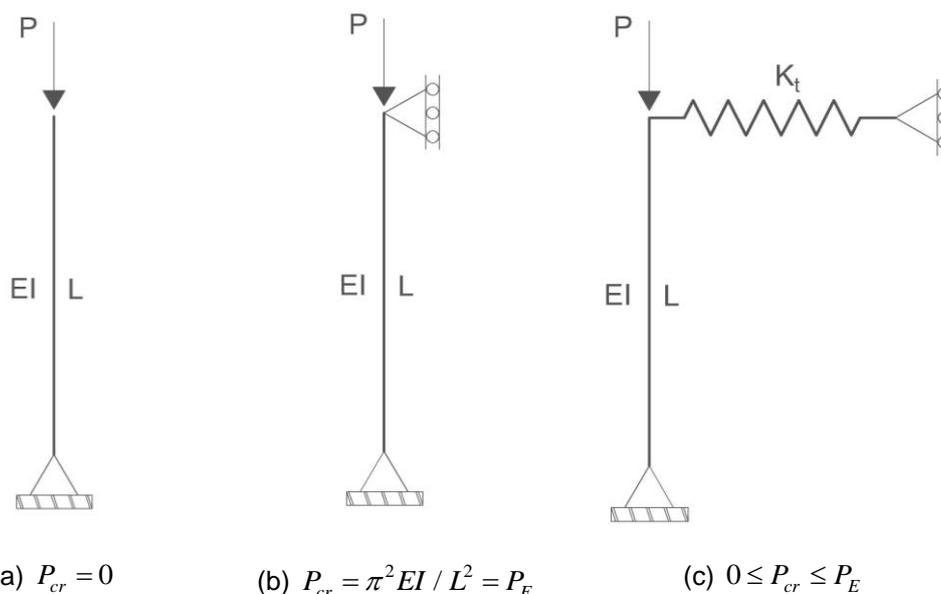


Figura 1.2: Cargas críticas para colunas rotuladas na base.

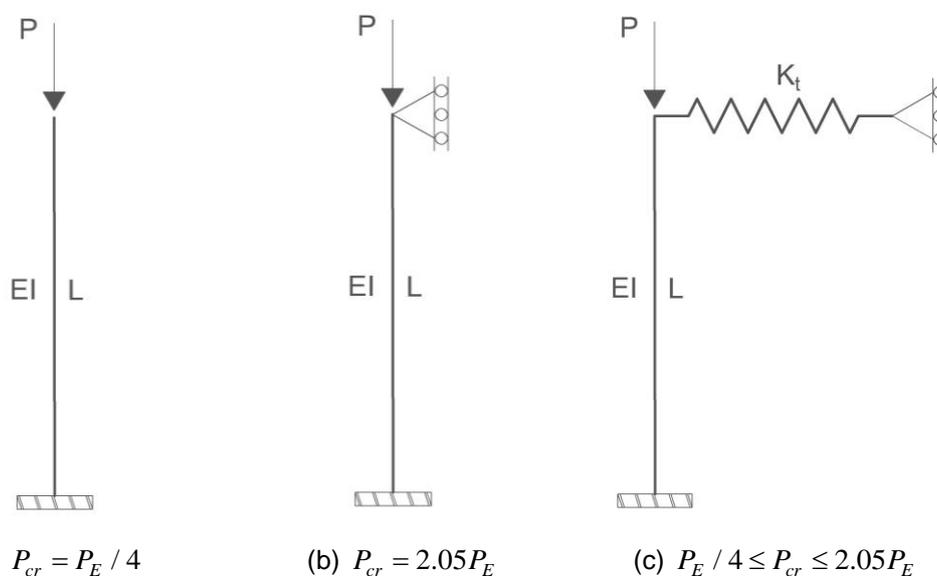


Figura 1.3: Cargas críticas para colunas engastadas na base.

A influência do contraventamento lateral na capacidade de carga de um pórtico simétrico (Figura 1.4) foi estudada em detalhes por Kala (2012). Neste trabalho considera-se a esbeltez não dimensional constante e determina-se todos os pares possíveis de comprimento da coluna,  $h$ , e rigidez da mola linear correspondente,  $K_t$ . Para cada par  $K_t$  e  $h$  determina-se o modo de flambagem da coluna e a carga crítica correspondente. Então, pode-se determinar uma altura crítica da coluna,  $L_{cr}$  (correspondente ao valor fixado de esbeltez da coluna) de forma que se  $h < L_{cr}$ , a carga crítica,  $F_{cr1}$ , é controlada pela rigidez lateral e se

$h > L_{cr}$  a carga crítica,  $F_{cr2}$ , é controlada pela rigidez a flexão. Em ambos os casos a carga de bifurcação  $F_{cr2}$  diminui com o aumento do comprimento das colunas do sistema, sendo  $F_{cr2} \geq F_{cr1}$ . Para certos valores de  $K_t$  e  $h$ , as duas cargas críticas coincidem e pode ocorrer interação modal.

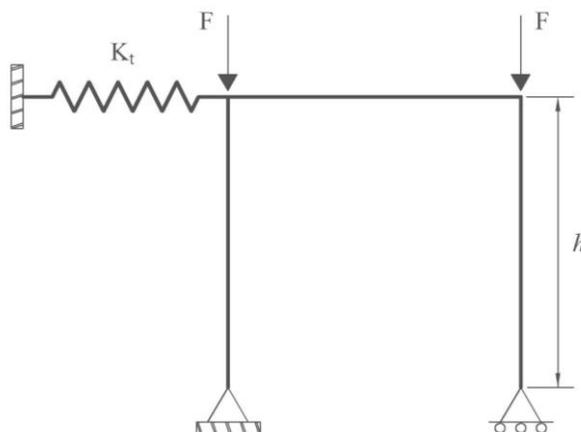


Figura 1.4: Influência do contraventamento lateral na capacidade de carga de um pórtico simétrico (adaptado de Kala, 2012).

Para estruturas de múltiplos pavimentos, a interação entre uma coluna e o restante da estrutura, pode ser representada por molas, como ilustrado para a coluna  $AB$  na Figura 1.5. A rigidez da mola lateral  $K_t$  depende do pavimento no qual a coluna está situada. Se  $K_t \approx \infty$ , o membro é totalmente indeslocável. Se  $K_t = 0$ , o membro é deslocável. Para um valor intermediário de  $K_t$ , ele é parcialmente deslocável. Observando a Figura 1.5(b), a rigidez rotacional  $k_{\theta A}$  é igual à soma das rigidezes rotacionais de todos os membros presentes na ligação, exceto a da própria coluna.

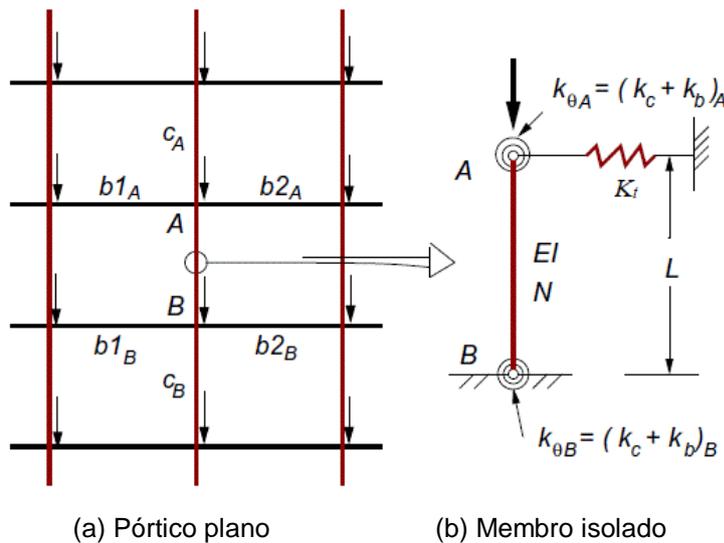


Figura 1.5: Condições de contorno para elementos inseridos em um pórtico plano. (adaptado de Helleland, 2012).

Também a restrição ao deslocamento lateral é importante quando se consideram efeitos de segunda ordem. A sensibilidade de uma estrutura a efeitos de segunda ordem é ilustrada na Figura 1.6, onde se apresenta um pórtico, com conexões rotuladas entre vigas e colunas, restringido lateralmente por uma mola de rigidez  $K_t$ , que representa o sistema de contraventamento, e submetido a uma carga lateral  $H_1$ . Os deslocamentos de primeira e segunda ordem são denominados respectivamente  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Se  $K_t$  é pequeno, os efeitos de segunda ordem são importantes e, se  $K_t$  é grande, há muito pouca amplificação devido à força horizontal aplicada.

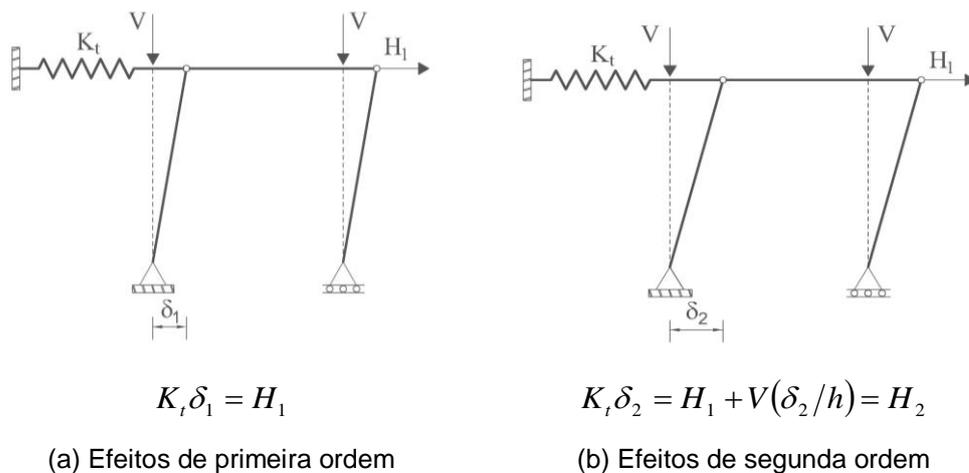


Figura 1.6: Consideração de efeitos de segunda ordem (adaptado de Steel Construction, acesso em 22 nov. 2017).

As normas de projeto fornecem, usualmente, fórmulas e diagramas simplificados para determinação dos comprimentos de flambagem de colunas contraventadas. Em outros casos, o método do comprimento efetivo de coluna adota algumas simplificações, que podem resultar em imprecisões na estimativa da capacidade de carga de uma coluna, em particular nos casos onde não há contraventamento lateral ou este é insuficiente (Iwicki, 2010). Existem outros métodos simplificados como alternativa, como o *the storey-based buckling method*, que pode produzir resultados mais precisos (Yura, 1971; LeMessurier, 1977; Xu e Liu, 2002). Nesta linha de raciocínio, estão incluídos os métodos que empregam forças horizontais fictícias para contabilizar os efeitos desestabilizantes, tais como imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais. Este método é utilizado nas normas australiana (AS4100, 1990) e canadense (CSA-A16.1, 1994), além do código europeu prEN 1993-3 (2003). A atual norma brasileira de estruturas de aço NBR 8800:2008, a norma americana de perfis pesados (AISC, 2005a) e a norma americana de perfis formados a frio (AISI, 2006), utilizam uma versão modificada do método das forças horizontais fictícias, proposta por Hajjar e White (2000), para avaliar a instabilidade de pórticos planos.

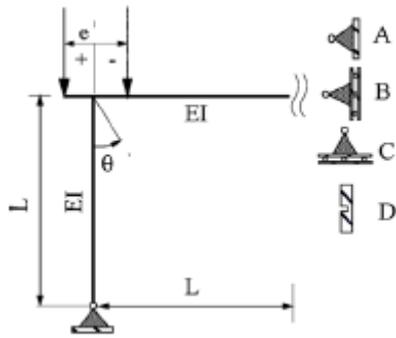
Nas estruturas reais, entretanto, investigações experimentais têm demonstrado que a maioria das conexões entre os elementos estruturais metálicos devem ser tratadas como ligações semi-rígidas, usando curvas momento-rotação para descrever o seu comportamento. Torna-se necessário, portanto, incorporar o efeito da resistência e da flexibilidade (ou rigidez) da ligação na análise do sistema estrutural e dessa forma representar o comportamento verdadeiro do pórtico. Entre os trabalhos surgidos nos últimos anos que tratam da análise não linear estática de pórticos com conexões semi-rígidas pode-se citar Sekulovic *et al.* (2002), King (1995), Chen e Kishi (1989); Abdalla e Chen (1995), Galvão (2004) e Galvão *et al.* (2005 e 2010).

De maneira geral, para estruturas apertadas esbeltas, sujeitas a não linearidade, o comportamento pós-crítico é afetado pelos membros adjacentes e pode incluir a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos de máximo e mínimo ao longo do caminho não linear de equilíbrio (pontos limite) onde a estrutura pode apresentar saltos dinâmicos. Esse é o caso dos pórticos em L e dos pórticos que formam a estrutura de telhados.

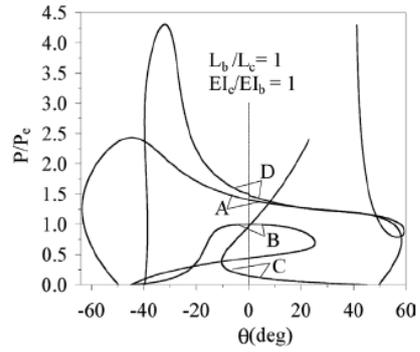
Os pórticos em L são conhecidos na literatura como pórticos de Roorda, que analisou experimentalmente o comportamento pós-crítico desta estrutura (Roorda, 1965). Koiter (1967), Roorda e Chilver (1970), Rizzi *et al.* (1980) e Bazant e Cedolin (1991) determinaram a inclinação e a curvatura inicial da resposta pós-crítica do pórtico de Roorda. Esses dois parâmetros são suficientes para caracterizar o tipo de bifurcação, podendo ainda ser usados para estimar a sensibilidade da estrutura a imperfeições. Essas soluções aproximadas podem, entretanto, descrever somente a região inicial do comportamento pós-crítico do pórtico e são incapazes de descrever o comportamento do pórtico sob grandes deslocamentos ou com grandes imperfeições iniciais (Galvão, 2004).

Galvão *et al.* (2005) conduziram uma análise paramétrica detalhada da influência do contraentamento lateral no pórtico de Roorda, usando uma formulação não linear de elementos finitos, considerando quatro diferentes condições de apoio na extremidade da viga (Figura 1.7(a)). Na Figura 1.7(b) estão representados os caminhos pós-críticos para os quatro casos considerados e na Figura 1.7(c) são ilustradas configurações deformadas dos pórticos considerando rotações positivas e negativas da extremidade superior da coluna. Como se pode observar, as restrições laterais têm grande influência não só na carga crítica, mas também no caminho pós-crítico do pórtico. Os resultados evidenciam mais uma vez a importância das restrições ao deslocamento lateral no comportamento da estrutura, levando o apoio C à menor carga crítica e a uma acentuada declividade inicial do caminho pós-crítico.

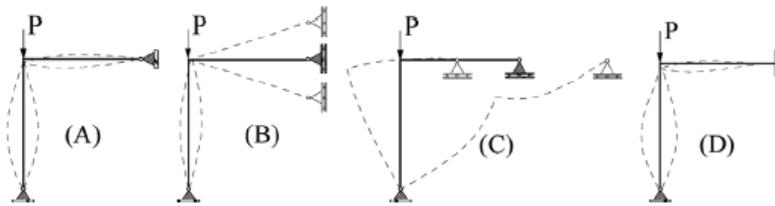
A influência da excentricidade da carga  $P$  (aplicada à esquerda ou à direita do eixo da coluna, Figura 1.7(a)), para as diferentes condições de contorno, é mostrada na Figura 1.8. Analisando essas figuras pode-se constatar que, de um modo geral, o pórtico exibe uma capacidade de carga  $P_{lim}$  inferior a  $P_{cr}$ ; e, quanto maior a imperfeição, ou inclinação inicial do caminho pós-crítico, menor é  $P_{lim}$ , indicando que o sistema estrutural é sensível a imperfeições.



(a) Pórtico em L com diferentes condições de apoio

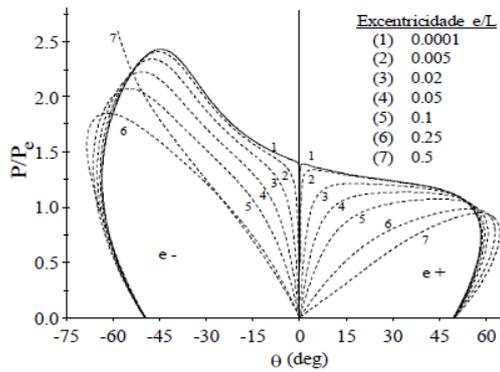


(b) Trajetórias de equilíbrio

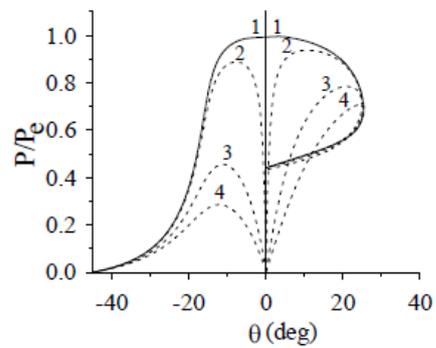


(c) Configurações deformadas

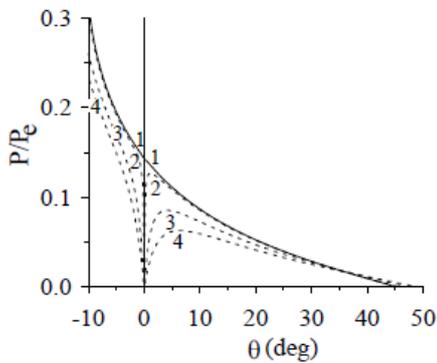
Figura 1.7: Influência das condições de contorno da viga na carga crítica e no comportamento pós-crítico da estrutura (adaptado de Galvão *et al.*, 2005).



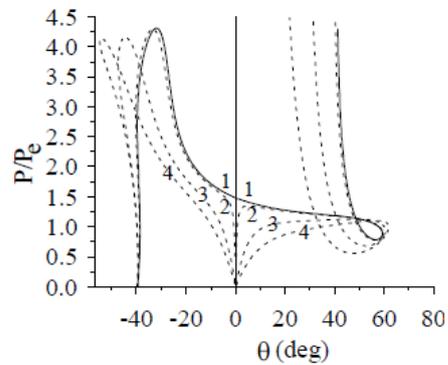
(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C



(d) Caso D

Figura 1.8: Influência da posição de carregamento na resposta não linear da estrutura para quatro condições de contorno da viga. (adaptado de Galvão *et al.*, 2005).

Silvestre e Camotim (2000) conduziram um estudo em pórticos que formam a estrutura de telhados (pitched roofs). Inicialmente um modelo conceitual com dois graus de liberdade é analisado e posteriormente são obtidos os resultados analíticos e numéricos (método dos elementos finitos) para estruturas reais. Este tipo de estrutura apresenta dois modos de flambagem: um simétrico e um antissimétrico (Figura 1.9), ambos apresentam deslocamento lateral, e pode ocorrer interação modal entre estes. Verifica-se que o sistema estrutural é sensível a imperfeições que podem ocasionar o efeito *snap-through*.

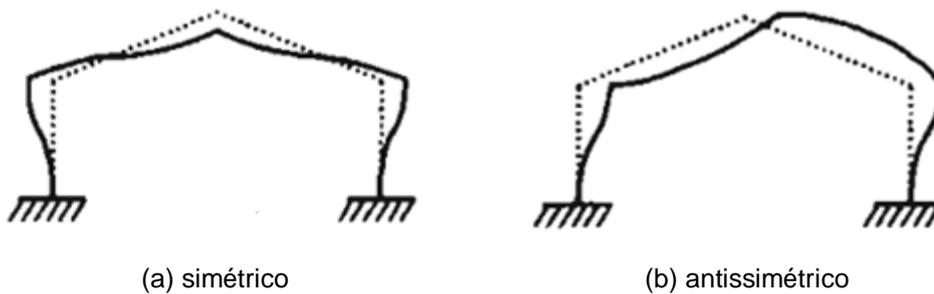


Figura 1.9: Modos de flambagem típicos em pórticos de telhados. (adaptado de Silvestre e Camotim, 2000).

Portanto, é necessário desenvolver uma abordagem eficaz para determinar a estabilidade destas estruturas sujeitas a não linearidade geométrica e imperfeições, a fim de assegurar sua segurança durante toda sua vida operacional, com intuito de evitar consequências catastróficas.

Assim, a compreensão do fenômeno de perda de estabilidade em sistemas estruturais passa pela determinação da carga crítica e do modo crítico, da solução pré-crítica (solução fundamental) e das soluções pós-críticas e soluções secundárias, além do estudo da sensibilidade a imperfeições. A análise pós-flambagem, baseada no trabalho de Koiter (1967) e amplamente estabelecida pelos trabalhos de Croll e Walker (1972); Thompson e Hunt (1973); Hutchinson (1974) e Bazant e Cedolin (1991), mostra como esta análise pode auxiliar na compreensão do comportamento não linear de estruturas suscetíveis a flambagem. Isto é de fundamental interesse em estruturas sensíveis à imperfeição como aquelas que apresentam bifurcação simétrica instável e bifurcação assimétrica, pois estas podem sofrer flambagem para valores inferiores à carga crítica teórica devido ao efeito de imperfeições iniciais, excentricidades de carregamento e/ou perturbações dinâmicas.

Para níveis de carregamento inferiores à carga crítica, tais sistemas exibem mais de um ponto de equilíbrio, sendo a posição de equilíbrio estável pré-flambagem rodeada por pontos de sela, pontos de equilíbrio instável, que definem a fronteira do vale potencial pré-flambagem. Assim, se as perturbações ultrapassarem a fronteira do vale pré-flambagem, a resposta pode divergir para uma nova posição de equilíbrio ou para infinito. Esta região segura decresce com o aumento da carga estática e se torna nula no ponto crítico. Portanto, a carga crítica é apenas um limite superior da capacidade de carga da estrutura. As imperfeições diminuem a carga de flambagem e ao mesmo tempo mudam a topologia da energia potencial do sistema, diminuindo a região segura, mudando conseqüentemente seu comportamento dinâmico não linear e sua estabilidade global (Gonçalves *et al.*, 2007). O comportamento deste tipo de estrutura pode tornar-se ainda mais complexo se houver frequências naturais coincidentes ou quase coincidentes, levando o sistema a uma possível ressonância interna (Del Prado, 1999 e Gonçalves e Del Prado, 2005).

Outra motivação para o estudo da estabilidade estática e dinâmica de estruturas aperticadas é a influência do acoplamento modal em sistemas estruturais com vários graus de liberdade, que podem influenciar de forma significativa o comportamento e a capacidade de carga da estrutura. O acoplamento modal ou interação modal acontece quando a diferença entre as cargas críticas associadas a diferentes modos de flambagem é muito pequena ou nula, dando origem, através da não linearidade, a soluções pós-críticas acopladas, usualmente instáveis e com comportamento muitas vezes distinto do comportamento associado às soluções desacopladas.

Hoje é bem conhecido que dois modos de bifurcação estáveis podem gerar, por interação, um comportamento pós-crítico completamente instável com grande sensibilidade às imperfeições geométricas. Neste campo destacam-se as pesquisas de Koiter (1967); Chilver (1967); Thompson e Hunt (1973); Johns (1974), Cowell e Hunt (1985), Hunt *et al.* (1986), Gioncu (1994a, 1994b), Gioncu *et al.* (1992); Dubina e Ungureanu (2014) e Hancock (2017), dentre outros.

Outra característica usual de estruturas com acoplamento modal é a existência de diversas simetrias (Hunt *et al.*, 1986). Sistemas estruturais perfeitos apresentam certas características de simetria, havendo uma tendência para que esta simetria seja mantida ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. A

simetria do sistema físico leva a uma simetria dos modos clássicos de bifurcação, já que amplitudes iguais e opostas geram uma mesma configuração deformada, exibindo o mesmo valor de energia potencial total (Del Prado, 2001).

Uma das exigências no estudo do acoplamento modal é que o modelo utilizado possua um número de graus de liberdade que sejam capazes de descrever qualitativa e quantitativamente o comportamento não linear do sistema estrutural. Este fenômeno foi investigado por vários autores que seguiram duas linhas de pesquisa principais: a primeira baseada no “fenômeno de localização”, em que os trabalhos de pesquisa de Hunt (1989) e Luongo (1991) são exemplos deste tipo; a segunda refere-se à quebra de simetria no caso de instabilidade acoplada, estudada por Hunt (1982 e 1986), Hunt e Burgan (1985) e por Luongo e Pignataro (1992). A interação de dois modos apresentando bifurcação simétrica estável produz uma bifurcação assimétrica ou simétrica instável como resultado desta quebra de simetria e um aumento na sensibilidade a imperfeições.

Gioncu (1994) apresenta diversos modelos conceituais para explicar os diferentes tipos de acoplamento modal. Usando estes modelos, os fenômenos de instabilidade podem ser descritos com apenas alguns parâmetros e poucos graus de liberdade, mantendo, entretanto, suas características fundamentais. Assim, o comportamento de uma estrutura complexa é equivalente, em essência, ao comportamento de um modelo mais simples. Existem dois tipos de modelos: os modelos fenomenológicos, que não apresentam semelhança física com a estrutura (Tabela 1.1) e os modelos estruturais, que simulam o comportamento das estruturas nos aspectos mais importantes (Tabela 1.2).

Tabela 1.1: Modelos Fenomenológicos (adaptado de Gioncu, 1994a).

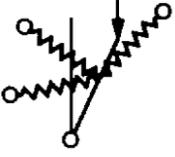
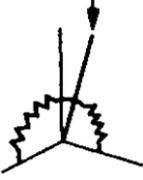
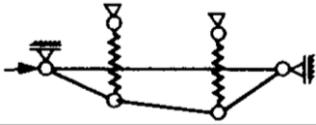
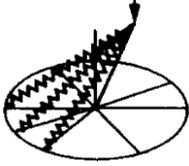
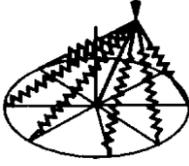
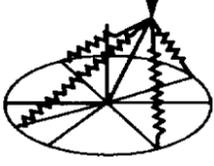
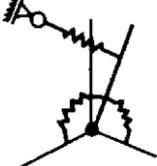
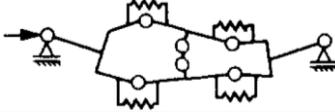
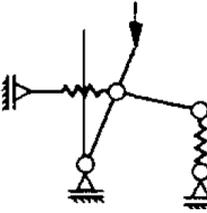
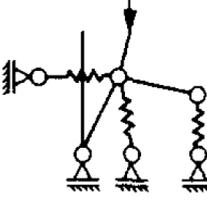
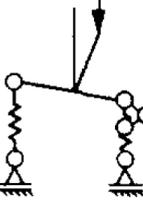
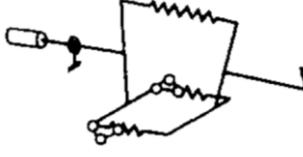
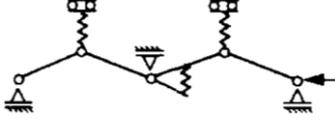
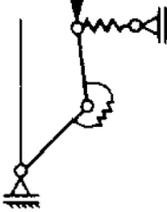
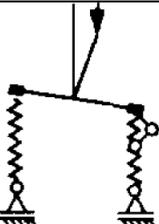
Autor	Ano	Modelo	Tipo de Instabilidade
Koiter	1962		Semi-simétrica
Augusti	1964		Dupla-simetria
Chilver	1966		Semi-simétrica Dupla-simetria
Thompson e Gaspar	1977		Semi-simétrica
Gaspar	1977		Semi-simétrica Dupla-simetria
Gioncu - Ivan	1979		Dupla-simetria
Luongo - Pignataro	1989		Quase-simétrica Assimetria oculta

Tabela 1.2: Modelos Estruturais (adaptado de Gioncu, 1994a).

Autor	Ano	Modelo	Tipo de Instabilidade
Croll	1975		Flambagem global e local
Budiansky-Hutchinson	1979		Flambagem global e local
Hunt – Williams	1984		Efeito de loop
Hunt - Burgan	1985		Assimetria oculta em flambagem plástica
Menken – Stallenberg	1989		Flambagem local e lateral
Hunt	1989		Flambagem localizada padrão
Raithel e Clemente	1994		Flambagem global e lateral
Gioncu	1992		Flambagem elasto-plástica

Na literatura encontram-se alguns outros modelos simplificados com interação modal, tais como: Thompson e Hunt (1984), El Naschie (1990), Hansen (1977), Hunt *et al.* (1979), Silvestre e Camotim (2000), Sophianopoulos (2007) e Teng e Hong (2006).

Dentre os modelos fenomenológicos destaca-se o modelo de Augusti (Augusti, 1964) que representa uma grande classe de problemas que apresentam acoplamento modal, cujo estudo foi amplamente detalhado por Croll e Walker (1972), Bazant e Cedolin (1991), Raftoyiannis e Kounadis (2000) e Orlando (2010), dentre outros. Este modelo apresenta duas cargas críticas iguais associadas a dois modos de flambagem distintos. Quando considerados desacoplados, esses modos levam a um comportamento pós-crítico estável (bifurcação simétrica estável). Porém, quando se considera o acoplamento entre os dois modos, as soluções pós-críticas desacopladas tornam-se instáveis e surgem novas soluções pós-críticas instáveis que passam a definir o comportamento estático e dinâmico da estrutura para cargas inferiores à carga crítica.

Dentre os modelos estruturais destaca-se o modelo de Raithel e Clemente (1994) que considera a interação entre a rigidez a flexão e a rigidez lateral de um sistema de dois graus de liberdade (vide Tabela 1.2). O modelo apresenta duas cargas críticas que podem coincidir dependendo do parâmetro de rigidez relativa. Dependendo da rigidez relativa, podem surgir diversas soluções pós-críticas instáveis devido ao acoplamento modal. Entretanto os autores apresentam apenas as cargas e modos de bifurcação deste modelo e comentam sobre a possível interação modal.

Embora existam muitos trabalhos publicados sobre acoplamento modal, a grande maioria das investigações está limitada a análise destas estruturas sob cargas estáticas. A análise da instabilidade dinâmica, apesar de sua grande importância para engenharia estrutural, tem recebido pouca atenção na literatura.

No âmbito da dinâmica não linear de sistemas com interação modal e sujeitos a bifurcações instáveis, destaca-se o trabalho recente de Orlando (2010), que, usando as ferramentas da dinâmica não linear, estudou a instabilidade estática e dinâmica do modelo de Augusti (1964) e do modelo proposto por Thompson e Gaspar (1977) para uma torre estaiada (ver Tabela 1.2). Em particular foi estudada, com base na evolução de bacias de atração, a variação da região segura da solução fundamental delimitada pelas variedades instáveis dos pontos de sela

das soluções pós-críticas. Porém, muitas vezes, a identificação desta região segura não é trivial, particularmente quando se tem a presença de imperfeições geométricas e perturbações dinâmicas (Orlando, 2010). Orlando et al. (2011, 2013a, 2013b) mostraram como o acoplamento modal pode influenciar o comportamento destes modelos sob cargas dinâmicas, a multiplicidade dos modos não lineares de vibração, que pode ser maior que o número de graus de liberdade, e as possíveis ressonâncias internas.

### **1.1. Objetivo**

Este trabalho se insere na linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio. Encontram-se na literatura poucas referências sobre interação modal de estruturas apertadas esbeltas. Com o objetivo de estudar a interação entre a flambagem por flexão e a flambagem lateral desta classe de estruturas, o presente trabalho analisa de forma detalhada, usando as ferramentas da teoria da estabilidade de estruturas e da dinâmica não linear, o modelo simplificado proposto por Raithel e Clemente (1994) sob cargas estáticas e dinâmicas. Pretende-se, com isto, fornecer uma contribuição adicional ao entendimento da instabilidade estática e dinâmica de sistemas estruturais sujeitos ao fenômeno de acoplamento modal. O comportamento dinâmico não linear de estruturas com interação modal ainda não está totalmente entendido e novos fenômenos estão ainda sendo ou por serem descobertos. Recentemente, devido aos avanços teóricos e numéricos na área de dinâmica não linear, tornou-se possível estudar estes fenômenos não lineares com uma maior profundidade.

### **1.2. Organização do Trabalho**

O presente trabalho constitui-se de sete capítulos, incluindo este de introdução, onde são apresentados conceitos básicos, revisão bibliográfica e objetivos da dissertação.

No capítulo 2, apresenta-se a formulação matemática utilizada para descrever o comportamento dinâmico não linear do modelo de Raithel e

Clemente. São apresentadas as formulações para a análise estática e dinâmica, considerando a influência da rigidez relativa das molas e o efeito de imperfeições geométricas.

O capítulo 3 mostra uma análise minuciosa da estabilidade estática do modelo em estudo, com ênfase na influência do acoplamento modal e das imperfeições nos caminhos de equilíbrio pré e pós-críticos, em sua estabilidade e na topologia da superfície de energia potencial, que governa o comportamento dinâmico da estrutura.

No capítulo 4, apresenta-se o comportamento dinâmico do modelo em vibração livre. Inicialmente são determinadas as frequências naturais e os modos lineares de vibração. A seguir, estuda-se, usando-se o princípio da conservação da energia, a influência do acoplamento modal na região segura pré-crítica. Finalmente, é identificada a relação frequência-amplitude, informação fundamental para a compreensão da dinâmica sob vibração forçada.

No capítulo 5, apresenta-se o comportamento dinâmico e instabilidade paramétrica do modelo sob um carregamento axial harmônico (vibração forçada). A influência do acoplamento modal é estudada através das fronteiras de estabilidade, das bifurcações associadas a estas fronteiras e da evolução das bacias de atração.

No capítulo 6, apresenta-se o comportamento dinâmico do modelo sob vibração forçada, gerada por uma excitação de base. Novamente a influência do acoplamento modal é estudada através das fronteiras de estabilidade e das bifurcações associadas a estas fronteiras.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Formulação do Problema

### 2.1. Modelo de Raithel e Clemente

Neste capítulo é apresentada uma análise detalhada do modelo conceitual apresentado por Raithel e Clemente em 1994 (Raithel e Clemente, 1994). Esse sistema estrutural discreto é formado por duas barras rígidas de comprimento  $l/2$  cada, conectadas entre si por uma mola de rigidez rotacional com rigidez constante,  $K_r$ . Esta estrutura é rotulada na extremidade inferior e apoiada lateralmente na extremidade superior por uma mola translacional de rigidez constante,  $K_t$ . A Figura 2.1 apresenta o modelo estudado e as variáveis que o caracterizam.

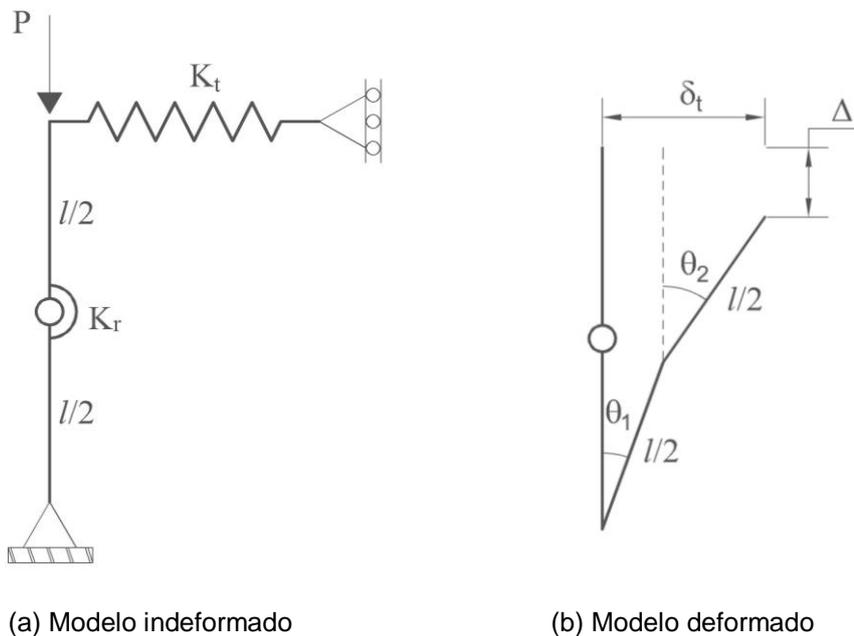


Figura 2.1: Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Na Figura 2.1,  $P$  é a carga axial na extremidade superior do conjunto,  $\Delta$  é o deslocamento vertical do topo da estrutura,  $\delta_t$  o deslocamento horizontal do

topo da coluna e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações das barras, sendo estas as coordenadas generalizadas que representam os dois graus de liberdade do sistema.

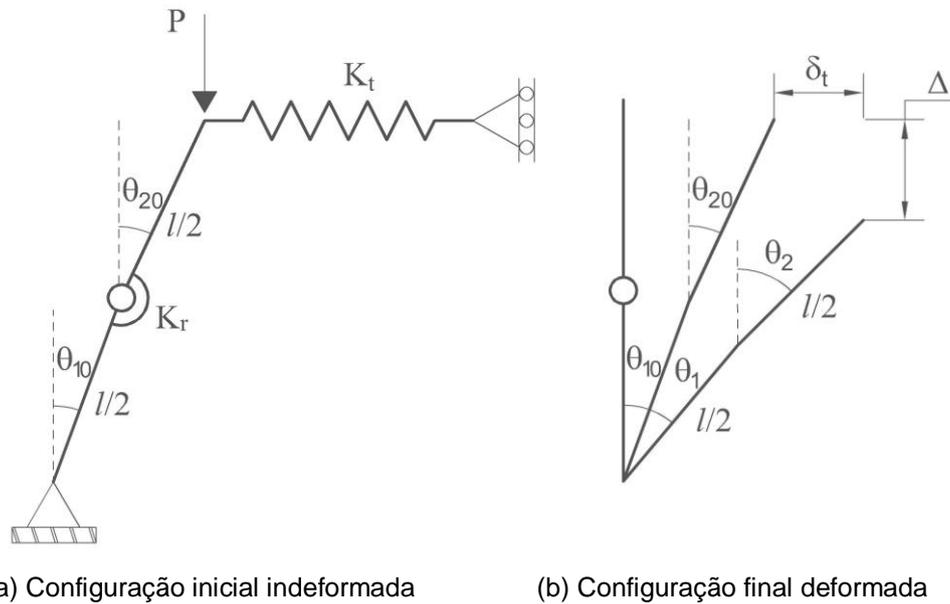


Figura 2.2: Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Considerando-se a existência de imperfeições geométricas iniciais na formulação do problema, tem-se que a configuração inicial indeformada do sistema passa a ser definida pelos ângulos  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$ , como mostra a Figura 2.2(a). A configuração final deformada é apresentada na Figura 2.2(b).

A partir das Figuras 2.1 e 2.2, pode-se escrever que:

$$\delta_r = (\theta_2 - \theta_1) - (\theta_{20} - \theta_{10}) \quad (2.1)$$

onde o ângulo  $\delta_r$  representa a deformação da mola rotacional.

Observando a Figura 2.2, tem-se que a deformação da mola no topo da coluna é dada por:

$$\delta_t = \frac{l}{2} [(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2) - (\text{sen}\theta_{10} + \text{sen}\theta_{20})] \quad (2.2)$$

### 2.1.1. Energia Cinética

A energia cinética é obtida pelo somatório das energias cinéticas das duas barras rígidas. As barras têm massa por unidade de volume  $\rho$  e área da seção transversal  $A$ .

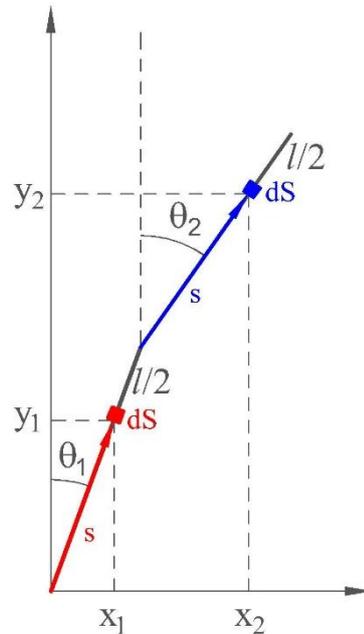


Figura 2.3: Modelo para obtenção da energia cinética. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Considerando em cada barra um elemento infinitesimal de comprimento  $ds$ , como representado na Figura 2.3 e tendo como referência a posição inicial da estrutura perfeita, tem-se que a energia cinética total pode ser escrita na forma:

$$T = \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \rho A (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) ds + \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \rho A (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) ds \quad (2.3)$$

onde  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  são as componentes de velocidade referentes, respectivamente, aos deslocamentos  $x_i$  e  $y_i$  de cada elemento infinitesimal de massa  $\rho A ds$ .

Da Figura 2.3, tem-se que:

$$x_1 = s \operatorname{sen} \theta_1 \quad (2.4a)$$

$$x_2 = \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta_1 + s \operatorname{sen} \theta_2 \quad (2.4b)$$

$$y_1 = s \cos \theta_1 \quad (2.4c)$$

$$y_2 = \frac{l}{2} \cos \theta_1 + s \cos \theta_2 \quad (2.4d)$$

Por fim, derivando as expressões (2.4) com relação ao tempo e substituindo essas componentes de velocidade na expressão (2.3), obtém-se a energia cinética em termos dos graus de liberdade  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a saber:

$$T = \frac{1}{48} \rho A l^3 (3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + (\dot{\theta}_2)^2 + 4(\dot{\theta}_1)^2) \quad (2.5)$$

### 2.1.2. Energia Potencial Total

A energia potencial total é dada pela soma da parcela da energia interna de deformação e o potencial gravitacional das cargas externas.

Considerando a coluna imperfeita, tem-se que a parcela da energia interna de deformação,  $U$ , e a parcela do potencial gravitacional das cargas externas,  $V$ , são dados por:

$$U = \frac{1}{2} K_r \delta_r^2 + \frac{1}{2} K_t \delta_t^2 \quad (2.6a)$$

$$V = P\Delta \quad (2.6b)$$

A variável  $\Delta$  representa o deslocamento vertical da carga na estrutura imperfeita e pode ser calculado como a diferença entre o deslocamento vertical,  $\Delta_0$ , devido à imperfeição geométrica e o deslocamento vertical total medido em relação à configuração indeformada da coluna perfeita (posição de referência),  $\Delta_f$ , isto é,  $\Delta = \Delta_0 - \Delta_f$ . Estas parcelas são dadas por:

$$\Delta_f = \frac{l}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (2.7a)$$

$$\Delta_0 = \frac{l}{2}(\cos\theta_{10} + \cos\theta_{20}) \quad (2.7b)$$

Utilizando as expressões (2.6), (2.1), (2.2) e (2.7), a energia interna de deformação,  $U$ , e o potencial gravitacional das cargas externas,  $V$ , são dados por:

$$U = \frac{1}{2}K_r [(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_{20} - \theta_{10})]^2 + \frac{1}{2}K_t \left\{ \frac{l}{2} [(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) - (\sin\theta_{10} + \sin\theta_{20})] \right\}^2 \quad (2.8a)$$

$$V = P \frac{l}{2} [(\cos\theta_{10} + \cos\theta_{20}) - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)] \quad (2.8b)$$

Assim, a energia potencial total do sistema imperfeito pode ser escrita em termos dos graus de liberdade  $\theta_1$  e  $\theta_2$  como:

$$\begin{aligned} \Pi = U - V = & \frac{1}{2}K_r [(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_{20} - \theta_{10})]^2 \\ & + \frac{1}{2}K_t \left\{ \frac{l}{2} [(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) - (\sin\theta_{10} + \sin\theta_{20})] \right\}^2 \\ & - P \frac{l}{2} [(\cos\theta_{10} + \cos\theta_{20}) - (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Admite-se, ainda, que a rigidez da mola rotacional pode ser escrita em função da rigidez da mola translacional, de forma que:

$$K_r = \alpha K_t l^2 \quad (2.10)$$

onde a variável  $\alpha$  representa o fator de proporcionalidade entre as rigidezes. Para simplificar a formulação, admite-se que a carga axial,  $P$ , é função de um fator de carga  $\lambda$ , da forma:

$$P = \lambda K_l l \quad (2.11)$$

Desta forma, a energia potencial total do sistema imperfeito pode ser escrita em uma forma adimensional, em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ , como:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \alpha [(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_{20} - \theta_{10})]^2 \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - (\sin \theta_{10} + \sin \theta_{20})] \right\}^2 \\ & - \lambda \frac{1}{2} [(\cos \theta_{10} + \cos \theta_{20}) - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $\alpha = K_r / K_l l^2$  e  $\lambda = P / K_l l$ .

### 2.1.3. Amortecimento

Para a análise do sistema dinâmico é necessária a escolha de um modelo de amortecimento com a finalidade de entender como a energia mecânica é dissipada e sua relação com a velocidade e a amplitude de vibração. Dentre os modelos ideais, tem-se o chamado amortecimento viscoso onde a força de amortecimento é proporcional à velocidade do sistema.

A Figura 2.4 apresenta o sistema de amortecimento utilizado, formado por dois amortecedores discretos.

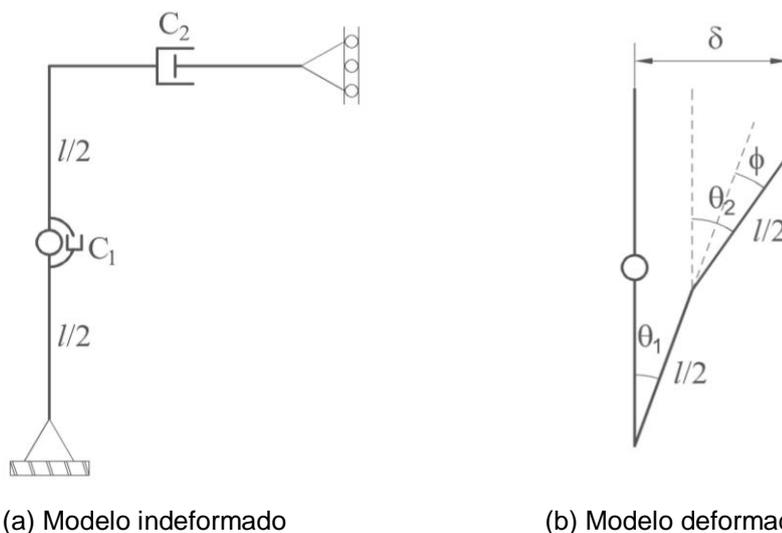


Figura 2.4: Sistema de Amortecimento. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Para se considerar o amortecimento, adiciona-se ao funcional de energia a função de dissipação de Rayleigh:

$$E = \frac{1}{2}C_1\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{\delta}^2 \quad (2.13)$$

onde  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\delta}$  são as componentes de velocidade referentes aos deslocamentos  $\phi$  e  $\delta$  dos amortecedores.

Da Figura 2.4, tem que:

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.14a)$$

$$\delta = \frac{l}{2}(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2) \quad (2.14b)$$

Por fim, derivando (2.14) em relação ao tempo e substituindo estas componentes de velocidades na expressão (2.13), obtém-se a função de dissipação de Rayleigh em termos dos graus de liberdade  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$E = \frac{1}{2}C_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}C_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \frac{l}{2}\dot{\theta}_2 \cos\theta_2\right)^2 \quad (2.15)$$

onde  $C_i$  são os coeficientes de amortecimento, que podem ser expressos em termos dos fatores de amortecimento,  $\xi_i$ , e das frequências naturais do modelo,  $\omega_i$  (Chopra, 2007), de acordo com as seguintes relações:

$$2\omega\xi_1 = \frac{C_1}{A\rho l^3} \quad (2.16a)$$

$$2\omega\xi_2 = \frac{C_2 L^2}{4A\rho l^3} \quad (2.16b)$$

#### 2.1.4. Função de Lagrange

Com base nas expressões da energia cinética (2.5), da energia potencial total (2.8) e do amortecimento (2.15), tem-se que a função de Lagrange do modelo discreto,  $L = T + E - \Pi$ , é dada por:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{48} \rho A l^3 (3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + (\dot{\theta}_2)^2 + 4(\dot{\theta}_1)^2) \\
 & + \frac{1}{2} C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{l}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right)^2 \\
 & - \frac{1}{2} K_r [(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_{20} - \theta_{10})]^2 \\
 & - \frac{1}{2} K_t \left\{ \frac{l}{2} [(\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2) - (\operatorname{sen} \theta_{10} + \operatorname{sen} \theta_{20})] \right\}^2 \\
 & + P \frac{l}{2} [(\cos \theta_{10} + \cos \theta_{20}) - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde  $\theta_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{\theta}_i$  as velocidades generalizadas,  $\partial L / \partial \theta = \dot{p}_i$  as forças generalizadas e  $\partial L / \partial \dot{\theta}_i = p_i$  as quantidades de movimento generalizadas.

Cabe aqui lembrar que as imperfeições não influenciam a energia cinética nem a função de dissipação de Rayleigh, já que as derivadas dos termos contendo a imperfeição com relação ao tempo são nulas.

#### 2.1.5. Equações de Movimento

As equações de movimento são obtidas usando o princípio de Hamilton. As equações diferenciais de Euler-Lagrange, em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas  $q_i$ , são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\Pi)}{\partial q_i} + \frac{\partial(E)}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.18}$$

Com base nas expressões (2.17) e (2.18), obtém-se as seguintes equações de movimento em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} & \rho A l^3 \left( \frac{1}{6} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_2 \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 \right) \\ & \left( + \frac{1}{16} (\dot{\theta}_2)^2 \text{sen} \theta_1 \text{cos} \theta_2 - \frac{1}{16} (\dot{\theta}_2)^2 \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \right) \\ & - C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + C_2 \frac{l^2}{4} (\dot{\theta}_1 \text{cos} \theta_1^2 + \dot{\theta}_2 \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2) \\ & + \frac{K_t l^2}{4} (\text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_1 + \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2) + K_r (\theta_1 - \theta_2) \\ & - \frac{P}{2} l \text{sen} \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} & \rho A l^3 \left( \frac{1}{24} \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_1 \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 \right) \\ & \left( - \frac{1}{16} (\dot{\theta}_1)^2 \text{sen} \theta_1 \text{cos} \theta_2 + \frac{1}{16} (\dot{\theta}_1)^2 \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \right) \\ & + C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + C_2 \frac{l^2}{4} (\dot{\theta}_1 \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 + \dot{\theta}_2 \text{cos} \theta_2^2) \\ & + \frac{K_t l^2}{4} (\text{cos} \theta_2 \text{sen} \theta_1 + \text{cos} \theta_2 \text{sen} \theta_2) + K_r (-\theta_1 + \theta_2) \\ & - \frac{P}{2} l \text{sen} \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.19b)$$

onde se observam não linearidades geométricas e inerciais. Realizando uma mudança da variável tempo, de forma que:

$$\tau = \omega t \quad (2.20)$$

e adotando-se o parâmetro de frequência:

$$\omega^2 = \frac{K_t l^2}{A \rho l^3} \quad (2.21)$$

pode-se, utilizando as equações (2.10), (2.11), (2.16), (2.20) e (2.21), obter as equações de movimento adimensionais, a saber:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \\
& + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\
& - 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \text{cos}\theta_1^2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \right) \quad (2.22a) \\
& + \frac{1}{4} (\text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_1 + \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2) + \alpha(\theta_1 - \theta_2) \\
& - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \\
& - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\
& + 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \text{cos}\theta_2^2 \right) \quad (2.22b) \\
& + \frac{1}{4} (\text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_1 + \text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_2) + \alpha(-\theta_1 + \theta_2) \\
& - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_2 = 0
\end{aligned}$$

### 3 Análise Estática

A análise estática, apresentada a seguir, mostra a influência das diferentes variáveis que governam o comportamento do modelo, com ênfase na influência da rigidez relativa das molas e nos efeitos das imperfeições geométricas iniciais.

#### 3.1. Modelo de Raithel e Clemente Perfeito

Partindo da equação (2.12) e assumindo que  $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$ , tem-se para energia potencial total do modelo perfeito:

$$\Pi = \frac{1}{2}\alpha(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2)\right]^2 - \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\cos\theta_2\right) \quad (3.1)$$

De acordo com o Princípio da Energia Potencial Estacionária, a energia potencial do sistema é sempre um extremo em um estado de equilíbrio, ou seja:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad q_i = 1, 2 \quad (3.2)$$

onde  $\Pi = U + V$  é a energia potencial total e  $q_i = \theta_i$ .

Assim, derivando (3.1) em função das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , tem-se o sistema de equações não lineares de equilíbrio:

$$-\alpha(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2)\right]\cos\theta_1 - \lambda\frac{1}{2}\text{sen}\theta_1 = 0 \quad (3.3a)$$

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2)\right]\cos\theta_2 - \lambda\frac{1}{2}\text{sen}\theta_2 = 0 \quad (3.3b)$$

O sistema homogêneo (3.3) admite sempre a solução trivial:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \text{ para todo } \lambda, \quad (3.4)$$

que corresponde à posição inicial de equilíbrio cuja estabilidade se deseja analisar (caminho fundamental de equilíbrio).

A partir das equações de equilíbrio linearizadas ( $\text{sen}\theta_i = \theta_i$  e  $\text{cos}\theta_i = 1$ ) e resolvendo o problema de autovalor resultante, tem-se que as duas cargas de bifurcação são dadas por:

$$\lambda_1 = 1,0, \quad P_1 = k_r l \quad (3.5a)$$

$$\lambda_2 = 4\alpha, \quad P_2 = 4k_r / l \quad (3.5b)$$

A Figura 3.1 mostra a variação das duas cargas em função do fator de proporcionalidade entre as rigidezes,  $\alpha$ .

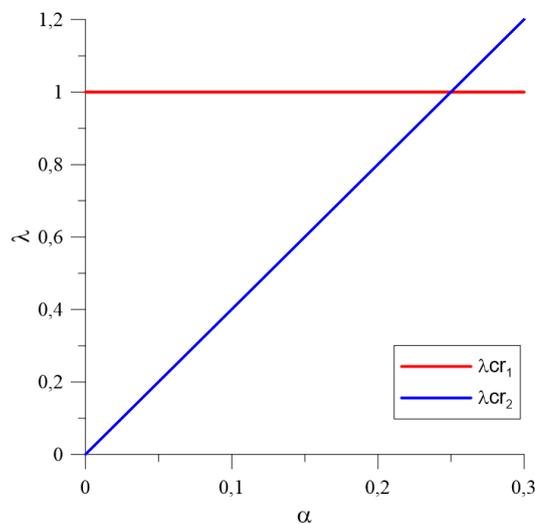


Figura 3.1: Variação das cargas de bifurcação. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Verifica-se que para  $\alpha_{cr} = 1/4$  as duas cargas críticas coincidem e, portanto, pode ocorrer interação modal ( $\lambda_{cr} = 1,0$ ). Para  $\alpha < \alpha_{cr}$ ,  $\lambda_{cr} = 4\alpha$ , ou seja, a carga crítica cresce linearmente com  $\alpha$  até atingir o valor unitário. Para  $\alpha > \alpha_{cr}$ ,  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

A Figura 3.2 apresenta as formas dos modos críticos (autovetores) em função de  $\alpha_{cr}$ . Para  $\alpha < \alpha_{cr}$ , obtém-se o autovetor  $v_1 = [\theta_1, -\theta_1]^T$ , ou seja,  $\theta_2 = -\theta_1$ . Neste caso a estrutura apresenta um modo crítico típico de flexão, sem deslocamento no topo, onde apenas a mola rotacional sofre deformação. Para  $\alpha > \alpha_{cr}$ , obtém-se o autovetor  $v_2 = [\theta_1, \theta_1]^T$ , ou seja,  $\theta_2 = \theta_1$ . Neste caso a mola rotacional não se deforma e a estrutura apresenta uma flambagem lateral como um único corpo rígido. Lembrando que  $\alpha = K_r / K_l l^2$ , tem-se que, para  $\alpha_{cr} = 1/4$ ,  $K_r = K_l l^2 / 4$ . Quando  $K_r$  ultrapassa este valor, a flambagem lateral ocorre antes da flambagem por flexão. Para  $\alpha = \alpha_{cr}$  há uma singularidade e qualquer autovetor é solução do problema de autovalor.

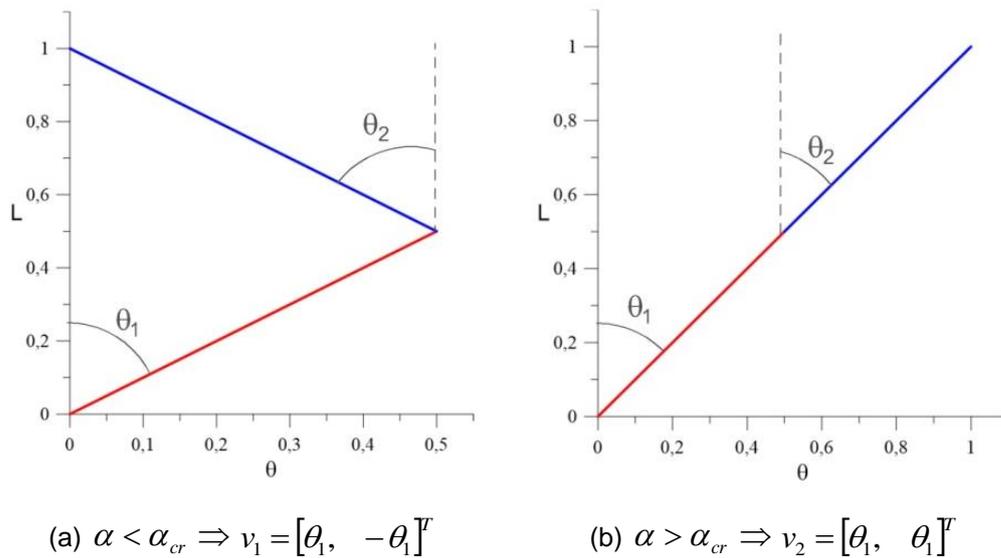


Figura 3.2: Formas dos modos críticos. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Substituindo-se a forma do modo crítico nas equações diferenciais não lineares de equilíbrio, observa-se que as equações são desacopladas, resultando nas seguintes equações não lineares associadas às cargas críticas:

$$\alpha < \alpha_{cr}, \theta_2 = -\theta_1, \Rightarrow 4\alpha\theta_1 - \lambda \text{sen}\theta_1 = 0; \quad \lambda = 4\alpha\theta_1 / \text{sen}\theta_1 \quad (3.6a)$$

$$\alpha > \alpha_{cr}, \theta_1 = \theta_2, \Rightarrow \cos\theta_1 - \lambda = 0; \quad \lambda = \cos\theta_1 \quad (3.6b)$$

que descrevem os caminhos pós-críticos do sistema desacoplado.

A equação (3.6a) corresponde a um exemplo clássico de uma bifurcação simétrica estável (Figura 3.3(a)), enquanto a equação (3.6b) corresponde a um exemplo clássico de uma bifurcação simétrica instável (Figura 3.3(b)), como mostram Croll e Walker (1972); Thompson e Hunt (1973) e Bazant e Cedolin (1991).

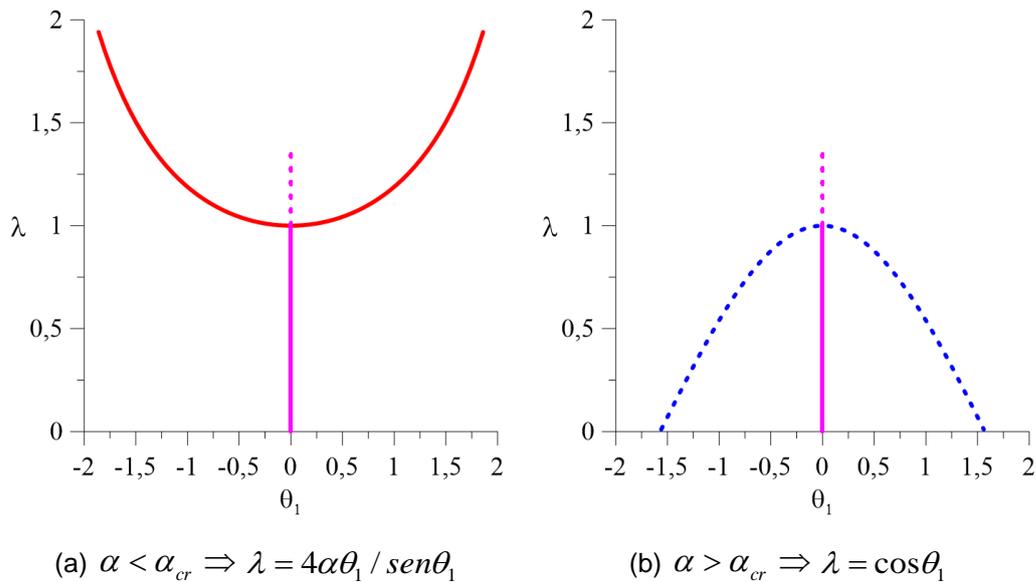


Figura 3.3: Formas dos modos críticos, para  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

Entretanto, além das duas soluções não lineares desacopladas mostradas em (3.6), o sistema não linear (3.3) apresenta, para valores de  $\alpha < \alpha_{cr}$ , quatro caminhos de equilíbrio adicionais acoplados ( $\theta_1 \neq 0$  e  $\theta_2 \neq 0$ ). Para valores de  $\alpha \geq \alpha_{cr}$ , o sistema (3.3) não apresenta as soluções acopladas.

### 3.1.1. Estabilidade das Posições de Equilíbrio

Para verificar se uma posição de equilíbrio é estável ou instável é necessário avaliar a segunda variação da energia potencial, proveniente da expansão da equação (2.12) em séries de Taylor até o termo de segunda ordem que resulta na seguinte forma quadrática:

$$\delta^2(\Pi) = \sum_i \delta q_i \left[ \sum_j \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_j \right] \quad (3.7)$$

A estabilidade de um ponto crítico é determinada pelos autovalores da matriz Hessiana,  $H$ , formada pelas derivadas parciais segundas em relação às coordenadas generalizadas,  $q_i$ . Caso a forma quadrática seja positiva definida (autovalores positivos), o equilíbrio é estável, caso contrário, o estado de equilíbrio é instável.

Os autovalores ( $\gamma_i$ ) da matriz Hessiana são obtidos do sistema homogêneo:

$$\det[H - \gamma I] = 0 \quad (3.8)$$

onde  $I$  é a matriz identidade de mesma ordem que a matriz Hessiana.

No Apêndice A apresentam-se os autovalores oriundos da expressão (3.8) para  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,15$ ,  $\alpha = 0,20$ ,  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,30$ .

### 3.1.2. Caminhos Não Lineares de Equilíbrio

As Figuras 3.4, 3.6, 3.8, 3.10 e 3.12 mostram a solução fundamental ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ) e os caminhos não lineares de equilíbrio para  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,15$ ,  $\alpha = 0,20$ ,  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,30$ , respectivamente. Uma melhor compreensão das diversas soluções é dada pelas Figuras 3.5, 3.7, 3.9, 3.11 e 3.13, que mostram os caminhos pós-críticos projetados em três planos ortogonais.

Verifica-se que, em todos os casos, o caminho fundamental de equilíbrio é estável até a carga crítica estática ( $\lambda_{cr}$ ) e que há a presença de dois caminhos pós-críticos: um caminho ascendente (em vermelho) a  $-45^\circ$  associado com o autovalor  $\lambda_2 = 4\alpha$  e um caminho descendente (em azul) a  $+45^\circ$  associado com o autovalor  $\lambda_1 = 1,0$ , correspondentes às soluções desacopladas nos modos de vibração (expressões (3.6)).

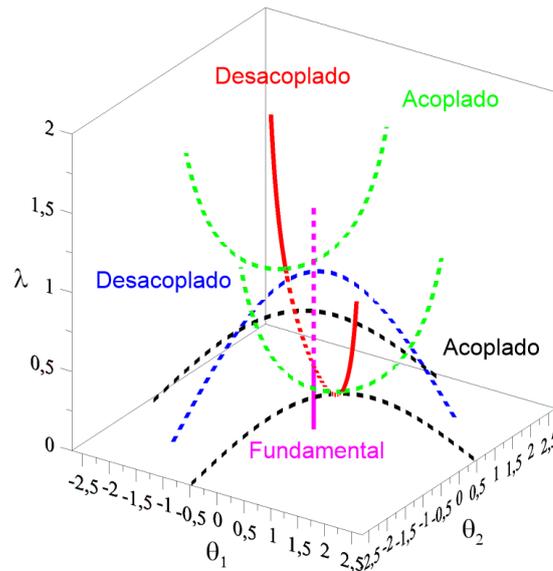


Figura 3.4: Caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,4$ .

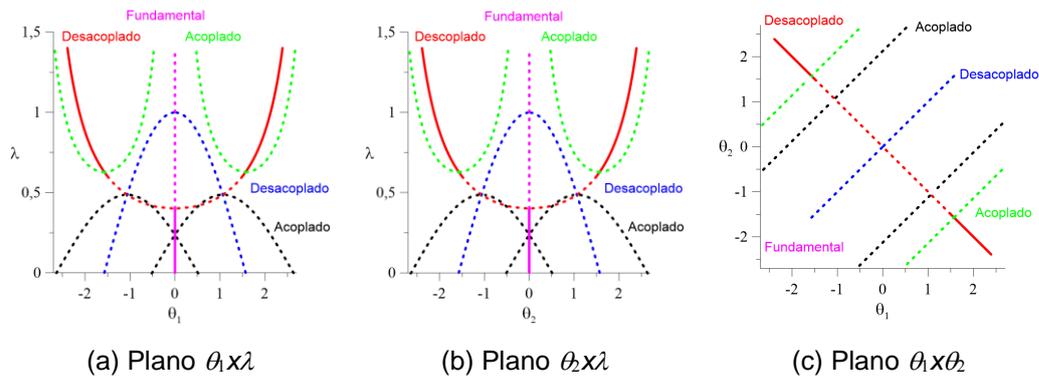


Figura 3.5: Projeções dos caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,4$ .

Para valores de  $\alpha < \alpha_{cr}$ , observa-se que existem quatro caminhos instáveis complementares, referentes às soluções acopladas (soluções de (3.3)): dois caminhos secundários descendentes instáveis (em preto) que emergem de uma bifurcação secundária ao longo do caminho ascendente pós-crítico; e dois caminhos secundários adicionais ascendentes (em verde) que também emergem do caminho ascendente pós-crítico. Estes quatro caminhos são paralelos ao caminho desacoplado descendente (em azul). À medida que  $\alpha$  aumenta, as soluções acopladas em preto se aproximam do caminho fundamental e fundem-se com o caminho desacoplado em azul quando  $\alpha = \alpha_{cr}$ , como pode ser visto na Figura 3.14. Verifica-se que todos os caminhos pós-críticos são instáveis, exceto o caminho pós-crítico em vermelho que se torna estável após cruzar os caminhos

secundários ascendentes em verde, que se afastam da bifurcação primária à medida que  $\alpha$  aumenta.

Constata-se que para valores de  $\alpha \geq \alpha_{cr}$ , o sistema não apresenta as soluções pós-críticas acopladas, como mostrado nas Figuras 3.10 e 3.12, diminuindo a complexidade da topologia da energia potencial total associada.

Estes resultados ressaltam a importância da interação entre flexão e deslocamento lateral na estabilidade do modelo analisado.

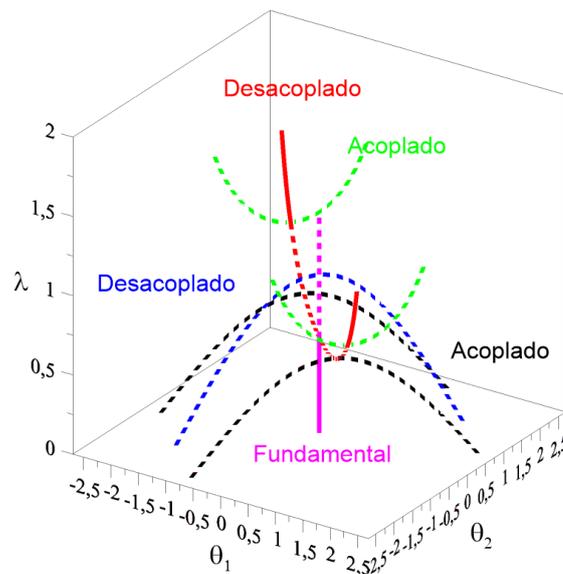


Figura 3.6: Caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithe e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,6$ .

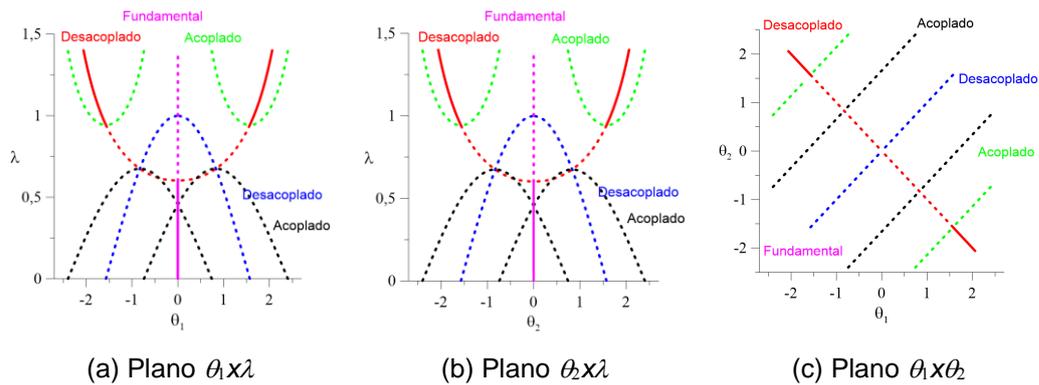


Figura 3.7: Projeções dos caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithe e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,6$ .

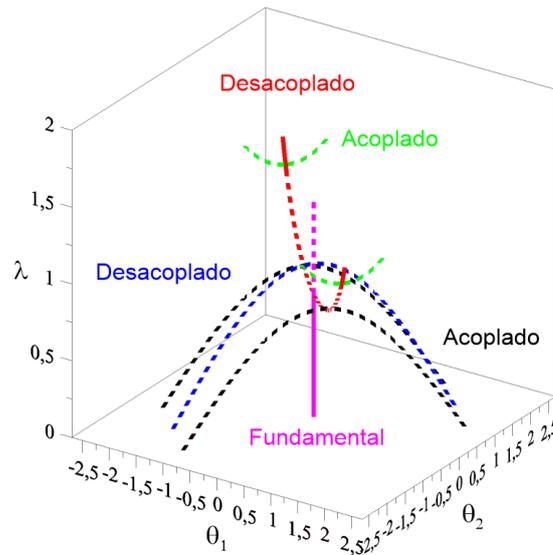


Figura 3.8: Caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,8$ .

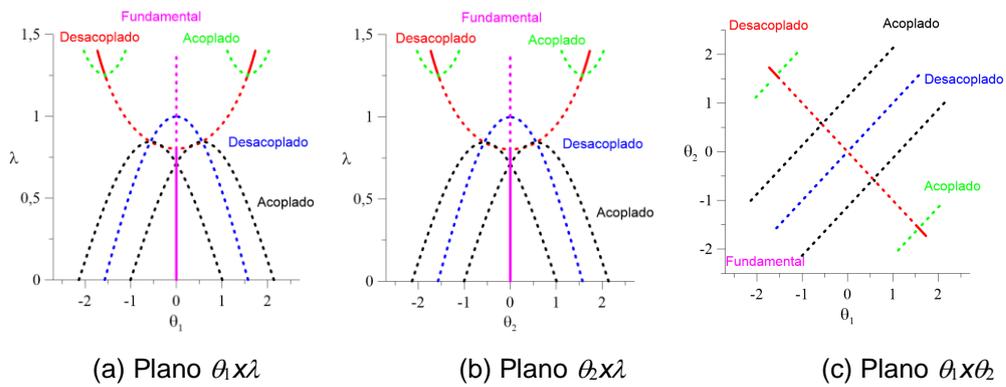


Figura 3.9: Projeções dos caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,8$ .

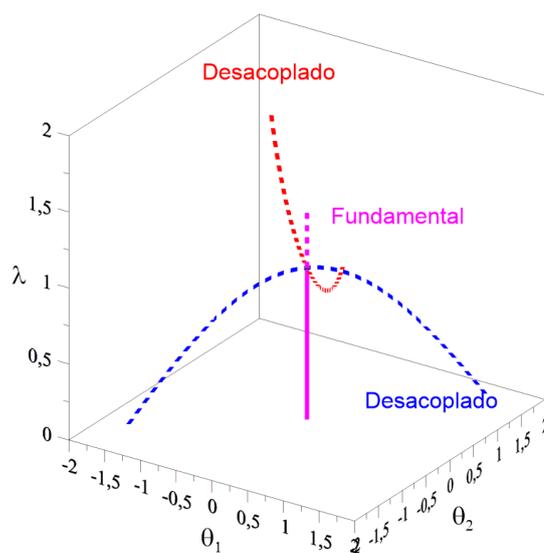


Figura 3.10: Caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

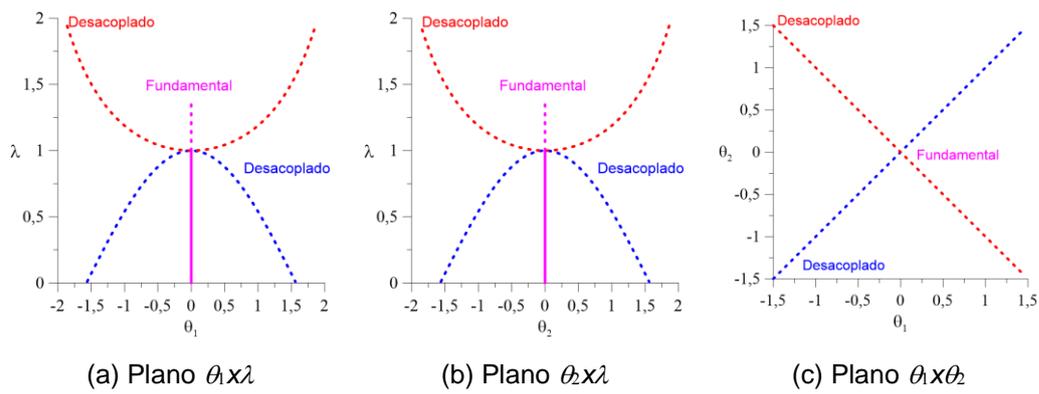


Figura 3.11: Projeções dos caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

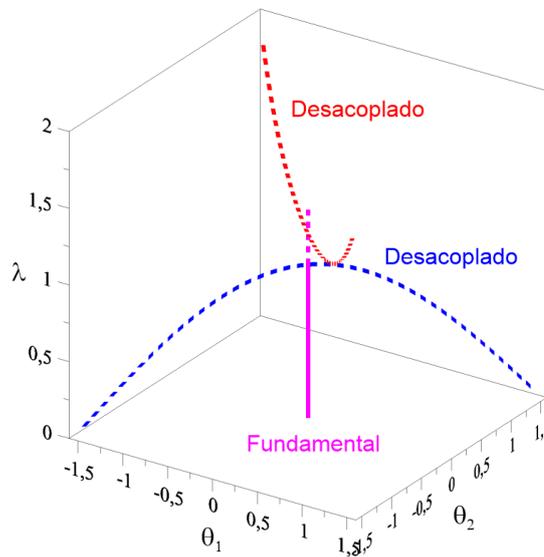


Figura 3.12: Caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

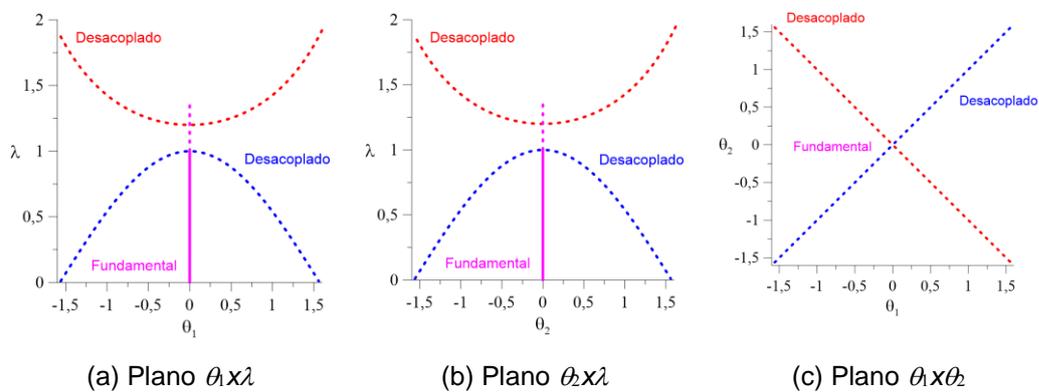


Figura 3.13: Projeções dos caminhos pós-críticos,  $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

Também é possível avaliar a influência comparativa das rigidezes das molas constituintes do sistema ( $\alpha = K_r/K_t l^2$ ) na estabilidade do conjunto: quando  $K_r < K_t l^2 / 4$  ( $\alpha < \alpha_{cr}$ ,  $\lambda_{cr} = 4\alpha$ ,  $P_{cr} = 4K_r/l$ ) a estabilidade da solução fundamental é controlada pela rigidez a flexão e a multiplicidade de soluções coexistentes leva a um comportamento estrutural complexo em virtude do alto número de soluções coexistentes. Nota-se que o caminho pós-crítico ascendente, que no modelo desacoplado com um grau de liberdade é estável (Croll e Walker, 1972), torna-se instável em virtude do acoplamento modal. Quando  $K_r > K_t l^2 / 4$  ( $\alpha > \alpha_{cr}$ ,  $\lambda_{cr} = 1,0$ ,  $P_{cr} = K_t l$ ), a estabilidade da solução fundamental é controlada pela rigidez lateral e o sistema comporta-se como um sistema de um grau de liberdade com bifurcação simétrica instável (Croll e Walker, 1972), como pode ser visto na Figura 3.12.

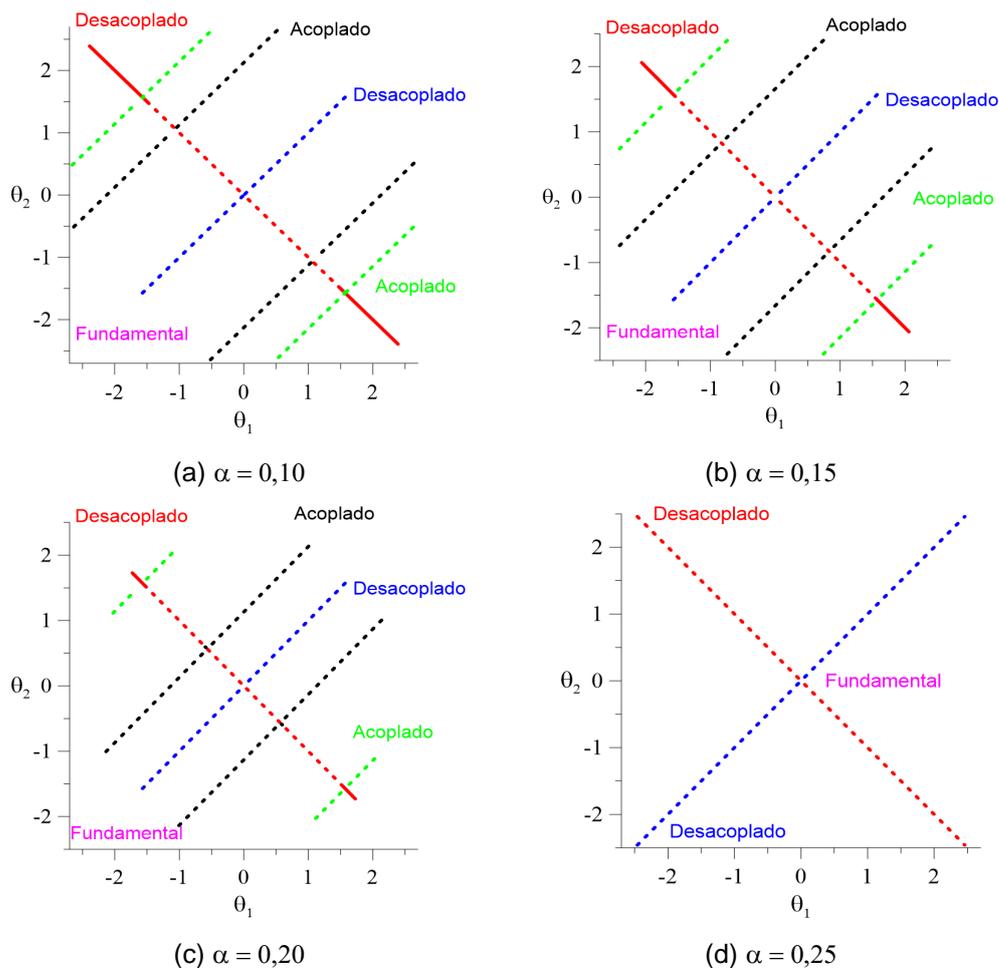


Figura 3.14: Projeções dos caminhos pós-críticos, plano  $\theta_1 \times \theta_2$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

A Figura 3.14 mostra as projeções dos caminhos pós-críticos no plano  $\theta_1 \times \theta_2$  para valores crescentes de  $\alpha$ , verifica-se, portanto, que, independentemente do valor de  $\alpha$ , o sistema é sensível a imperfeições devido a presença de caminhos pós-críticos instáveis.

### 3.1.3. Superfícies de Energia Potencial Total

Apresentam-se nas Figuras 3.15 a 3.19 as superfícies de energia potencial total, expressão (3.1), para  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,15$ ,  $\alpha = 0,20$ ,  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,30$ , respectivamente, para os valores selecionados do parâmetro de carga,  $\lambda$ . A estabilidade e caracterização das posições de equilíbrio foram analisadas, conforme descrito no item 3.1.1. Para ilustrar este procedimento, apresenta-se na Tabela 3.1 a caracterização dos pontos de equilíbrio observadas na Figura 3.15(d) a partir dos autovalores,  $\gamma_i$ , obtidos da Equação 3.8. A Tabela 3.1 mostra as coordenadas de cada ponto de equilíbrio, o valor da energia no ponto e os dois autovalores da matriz Hessiana. Quando os dois autovalores são positivos, tem-se um ponto de mínimo, quando os dois autovalores são negativos, tem-se um máximo e quando os dois autovalores têm sinais opostos, há um ponto de sela.

Tabela 3.1: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,90$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
	-0,451	-0,451	0,005	-0,094	-0,299
	0,000	0,000	0,000	0,050	-0,250
	0,451	0,451	0,005	-0,094	-0,299
	-2,023	2,023	-0,474	0,396	0,292
0.9	2,023	-2,023	-0,474	0,396	0,292
	-0,772	2,368	-0,406	0,622	-0,166
	0,772	-2,368	-0,406	0,622	-0,166
	-2,368	0,772	-0,406	0,622	-0,166
	2,368	-0,772	-0,406	0,622	-0,166

Considerando  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,15$  e  $\alpha = 0,20$  (Figuras 3.15, 3.16 e 3.17) verifica-se que para níveis de carregamento inferiores à carga crítica estática ( $\lambda_{cr} = 0,4$ ,  $\lambda_{cr} = 0,6$  e  $\lambda_{cr} = 0,8$ , respectivamente), a superfície de energia exibe um ponto de mínimo (PMi), correspondente à solução fundamental de equilíbrio, dois pontos de máximo (PMa), correspondentes às soluções desacopladas a  $+45^\circ$ , e quatro pontos de sela (PS), correspondentes às soluções acopladas instáveis. Em virtude do acoplamento modal, para cargas inferiores à carga crítica existe a possibilidade de perda de estabilidade, caso as perturbações excedam os limites da região limitada pelos pontos de sela em torno da configuração fundamental, que decresce à medida que a carga aumenta, aumentando a probabilidade de escape do vale potencial pré-crítico.

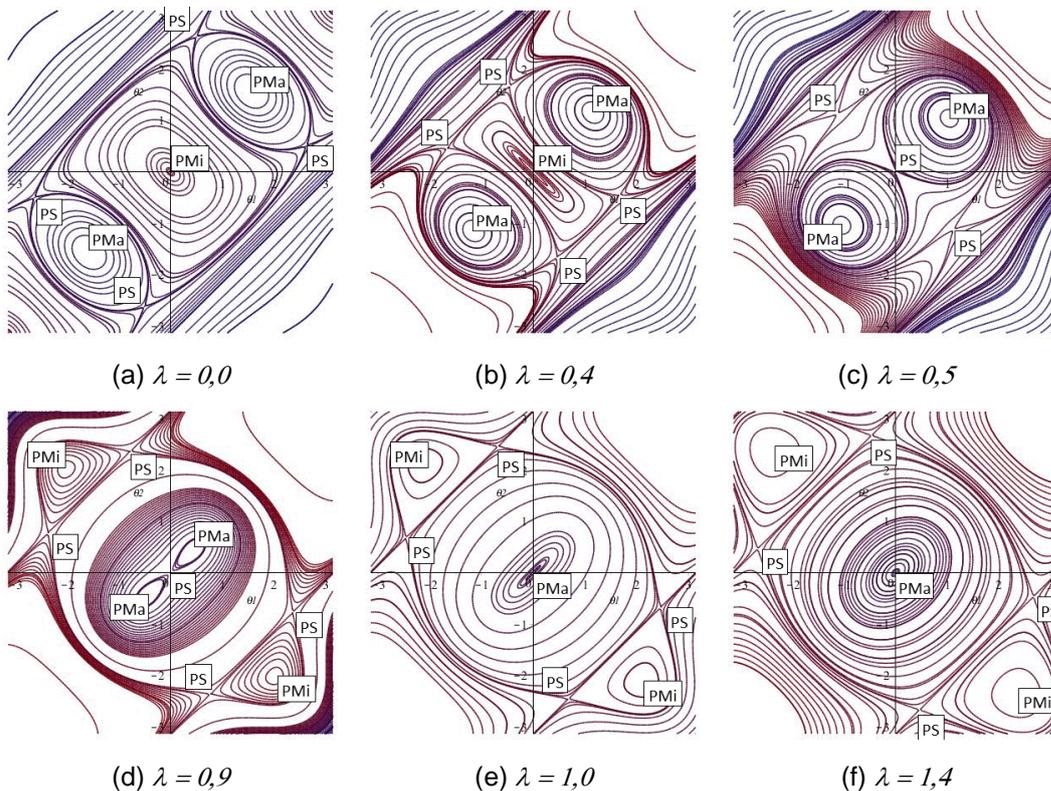


Figura 3.15: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,4$ .

Observa-se na Figura 3.15, para níveis de carga superiores à carga crítica estática ( $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda_{cr} = 0,4$ ) e inferiores a  $0,7$ , a existência de um ponto de sela (PS), que corresponde à solução fundamental de equilíbrio - que se tornou instável - dois pontos de máximo (PMa) relativos às soluções desacopladas a  $+45^\circ$  e dois

pontos de sela (PS) relativos às soluções desacopladas a  $-45^\circ$ . Para  $0,7 < \lambda < 1,0$ , além das soluções anteriores, existem quatro soluções desacopladas, correspondentes a quatro pontos de sela (PS) (vide Figura 3.15(d)), sendo que as soluções desacopladas a  $-45^\circ$  transformam-se em mínimo (PMi). Em  $\lambda = 1,0$  os dois pontos de máximo e a sela do caminho fundamental se fundem e para  $\lambda > 1,0$ , a solução fundamental de equilíbrio transforma-se em um ponto de máximo (PMa), enquanto as soluções desacopladas a  $+45^\circ$  desaparecem.

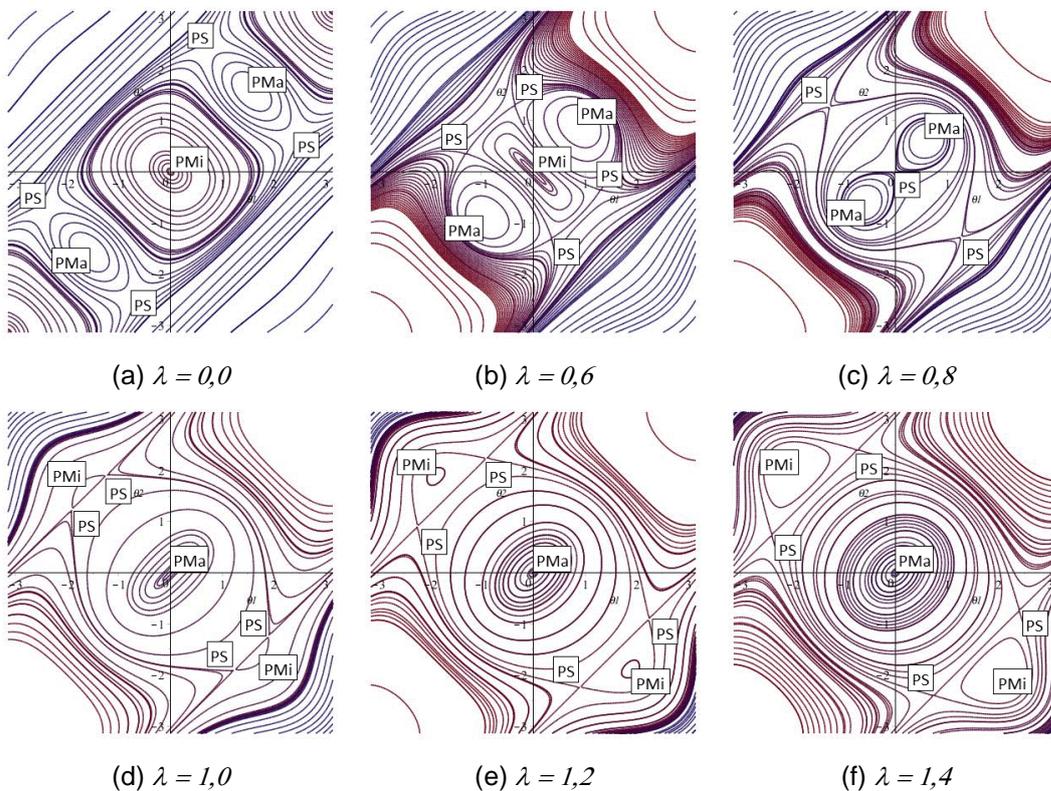


Figura 3.16: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,15$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,6$ .

A mesma sequência de mudanças na topologia da energia potencial total é observada para  $\alpha = 0,15$  ( $\lambda_{cr} = 0,6$ ) e  $\alpha = 0,20$  ( $\lambda_{cr} = 0,8$ ) com os valores de carregamento correspondentes a cada caso. Observa-se, porém, que, em todos os casos, a fusão dos dois pontos de máximo a  $+45^\circ$  e da sela do caminho fundamental ocorre em  $\lambda = 1,0$ .

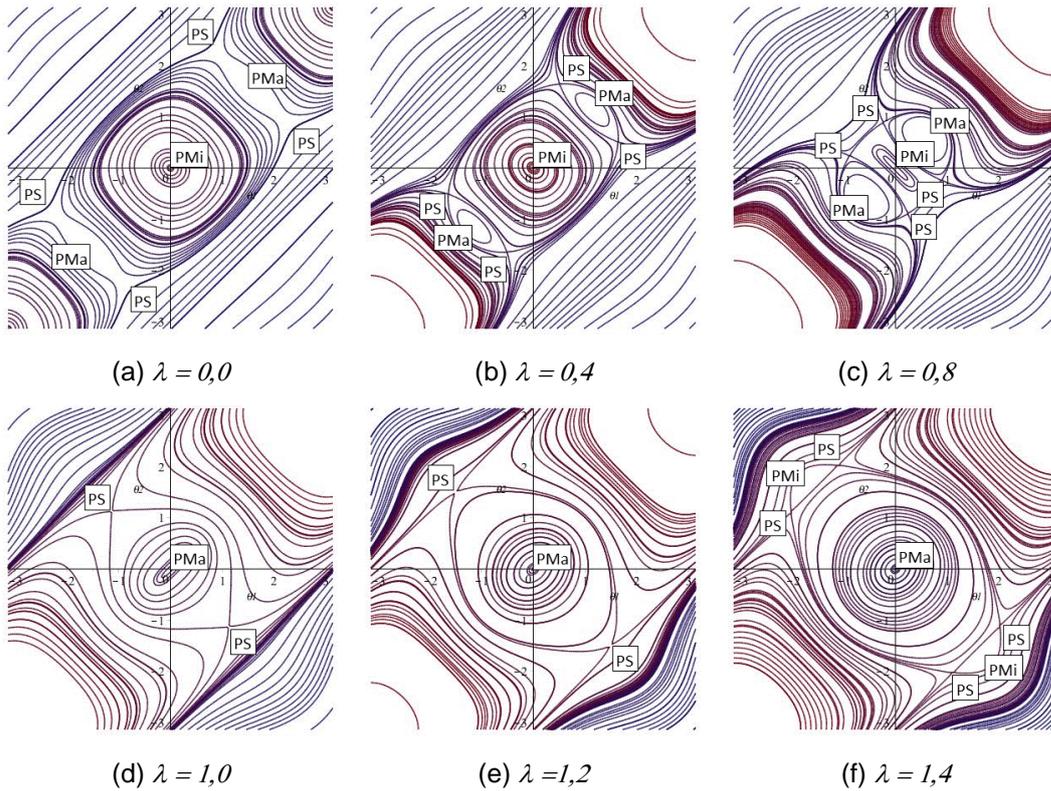


Figura 3.17: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 0,8$ .

Verifica-se, para valores de  $\alpha \geq \alpha_{cr}$ , Figuras 3.18 e 3.19, que, para níveis de carregamento inferiores à carga crítica estática ( $\lambda_{cr} = 1,0$ ), as superfícies de energia exibem um ponto de mínimo (PMi), correspondente à solução fundamental de equilíbrio e dois pontos de sela simétricos (PS), correspondentes às soluções desacopladas instáveis a  $+45^\circ$ . Em  $\lambda = \lambda_{cr}$  estas três soluções coalescem e para níveis de carregamento superiores à carga crítica estática ( $\lambda > \lambda_{cr}$ ), a solução fundamental torna-se um máximo e surgem duas selas a  $-45^\circ$ .

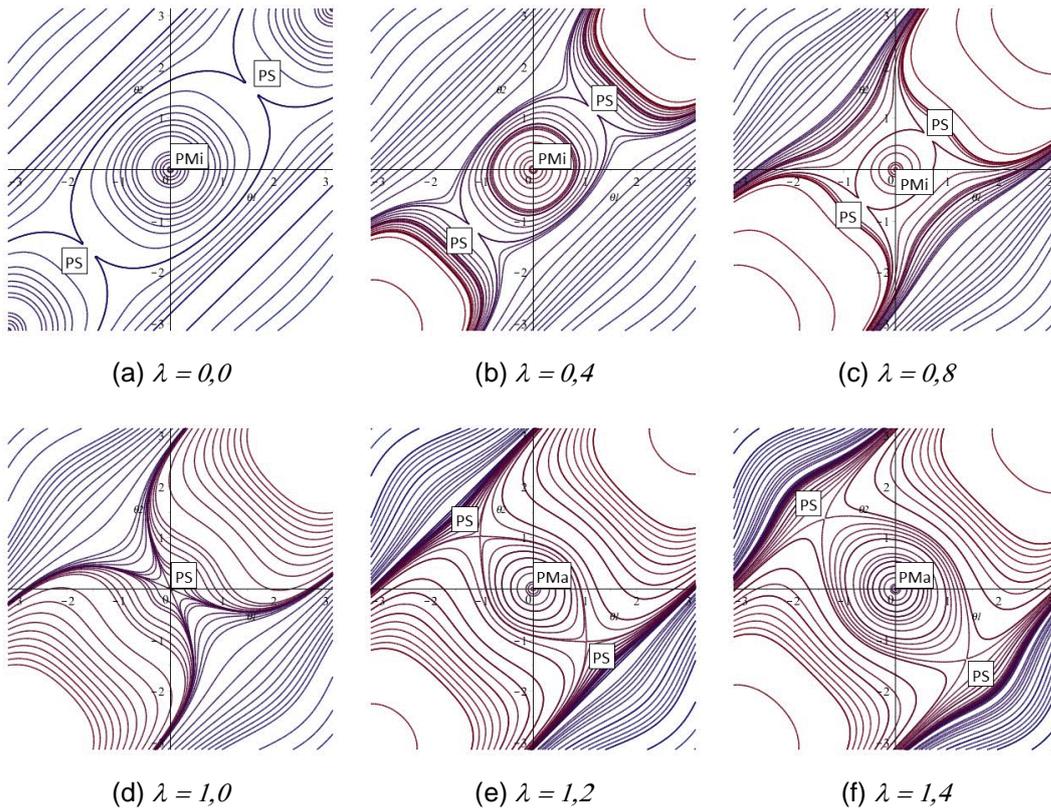


Figura 3.18: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,25$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

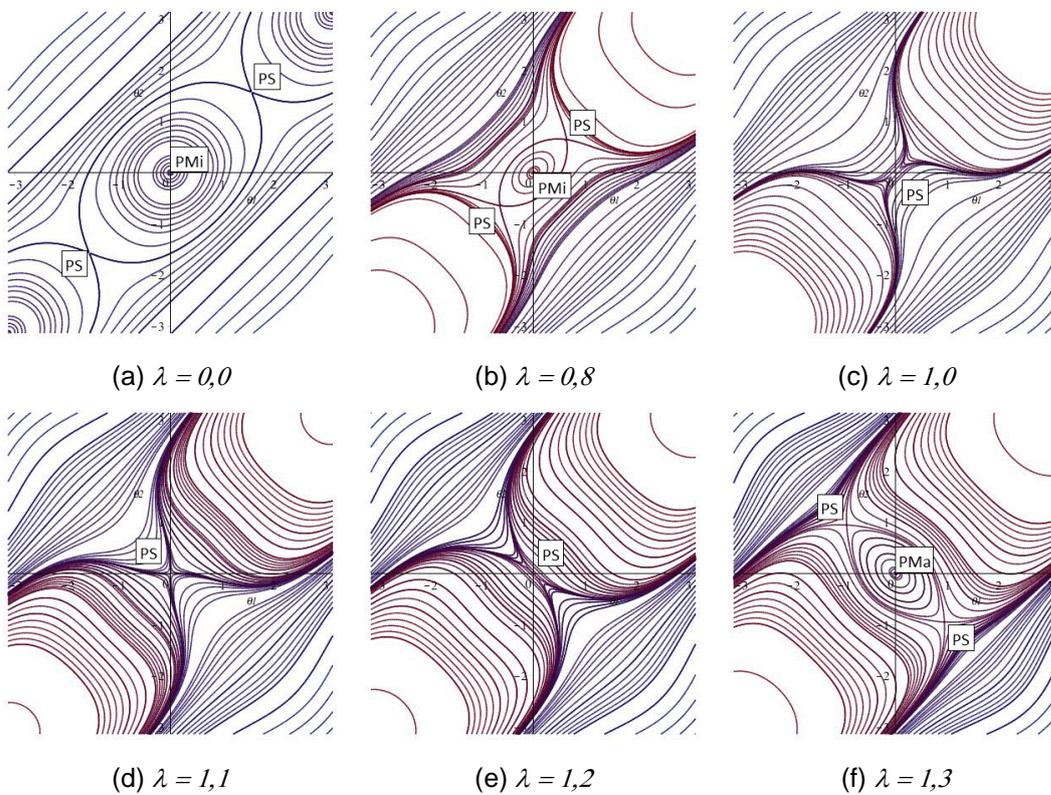


Figura 3.19: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,30$ . Modelo de Raithel & Clemente Perfeito.  $\lambda_{cr} = 1,0$ .

### 3.2.

#### Modelo de Raithel e Clemente com Imperfeição Geométrica Inicial

Derivando a energia potencial total do modelo discreto com imperfeição geométrica inicial, equação (2.12), em relação às coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , obtém-se o sistema de equações de equilíbrio:

$$-\alpha(\theta_2 - \theta_1 - \theta_{20} + \theta_{10}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_{10} - \text{sen}\theta_{20}) \right] \cos\theta_1 - \lambda \frac{1}{2} \text{sen}\theta_1 = 0 \quad (3.9a)$$

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1 - \theta_{20} + \theta_{10}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_{10} - \text{sen}\theta_{20}) \right] \cos\theta_2 - \lambda \frac{1}{2} \text{sen}\theta_2 = 0 \quad (3.9b)$$

Ao contrário do modelo perfeito, as equações (3.9) não admitem solução trivial,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , pois a coluna descarregada já apresenta uma inclinação inicial. Com isso, os caminhos não lineares de equilíbrio obtidos da solução de (3.9) são em geral soluções não lineares acopladas. Têm-se somente dois casos particulares de soluções desacopladas, que são:

$$\theta_1 = \theta_2, \theta_{10} = \theta_{20} \Rightarrow (\text{sen}\theta_1 - \text{sen}\theta_{10}) \cos\theta_1 - \lambda \text{sen}\theta_1 = 0 \quad (3.10a)$$

$$\theta_1 = -\theta_2, \theta_{10} = -\theta_{20} \Rightarrow -2\alpha(-2\theta_1 + 2\theta_{10}) - \lambda \text{sen}\theta_1 = 0 \quad (3.10b)$$

Para avaliar o efeito das imperfeições na estrutura, considera-se uma imperfeição geométrica composta pela soma de duas imperfeições na forma dos modos críticos da estrutura perfeita, como ilustra a Figura 3.20, sendo  $\theta_{10} = \theta_a + \theta_b$  e  $\theta_{20} = \theta_a - \theta_b$ .

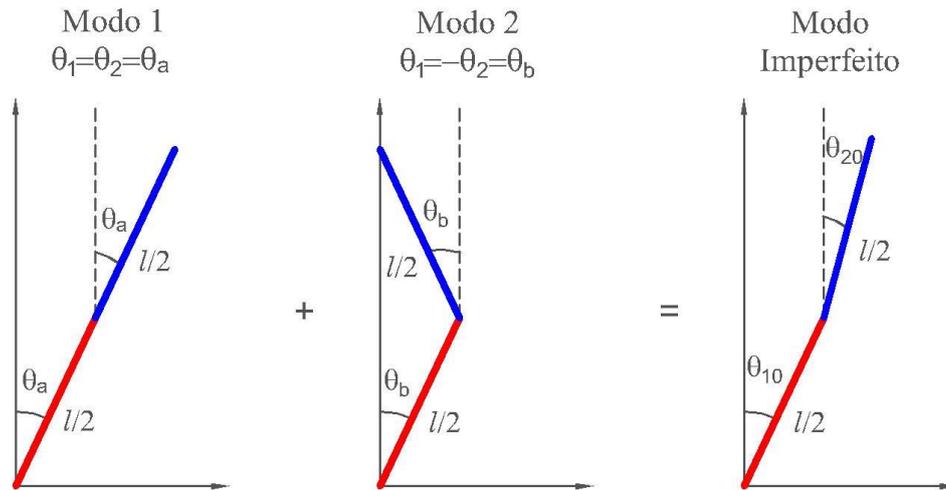


Figura 3.20: Composição modal das imperfeições.

A Tabela 3.2 apresenta as imperfeições iniciais consideradas e a composição modal destas imperfeições.

Tabela 3.2: Composição modal das imperfeições. Modelo de Raitzel e Clemente com imperfeição geométrica.

Imperfeição	Modo 1: $\theta_1 = \theta_2$	Modo 2: $\theta_1 = -\theta_2$
	$\theta_a$	$\theta_b$
$\theta_{10} = 0 \quad \theta_{20} = \frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{360}$
$\theta_{10} = \frac{\pi}{180} \quad \theta_{20} = 0$	$\frac{\pi}{360}$	$-\frac{\pi}{360}$
$\theta_{10} = \frac{\pi}{180} \quad \theta_{20} = \frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180}$	0
$\theta_{10} = -\frac{\pi}{180} \quad \theta_{20} = \frac{\pi}{180}$	0	$-\frac{\pi}{180}$
$\theta_{10} = \frac{\pi}{180} \quad \theta_{20} = \frac{2\pi}{180}$	$\frac{\pi}{120}$	$-\frac{\pi}{360}$
$\theta_{10} = \frac{2\pi}{180} \quad \theta_{20} = \frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{120}$	$\frac{\pi}{360}$
$\theta_{10} = \frac{\pi}{180} \quad \theta_{20} = -\frac{2\pi}{180}$	$-\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{120}$
$\theta_{10} = \frac{2\pi}{180} \quad \theta_{20} = -\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{120}$

### 3.2.1. Estabilidade das Posições de Equilíbrio

De maneira idêntica ao descrito em 3.1.1 avaliou-se a estabilidade das posições de equilíbrio com auxílio da forma quadrática (3.7). Os autovalores da matriz dos coeficientes da forma quadrática, equação (3.8), do modelo imperfeito, podem ser encontrados no Apêndice A para as imperfeições descritas nas Figuras 3.21 a 3.24.

### 3.2.2. Superfícies de Energia do Modelo Imperfeito

Mostram-se nas Figuras 3.21, 3.22 e 3.23 as curvas de nível das superfícies de energia potencial para  $\alpha < \alpha_{cr}$  ( $\alpha = 0,10$ ),  $\alpha = \alpha_{cr}$  ( $\alpha = 0,25$ ) e  $\alpha > \alpha_{cr}$  ( $\alpha = 0,30$ ), respectivamente. Um comportamento semelhante é observado em relação aos modelos perfeitos analisados nas Figuras 3.15, 3.18 e 3.19, exibindo o mesmo número de pontos de equilíbrio. O efeito de quebra de simetria da imperfeição geométrica inicial e a diminuição da região em torno da solução estável (agora não trivial), diminuem a integridade dinâmica do sistema, como esperado. A influência de simetrias e imperfeições no comportamento não linear de sistemas sujeitos a acoplamento modal foi previamente estudada por Orlando *et al.* (2011, 2013a, 2013b).

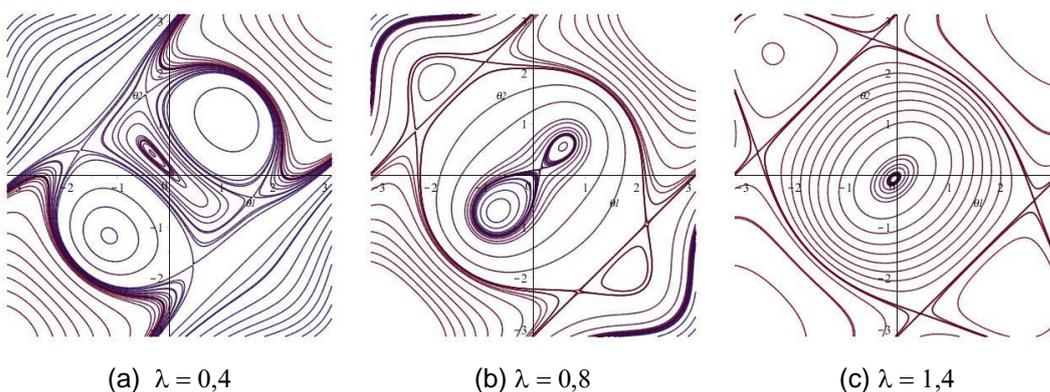


Figura 3.21: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,10$ ,  $\theta_{10} = \pi/180$  e  $\theta_{20} = 2\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

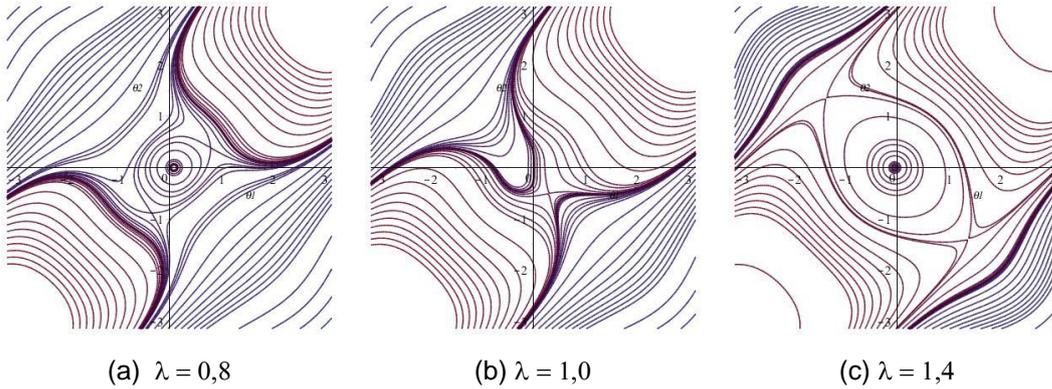


Figura 3.22: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,25$ ,  $\theta_{10} = 0,0$  e  $\theta_{20} = \pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

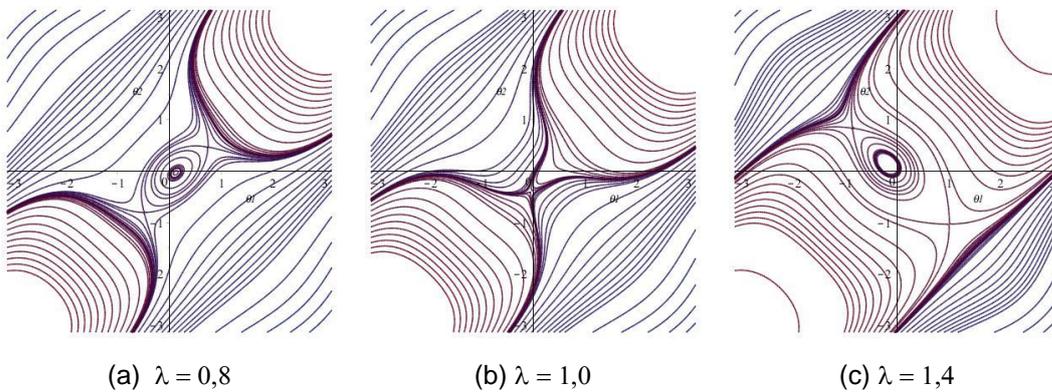
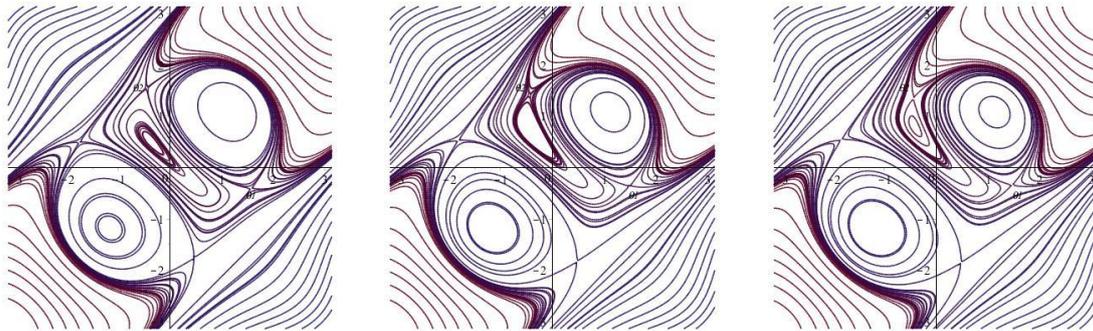


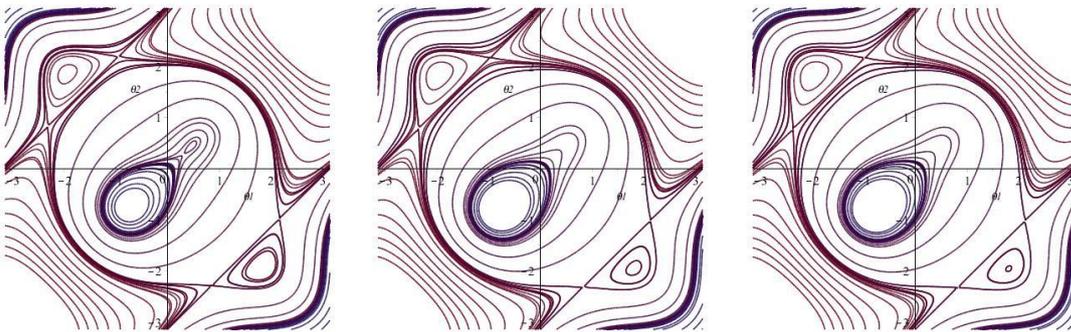
Figura 3.23: Superfícies de energia potencial total, para  $\alpha = 0,30$ ,  $\theta_{10} = 2\pi/180$  e  $\theta_{20} = -\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

### 3.2.3. Efeito da Magnitude das Imperfeições

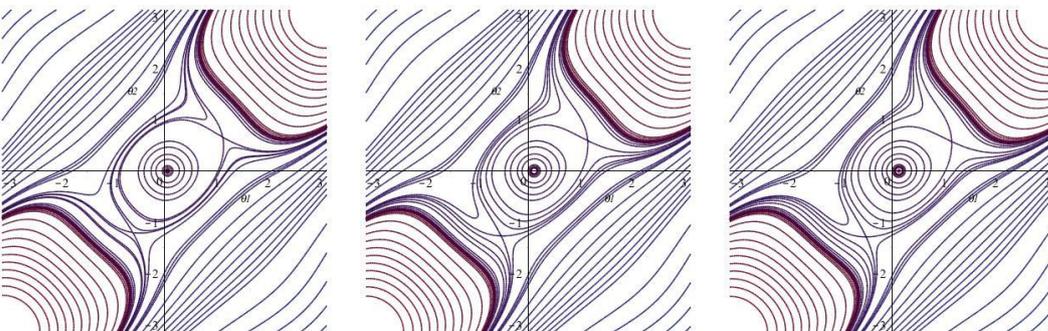
Na Figura 3.24 apresenta-se a variação das superfícies de energia potencial com o aumento da magnitude da imperfeição geométrica,  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$ , para os casos estudados em 3.1.2.2. As imperfeições geométricas iniciais são amplificadas de acordo com um fator de majoração ( $n$ ). A estabilidade dos pontos de equilíbrio da Figura 3.24 pode ser observada no Apêndice A. À medida que as imperfeições geométricas aumentam, verifica-se a crescente quebra das simetrias observadas na topologia da energia potencial total da estrutura perfeita.

(a.1)  $n = 1,4$ (a.2)  $n = 2,6$ (a.3)  $n = 3,0$ 

$$(a) \alpha = 0,10, \lambda = 0,4, \theta_{10} = n \frac{\pi}{180} \text{ e } \theta_{20} = n \frac{2\pi}{180}$$

(b.1)  $n = 1,8$ (b.2)  $n = 2,8$ (b.3)  $n = 3,0$ 

$$(b) \alpha = 0,10, \lambda = 0,8, \theta_{10} = n \frac{\pi}{180} \text{ e } \theta_{20} = n \frac{2\pi}{180}$$

(c.1)  $n = 1,4$ (c.2)  $n = 2,6$ (c.3)  $n = 3,0$ 

$$(c) \alpha = 0,25, \lambda = 0,6, \theta_{10} = n0 \text{ e } \theta_{20} = n \frac{\pi}{180}$$

Figura 3.24: Efeito da magnitude da imperfeição nas superfícies de energia potencial total. Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

## 4 Análise Dinâmica – Vibração Livre

Neste capítulo é realizada a análise das vibrações livres, com ênfase no estudo das frequências naturais, na relação não linear frequência-amplitude e na relação entre o comportamento dinâmico não linear e a estabilidade global da estrutura aqui analisada, fornecendo informações fundamentais para o entendimento do comportamento da mesma sob vibração forçada.

### 4.1. Modelo de Raithel e Clemente Perfeito

Partindo das equações (2.22) e considerando que as constantes de amortecimento são nulas, têm-se as equações de movimento que regem o comportamento do modelo de Raithel e Clemente em vibração livre não amortecida, a saber:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \\
 & + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\
 & + \frac{1}{4} (\text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_1 + \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2) + \alpha(\theta_1 - \theta_2) \\
 & - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_1 = 0
 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{24} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \\
 & - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\
 & + \frac{1}{4} (\text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_1 + \text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_2) + \alpha(-\theta_1 + \theta_2) \\
 & - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.1b}$$

### 4.1.1. Frequências Naturais

Para se obter as frequências naturais do sistema ao longo dos caminhos de equilíbrio é necessário utilizar como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema (perfeito ou imperfeito). A Figura 4.1 apresenta as configurações do sistema e suas principais variáveis.

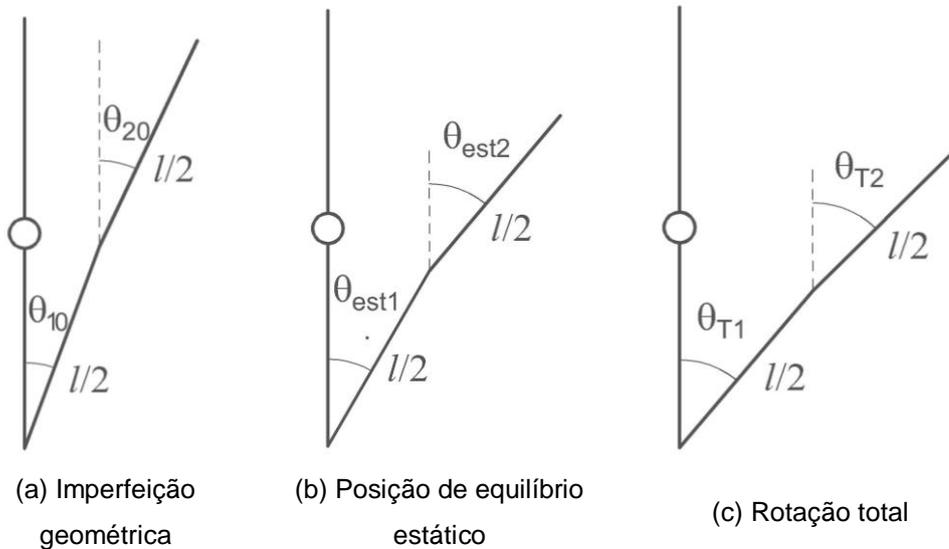


Figura 4.1: Configurações do modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica inicial.

A variação das parcelas de energia entre as configurações estática e perturbada é obtida a partir das seguintes relações oriundas da Figura 4.1:

$$\text{Rotação estática} \rightarrow \theta_{est1} = \theta_{10} + \theta_{S1} \text{ e } \theta_{est2} = \theta_{20} + \theta_{S2} \quad (4.2a)$$

$$\text{Rotação total} \rightarrow \theta_{T1} = \theta_{10} + \theta_{S1} + \theta_{D1} \text{ e } \theta_{T2} = \theta_{20} + \theta_{S2} + \theta_{D2} \quad (4.2b)$$

onde  $\theta_{S1}$  e  $\theta_{S2}$  são as deformações das molas sob carregamento estático e  $\theta_{D1}$  e  $\theta_{D2}$ , que são funções do tempo, são as rotações devidas ao movimento.

Adotando como coordenadas generalizadas os deslocamentos dinâmicos,  $\theta_{Di}$ , a parcela de energia cinética toma a forma:

$$T = \frac{1}{48} \rho A l^3 (3\dot{\theta}_{D1}\dot{\theta}_{D2} \cos(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \cos(\theta_{D2} + \theta_{est2}) + 4(\dot{\theta}_{D1})^2 + 3\dot{\theta}_{D1}\dot{\theta}_{D2} \sin(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \sin(\theta_{D2} + \theta_{est2}) + (\dot{\theta}_{D2})^2) \quad (4.3)$$

pois  $T = \int_0^{l/2} 1/2 \rho A (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) ds + \int_0^{l/2} 1/2 \rho A (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) ds$  (vide item 2.1.1), sendo

$$x_1 = s \sin(\theta_{D1} + \theta_{est1}), \quad x_2 = l/2 \sin(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + s \sin(\theta_{D2} + \theta_{est2}),$$

$$y_1 = s \cos(\theta_{D1} + \theta_{est1}) \text{ e } y_2 = l/2 \cos(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + s \cos(\theta_{D2} + \theta_{est2}).$$

A variação da energia potencial total é dada pela diferença entre a energia potencial da configuração perturbada e da configuração de equilíbrio estático. Assim, com base na Figura 4.1 e observando as equações (4.2), tem-se que a variação da energia interna de deformação,  $\Delta U$ , e a variação do potencial gravitacional das cargas externas,  $\Delta V$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{1}{2} K_r [(\theta_{D2} + \theta_{est2} - \theta_{D1} - \theta_{est1})^2 - (-\theta_{est2} + \theta_{est1})^2] \\ & + \frac{1}{8} K_i l^2 \{ [\sin(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \sin(\theta_{D2} + \theta_{est2})]^2 \\ & - (\sin\theta_{est1} + \sin\theta_{est2})^2 \} \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\Delta V = P \frac{l}{2} [\cos(\theta_{D1} + \theta_{est1}) + \cos(\theta_{D2} + \theta_{est2}) - \cos\theta_{est1} - \cos\theta_{est2}] \quad (4.4b)$$

A partir das equações não lineares de movimento, expressões (2.18), em termos das coordenadas generalizadas,  $\theta_{Di}$ , e utilizando os dois primeiros termos das séries de Taylor das equações não lineares, chega-se ao sistema de equações de movimento linearizado ( $\sin\theta_{Di} = \theta_{Di}$  e  $\cos\theta_{Di} = 1$ ):

$$\begin{aligned}
& \rho A l^3 \left( \frac{1}{6} \ddot{\theta}_{D1} + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_{D2} \text{sen} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2} + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_{D2} \text{cos} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2} \right) \\
& + \frac{K_t l^2}{4} \left( -\theta_{D1} \text{sen} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2} + \text{cos} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est1} + \theta_{D1} (\text{cos} \theta_{est1})^2 \right. \\
& \quad \left. - \theta_{D1} (\text{sen} \theta_{est1})^2 + \theta_{D2} \text{cos} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2} + \text{cos} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2} \right) \\
& + K_r (\theta_{D1} + \theta_{est1} - \theta_{D2} - \theta_{est2}) \\
& - \frac{P}{2} l (\theta_{D1} \text{cos} \theta_{est1} + \text{sen} \theta_{est1}) = 0
\end{aligned} \tag{4.5a}$$

$$\begin{aligned}
& \rho A l^3 \left( \frac{1}{24} \ddot{\theta}_{D2} + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_{D1} \text{sen} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2} + \frac{1}{16} \ddot{\theta}_{D1} \text{cos} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2} \right) \\
& + \frac{K_t l^2}{4} \left( \theta_{D1} \text{cos} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2} - \theta_{D2} \text{sen} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2} + \text{cos} \theta_{est2} \text{sen} \theta_{est2} \right. \\
& \quad \left. + \text{sen} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2} + \theta_{D2} (\text{cos} \theta_{est2})^2 - \theta_{D2} (\text{sen} \theta_{est2})^2 \right) \\
& + K_r (-\theta_{D1} - \theta_{est1} + \theta_{D2} + \theta_{est2}) \\
& - \frac{P}{2} l (\theta_{D2} \text{cos} \theta_{est2} + \text{sen} \theta_{est2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.5b}$$

As parcelas das equações de movimento (4.5) referentes às parcelas das equações de equilíbrio estático são nulas, pois se toma como referência a configuração de equilíbrio do modelo, sendo que as equações de equilíbrio estático do modelo imperfeito são:

$$\begin{aligned}
& \frac{K_t l^2}{4} (\text{cos} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est1} + \text{cos} \theta_{est1} \text{sen} \theta_{est2}) + K_r (\theta_{est1} - \theta_{est2}) \\
& - \frac{P}{2} l \text{sen} \theta_{est1} = 0
\end{aligned} \tag{4.6a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{K_t l^2}{4} (\text{cos} \theta_{est2} \text{sen} \theta_{est2} + \text{sen} \theta_{est1} \text{cos} \theta_{est2}) + K_r (-\theta_{est1} + \theta_{est2}) \\
& - \frac{P}{2} l \text{sen} \theta_{est2} = 0
\end{aligned} \tag{4.6b}$$

A partir das equações (4.5) e (4.6) e usando-se as relações (2.10) e (2.11), obtêm-se as equações de movimento adimensionais, tendo como referência uma dada configuração estática:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6}\ddot{\theta}_{D1} + \frac{1}{16}\ddot{\theta}_{D2}\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} + \frac{1}{16}\ddot{\theta}_{D2}\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} \\
& + \frac{1}{4}(-\theta_{D1}\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} + \text{cos}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est1} + \theta_{D1}(\text{cos}\theta_{est1})^2 \\
& \quad - \theta_{D1}(\text{sen}\theta_{est1})^2 + \theta_{D2}\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} + \text{cos}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2}) \\
& + \alpha(\theta_{D1} + \theta_{est1} - \theta_{D2} - \theta_{est2}) \\
& - \frac{\lambda}{2}(\theta_{D1}\text{cos}\theta_{est1} + \text{sen}\theta_{est1}) = 0
\end{aligned} \tag{4.7a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24}\ddot{\theta}_{D2} + \frac{1}{16}\ddot{\theta}_{D1}\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} + \frac{1}{16}\ddot{\theta}_{D1}\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} \\
& + \frac{1}{4}(\theta_{D1}\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} - \theta_{D2}\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} + \text{cos}\theta_{est2}\text{sen}\theta_{est2} \\
& \quad + \text{sen}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} + \theta_{D2}(\text{cos}\theta_{est2})^2 - \theta_{D2}(\text{sen}\theta_{est2})^2) \\
& + \alpha(-\theta_{D1} - \theta_{est1} + \theta_{D2} + \theta_{est2}) \\
& - \frac{\lambda}{2}(\theta_{D2}\text{cos}\theta_{est2} + \text{sen}\theta_{est2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.7b}$$

A partir das equações (4.6) e (4.7), chega-se às equações de movimento linearizadas finais, que são:

$$aux_{11}\ddot{\theta}_{D1} + aux_{21}\theta_{D1} + aux_{31}\ddot{\theta}_{D2} + aux_{41}\theta_{D2} = 0 \tag{4.8a}$$

$$aux_{12}\ddot{\theta}_{D2} + aux_{22}\theta_{D2} + aux_{32}\ddot{\theta}_{D1} + aux_{42}\theta_{D1} = 0 \tag{4.8b}$$

onde,

$$aux_{11} = \frac{1}{6} \tag{4.9a}$$

$$aux_{21} = \frac{1}{4}(-\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} - 1) + \frac{1}{2}(\text{cos}\theta_{est1})^2 + \alpha - \frac{\lambda}{2}\text{cos}\theta_{est1} \tag{4.9b}$$

$$aux_{31} = aux_{32} = \frac{1}{16}\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} + \frac{1}{16}\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2} \tag{4.9c}$$

$$aux_{41} = aux_{42} = \frac{1}{4}(\text{cos}\theta_{est1}\text{cos}\theta_{est2}) - \alpha \tag{4.9d}$$

$$aux_{12} = \frac{1}{24} \tag{4.9e}$$

$$aux_{22} = \frac{1}{4}(-\text{sen}\theta_{est1}\text{sen}\theta_{est2} - 1) + \frac{1}{2}(\text{cos}\theta_{est2})^2 + \alpha - \frac{\lambda}{2}\text{cos}\theta_{est2} \tag{4.9f}$$

Os deslocamentos estáticos,  $\theta_{est1}$  e  $\theta_{est2}$ , são as coordenadas dos pontos de equilíbrio obtidos na análise estática e as parcelas  $\theta_{s1}$  e  $\theta_{s2}$  são calculadas a partir das expressões (4.2).

A partir das equações de movimento linearizadas (equações (4.8) e (4.9)) e resolvendo o problema do autovalor resultante, admitindo como soluções para as coordenadas generalizadas  $\theta_{Dj} = \bar{\theta}_{Dj} e^{-i\omega_j t}$ , tem-se que as frequências naturais,  $\omega_i$ , do modelo pré-carregado são dadas, considerando a influência da rigidez relativa das molas e a imperfeição geométrica, por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(aux_{11}aux_{12} - aux_{32}^2)}} \left[ \text{var}_1 - (\text{var}_2)^{1/2} \right] \quad (4.10a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(aux_{11}aux_{12} - aux_{32}^2)}} \left[ \text{var}_1 + (\text{var}_2)^{1/2} \right] \quad (4.10b)$$

onde,

$$\text{var}_1 = aux_{11}aux_{22} + aux_{21}aux_{12} - 2aux_{42}aux_{32} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \text{var}_2 = & aux_{11}^2 aux_{22}^2 - 2aux_{11}aux_{12}aux_{21}aux_{22} + 4aux_{21}aux_{22}aux_{32}^2 \\ & - 4aux_{11}aux_{22}aux_{32}aux_{42} + aux_{12}^2 aux_{21}^2 - 4aux_{12}aux_{21}aux_{32}aux_{42} \\ & + 4aux_{11}aux_{12}aux_{42}^2 \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Estas expressões permitem o cálculo das frequências naturais tanto para o modelo perfeito quanto imperfeito ao longo de todos os caminhos não lineares de equilíbrio.

Para o sistema perfeito, a configuração estática de referência ao longo do caminho fundamental reduz-se à solução trivial,  $\theta_{est i} = 0$  (expressões (4.2)). Neste caso, as frequências naturais ao longo do caminho fundamental,  $\omega_{0i}$ , e as formas correspondentes dos modos de vibração,  $\Phi_i$ , são dadas por:

$$\omega_{01} = \frac{384}{7}\alpha - \frac{120}{7}\lambda + \frac{24}{7} + \frac{24}{7}\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1} \quad (4.12a)$$

$$\omega_{02} = \frac{384}{7}\alpha - \frac{120}{7}\lambda + \frac{24}{7} - \frac{24}{7}\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1} \quad (4.12b)$$

$$\Phi_1 = \frac{-9 + 66\lambda - 228\alpha - 16\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1}}{-1 + 124\alpha - 30\lambda + 6\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1}} \quad (4.12c)$$

$$\Phi_2 = \frac{9 - 66\lambda + 228\alpha - 16\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1}}{1 - 124\alpha + 30\lambda + 6\sqrt{256\alpha^2 - 132\alpha\lambda + 18\lambda^2 + 4\alpha - 3\lambda + 1}} \quad (4.12d)$$

Na Figura 4.2 apresenta-se os modos de vibração para  $\alpha = 0,10$  e diferentes valores de  $\lambda$ . Os modos de vibração são, neste caso, similares aos modos de flambagem, vide Figura 3.2.

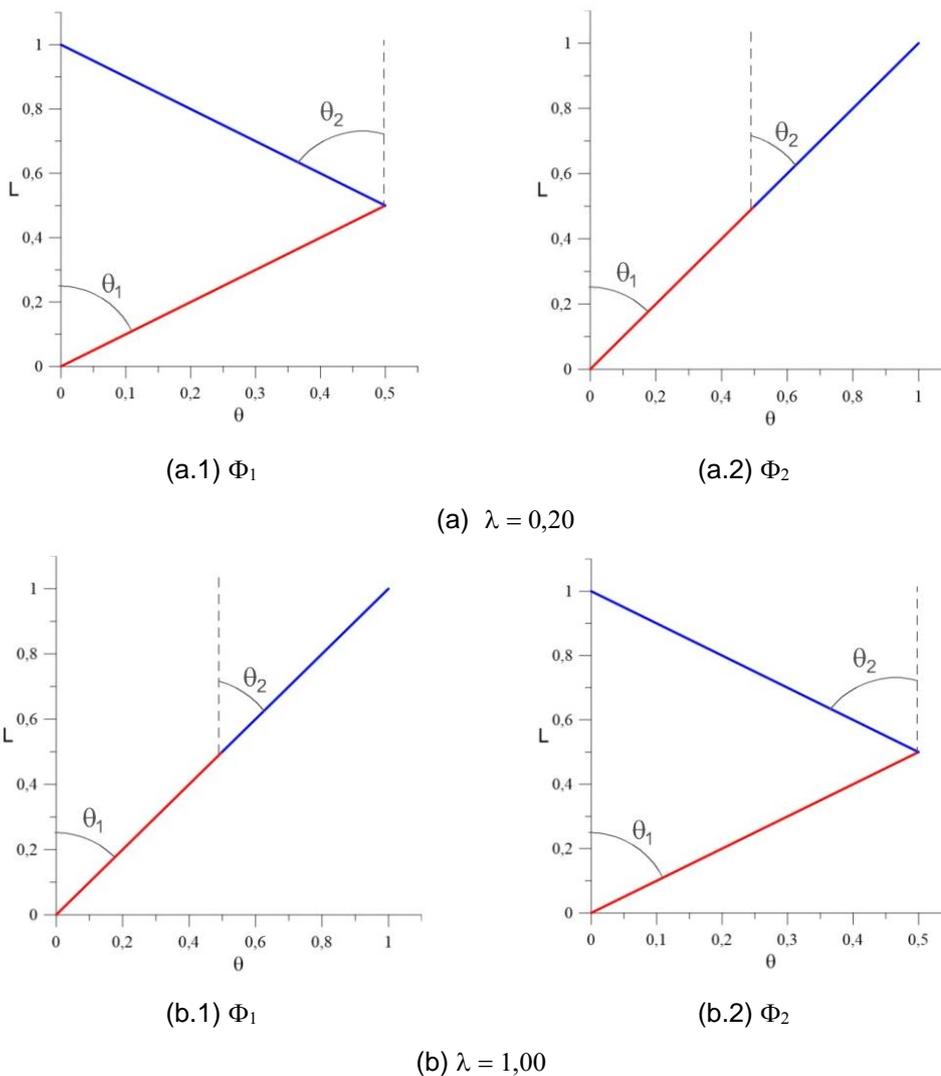


Figura 4.2: Modos de vibração, para  $\alpha=0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Considerando  $\lambda = 0$ , têm-se as frequências naturais do modelo descarregado. Nessa situação, verifica-se, considerando o modelo perfeito, que a influência da rigidez relativa das molas faz com que o sistema apresente duas frequências naturais distintas, diretamente dependentes de  $\alpha$ . A variação das frequências com  $\alpha$  é apresentada na Figura 4.3 para a estrutura descarregada ( $\lambda = 0$ ). Observa-se que a menor frequência natural parte de zero e tende de forma assintótica a um limite superior à medida que  $\alpha$  aumenta enquanto a segunda frequência aumenta de forma quase linear com o parâmetro de rigidez  $\alpha$ .

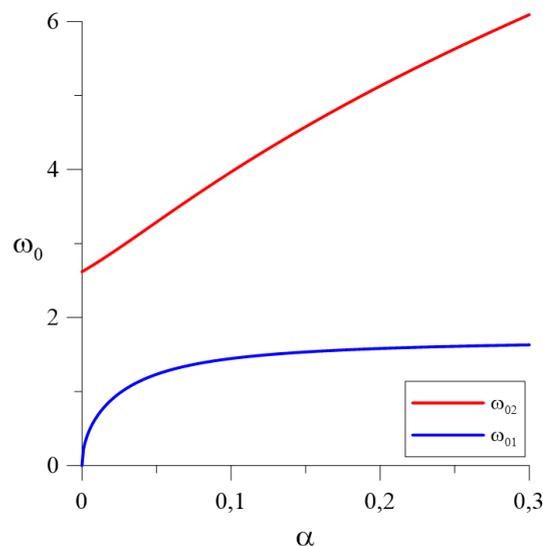


Figura 4.3: Variação das frequências naturais com o parâmetro de rigidez  $\alpha$ , para  $\lambda = 0,0$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

A variação das duas frequências naturais do modelo perfeito com o parâmetro de carga para  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,30$  são representadas na Figura 4.4. À medida que  $\lambda$  aumenta a frequência fundamental diminui e torna-se nula quando  $\lambda$  atinge o valor crítico. A segunda frequência natural segue o mesmo comportamento, tornando-se nula quando  $\lambda$  atinge o valor da segunda carga de bifurcação. Para  $\alpha = \alpha_{cr} = 0,25$ , as duas frequências tornam-se zero simultaneamente, já que as duas cargas de bifurcação são iguais.

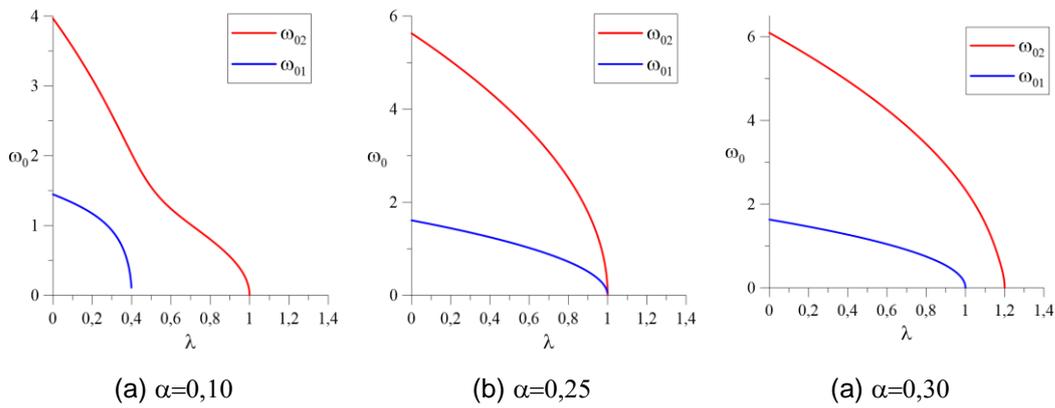


Figura 4.4: Variação das frequências naturais com o parâmetro  $\lambda$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

A Figura 4.5(b) mostra que existe, como acontece em muitas estruturas, uma relação linear entre o quadrado das frequências naturais e o parâmetro de carga  $\lambda$ , para  $\alpha = \alpha_{cr}$ . Para os casos em que  $\alpha < \alpha_{cr}$  (Figura 4.5(a)) e  $\alpha > \alpha_{cr}$  (Figura 4.5(b)) esta afirmação é válida exceto no entorno da carga crítica, onde em vez de ocorrer um cruzamento das duas soluções, há uma divergência das mesmas.

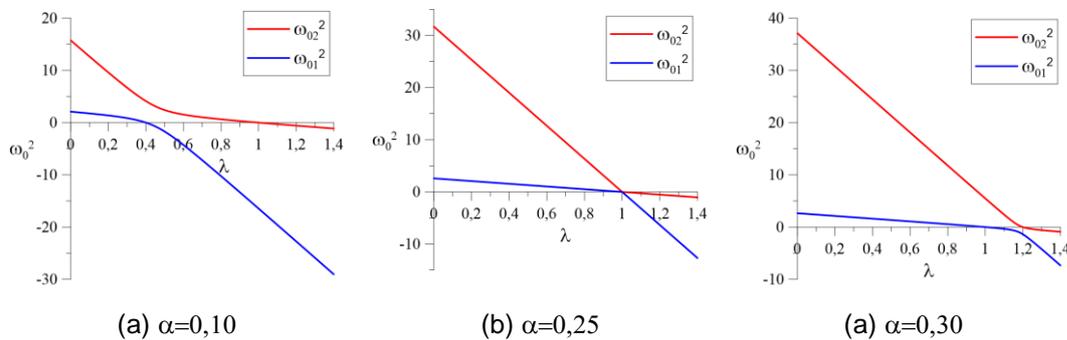


Figura 4.5: Variação do quadrado das frequências naturais com o parâmetro  $\lambda$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

#### 4.1.2. Princípio da Conservação de Energia

Adimensionalizando as expressões da energia cinética (2.5) e de energia potencial total (2.12), e considerando as imperfeições geométricas iniciais nulas, tem-se:

$$\bar{T} = \frac{T}{\rho Al^3} = \frac{1}{48} (3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + (\dot{\theta}_2)^2 + 4(\dot{\theta}_1)^2) \quad (4.13a)$$

$$\bar{\Pi} = \frac{\Pi}{\rho Al^3} = \frac{1}{2} \alpha (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{8} [(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2)]^2 - \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta_1 - \frac{1}{2} \cos\theta_2 \right) \quad (4.13b)$$

Assim a função de Lagrange adimensional é dada por:

$$L(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \bar{T} - \bar{\Pi} = \frac{1}{48} (3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + (\dot{\theta}_2)^2 + 4(\dot{\theta}_1)^2) - \frac{1}{2} \alpha (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{8} [(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2)]^2 + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta_1 - \frac{1}{2} \cos\theta_2 \right) \quad (4.14)$$

onde  $\theta_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{\theta}_i$  as velocidades generalizadas,  $\partial L / \partial \theta_i = \dot{p}_i$ , as forças generalizadas e  $\partial L / \partial \dot{\theta}_i = p_i$  as quantidades de movimento generalizadas.

O sistema de equações de Lagrange (4.1) também pode ser descrito como um sistema de equações de primeira ordem, conhecidas como equações de Hamilton ou equações de estado. Como o movimento é determinado por um conjunto de condições iniciais iguais a  $2n$ , devem existir  $2n$  equações de primeira ordem independentes, em função das coordenadas e velocidades generalizadas, a saber:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.15)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano, que, com base na dupla transformação de Legendre, pode ser escrito como

$$H = p_1 \dot{\theta}_1 + p_2 \dot{\theta}_2 - L \quad (4.16)$$

Para um sistema mecânico onde o Lagrangiano é dado pela equação (4.14),  $T$  é uma função quadrática das velocidades generalizadas e ambas as equações são definidas em função das coordenadas generalizadas e não dependem explicitamente do tempo, o Hamiltoniano,  $H$ , é a energia total do sistema, isto é,  $H = 2\bar{T} - (\bar{T} - \bar{V}) = \bar{T} + \bar{V}$ .

Para um sistema conservativo, em que todas as forças generalizadas são obtidas através da diferenciação de uma função potencial com relação às coordenadas generalizadas, a energia total do sistema é constante, segundo o princípio da conservação de energia, ou seja:

$$\bar{T}(\theta_i, \dot{\theta}_i) + \bar{V}(\theta_i) = C \quad (4.17)$$

onde a constante  $C$  é dependente das quatro condições iniciais do sistema (C.I.), neste caso, dois deslocamentos iniciais e duas velocidades iniciais.

Como o tempo aparece implicitamente, a equação (4.17) descreve uma superfície em quatro dimensões contida no denominado espaço de fase. As seções desta superfície em duas dimensões são chamadas retratos de fase e representam todos os possíveis estados de um sistema dinâmico no plano, sendo cada curva a resposta para um conjunto de condições iniciais. A Figura 4.6 apresenta os retratos de fase considerando  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ . A Figura 4.6(a) corresponde, como esperado, às curvas isoenergéticas da energia potencial total do sistema apresentadas no Capítulo 3.

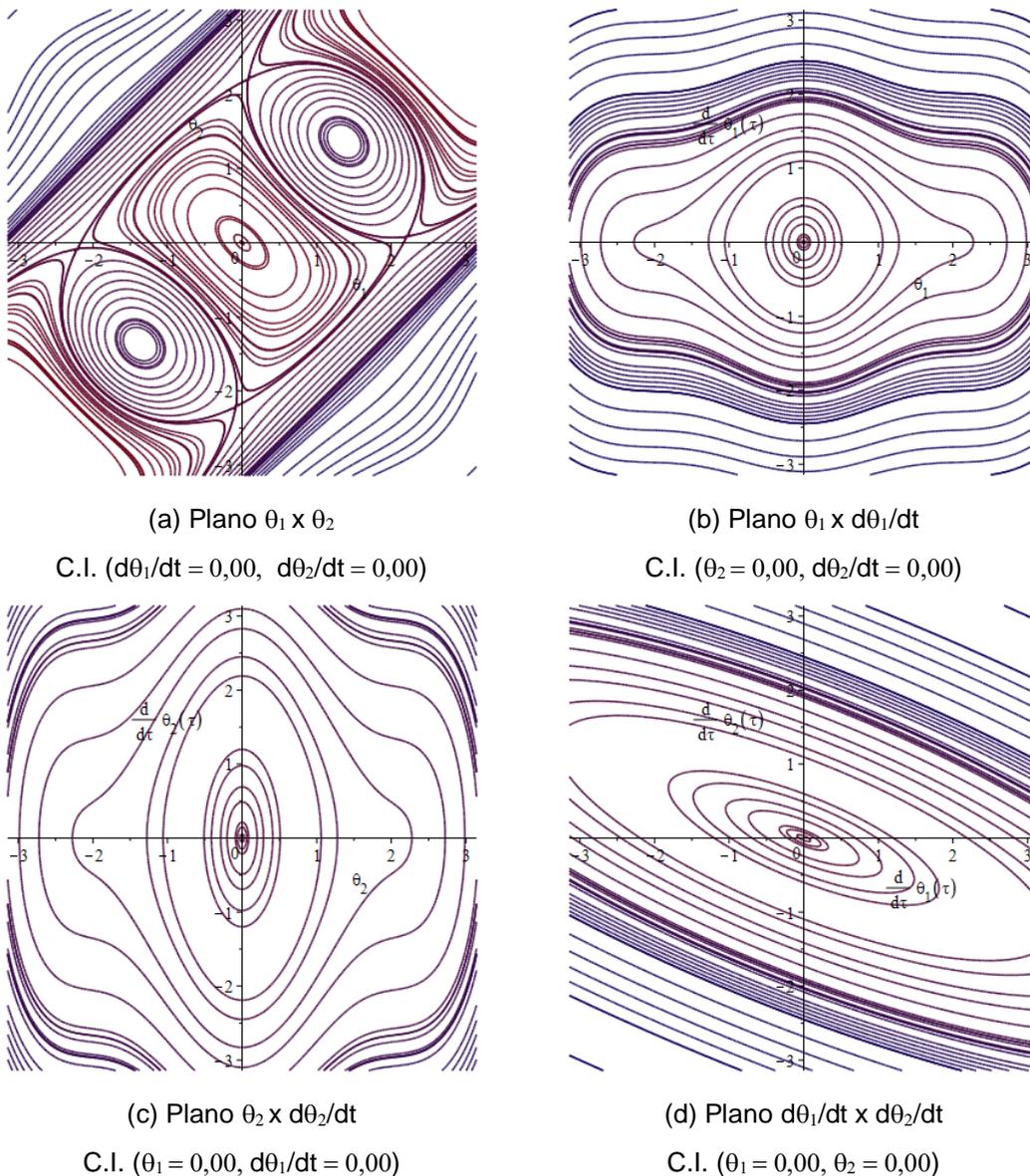


Figura 4.6: Retratos de fase, para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$  e diferentes condições iniciais (C.I.) ( $\theta_1$ ,  $d\theta_1/dt$ ,  $\theta_2$ ,  $d\theta_2/dt$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Considerando a constante  $C$  igual à energia associada aos quatro pontos de sela que se encontram na fronteira do vale potencial pré-crítico (vide Capítulo 3), obtém-se a solução analítica da “bacia de atração conservativa”, superfície no espaço de quatro dimensões que contém todas as condições iniciais do espaço de fase que levam a oscilações em torno da posição fundamental de equilíbrio, ou seja, as perturbações iniciais que não levam a perda de estabilidade, definindo assim a região segura da posição de equilíbrio pré-crítica no espaço de fase. Como ilustração, várias seções em 2D são apresentadas na Figura 4.7 considerando  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ .

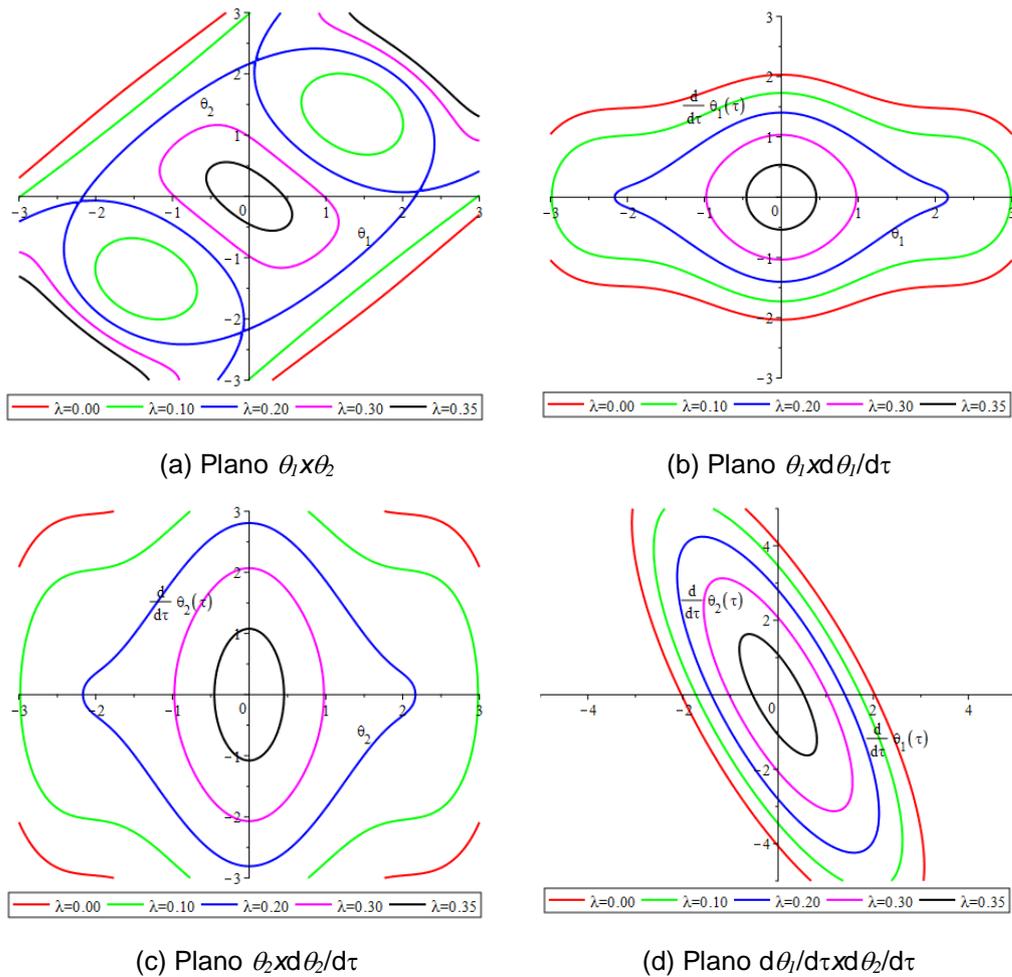


Figura 4.7: Seções das bacias de atração conservativas em 2D para  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Verifica-se que a bacia de atração conservativa é limitada pelas variedades instáveis dos pontos de sela, que no presente caso são quatro órbitas heteroclínicas que conectam estes pontos (vide Figuras 4.6(a) e 4.7(a)) que mostram de forma clara os quatro pontos de sela e suas variedades). A Figura 4.8 mostra seções 3D ( $\theta_1 \times \theta_2 \times d\theta_1/d\tau$ ) da região segura, para valores selecionados de  $\alpha$  e  $\lambda$ . Verifica-se que este hipervolume seguro decresce rapidamente quando a carga estática,  $\lambda$ , aumenta, reduzindo significativamente o conjunto de condições iniciais que levam o sistema a oscilar em torno da solução pré-crítica estável (neste caso, um centro).

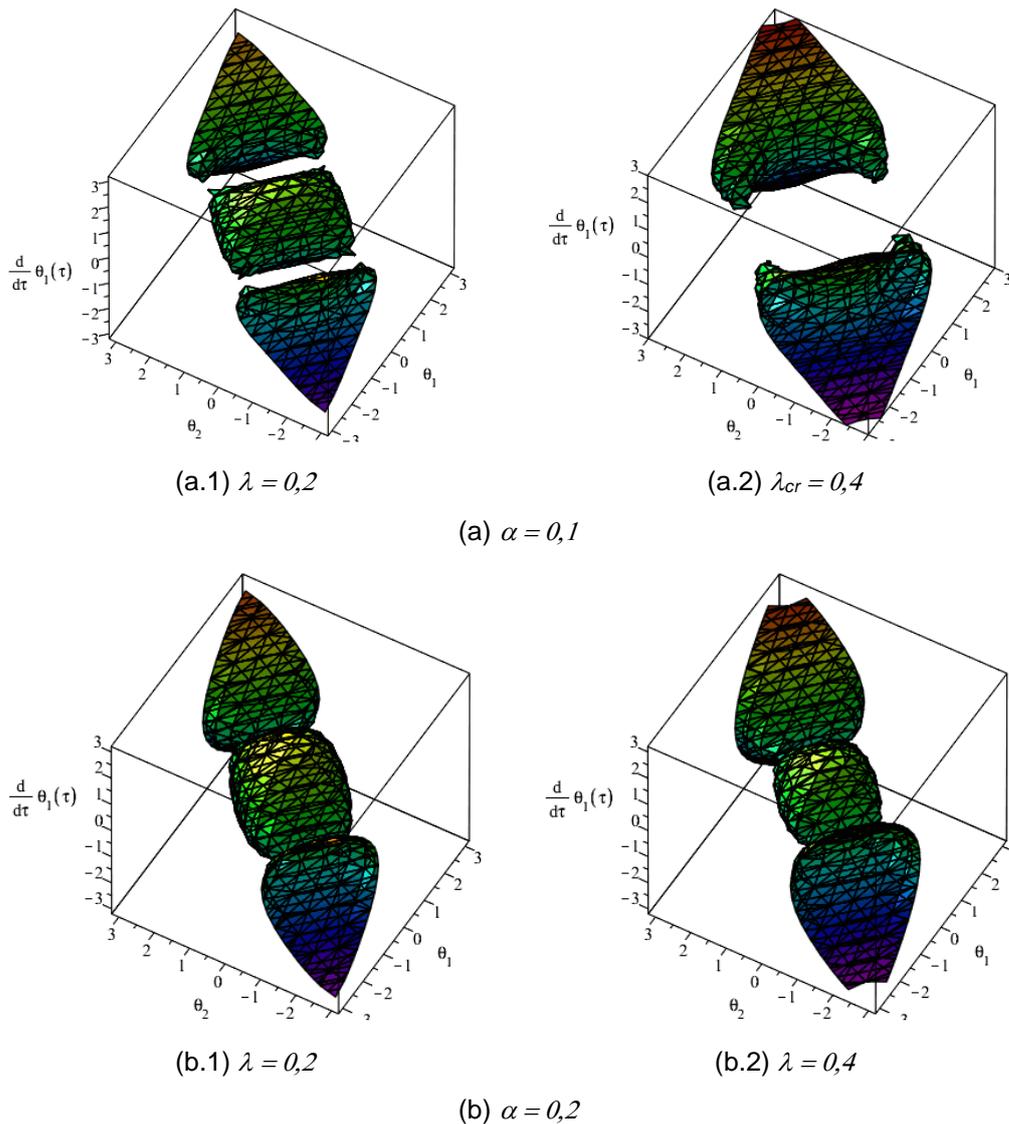


Figura 4.8: Seções das bacias de atração conservativas em 3D ( $\theta_1 \times \theta_2 \times d\theta_1/d\tau$ ), para  $d\theta_2/d\tau = 0,00$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Como os sistemas estruturais esbeltos são geralmente levemente amortecidos, a resposta da estrutura real vai somente se distanciar um pouco do caso conservativo. Uma análise da região segura do sistema amortecido fornece informações importantes sobre os deslocamentos e velocidades máximas admissíveis. Elas também podem ajudar no controle de vibrações e projeto da estrutura.

#### 4.1.2.1.

#### Solução das Equações de Movimento no Espaço Modal

Observando as Figuras 4.6 a 4.8, verifica-se que o modelo de Raithel e Clemente perfeito pode ser desacoplado em um dos planos dos modos de

vibração, ou seja, pode-se representar o modelo perfeito através de um modelo reduzido com um grau de liberdade. Para isso, faz-se necessário obter a função linear que representa os modos de vibração desacoplados. Percebe-se que o modo que possui os deslocamentos com sinais iguais -  $\theta_1 = \theta_2$  ( $v_2 = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ ) - localiza-se em uma diagonal a  $45^\circ$  do eixo  $\theta_1$  e o modo que possui sinais opostos -  $\theta_1 = -\theta_2$  ( $v_1 = [\theta_1 \ -\theta_2]^T$ ) - ficam sobre a diagonal a  $-45^\circ$  do eixo  $\theta_1$ . A partir dessa observação, pode-se aplicar uma mudança de coordenadas que permite obter as equações de conservação de energia desacopladas, nos eixos auxiliares  $u$  e  $v$ , como mostra a Figura 4.9.

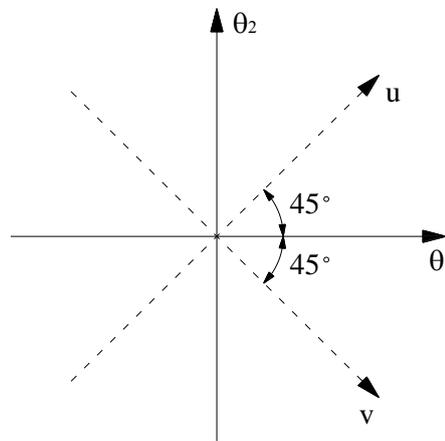


Figura 4.9: Coordenadas auxiliares. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Observando a Figura 4.8, pode-se deduzir que as funções lineares que representam os modos de vibração são:

$$\theta_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } v = \dot{v} = 0. \quad (4.18a)$$

$$\theta_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{v}}{\sqrt{2}}, \theta_2 = \frac{-v}{\sqrt{2}} \text{ e } \dot{\theta}_2 = \frac{-\dot{v}}{\sqrt{2}}, \text{ considerando } u = \dot{u} = 0. \quad (4.18b)$$

sendo que as expressões (4.18a) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $u \times du/d\tau$  e as expressões (4.18b) fornecem a equação de movimento desacoplada no plano  $v \times dv/d\tau$ .

Assim, substituindo nas parcelas de energia do modelo de Raithel e Clemente perfeito as expressões (4.18a), e adotando como coordenada

generalizada  $u$ , obtém-se a equação (4.19) desacoplada no plano  $u \times du/d\tau$ , a saber:

$$\frac{1}{12}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - \lambda\left[1 - \cos\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right] = C \quad (4.19)$$

De forma similar obtém-se a equação no plano  $v \times dv/d\tau$ .

A Figura 4.10 apresenta os retratos de fase desacoplados, considerando  $\alpha = 0.10$ . Observa-se que para  $\lambda = 0,60$ , para este valor de  $\lambda$  ( $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ ), o modo de vibração em  $u$  é estável (origem é um centro) e o modo de vibração em  $v$  é instável (origem é uma sela). Isto está de acordo com a Figura 4.5(a), onde, para  $\lambda = 0,60$  o quadrado da primeira frequência é negativo (instabilidade) e o quadrado da segunda frequência é positivo (estabilidade).

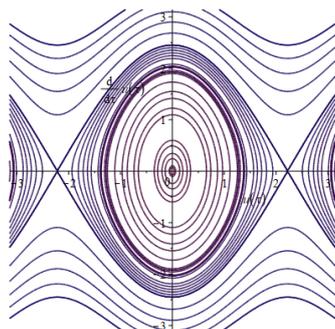
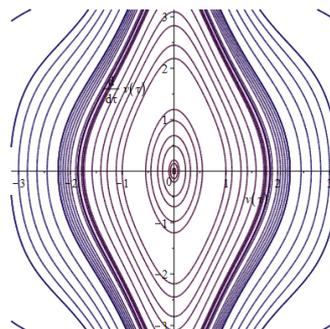
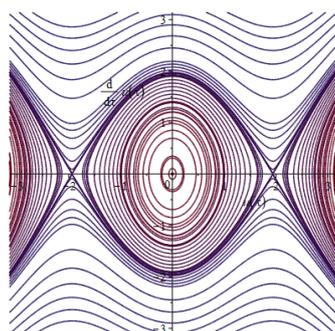
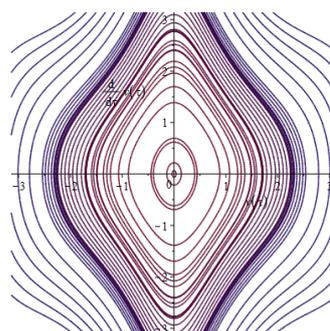
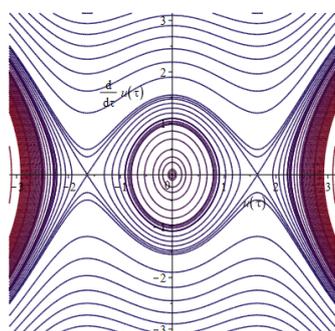
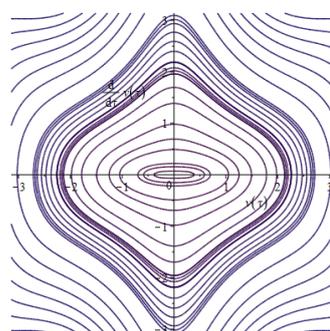
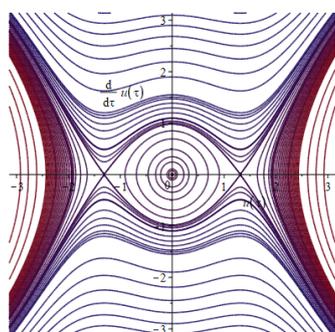
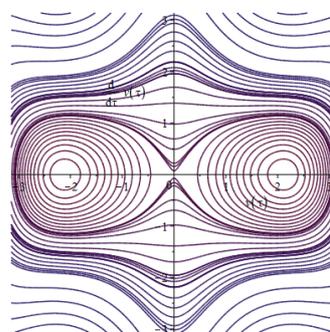
(a.1) Plano  $u \times du/d\tau$ (a.2) Plano  $v \times dv/d\tau$ (a)  $\lambda = 0,00$ (b.1) Plano  $u \times du/d\tau$ (b.2) Plano  $v \times dv/d\tau$ (b)  $\lambda = 0,20$ (c.1) Plano  $u \times du/d\tau$ (c.2) Plano  $v \times dv/d\tau$ (c)  $\lambda = 0,40$ (d.1) Plano  $u \times du/d\tau$ (d.2) Plano  $v \times dv/d\tau$ (d)  $\lambda = 0,60$ 

Figura 4.10: Retratos de fase do sistema desacoplado, para  $\alpha = 0,10$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

### 4.1.3. Solução Numérica das Equações de Movimento

Em sistemas não lineares raramente é possível se obter uma solução exata para a equação diferencial de movimento, particularmente para o sistema amortecido. Por isto, a solução deve ser obtida pela integração das equações de movimento através de métodos numéricos. Neste trabalho, utiliza-se o método de Runge Kutta de 4ª ordem. Para usar este algoritmo é necessário transformar as equações diferenciais de 2ª ordem, equações (2.21), em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. A transformação é feita realizando a seguinte mudança de variáveis:

$$y_1 = \theta_1 \quad (4.20a)$$

$$y_2 = \frac{d\theta_1}{d\tau} \quad (4.20b)$$

$$y_3 = \theta_2 \quad (4.20c)$$

$$y_4 = \frac{d\theta_2}{d\tau} \quad (4.20d)$$

As equações de estado são, então, obtidas:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \quad (4.21a)$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = y_4 \quad (4.21b)$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \frac{-aux_{12}aux_4 - (-aux_3)aux_5}{-aux_{11}(-aux_{12}) - aux_3^2} \quad (4.21c)$$

$$\frac{dy_4}{d\tau} = \frac{-aux_{11}aux_5 - (-aux_3)aux_4}{-aux_{11}(-aux_{12}) - aux_3^2} \quad (4.21d)$$

onde  $aux_{11}$  e  $aux_{12}$  são dadas pelas expressões (4.9), e

$$aux_3 = \frac{1}{16} \text{sen}y_1 \text{sen}y_3 + \frac{1}{16} \text{cos}y_1 \text{cos}y_3 \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned}
aux_4 = & + \frac{1}{16} y_4^2 \text{sen} y_1 \cos y_3 - \frac{1}{16} y_4^2 \cos y_1 \text{sen} y_3 \\
& - 2\xi_1 (y_4 - y_2) + 2\xi_2 (y_2 \cos y_1^2 + y_4 \cos y_1 \cos y_3) \\
& + \frac{1}{4} (\cos y_1 \text{sen} y_1 + \cos y_1 \text{sen} y_3) + \alpha (y_1 - y_3) \\
& - \frac{1}{2} \lambda \text{sen} y_1
\end{aligned} \tag{4.22a}$$

$$\begin{aligned}
aux_5 = & - \frac{1}{16} y_2^2 \text{sen} y_1 \cos y_3 + \frac{1}{16} y_2^2 \cos y_1 \text{sen} y_3 \\
& + 2\xi_1 (y_4 - y_2) + 2\xi_2 (y_2 \cos y_1 \cos y_3 + y_4 \cos y_3^2) \\
& + \frac{1}{4} (\cos y_3 \text{sen} y_1 + \cos y_3 \text{sen} y_3) + \alpha (-y_1 + y_3) \\
& - \frac{1}{2} \lambda \text{sen} y_3
\end{aligned} \tag{4.22c}$$

As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam, para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ , impondo-se uma pequena perturbação a um dos pontos de sela ( $\theta_1 = 0,084$ ,  $\theta_2 = 2,209$  e velocidades iniciais nulas), projeções da resposta no tempo em vibração livre para o sistema não amortecido ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ) e amortecido ( $\xi_1 = \xi_2 = 1\%$ ). Verifica-se que o comportamento dinâmico da coluna está intimamente relacionado com a geometria da superfície de energia associada ao problema. Em ambos os casos o sistema vibra no interior do vale potencial pré-crítico.

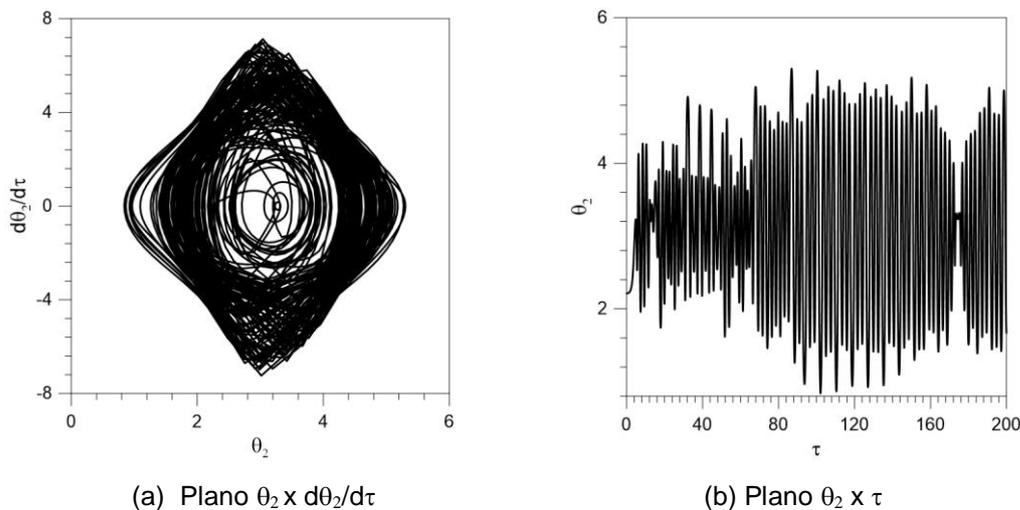


Figura 4.11: Resposta no tempo, para  $\alpha=0,10$ ;  $\lambda=0,20$ ;  $\theta_1=0,084$ ;  $d\theta_1/d\tau=0,00$ ;  $\theta_2=2,209$ ;  $d\theta_2/d\tau=0,00$ ;  $\xi_1=\xi_2=0,00$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

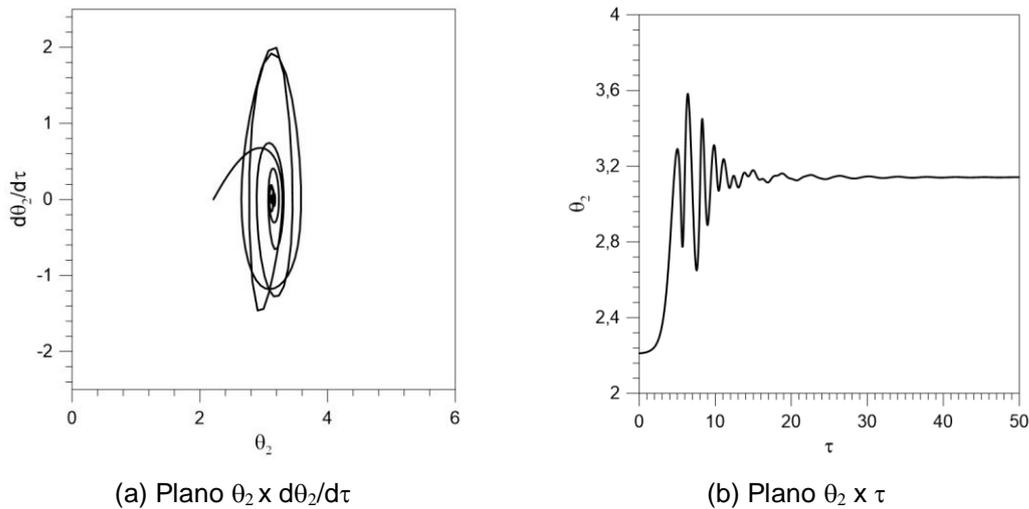


Figura 4.12: Resposta no tempo, para  $\alpha=0,10$ ;  $\lambda=0,20$ ;  $\theta_1=0,084$ ;  $d\theta_1/d\tau=0,00$ ;  $\theta_2=2,209$ ;  $d\theta_2/d\tau=0,00$ ;  $\xi_1=\xi_2=0,01$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

#### 4.1.3.1. Bacia de Atração Não Conservativa

No modelo de Raithel e Clemente, em função dos diversos caminhos pós-críticos instáveis descendentes, existe a possibilidade de perda de estabilidade para cargas inferiores à carga crítica de flambagem, desde que as perturbações excedam os limites da região segura em torno da configuração fundamental. Utilizando o princípio da conservação de energia, obtém-se a fronteira de estabilidade da posição de equilíbrio pré-crítica (bacia de atração conservativa), cuja fronteira é limitada pelos pontos de sela associados às soluções pós-críticas instáveis, como apresentado no item 4.1.2.

Para o sistema amortecido (não conservativo) devem-se obter numericamente as bacias de atração do sistema considerando as parcelas de amortecimento. Utiliza-se aqui o “método da força bruta”, onde discretiza-se o espaço de fase em um número suficientemente grande de células, e, tomando as coordenadas do centro de cada célula como as condições iniciais, integra-se o sistema por um tempo suficientemente longo para que este venha a convergir para uma dada posição de equilíbrio estável (atrator).

As Figuras 4.13 a 4.16 apresentam as seções das bacias de atração do sistema amortecido no plano dos deslocamentos ( $\theta_1 \times \theta_2$ ) para, respectivamente,  $\alpha = 0,10$ ,  $\alpha = 0,15$ ,  $\alpha = 0,20$  e  $\alpha = 0,30$ , considerando em cada caso valores

crecentes do parâmetro de carga  $\lambda$ . Os resultados são obtidos considerando-se os seguintes coeficientes de amortecimento:  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

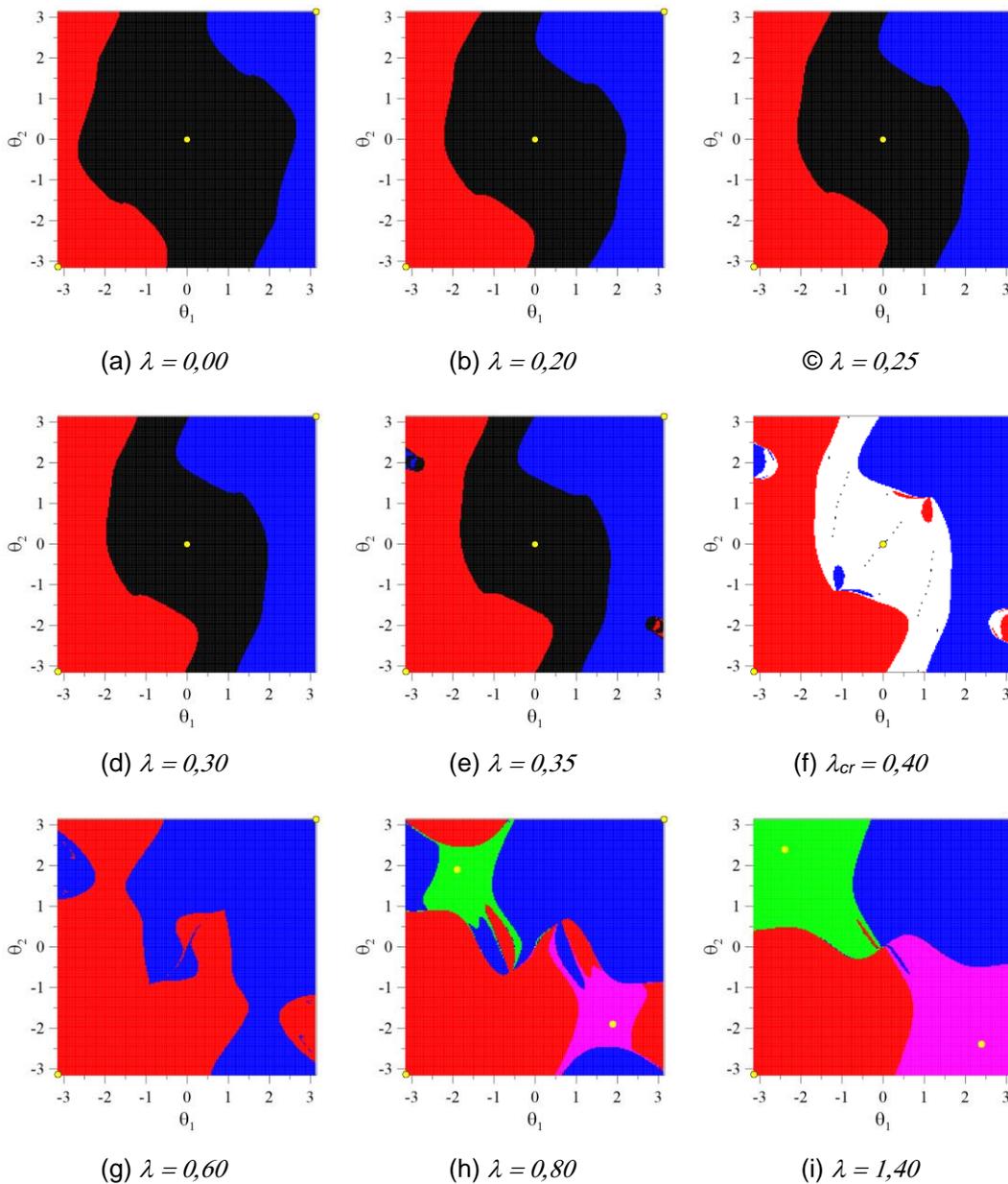


Figura 4.13: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para  $\alpha = 0,10$  ( $\lambda_{cr} = 0,40$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Verifica-se em todos os casos que as seções das bacias de atração refletem a simetria do sistema a  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ .

Para  $\alpha = 0,10$ , observa-se que, com aumento do carregamento, a bacia de atração segura (em preto) diminui continuamente com  $\lambda$ , desaparecendo ao atingir a carga crítica estática,  $\lambda_{cr} = 0,4$ . As respostas relativas às condições

iniciais nesta região convergem para o atrator  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , que corresponde à posição de equilíbrio estável ao longo do caminho fundamental. As bacias em vermelho e azul referem-se aos atratores  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$  (região vermelha) e  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  (região azul) que correspondem ao sistema em uma posição invertida, ou seja, há escape do vale potencial pré-crítico, isto é, instabilidade (barra invertida tracionada). Cabe lembrar, como visto no Capítulo 3, que, para estes níveis de carregamento as outras posições de equilíbrio são instáveis. Para certos níveis de carregamento superiores à carga crítica existem outras posições de equilíbrio estável (caminho ascendente estável em vermelho na Figura 3.3), referentes às bacias em verde e rosa, cujas coordenadas dos atratores são função do nível de carregamento. Comparando-se a Figura 4.7(a) com a Figura 4.13(b), ambas para  $\lambda = 0,2$ , observa-se que o amortecimento tem um efeito benéfico, aumentando o conjunto de condições iniciais que leva a uma resposta estável.

De modo semelhante, para  $\alpha = 0,15$  e  $\alpha = 0,20$  ( $\alpha < \alpha_{cr}$ ), observa-se que a região que constitui a bacia de atração da solução fundamental de equilíbrio (em preto) decresce à medida que o carregamento estático cresce, tornando-se zero no ponto de bifurcação (carga crítica). Assim, à medida que cresce o carregamento, reduz-se substancialmente o conjunto de possíveis condições iniciais que levam a estrutura a retornar, após uma perturbação, à configuração fundamental de equilíbrio cuja estabilidade e integridade se deseja preservar.

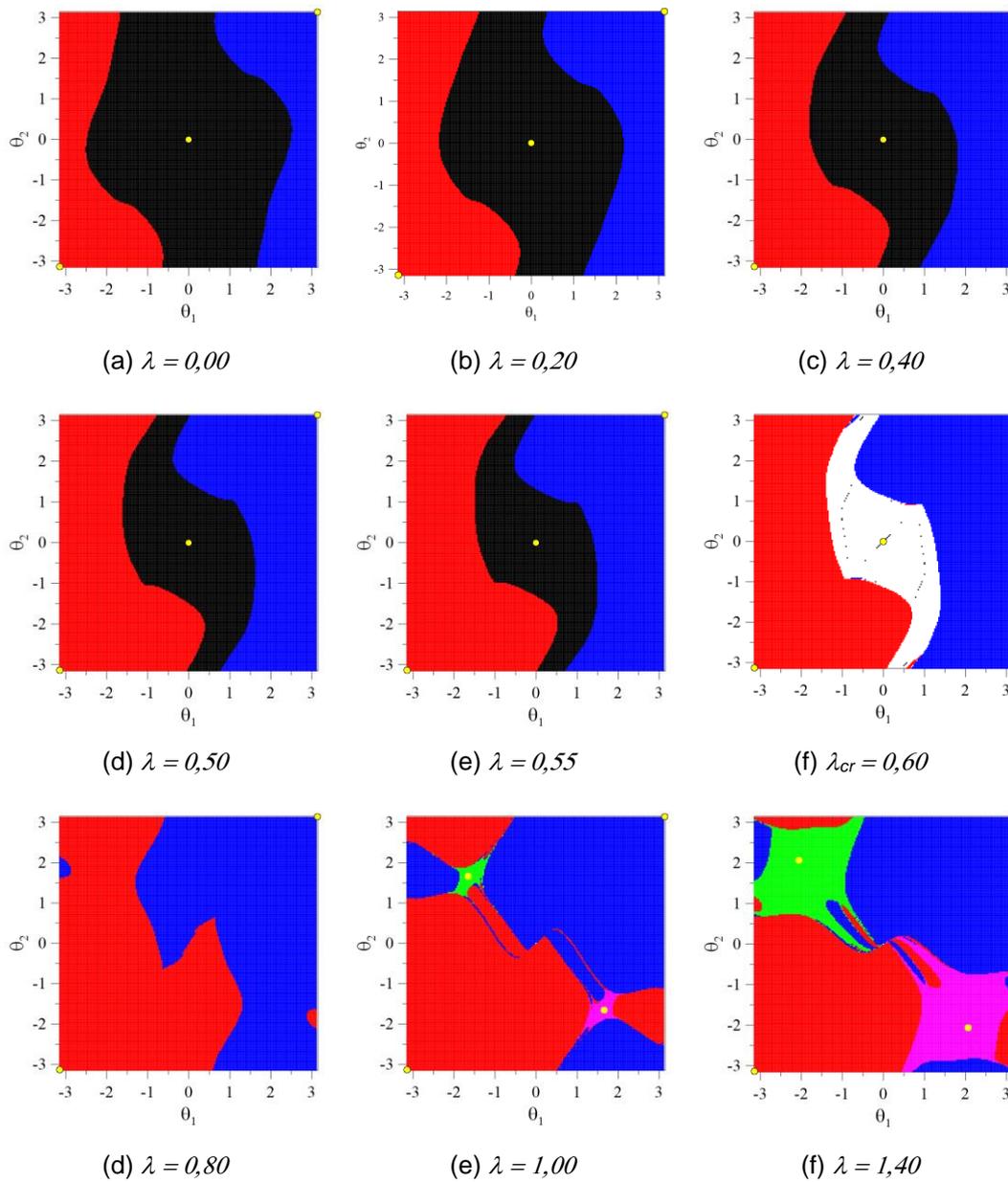


Figura 4.14: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para  $\alpha = 0,15$  ( $\lambda_{cr} = 0,60$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

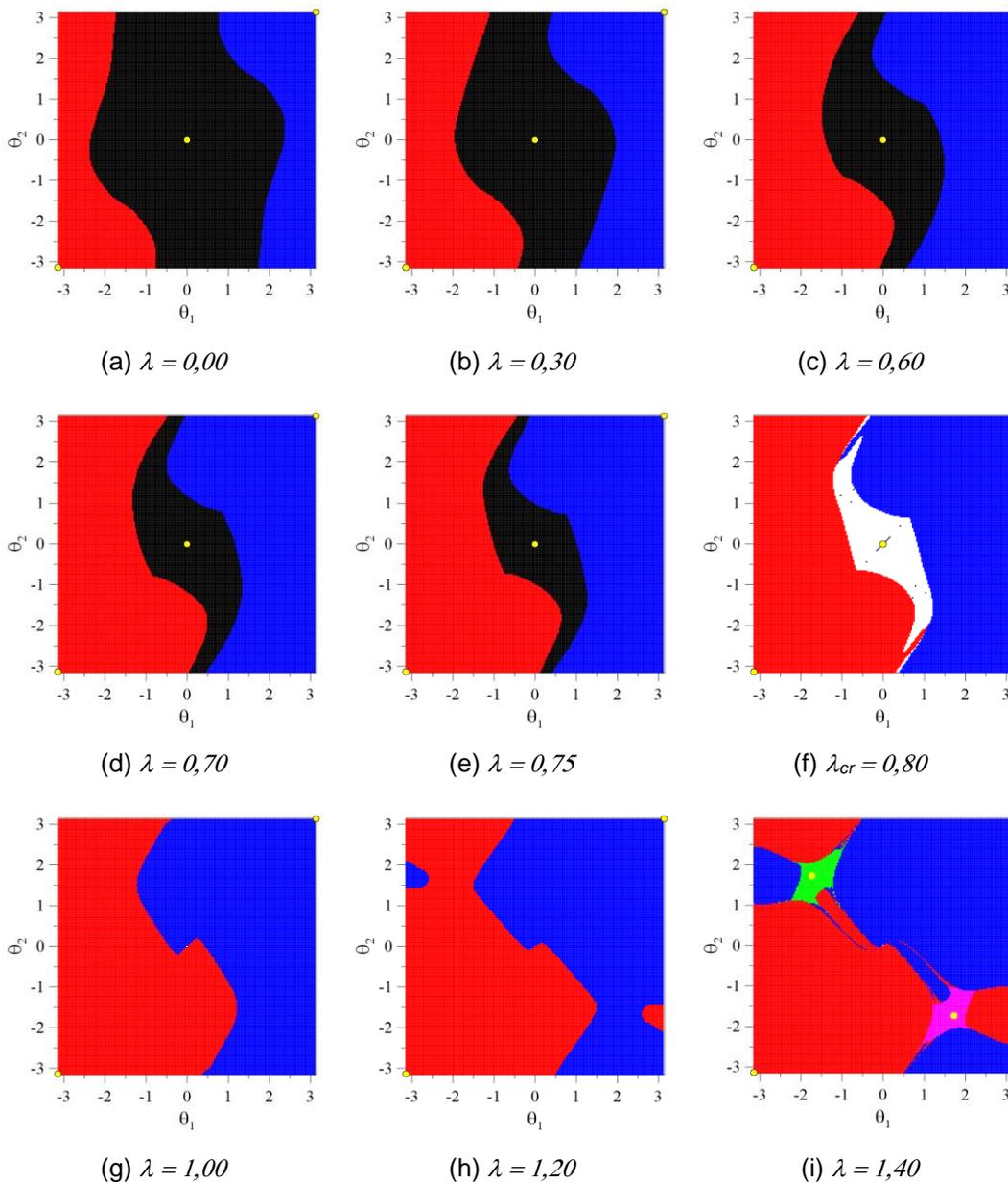


Figura 4.15: Seções das bacias de atração no plano dos deslocamentos, para  $\alpha = 0,20$  ( $\lambda_{cr} = 0,80$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Para  $\alpha \geq 0,25$ ,  $\alpha > \alpha_{cr}$ , também se observa o decréscimo da bacia de atração segura, referente ao caminho fundamental, até se atingir a carga crítica estática (Figura 4.15,  $\alpha = 0,3$ ,  $\lambda_{cr} = 1,0$ ). Verifica-se, portanto, que não só as imperfeições iniciais, mas também as perturbações que surgem durante a vida útil da estrutura devem ser levadas em consideração no projeto de estruturas sujeitas a bifurcações instáveis, em particular aquelas passíveis de acoplamento modal, onde soluções acopladas instáveis têm uma profunda influência no tamanho e geometria da bacia de atração segura.

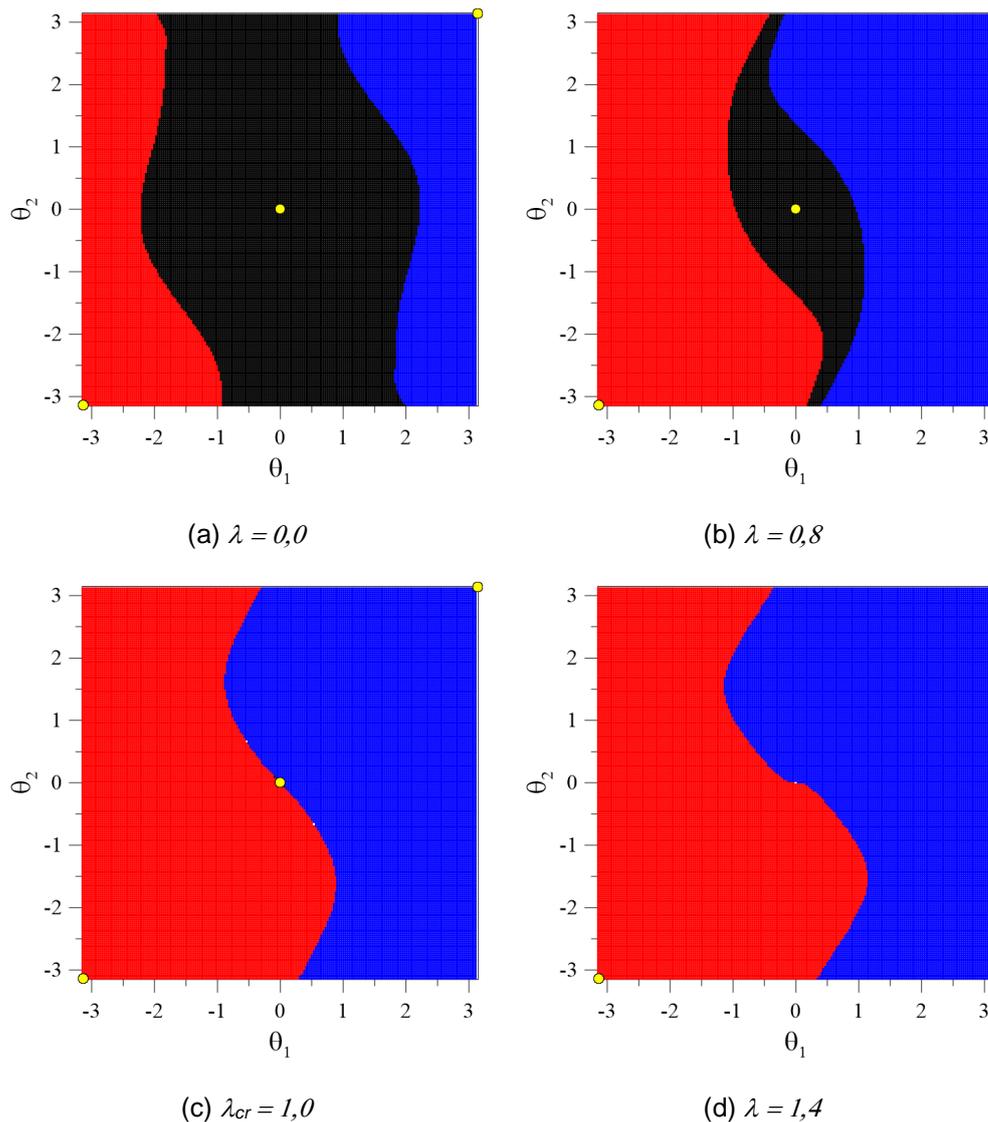


Figura 4.16: Seções das bacias de atração conservativas em 2D, para  $\alpha = 0,30$  ( $\lambda_{cr} = 1,00$ ). Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

#### 4.1.4. Relação Frequência - Amplitude

Sabe-se que em um sistema não linear a frequência do sistema em vibração livre depende da amplitude de vibração, sendo este fato expresso pela relação frequência-amplitude. Aqui, esta relação é obtida a partir da integração do sistema de equações de primeira ordem (4.22) não amortecido, usando-se além do método de Runge-Kutta, o chamado *shooting method* (Dos Anjos, 1995; Orlando, 2010) que procura, para uma dada amplitude de vibração, o conjunto de condições iniciais que levam a uma órbita fechada, ou seja, após um período completo de vibração obtêm-se as mesmas velocidades e deslocamentos iniciais. Na Figura

4.15 apresentam-se as relações frequência-amplitude para o modelo de Raithel e Clemente perfeito para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ . A Figura 4.17(a) mostra a relação não linear frequência-amplitude associada à menor frequência natural ( $\omega_1 = 1,171$ ) enquanto a Figura 4.17(b) mostra a relação associada à segunda frequência natural ( $\omega_2 = 3,098$ ), que apresenta um menor grau de não linearidade. Ambos os modos apresentam um comportamento *softening*, ou seja, com perda de rigidez. Nos próximos capítulos, mostra-se como a relação frequência-amplitude influencia a resposta do sistema em vibração forçada.

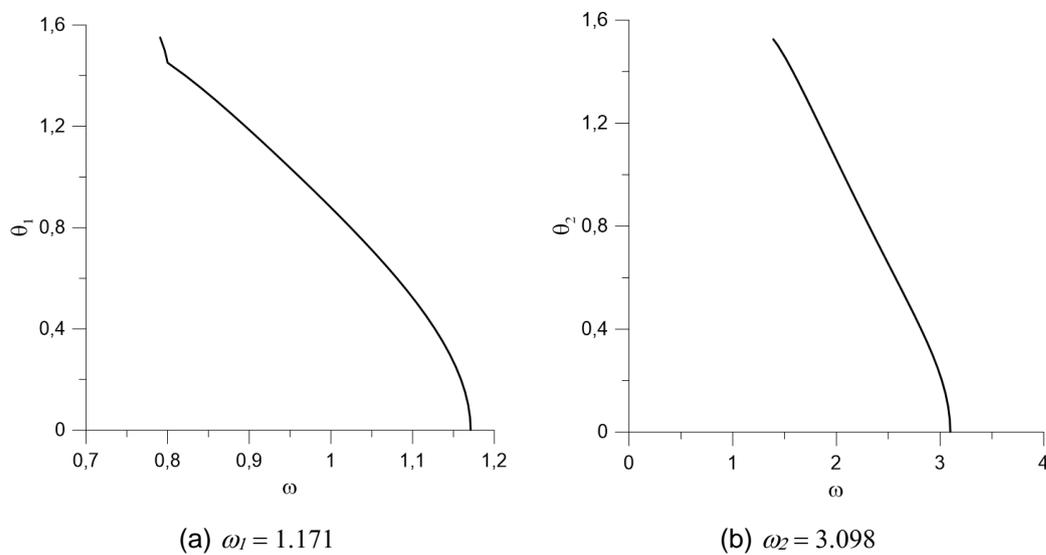


Figura 4.17: Relações frequência-amplitude para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ . Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

## 5

# Análise Dinâmica – Vibração Forçada: Carregamento Axial Periódico

O presente capítulo apresenta um estudo detalhado do modelo sob carregamento axial periódico, que pode induzir o sistema a sofrer instabilidade paramétrica. Obtêm-se as fronteiras de estabilidade paramétrica, identificando assim as principais regiões de instabilidade paramétrica do modelo, os diagramas de bifurcações, as bacias de atração, as respostas no tempo e o mapeamento de Poincaré, o que permite, juntamente com os resultados dos capítulos 3 e 4, uma compreensão do comportamento dinâmico do modelo.

### 5.1. Instabilidade Paramétrica

Com o intuito de compreender o comportamento e a segurança do modelo de Raithel e Clemente sob carregamento axial periódico, faz-se inicialmente um resumo da teoria de instabilidade paramétrica.

A instabilidade paramétrica é um problema clássico em elementos estruturais esbeltos e está presente quando nas equações de movimento do sistema encontram-se coeficientes dependentes explicitamente do tempo (excitação paramétrica), geralmente periódicos.

A excitação paramétrica é um caso particular de vibração forçada, em que uma pequena excitação pode produzir uma resposta de grande amplitude caso a frequência de excitação seja próxima da frequência natural ou de múltiplos desta frequência. Quando a frequência de excitação do sistema é duas vezes a frequência natural do sistema tem-se a chamada região principal de ressonância paramétrica.

Os primeiros estudos de ressonância paramétrica são atribuídos a Faraday (apud Nayfeh e Mook, 1995), que observou que as ondas na superfície de um líquido dentro de um cilindro submetido a uma excitação vertical exibem o dobro do período da excitação.

Belayev (apud Oliveira, 1998) estudou a resposta de uma coluna biarticulada sujeita a uma carga axial da forma  $p(t) = p_0 + p \cos(\Omega t)$  e obteve como equação de movimento da coluna uma equação de Mathieu, determinando assim a frequência de ressonância paramétrica principal. Com isto, ele mostrou que a coluna exibia fortes vibrações laterais quando a frequência da solicitação longitudinal era aproximadamente o dobro da frequência natural do movimento transversal.

### 5.1.1. Equação de Mathieu

Oscilações paramétricas são descritas, em geral, por equações diferenciais não lineares. Contudo, em alguns casos, essas equações podem ser linearizadas tornando mais simples sua análise. Em sua forma linearizada podem assumir a forma da equação clássica de Mathieu que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficiente periódico, da forma:

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0 \quad (5.1)$$

onde  $\delta$  (parâmetro relacionado à frequência natural do sistema) e  $\varepsilon$  (parâmetro relacionado à magnitude da excitação paramétrica) são constantes. Para um dado par de parâmetros  $(\delta, \varepsilon)$  o sistema pode exibir soluções estáveis ou instáveis. A representação destes pontos no plano  $\delta - \varepsilon$  é mostrada na Figura 5.1, conhecida como diagrama de estabilidade ou de Strutt, que apresenta as regiões estáveis e instáveis (hachurada) da equação de Mathieu. Os valores de  $\delta$  e  $\varepsilon$  na transição entre essas regiões definem a fronteira de estabilidade paramétrica.

Os sistemas reais sempre possuem algum grau de amortecimento, neste caso acrescenta-se um termo dissipativo à equação 5.1. O amortecimento tem um efeito benéfico sobre a estabilidade do sistema, diminuindo a região de instabilidade (Nayfeh e Mook, 1995). As regiões estáveis correspondem aos pares  $(\delta, \varepsilon)$  para os quais, após uma perturbação, tem-se um centro, no caso do sistema não-amortecido, ou um foco ou nó estável, no caso do sistema amortecido. As áreas hachuradas correspondem a respostas cuja amplitude cresce exponencialmente com o tempo (foco ou nó instável).

Se houver interesse no estudo do comportamento pós-crítico, ou seja, na determinação das amplitudes e fases no regime estacionário, é necessário incorporar à equação de Mathieu os termos não lineares (Bolotin, 1964). Neste caso a amplitude da solução não cresce indefinidamente, mas a resposta instável converge para uma solução pós-crítica que pode estar no infinito (escape).

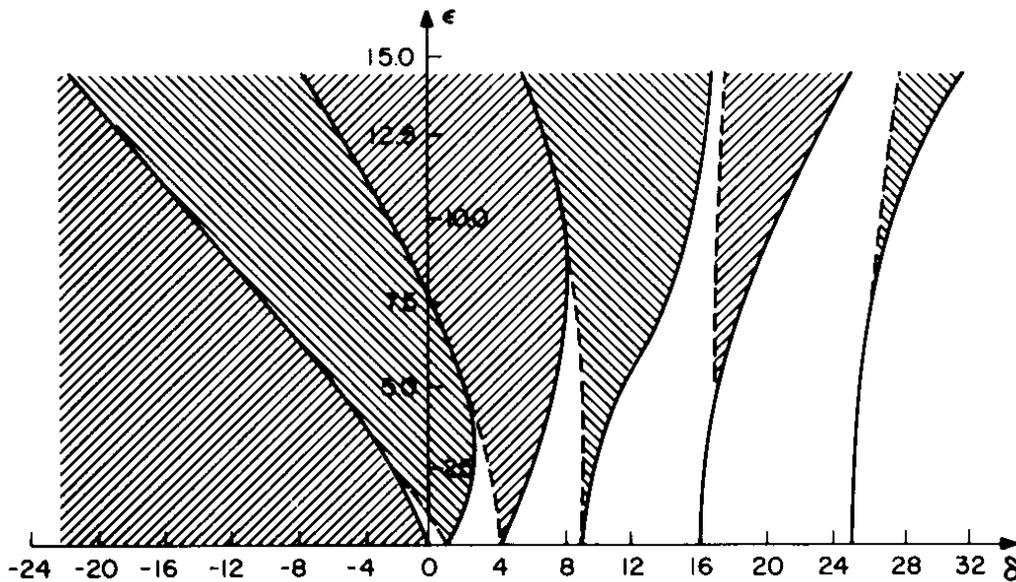


Figura 5.1: Diagrama de Strutt no plano ( $\delta$ - $\epsilon$ ) para equação de Mathieu (Nayfeh & Mook, 1995).

## 5.2. Fronteiras de Escape

Uma das fases iniciais para investigar o comportamento de estruturas submetidas a carregamento harmônico paramétrico é a obtenção das fronteiras de estabilidade em função dos parâmetros de controle da excitação harmônica, que são a frequência e a magnitude da excitação.

Para uma dada frequência de excitação,  $\beta$ , carga estática,  $\lambda$ , e rigidez,  $\alpha$ , e considerando como parâmetro de controle a magnitude da força,  $F$ , obtém-se, com base no método da força bruta, o diagrama de bifurcação a partir do qual se obtém a carga de instabilidade paramétrica (carga crítica,  $F_{cr}$ ) e a carga de escape ( $F_{esc}$ ).

O tempo de integração é variável, ou seja, depende do tempo que o sistema leva para atingir a fase permanente da resposta após cada incremento de  $F$ . Ao se variar a frequência de excitação num dado intervalo, que inclui necessariamente as frequências naturais do sistema e seus primeiros múltiplos e submúltiplos,

obtêm-se para cada valor de  $\lambda$  uma curva no espaço  $F$  versus  $\beta$ , denominada fronteira de escape. A região abaixo das curvas de transição corresponde a situações estáveis e a região acima destas curvas a respostas instáveis (Orlando, 2010).

### 5.3. Diagramas de Bifurcação

Um diagrama de bifurcação é a representação gráfica das mudanças qualitativas de uma solução em função de um parâmetro de controle. Através de um diagrama de bifurcação podem ser identificadas as soluções de equilíbrio, as órbitas periódicas, quase periódicas e caóticas de um dado sistema, bem como os valores do parâmetro de controle onde ocorrem mudanças qualitativas no comportamento do sistema, denominados pontos de bifurcação.

Para traçar os diagramas de bifurcação é utilizado o mapeamento de Poincaré em associação com o método iterativo de Newton-Raphson, como proposto por Machado (1993). Deste modo, os pontos fixos são numericamente determinados e sua estabilidade é obtida por meio dos multiplicadores de Floquet. A teoria do mapeamento de Poincaré e dos multiplicadores de Floquet não são aqui apresentadas, porém podem ser encontradas em Machado (1993) e Thompson & Stewart (1993), dentre outros.

As bifurcações aqui analisadas são locais, devido à natureza dos multiplicadores de Floquet, sendo que tais se caracterizam por serem contínuas ou descontínuas (catastróficas). No caso das contínuas, o movimento do sistema evolui para outro movimento enquanto o parâmetro de controle varia de uma maneira quase estacionária. As bifurcações descontínuas podem ser perigosas, pois o sistema salta para outro atrator, que pode estar no infinito, enquanto o parâmetro de controle varia de uma maneira quase estacionária.

Também podem ocorrer bifurcações estáticas ou dinâmicas. Uma bifurcação é dita estática quando nos pontos de bifurcação convergem pontos fixos ou soluções de equilíbrio. Já uma bifurcação é dita dinâmica se para os pontos de bifurcação convergem pontos fixos e soluções periódicas.

Ao se variar um dos parâmetros de controle de um ponto fixo estável de um sistema contínuo, esse ponto fixo pode perder a estabilidade por meio de uma das

seguintes bifurcações, considerando apenas os casos encontrados no presente trabalho:

- Bifurcação por quebra de simetria (pitchfork);
- Bifurcação por dobra cíclica (nó-sela);
- Bifurcação por duplicação de período (Flip);
- Bifurcação de Hopf secundária ou de Neimark.

As bifurcações das soluções periódicas são caracterizadas pela maneira como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo de raio unitário. Sendo assim, as bifurcações do tipo pitchfork e nó-sela ocorrem quando um autovalor real deixa o círculo unitário através do ponto  $+1$ . A bifurcação por duplicação de período ocorre quando o autovalor real deixa o círculo unitário através do ponto  $-1$ . Por fim, a bifurcação do tipo Hopf ocorre quando um par de autovalores complexos ultrapassa o círculo de raio unitário. Autovalores no interior do círculo unitário indica estabilidade (Thompson e Stewart, 1993)

A bifurcação do tipo pitchfork pode ser dividida em duas categorias: supercrítica e subcrítica. Em ambos os casos, os pontos fixos estáveis, que existem antes da bifurcação, se tornam instáveis após a bifurcação. A bifurcação supercrítica é caracterizada por ser contínua, Figura 5.3(a), enquanto que a subcrítica é caracterizada por ser descontínua ou catastrófica, Figura 5.3(b). A bifurcação pitchfork dá origem a duas soluções distintas e implica em uma quebra de simetria da resposta.

Quando a bifurcação é do tipo nó-sela, o ramo de soluções periódicas estáveis e o ramo das soluções periódicas instáveis são criados ou destruídos mutuamente no ponto de bifurcação, conforme Figura 5.2. Esta situação é basicamente descontínua ou catastrófica (Del Prado, 2001).

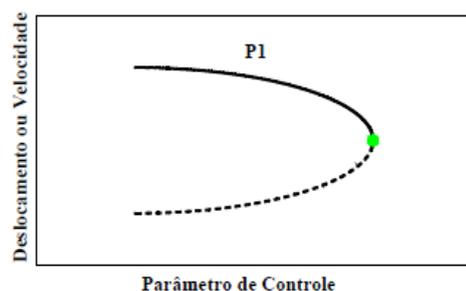


Figura 5.2: Bifurcação do tipo nó-sela.

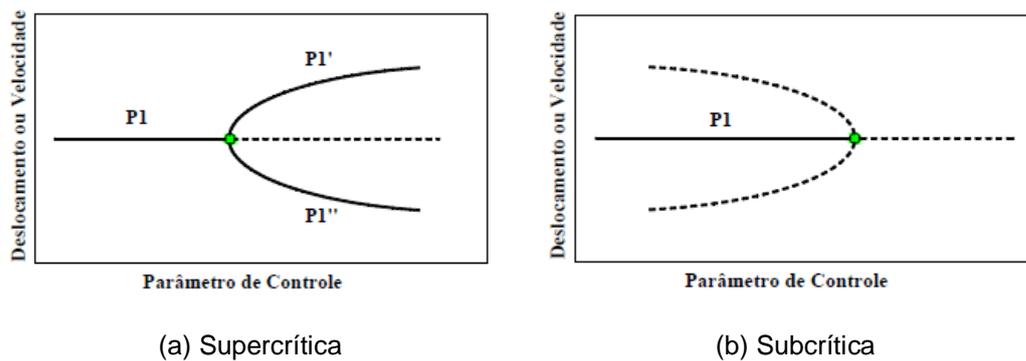


Figura 5.3: Bifurcação do tipo pitchfork.

Na bifurcação por duplicação de período, o ramo de soluções estáveis que existia antes da bifurcação, torna-se um ramo de soluções periódicas instáveis após a bifurcação. Um ramo de soluções estáveis de período dobrado é criado se a bifurcação for supercrítica (Figura 5.4(a)), enquanto um ramo de soluções instáveis de período dobrado é destruído se a bifurcação for subcrítica (Figura 5.4(b)). Da mesma forma que na bifurcação do tipo *pitchfork*, a bifurcação supercrítica é contínua e bifurcação subcrítica descontínua.

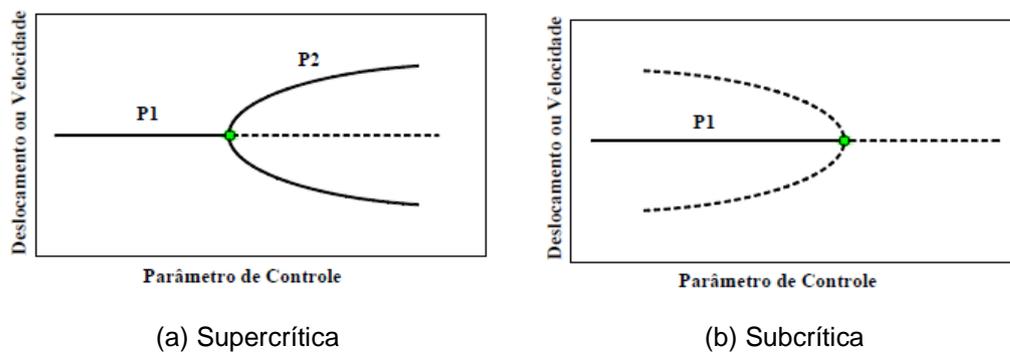


Figura 5.4: Bifurcação por duplicação de período.

Finalmente a bifurcação do tipo Hopf de uma solução periódica é caracterizada por introduzir uma nova frequência a partir do ponto de bifurcação. A nova solução pode ser periódica ou quase periódica, dependendo da relação entre a nova frequência e a frequência da solução que existia antes da bifurcação. Novamente, esta bifurcação pode ser supercrítica ou subcrítica. Em ambas as bifurcações o ramo das soluções estáveis periódicas que existia antes da bifurcação (Hopf) continua como um ramo de soluções instáveis periódicas após a bifurcação. Se a bifurcação for supercrítica, um ramo de soluções periódicas ou



## 5.4. Bacias de Atração

A evolução de um sistema dinâmico tende para um atrator (ponto fixo) à medida que o tempo progride. O conjunto de pontos cujas órbitas são atraídas para um dado ponto fixo estável é chamado bacia de atração.

No critério de estabilidade de Lyapunov, os pontos fixos são classificados segundo as características de seus autovalores. Quando todos os autovalores da matriz jacobiana que descreve a equação de movimento do ponto fixo perturbado do sistema têm partes reais diferentes de zero, os pontos correspondentes são chamados de pontos fixos hiperbólicos, independente do valor da parte imaginária. Quando um ou mais autovalores têm parte real nula, diz-se que o ponto fixo é não hiperbólico. (Nayfeh e Balachandran, 1995; Thompson e Stewart, 1993).

Existem três tipos de pontos fixos hiperbólicos: focos, nós e selas.

- Se todos os autovalores da matriz jacobiana tiverem parte real negativa, então a perturbação decresce com o tempo e converge para o ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ , sendo neste caso o equilíbrio assintoticamente estável e o ponto fixo é chamado “atrator”.
  - Se os autovalores são complexos, então o atrator é chamado de foco estável.
  - Se todos os autovalores são reais, o atrator é chamado de nó estável.
- Se um ou mais dos autovalores da matriz jacobiana têm parte real positiva, a perturbação cresce com o tempo, e afasta-se do ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste caso o ponto fixo é dito instável e chamado de “repulsor”.
  - Se os autovalores são complexos, o repulsor é chamado de foco instável.
  - Se todos os autovalores são reais, o repulsor é chamado de nó instável.
- Quando alguns autovalores (mas não todos) têm parte real positiva enquanto o resto tem parte real negativa, o ponto fixo associado é chamado de sela.

Quanto à estabilidade de um ponto fixo não-hiperbólico, pode-se afirmar que:

- Um ponto fixo não-hiperbólico é instável se um ou mais autovalores têm parte real positiva.
- Se alguns autovalores têm parte real negativa, enquanto o resto dos autovalores tem parte real nula, o ponto fixo é chamado de marginalmente estável.
- Se todos os autovalores são imaginários (com parte imaginária diferente de zero), o ponto fixo correspondente é um centro.

A avaliação da segurança de um sistema dinâmico não linear é de grande importância na engenharia. Uma forma de avaliar a segurança de uma estrutura é através da análise da evolução da erosão das bacias de atração em função da variação da amplitude da força. Sabe-se que a segurança de um sistema não linear depende tanto da estabilidade de suas soluções, como também da integridade da bacia no entorno de cada solução, sendo que a erosão total de uma dada bacia corresponde à instabilidade do sistema.

## 5.5. Modelo de Raithel e Clemente Perfeito

A Figura 5.7 mostra o modelo de Raithel e Clemente sob um carregamento axial da forma  $P+F(t)$ , onde  $P$  é a parcela de carregamento estático e  $F(t) = f \sin(\Omega t)$  que é um carregamento harmônico com frequência da excitação,  $\Omega$ , e a amplitude da excitação,  $f$ .

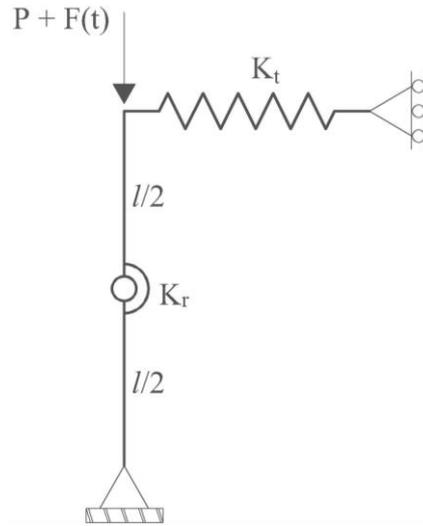


Figura 5.7: Direção da força no Modelo Perfeito. Modelo de Raithel e Clemente perfeito.

Partindo das expressões (2.17), em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , tem-se as equações de movimento que regem o comportamento do modelo de Raithel e Clemente perfeito sob carregamento axial periódico:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \frac{d^2 \theta_1}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \theta_2}{d\tau^2} \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2 \theta_2}{d\tau^2} \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 \\
 & + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{sen} \theta_1 \text{cos} \theta_2 - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \\
 & - 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \text{cos} \theta_1^2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 \right) \\
 & + \frac{1}{4} (\text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_1 + \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2) + \alpha (\theta_1 - \theta_2) \\
 & - \frac{1}{2} (\lambda + F \text{sen}(\beta \tau)) \text{sen} \theta_1 = 0
 \end{aligned} \tag{5.2a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{24} \frac{d^2 \theta_2}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \theta_1}{d\tau^2} \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2 \theta_1}{d\tau^2} \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 \\
 & - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{sen} \theta_1 \text{cos} \theta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{cos} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \\
 & + 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \text{cos} \theta_1 \text{cos} \theta_2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \text{cos} \theta_2^2 \right) \\
 & + \frac{1}{4} (\text{cos} \theta_2 \text{sen} \theta_1 + \text{cos} \theta_2 \text{sen} \theta_2) + \alpha (-\theta_1 + \theta_2) \\
 & - \frac{1}{2} (\lambda + F \text{sen}(\beta \tau)) \text{sen} \theta_2 = 0
 \end{aligned} \tag{5.2b}$$

Observam-se nas duas equações os coeficientes periódicos dependentes do tempo que caracterizam a excitação paramétrica. As equações de movimento (5.2) são adimensionalizadas em função das seguintes variáveis auxiliares (algumas já apresentadas nos capítulos anteriores):  $\omega^2 = K_t l^2 / A \rho l^3$ ,  $K_r = \alpha K_t l^2$ ,  $P = \lambda K_t l$ ,  $F = f / K_t l$ ,  $2\omega\xi_1 = C_1 / A \rho l^3$ ,  $2\omega\xi_2 = C_2 l^2 / 4A \rho l^3$ ,  $\tau = \omega t$  e  $\beta = \Omega / \omega$ .

### 5.5.1. Diagramas de Bifurcação

Uma ferramenta bastante útil para análise das regiões de ressonância paramétrica são os diagramas de bifurcação onde as coordenadas dos pontos fixos são mostradas como função de um dado parâmetro de controle. Neste trabalho foi utilizado o método da força bruta para obtenção dos diagramas de bifurcação. Neste método, para se identificar o atrator associado a um dado parâmetro de controle, escolhe-se um conjunto de condições iniciais e integra-se o sistema por um tempo suficientemente longo para se chegar à resposta permanente. Assim este método não é capaz de encontrar as órbitas instáveis, mas é útil para a compreensão global do sistema. Para analisar as órbitas instáveis devem ser utilizados algoritmos especiais, como o método da continuação, que não foram utilizados neste trabalho.

Na Figura 5.8 apresentam-se, para  $\lambda = 0,00$ , os diagramas de bifurcação para valores selecionados de  $\beta$ , tendo como parâmetro de controle a magnitude da excitação  $F$ . Os valores de  $\beta$  foram selecionados na região principal de instabilidade paramétrica em torno de  $2\omega_1$ .

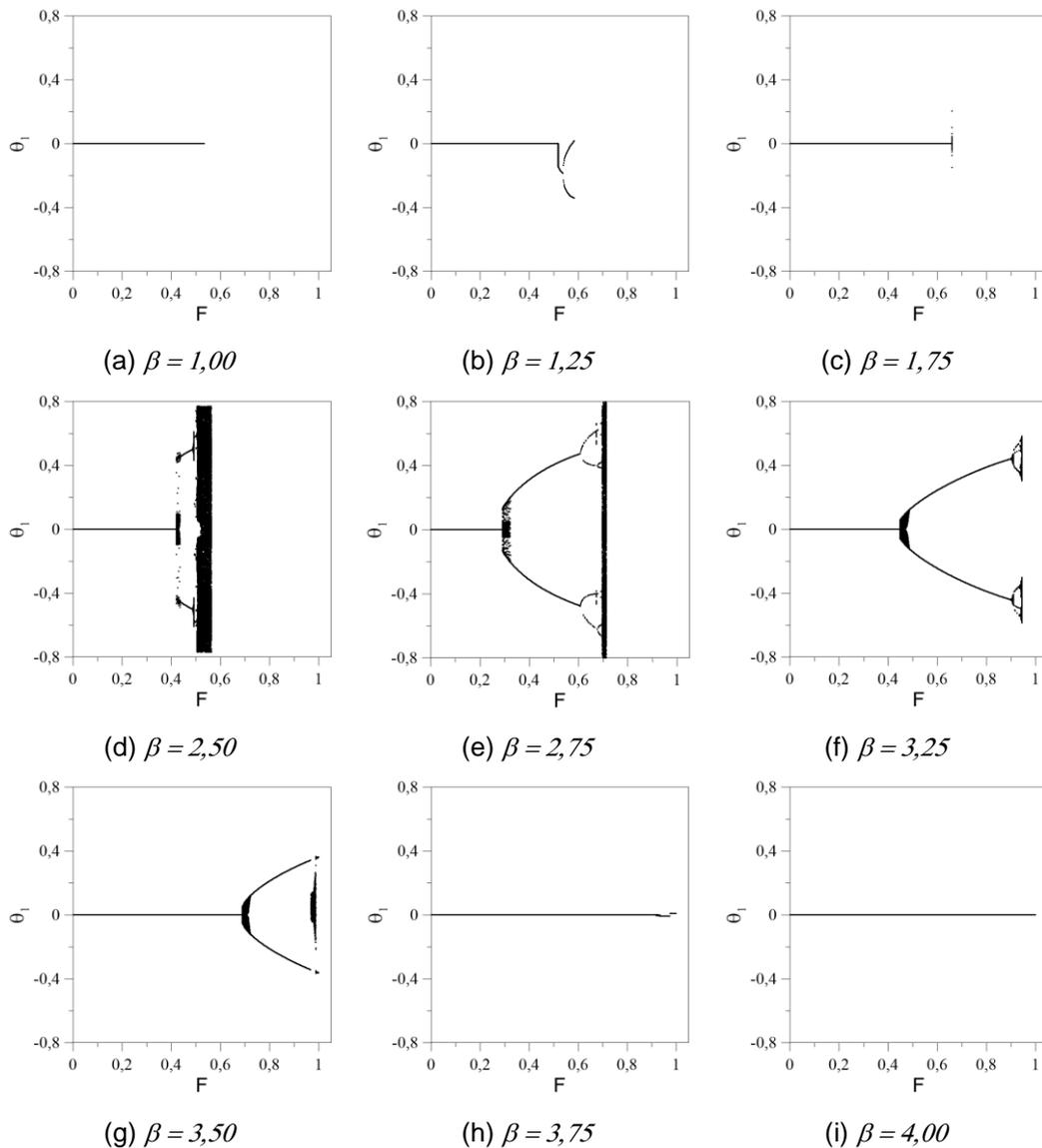


Figura 5.8: Diagramas de Bifurcação, para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_1 \times F$ .  $\omega_1 = 1,45$  e  $2\omega_1 = 2,9$ .

Em todos os casos, o trecho inicial corresponde à solução trivial estável. Quando esta solução torna-se instável, obtém-se, para um dado valor de  $\beta$ , a magnitude da excitação  $F_{cr}$  que corresponde à fronteira de estabilidade paramétrica. Para  $\beta = 1,00$ ,  $1,75$ ,  $3,75$  e  $4,00$ , observa-se uma bifurcação subcrítica onde, após  $F_{cr}$ , a resposta tende a infinito, coincidindo neste caso a carga crítica com o escape para infinito. Para  $\beta = 2,50$  e  $2,75$ , observa-se uma bifurcação subcrítica por duplicação de período (*flip*), com um salto em  $F_{cr}$  para uma solução de período dois. Esta solução sofre bifurcações sucessivas até se atingir uma região caótica. As vibrações caóticas apresentam um número infinito de pontos fixos e são, portanto, representadas no diagrama de bifurcação por uma

nuvem de pontos. Este salto decresce à medida que  $\beta$  cresce até que se chega a uma região onde se tem uma bifurcação supercrítica por duplicação de período (vide diagramas para  $\beta = 3,25$  e  $3,50$ ). Em todos os casos chega-se a uma carga máxima onde nenhuma solução estável é encontrada e ocorre o escape para infinito. A Figura 5.9 apresenta os diagramas para  $\lambda = 0,20$ . Observam-se neste caso as mesmas seqüências de bifurcações, embora as cargas críticas sejam menores em virtude da presença do pré-carregamento estático (vide Figuras 5.15 e 5.16).

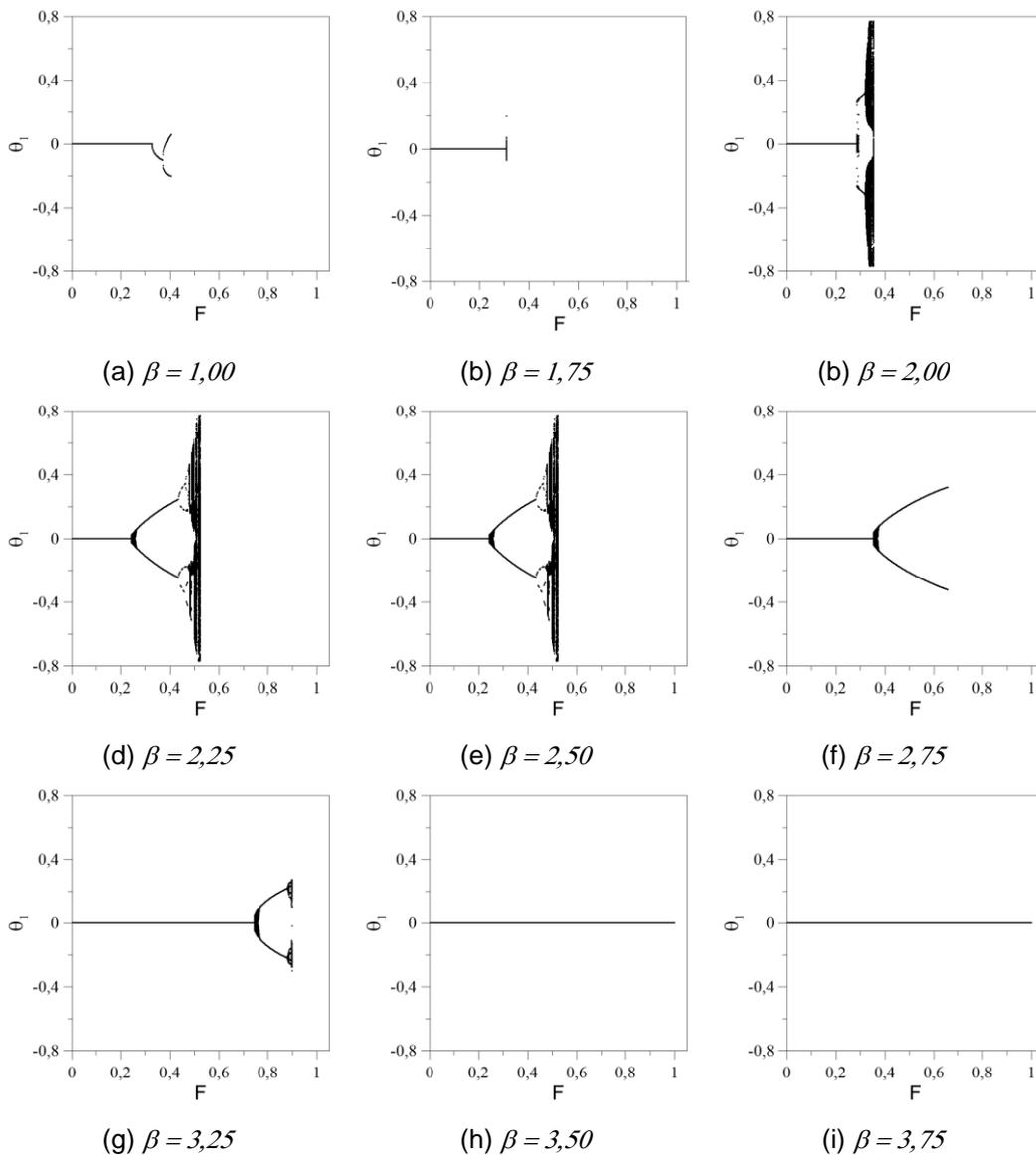


Figura 5.9: Diagramas de Bifurcação, para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_1 \times F$ .  $\omega_1 = 1,17$  e  $2\omega_1 = 2,34$ .

Nas Figuras 5.10 e 5.11 apresentam-se, para  $\lambda = 0,00$  e  $\lambda = 0,20$ , respectivamente, os diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação,  $\beta$ , para valores selecionados de  $F$ .

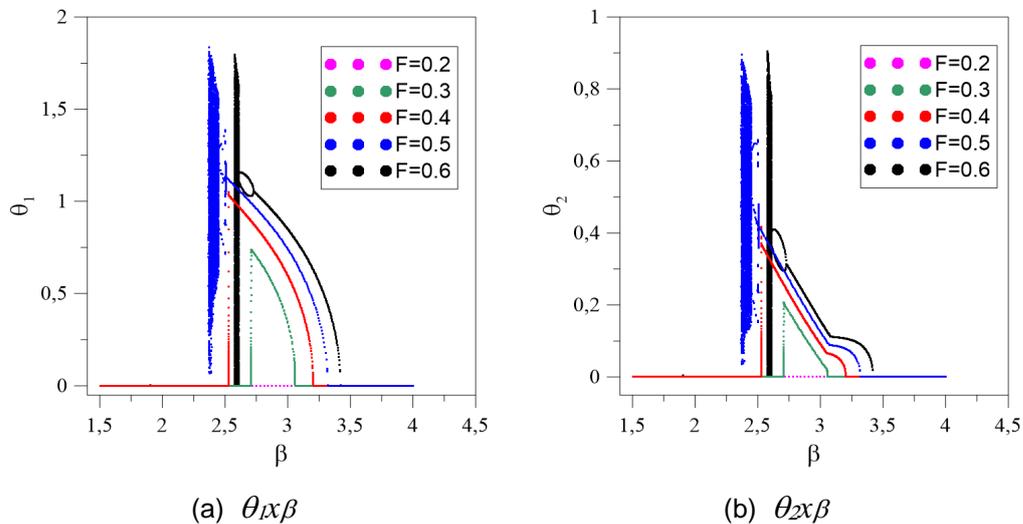


Figura 5.10: Diagramas de Bifurcação, para  $\alpha = 0.10$  e  $\lambda = 0.00$ .  $\omega_1 = 1.45$  e  $2\omega_1 = 2.9$ .

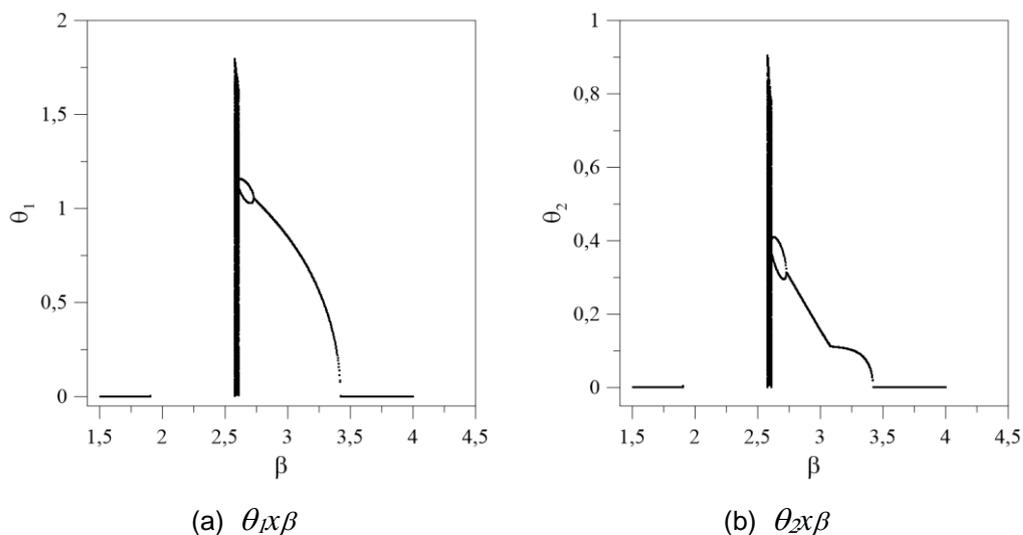


Figura 5.11: Diagramas de Bifurcação, para  $\alpha = 0.10$ ;  $\lambda = 0.00$  e  $F = 0.60$ .  $\omega_1 = 1.45$  e  $2\omega_1 = 2.9$ .

Observa-se na Figura 5.10, para  $F = 0,30$ ,  $0,40$  e  $0,50$  que a solução se torna instável em dois pontos. À direita tem-se uma bifurcação suave do tipo supercrítica, enquanto à esquerda tem-se uma bifurcação subcrítica. Estas bifurcações são típicas de um sistema com não linearidade com perda de rigidez (*softening*), o que está de acordo com a relação frequência-amplitude obtida anteriormente. Para  $F = 0,20$  a solução trivial é sempre estável. Para  $F = 0,60$

(Figura 5.11) não há solução entre  $1,90 < \beta < 2,58$ , pois as soluções divergem para infinito. Considerando  $\lambda = 0,20$ , (Figura 5.12), verifica-se um comportamento similar. Os dois pontos onde a solução trivial se torna instável, identificam, para um dado valor de  $F$ , os pontos que delimitam a região instável.

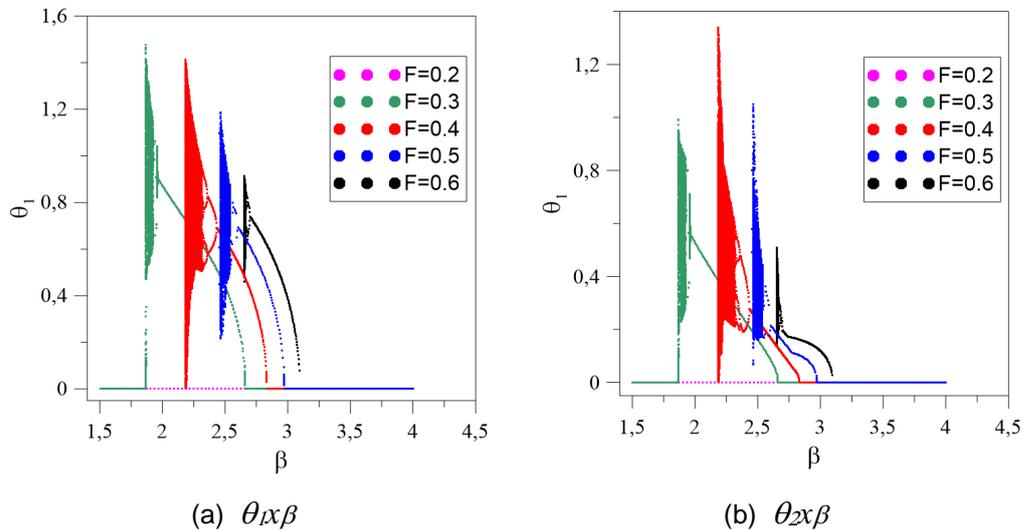


Figura 5.12: Diagramas de Bifurcação, para  $\alpha = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$ .  $\omega_l = 1,17$  e  $2\omega_l = 2,34$ .

### 5.5.2. Resposta no Tempo e Mapeamento de Poincaré

Na Figura 5.13, considerando  $F = 0,60$  e assumindo como condições iniciais do sistema as coordenadas de um ponto fixo, obtém para diferentes valores de  $\beta$  a resposta no tempo das duas coordenadas generalizadas, o retrato de fase da solução permanente no plano  $\theta_1 \times \theta_2$  e o mapa de Poincaré da solução permanente (pontos em vermelho). Observa-se que para  $\beta = 3,50$ , a solução é trivial (um ponto na seção de Poincaré – origem -  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), Figura 5.13(c). Para  $\beta = 2,75$ , a solução apresenta periodicidade dois (dois pontos na seção de Poincaré), Figura 5.13(b), comprovando a existência de uma resposta com período  $2T_f$ , onde  $T_f$  é o período da força externa, e para  $\beta = 2,60$  a solução é caótica com infinitos pontos na seção Poincaré, o que evidencia o desaparecimento da periodicidade da solução, Figura 5.13(a).

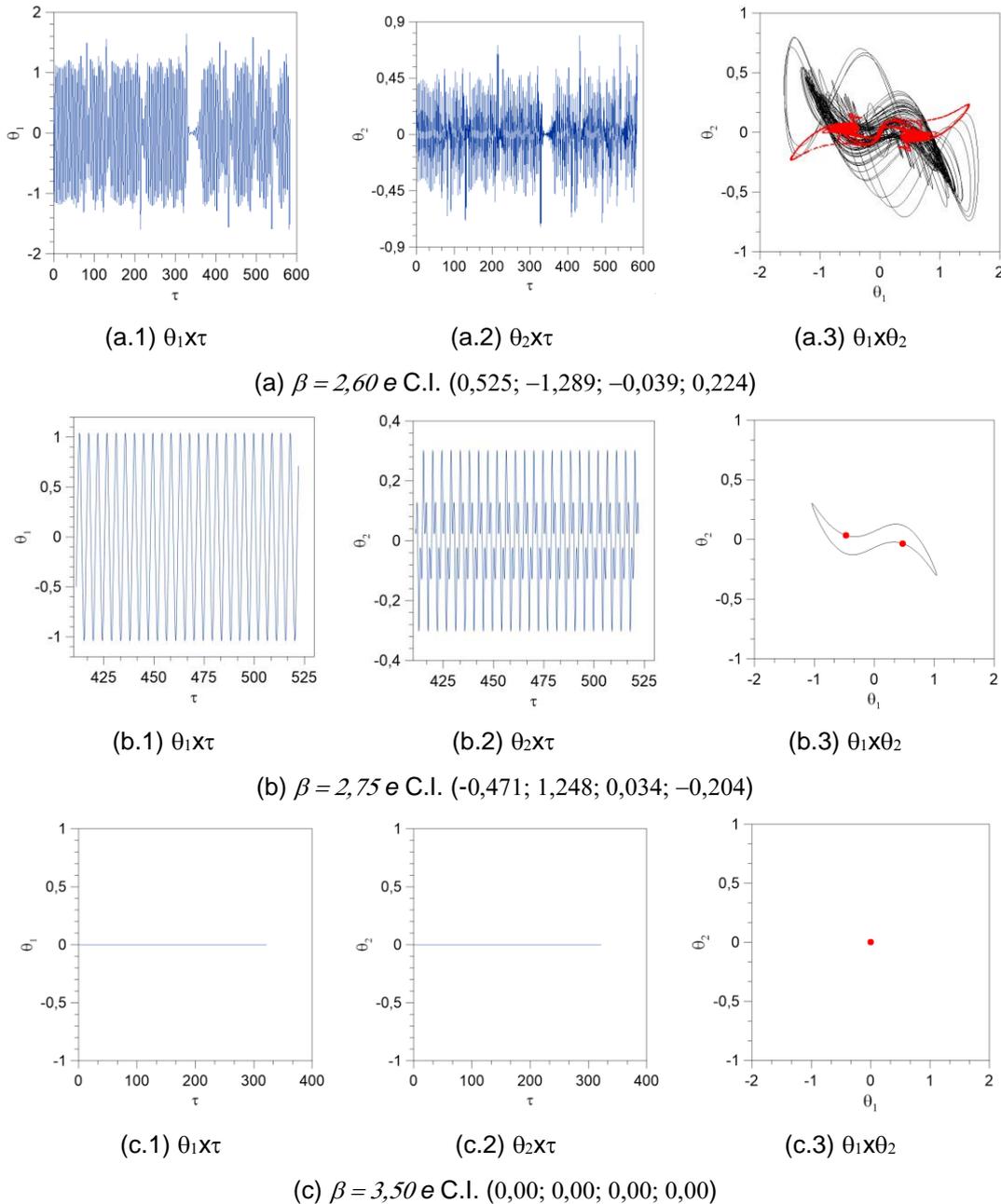
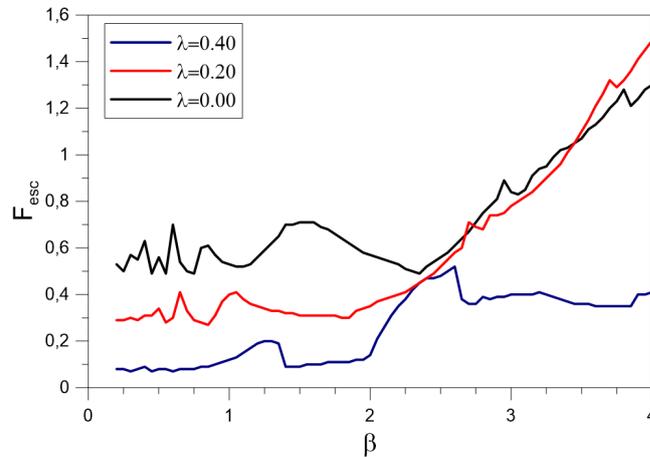


Figura 5.13: Respostas no tempo para diferentes níveis de carregamento, considerando diferentes condições iniciais  $(\theta_1, d\theta_1/d\tau, \theta_2, d\theta_2/d\tau)$ , para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$ ,  $F = 0,60$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

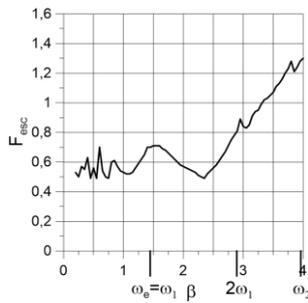
### 5.5.3. Fronteiras de Escape

Para cada valor da frequência de excitação,  $\beta = \Omega/\omega$ , obtém-se a carga máxima,  $F_{esc}$ , que a estrutura pode suportar quando a força periódica cresce quase estaticamente e, assim traça-se a fronteira de escape do sistema no espaço  $\beta \times F_{esc}$ . As Figuras 5.14(a) e 5.15(a) mostram para, respectivamente,  $\alpha = 0,10$  e

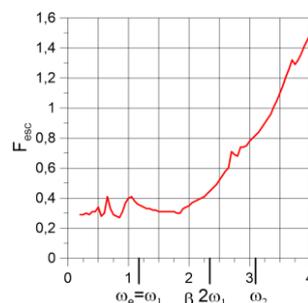
$\alpha = 0,20$  e níveis crescentes de carregamento estático,  $\lambda$ , as fronteiras de escape. Nas Figuras 5.14(b-d) e 5.15(b-d) mostram-se as curvas individualmente.



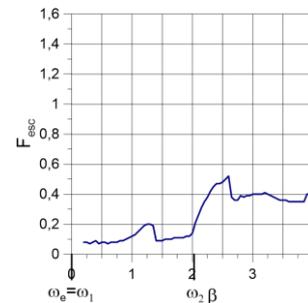
(a) Comparação para diferentes níveis de carregamento



(b)  $\lambda = 0,0$



(c)  $\lambda = 0,2$



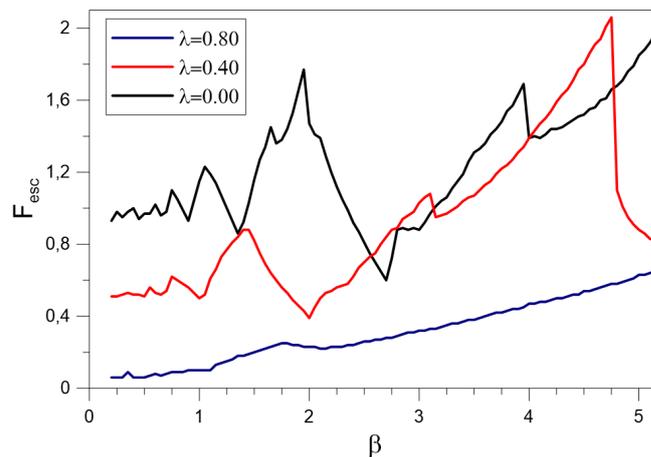
(d)  $\lambda = 0,4$

Figura 5.14: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha = 0,10$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

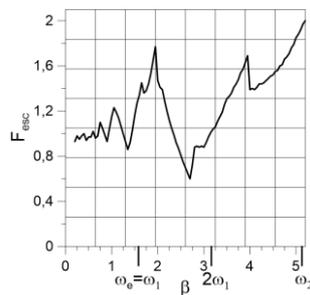
Nota-se nas Figuras 5.14(a) e 5.15(a) que as curvas apresentam um comportamento semelhante, com a presença de uma região crítica onde a carga de escape atinge um ponto de mínimo local. Esta região encontra-se à esquerda do dobro da primeira frequência natural ( $2\omega_1$ ). Sabe-se que esta é a região principal de instabilidade paramétrica e a mais perigosa em termos de projeto. Existem outras regiões de ressonância associadas  $\omega_1$  e a sub-múltiplos de  $\omega_1$  (sub-harmônicos) onde também a carga atinge mínimos locais.

Observa-se, ainda nas Figuras 5.14(a) e 5.15(a), que o valor da carga de escape mínima depende sensivelmente do valor de  $\lambda$ . Este procedimento numérico não garante que a carga obtida corresponda à carga onde ocorre a completa erosão da bacia de atração, como mostrado por Soliman & Thompson (1989, 1992). Se no primeiro ponto de bifurcação catastrófica (nó-sela ou subcrítica) existem outras

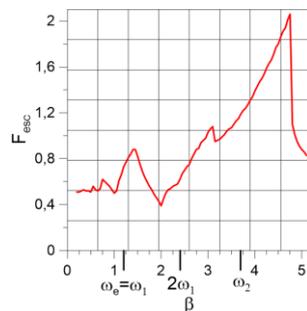
soluções no interior do vale potencial pré-crítico, o escape se torna indeterminado. Dependendo das condições iniciais, pode-se obter diferentes soluções. Portanto, no presente procedimento numérico, dependendo do valor do incremento da carga e da perturbação nas condições iniciais, pode-se ter ou não escape em certas regiões.



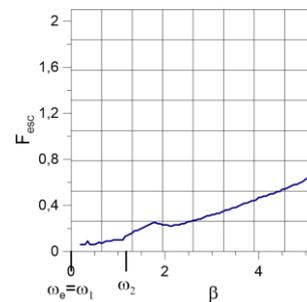
(a) Comparação para diferentes níveis de carregamento



(b)  $\lambda = 0,0$



(c)  $\lambda = 0,4$



(d)  $\lambda = 0,8$

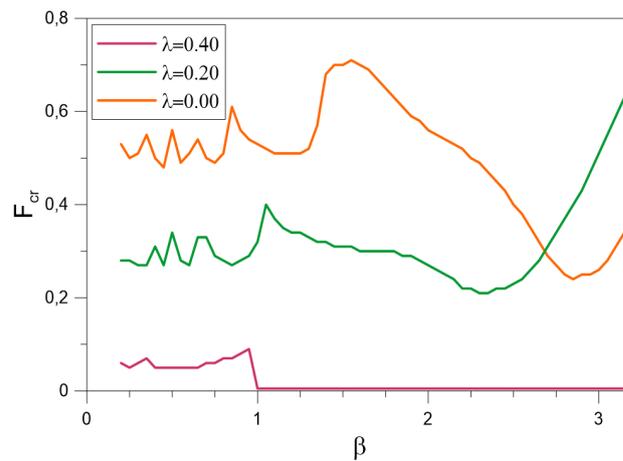
Figura 5.15: Fronteiras de estabilidade (escape) para  $\alpha = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

O comportamento do modelo na região crítica é decorrente da interação entre os modos de vibração. O sistema perfeito tem um comportamento típico de um sistema com perda de rigidez (*softening*), Figura 4.17.

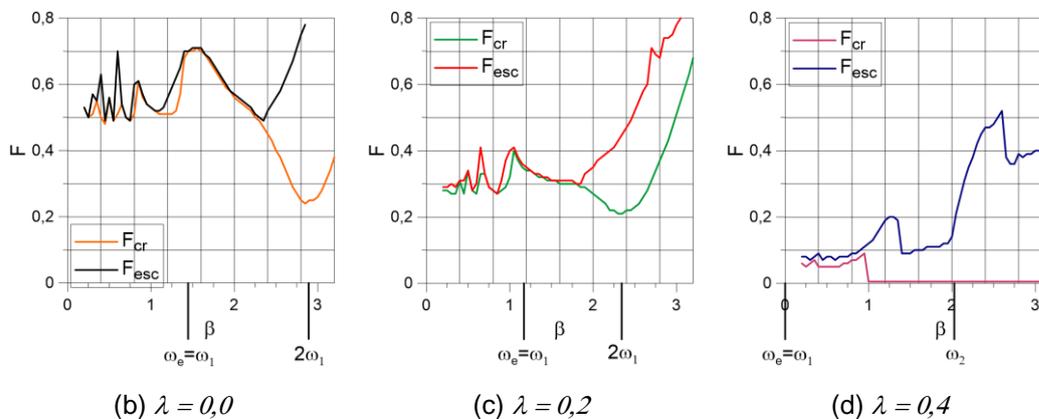
#### 5.5.4. Fronteiras de Instabilidade Paramétrica

Para cada valor da frequência de excitação,  $\beta = \Omega/\omega$ , obtém-se a carga máxima,  $F_{cr}$ , onde a solução trivial se torna instável e, assim, traça-se a fronteira de estabilidade paramétrica do sistema no espaço  $\beta \times F_{cr}$ . As Figuras 5.16(a) e

5.17(a) mostram, respectivamente, para  $\alpha = 0,10$  e  $\alpha = 0,20$ , e níveis crescentes de carregamento estático,  $\lambda$ , as fronteiras de instabilidade paramétrica. Nas Figuras 5.16(b-d) e 5.17(b-d) comparam-se a fronteira de escape com a fronteira de instabilidade paramétrica. Tal como observado nos diagramas de bifurcação, Figuras 5.8 e 5.9, para alguns valores de frequência de excitação,  $\beta$ , as cargas críticas e de escape coincidem. Isto ocorre em regiões onde a bifurcação da solução trivial é subcrítica e não existem outras soluções estáveis para  $F > F_{cr}$  como, por exemplo, na Figura 5.8(a). Quando a bifurcação é subcrítica, mas existem soluções estáveis não-triviais para  $F > F_{cr}$  (por exemplo, na Figura 5.8(d)) ou a bifurcação é supercrítica (por exemplo, na Figura 5.8(f)), estas duas fronteiras não coincidem. Entre estas duas fronteiras o escape é indeterminado. Quando  $\lambda = \lambda_{cr}$  a carga de instabilidade paramétrica é zero, como mostram as Figuras 5.16(d) e 5.17(d), exceto em uma região de baixas frequências.



(a) Comparação para diferentes níveis de carregamento

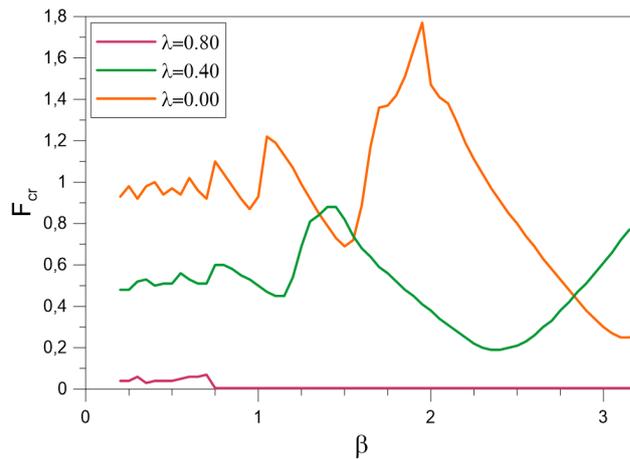


(b)  $\lambda = 0,0$

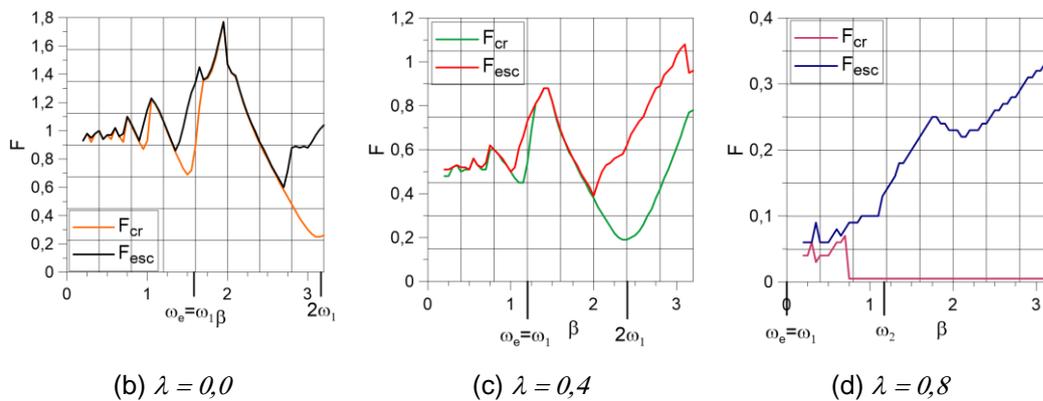
(c)  $\lambda = 0,2$

(d)  $\lambda = 0,4$

Figura 5.16: Fronteiras de instabilidade paramétrica para  $\alpha = 0,10$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .



(a) Comparação para diferentes níveis de carregamento

(b)  $\lambda = 0,0$ (c)  $\lambda = 0,4$ (d)  $\lambda = 0,8$ Figura 5.17: Fronteiras de instabilidade paramétrica para  $\alpha = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

### 5.5.5. Bacias de Atração

A fim de ilustrar como as bacias de atração podem ser usadas para se avaliar a segurança da estrutura, apresenta-se a seguir um estudo das bacias de atração das soluções estáveis, com ênfase na estabilidade da solução trivial ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ). Na Figura 5.18 apresentam-se as projeções das bacias de atração para  $\alpha = 0,10$ ,  $\beta = 2,75$ ,  $F = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$  e três valores de  $\lambda$ . Nesta figura, a cor preta denota a bacia de atração associada à solução trivial. As demais cores estão associadas às soluções pós-críticas estáveis, enquanto a cor branca corresponde a condições iniciais que não convergiram dentro do tempo máximo de integração especificado no programa para qualquer atrator.

Verifica-se a significativa influência do carregamento estático,  $\lambda$ , nas bacias de atração, pois, à medida que  $\lambda$  cresce, a área da bacia de atração da solução trivial decresce gradativamente. Esta área pode ser tomada como uma medida do grau de segurança da estrutura. Se a bacia de atração é pequena, então pequenas

perturbações nas condições iniciais podem levar ao escape e, possivelmente, à ruína da estrutura. Assim, é extremamente perigoso calcular tais sistemas estruturais para níveis de carga próximos da carga de flambagem, mesmo tomando cuidado em minimizar as perturbações e imperfeições geométricas iniciais durante a construção da estrutura.

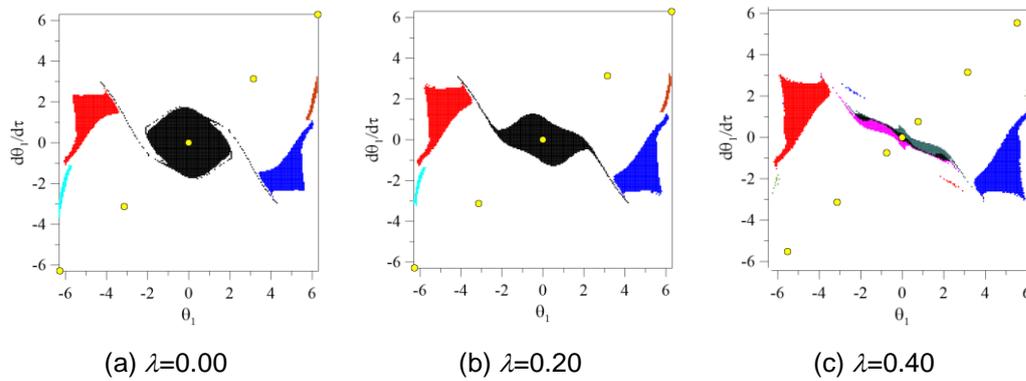


Figura 5.18: Seções das bacias de atração no plano  $\theta_1 \times d\theta_1/d\tau$  para  $\alpha = 0,10$ ,  $F = 0,20$ ,  $\beta = 2,75$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

Na Figura 5.19 apresentam-se as bacias de atração para  $\alpha = 0,1$ ,  $\lambda = 0,0$ ,  $\beta = 2,75$ , e valores selecionados de  $F$ , ou seja, o mesmo caso descrito no diagrama de bifurcação da Figura 5.8(e). Observa-se, na Figura 5.19(a) a presença da bacia de atração associada ao estado fundamental de equilíbrio (preta) correspondente à solução trivial. Na Figura 5.19(b) percebe-se a ausência da bacia de atração do estado fundamental, pois esta solução tornou-se instável através de uma bifurcação do tipo duplicação de período.

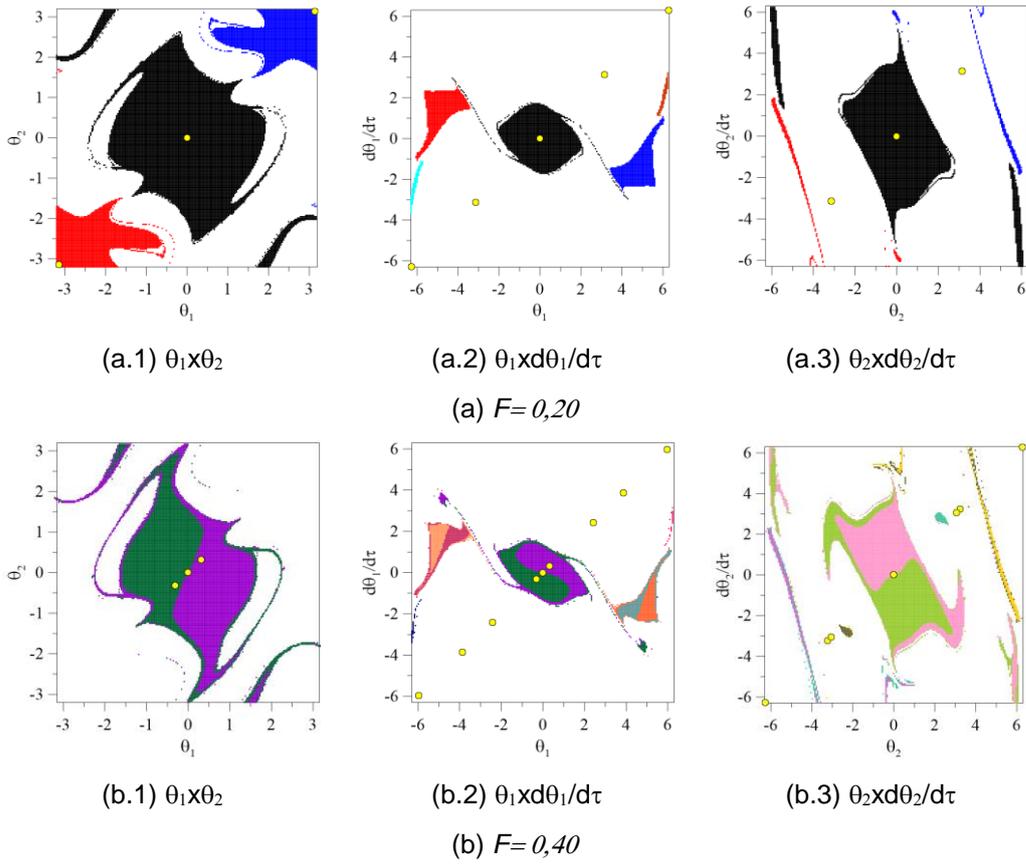


Figura 5.19: Seções das bacias de atração para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$ ,  $\beta = 2,75$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

## 6

### Análise Dinâmica – Vibração Forçada: Excitação de Base

O presente capítulo apresenta um estudo detalhado do modelo sob vibração forçada, no caso, uma excitação harmônica de base. Para isso, obtêm-se os diagramas de bifurcação pelo método da força bruta e as bacias de atração, o que permite, juntamente com os resultados dos capítulos 3, 4 e 5, uma compreensão do comportamento dinâmico do modelo em análise.

#### 6.1. Modelo de Raithel e Clemente

É apresentado, na Figura 6.1, o modelo de Raithel e Clemente sob uma excitação harmônica de base da forma  $u_b(t) = u_b \text{sen}(\Omega t)$ .

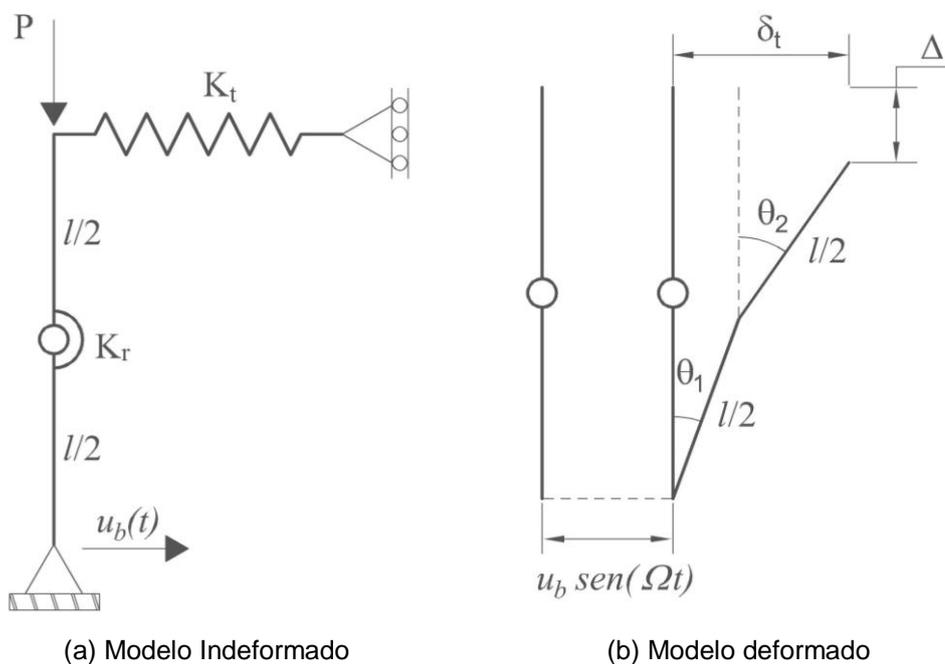


Figura 6.1: Modelo de Raithel e Clemente perfeito sob excitação de base.

Com base na Figura 6.1(b), tem-se para o campo de deslocamentos:

$$x_1 = u_b \text{sen}(\Omega t) + s \text{sen}\theta_1 \quad (6.1a)$$

$$x_2 = u_b \text{sen}(\Omega t) + l/2 \text{sen}\theta_1 + s \text{sen}\theta_2 \quad (6.1b)$$

$$y_1 = s \cos\theta_1 \quad (6.1c)$$

$$y_2 = l/2 \cos\theta_1 + s \cos\theta_2 \quad (6.1d)$$

Partindo das expressões (6.1) e realizando as derivadas com relação ao tempo e substituindo em (2.3), obtém-se para a energia cinética:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{8} (4u_b^2 \Omega^2 \cos(\Omega t)^2 + u_b l \Omega \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \cos(\Omega t) \\ & + 3u_b l \Omega \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \cos(\Omega t)) \\ & + \frac{1}{6} \rho A l^3 (3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + 3\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + (\dot{\theta}_2)^2 + 4(\dot{\theta}_1)^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Utilizando a expressão para a energia potencial total (2.9), considerando imperfeições iniciais nulas e a energia cinética da estrutura sob movimento de base (6.2), obtém-se as seguintes equações de movimento adimensionais em termos das coordenadas generalizadas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ & + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} \right)^2 \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\ & - 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \cos\theta_1^2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right) \\ & + \frac{1}{4} (\cos\theta_1 \text{sen}\theta_1 + \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2) + \alpha(\theta_1 - \theta_2) \\ & - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_1 - \frac{3}{8} U_b \beta^2 \text{sen}(\beta\tau) \cos\theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.3a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \frac{1}{16} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 \\
& - \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 + \frac{1}{16} \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \right)^2 \text{cos}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \\
& + 2\xi_1 \left( \frac{d\theta_2}{d\tau} - \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) + 2\xi_2 \left( \frac{d\theta_1}{d\tau} \text{cos}\theta_1 \text{cos}\theta_2 + \frac{d\theta_2}{d\tau} \text{cos}\theta_2^2 \right) \quad (6.3b) \\
& + \frac{1}{4} (\text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_1 + \text{cos}\theta_2 \text{sen}\theta_2) + \alpha(-\theta_1 + \theta_2) \\
& - \frac{1}{2} \lambda \text{sen}\theta_2 - \frac{1}{8} U_b \beta^2 \text{sen}(\beta\tau) \text{cos}\theta_2 = 0
\end{aligned}$$

Nessas expressões  $U_b$  ( $U_b = u_b/l$ ) é a magnitude da excitação adimensional.

### 6.1.1. Diagramas de Bifurcação

Na Figura 6.2 apresentam-se os diagramas de bifurcação em função de  $\theta_1$  para  $\alpha = 0,1$  e  $\lambda = 0,0$ , para valores selecionados de  $\beta$ , tendo como parâmetro de controle a magnitude da excitação  $U_b$ . Na Figura 6.3 apresentam-se os mesmos diagramas de bifurcação em função de  $\theta_2$ . Os valores de  $\beta$  foram escolhidos na vizinhança da ressonância fundamental, ou seja,  $\beta = \Omega / \omega_1 = \Omega / 1,446 = 1$ .

Em todos os casos tem-se inicialmente uma solução de período um, isto é, o período da resposta igual ao período da excitação de base. Para  $\beta = 0,8$  e  $0,9$  esta solução se torna instável através de uma bifurcação do tipo nó-sela, não sendo obtida qualquer solução estável após a bifurcação. Para  $\beta = 1,0$ , após a bifurcação do tipo nó-sela, há um salto para uma solução estável de período um. Para  $\beta = 1,1$  e  $1,2$ , observa-se uma bifurcação supercrítica com duplicação de período (*flip*). Para  $\beta = 1,2$ , verifica-se que esta solução de período dois torna-se instável, ocorrendo então uma cascata de bifurcações até se chegar a uma região caótica, após a qual não se encontram respostas estáveis.

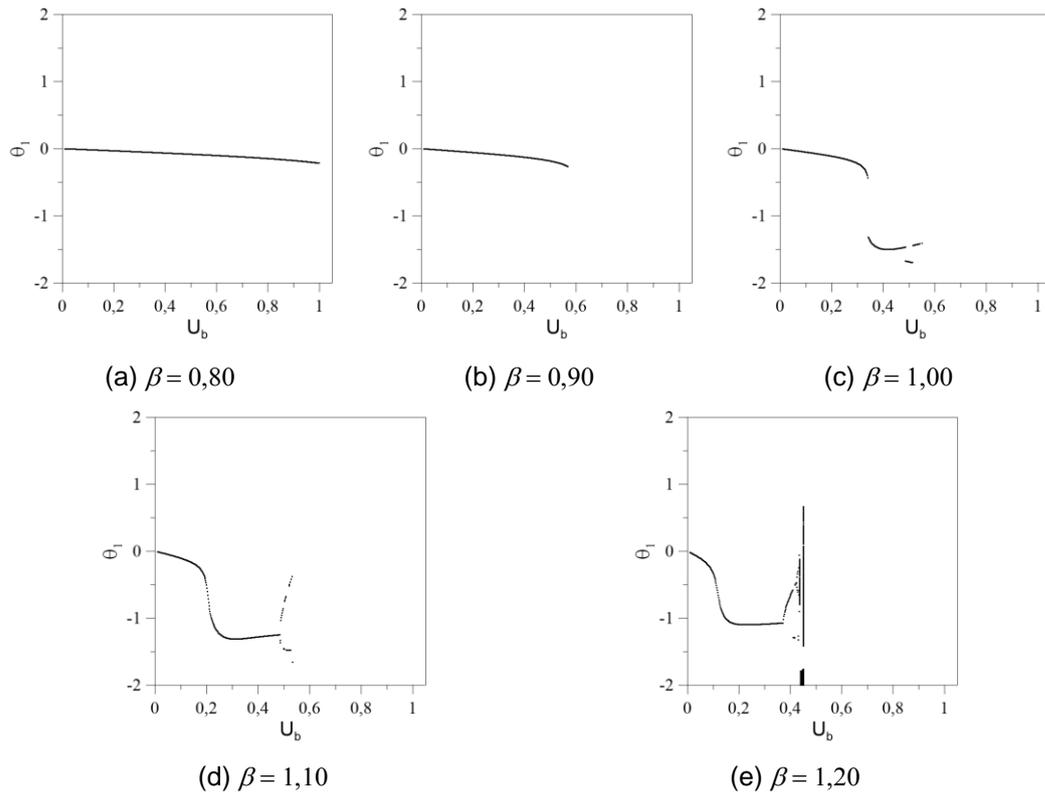


Figura 6.2: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_1 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,446$ .

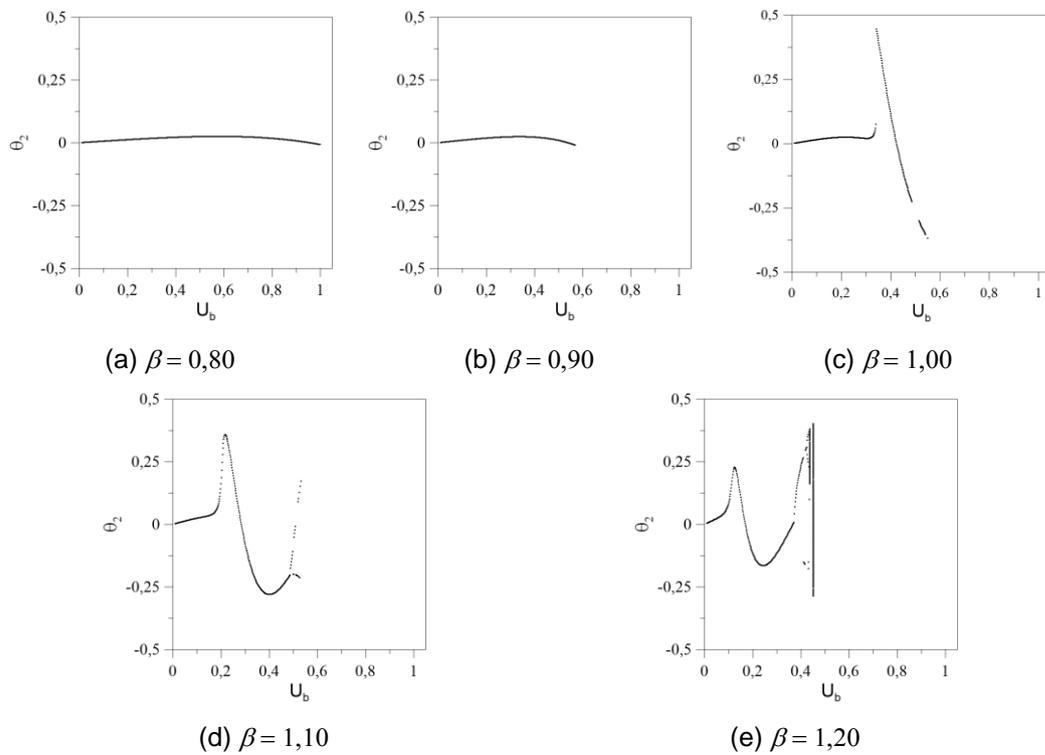


Figura 6.3: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\theta_2 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,446$ .

Na Figura 6.4 apresentam-se os diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,1$  e  $\lambda = 0,2$  em função de  $\theta_1$  e na Figura 6.5, os mesmos diagramas em função de  $\theta_2$ . Em virtude do pré-carregamento estático, ocorre uma sequência de bifurcações mais complexa com diversos saltos dinâmicos à medida que  $U_b$  aumenta. Verifica-se adicionalmente que o pré-carregamento estático diminui a carga de escape. Este fenômeno pode ser mais bem observado através do comportamento das curvas de ressonância à medida que a magnitude da força aumenta.

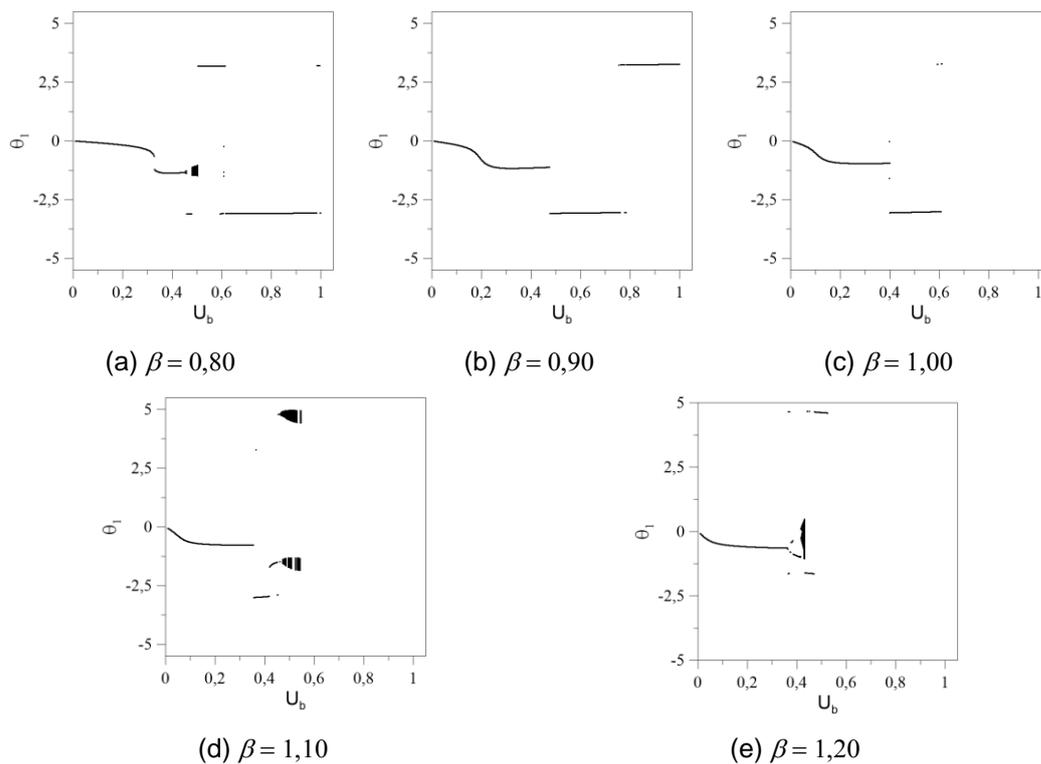


Figura 6.4: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ ,  $\theta_1 \times U_b$ ,  $\omega_1 = 1,171$ .

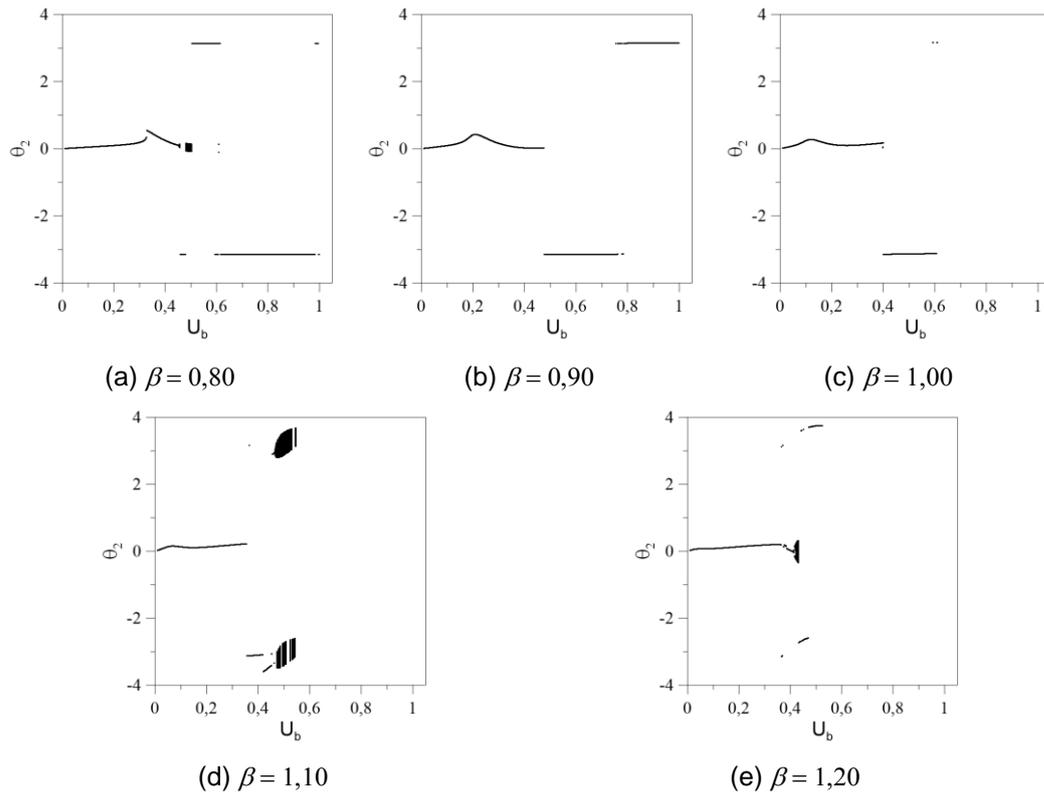


Figura 6.5: Diagramas de bifurcação para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ ,  $\theta_2 \times U_b$ .  $\omega_1 = 1,171$ .

### 6.1.2. Curvas de Ressonância

As Figuras 6.6 e 6.7 mostram as curvas de ressonância para  $\alpha = 0,1$  e, respectivamente,  $\lambda = 0,0$  e  $\lambda = 0,2$ . Verifica-se que as curvas de ressonância apresentam picos na vizinhança da primeira frequência natural - região de ressonância fundamental. Tem-se nessa região um comportamento típico de um sistema com perda de rigidez (*softening*) com as curvas apresentando um crescimento abrupto das amplitudes de vibração à esquerda da curva de ressonância, em consonância com a relação não linear frequência-amplitude (Figura 4.15). Para  $U_b = 0,15$  observam-se na vizinhança da segunda frequência natural,  $\omega_2 = 3,967$ , bifurcações que levam a saltos dinâmicos e obtém-se um novo trecho de soluções estáveis que exibem grandes amplitudes de vibração. Para  $U_b = 0,20$  observam-se também nesta região, descontinuidades no diagrama de bifurcação. Esta segunda região de ressonância também exibe um comportamento com perda de rigidez (*softening*), em consonância com a relação não linear frequência-amplitude (Figura 4.15).

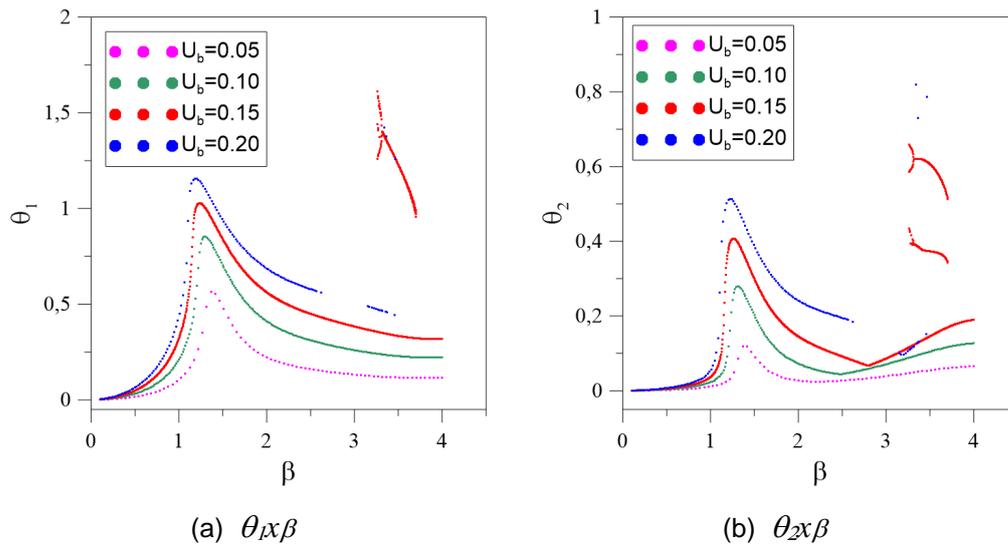


Figura 6.6: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_I = \xi_Z = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,446$  e  $\omega_2 = 3,967$ .

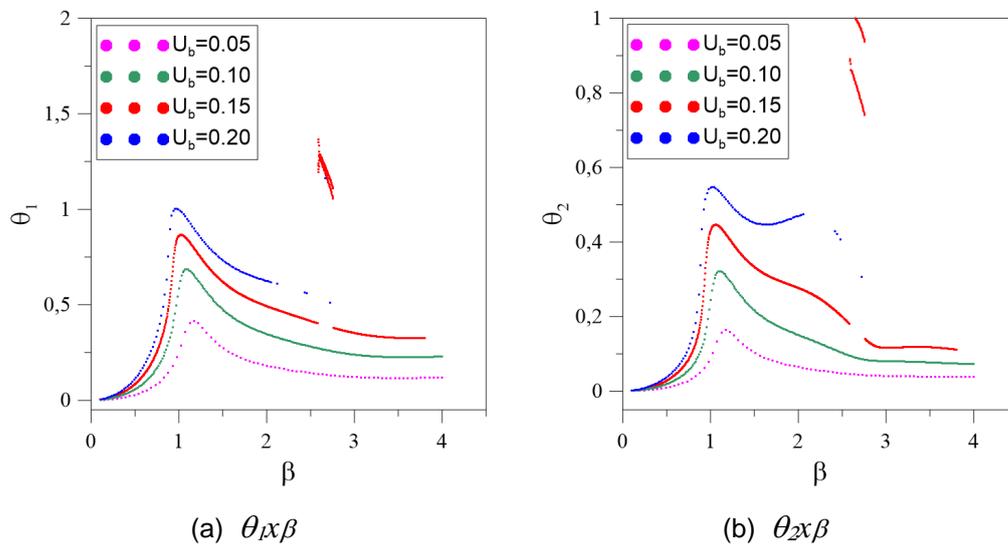


Figura 6.7: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,20$  e  $\xi_I = \xi_Z = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,171$  e  $\omega_2 = 3,098$ .

A Figura 6.8 apresenta a resposta no tempo das duas coordenadas generalizadas,  $\theta_1 \times \tau$  e  $\theta_2 \times \tau$ , e a resposta permanente no plano  $\theta_1 \times \theta_2$  para os valores de  $\beta = 3,0$ ,  $3,5$  e  $4,0$ , considerando  $\alpha = 0,1$  e  $\lambda = 0,0$ , ilustrando, assim, os possíveis tipos de resposta na segunda região de ressonância. Observa-se a presença de soluções de grande e pequena amplitude.

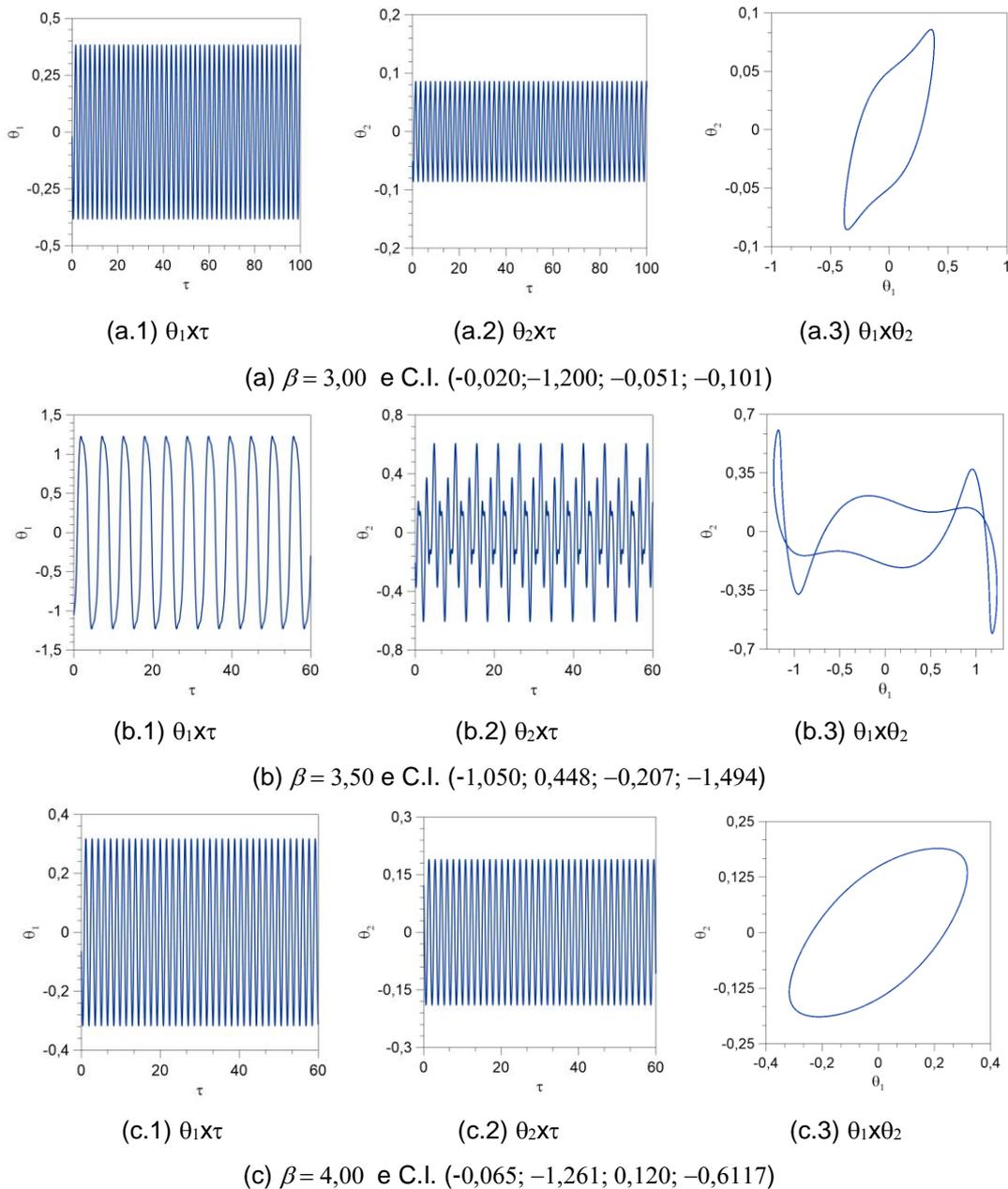


Figura 6.8: Respostas no tempo para diferentes níveis de carregamento, considerando as condições iniciais (C.I.)  $(\theta_1, d\theta_1/d\tau, \theta_2, d\theta_2/d\tau)$ , para  $\alpha = 0,10$ ,  $\lambda = 0,00$ ,  $U_b = 0,15$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .

As Figuras 6.9 e 6.10 apresentam as curvas de ressonância para  $\alpha = 0,2$  e, respectivamente,  $\lambda = 0,00$  e  $\lambda = 0,40$ . Verifica-se, à medida que  $\alpha$  aumenta, que se torna mais evidente o comportamento não linear com perda de rigidez na região de ressonância fundamental, levando a uma bifurcação nó-sela e variação brusca de amplitude de vibração. Novamente, observam-se diversas discontinuidades na segunda região de ressonância.

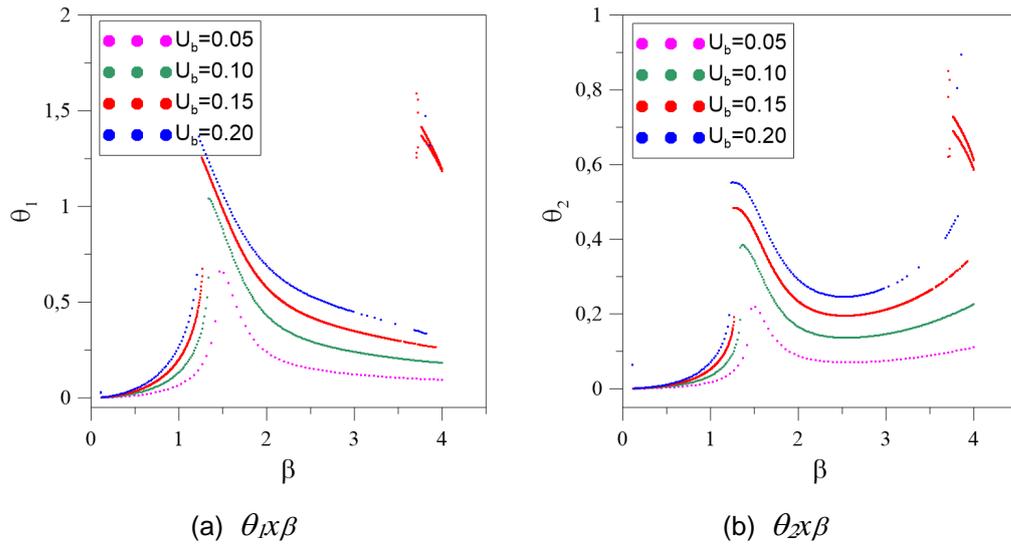


Figura 6.9: Diagramas de Bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,20$ ,  $\lambda = 0,00$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,582$  e  $\omega_2 = 5,128$ .

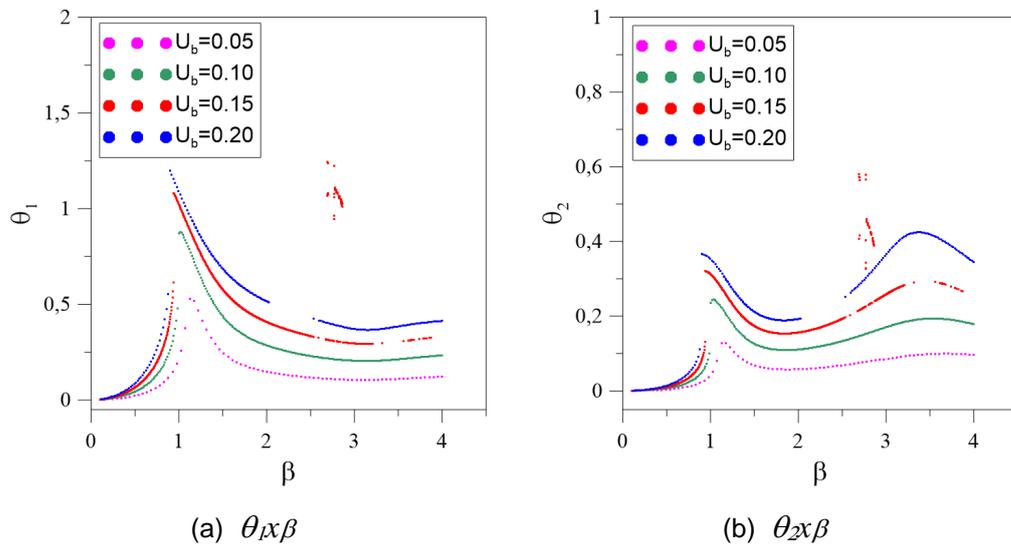


Figura 6.10: Diagramas de bifurcação (curvas de ressonância), para  $\alpha = 0,20$ ,  $\lambda = 0,40$  e  $\xi_1 = \xi_2 = 0,01$ .  $\omega_1 = 1,203$  e  $\omega_2 = 3,693$ .

## 7 Conclusão

### 7.1. Conclusões

Esta dissertação investigou a influência da interação entre a flambagem por flexão e a flambagem lateral no comportamento estático e dinâmico em estruturas aperticadas esbeltas.

Para isto, foi utilizado o modelo discreto de dois graus de liberdade proposto por Raithel e Clemente.

Dentre os aspectos analisados, concluem-se os seguintes pontos:

#### 1) Comportamento estático.

Verifica-se que a restrição ao deslocamento lateral tem grande influência na estabilidade do modelo, influenciando a carga crítica e, principalmente os caminhos pós-críticos. Quando a rigidez lateral controla a perda de estabilidade, tem-se uma bifurcação simétrica instável. Quando a rigidez a flexão é dominante, tem-se uma bifurcação simétrica estável. Em função da interação entre flexão e deslocamento lateral (rigidez relativa entre as molas), observa-se o aparecimento de quatro caminhos pós-críticos secundários que emergem do caminho pós-crítico primário, todos instáveis. Com isto, tem-se sensibilidade a imperfeições iniciais, com perda de estabilidade para cargas inferiores à carga crítica de flambagem. Adicionalmente, se as perturbações que podem ocorrer durante a vida útil da estrutura excederem a região em torno da configuração fundamental, cuja fronteira é limitada pelos pontos de sela associados às soluções pós-críticas instáveis, a estrutura perde a estabilidade. Esta região, que constitui a bacia de atração da solução fundamental de equilíbrio e delimita a magnitude das oscilações, decresce à medida que o carregamento estático cresce, tornando-se zero no ponto de bifurcação (carga crítica). Assim, à medida que cresce o carregamento, reduz-se substancialmente o conjunto de possíveis condições iniciais que levam a estrutura a retornar, após uma perturbação, à configuração

fundamental de equilíbrio cuja estabilidade se deseja preservar. Conclui-se, portanto, que a carga crítica é um limite superior da capacidade de carga da estrutura. Juntamente com a rigidez relativa entre as molas e o acoplamento modal, as imperfeições diminuem a carga crítica de flambagem. Além disso, a introdução das imperfeições provoca uma quebra de simetria das superfícies de energia potencial, reduzindo substancialmente as regiões seguras, mudando conseqüentemente seu comportamento dinâmico não-linear e sua estabilidade global.

## 2) Comportamento dinâmico em vibração livre.

A forma do modo de vibração associado à frequência mínima da estrutura depende da interação entre flexão e deslocamento lateral (rigidez relativa entre as molas). O estudo das frequências naturais mostra a sensibilidade das frequências ao pré-carregamento estático. Já a análise da geometria da região segura que circunda a posição de equilíbrio pré-crítica, obtida através do princípio da conservação de energia, mostra que a bacia de atração conservativa decresce rapidamente com o aumento da carga estática, reduzindo, assim, significativamente o conjunto de condições iniciais que levam o sistema a oscilar em torno da solução pré-crítica estável. Esta análise da região segura do sistema amortecido fornece informações importantes sobre os deslocamentos e velocidades máximas admissíveis. Esta análise da região segura, também pode ajudar no controle de vibrações e projeto da estrutura. Finalmente, a relação não-linear frequência-amplitude do modelo exibe um comportamento *softening*, ou seja, com perda de rigidez, que controla a dinâmica do modelo sob vibração forçada.

## 3) Comportamento dinâmico sob vibração forçada.

Estudou-se o comportamento do modelo sob carga axial e movimento harmônico de base.

Para a estrutura sob carga axial harmônica, mostra-se, através das fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape, que a carga crítica dinâmica pode ser bem inferior à carga crítica estática na região principal de instabilidade paramétrica, localizada na vizinhança do dobro da frequência fundamental da estrutura. Para a estrutura sob excitação de base, mostra-se a influência da

excitação nas duas regiões de ressonância do modelo. Para ambos os casos, o estudo de bifurcações mostra que o modelo pode exibir, dependendo da frequência da excitação, bifurcações subcríticas e supercríticas, levando a soluções periódicas e caóticas, e, finalmente, ao escape. As bifurcações subcríticas levam a saltos dinâmicos que podem comprometer a integridade da estrutura. Os resultados são característicos de sistemas não lineares com perda de rigidez (*softening*). Finalmente, o estudo da dinâmica através da evolução das bacias de atração mostra como esta ferramenta pode ser usada na avaliação da segurança da estrutura.

## 7.2. Sugestões

Este é um estudo inicial sobre a influência da interação entre a flambagem por flexão e a flambagem lateral no comportamento estático e dinâmico em estruturas apertadas esbeltas. Com o objetivo de aprofundar a investigação deste acoplamento modal, apresentam-se as seguintes sugestões:

- Investigar a instabilidade estática e dinâmica do modelo, considerando o efeito das imperfeições iniciais. Em particular, estudar o efeito das imperfeições nos caminhos não-lineares de equilíbrio e nos diagramas de bifurcação usando algoritmos de continuação.
- Avaliar para o modelo, as medidas de integridade dinâmica das bacias de atração e sua evolução com os parâmetros do sistema estrutural e do carregamento.
- Estudar a interação entre a flambagem por flexão e a flambagem lateral no comportamento estático e dinâmico de colunas com apoios elásticos, usando-se as equações diferenciais do sistema contínuo.
- Estender esta análise para geometrias de pórticos planos que possam exibir este tipo de acoplamento modal.

## 8

### Referências Bibliográficas

ABDALLA, K.M.; CHEN, W. Expanded database of semi-rigid steel connections. **Computers & Structures**, v. 56, n. 4, p. 553–564, 1995.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION - AISC. Specification for Structural Steel Buildings. Chicago, 2010.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS - ASCE. **Effective length and notional load approaches for assessing frame stability: implications for American steel design**. v.67, n.1, p.66, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

AU, F.T.K.; YAN, Z.H. Dynamic analysis of frames with material and geometric nonlinearities based on the semi-rigid technique. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 8, n. 3, p. 415–438, 2008.

AUGUSTI, G. Stabilità di Strutture Elastiche Elementari in Presenza di Grandi Spostamenti. **Atti. Acad. Sci. Fis. Mat.**, Napoli, 4(5), 1964.

BAZANT, Z.P., CEDOLIN, L. **Stability of Structures**. Oxford Press, Oxford, 1991.

BOLOTIN, V. V. **The dynamic stability of elastic systems**. Holden-Day, San Francisco, 1964.

CANADIAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, Effective Column Length Method. Disponível em: < <https://www.cisc-icca.ca/faq-items/general-stability/>>. Acesso em 22 dez. 2017.

CHEN, W.; KISHI, N. Semirigid Steel Beam-to-Column Connections: Data Base and Modeling. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 1, p. 105–119, 1989.

CHILVER, A.H. Coupled modes of elastic buckling. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 15, n. 1, p. 15–28, 1967.

CHOPRA, A.K. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. **Pearson Education**, 2007.

COISSON, R.; VERNIZZI, G.; YANG, X. Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation. Open-source Software For Scientific Computation (OSSC), Guiyang, p.3-10, set. 2009.

COWELL, R.G., HUNT G.W. Comparative Modeling of Compound Bifurcation of an Axially-Loaded Cylinder. **EUROMECH 200**, Hungray, p. 35-51, 1985.

CROLL, J.G., WALKER, A.C. **Elements of Structural Stability**. 1.ed. Macmillan, London, UK, 1972.

DEL PRADO, Z.J.G.N. **Vibrações Não Lineares e Instabilidade Dinâmica de Estruturas Sujeitas a Interação Modal**. Proposta de Tese – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1999.

DEL PRADO, Z.J.G.N. **Acoplamento e Interação Modal na Instabilidade Dinâmica de Cascas Cilíndricas**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, p. 193, 2001. (Tese de Doutorado).

DOS ANJOS, A. M. G. **Análise do Comportamento Não Linear e da Instabilidade de Elementos Unidimensionais Esbeltos**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, p. 115, 1995. (Dissertação de Mestrado).

DUBINA, D.; UNGUREANU, V. Instability mode interaction: From Van Der Neut model to ECBL approach. **Thin-Walled Structures**, v. 81, p. 39–49, 2014.

EL NASCHIE, M.S. **Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: an Energy Approach**. McGraw Hill, London, 1990.

FUNADA, T; WANG, J; JOSEPH, D.D; TASHIRO, N; SONODA, Y. Solution of Mathieu's equation by Runge-Kutta integration, 2005.

GALVÃO, A.S. **Estabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semirrígidas**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, p. 245, 2004. (Tese de Doutorado).

GALVÃO, A. S.; GONÇALVES, P. B.; SILVEIRA, R. A. M. Postbuckling Behavior and Imperfection Sensitivity of L-Frames, **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, World Scientific Publishing Company, v. 5(1), p.19-35, 2005.

\_\_\_\_\_. Nonlinear dynamic behavior and instability of slender frames with semi-rigid connections, **International Journal of Mechanical Sciences**, 52 (12), 1547 - 1562, 2010.

\_\_\_\_\_. Estabilidade e vibração não linear de pórticos em aço usados em galpões industriais: análise paramétrica. **Rem: Revista Escola de Minas**. vol.66, n.4, pp.417-424, 2013.

GAUTSCHI, W. Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works. **SIAM Review**, v. 50, n. 1, p. 3–33, 2008.

GIONCU, V. General theory of coupled instabilities. **Thin-Walled Structures**, v. 19, n. 2–4, p. 81–127, 1994a.

GIONCU, V. Consistent simplified theory for elastic coupled instability. **Thin-Walled Structures**, v. 19, n. 2–4, p. 147–159, 1994b.

GIONCU, V.; BALUT, N.; DUBINA, D.; MOLDOVAN, A.; PASCOTE, C. Coupled instabilities in monosymmetrical steel compression members. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 21, n. 1–3, p. 71–95, 1992.

GONÇALVES, P.B., DEL PRADO, Z.J.G.N. Low-Dimensional Galerkin Models for Nonlinear Vibration and Instability Analysis of Cylindrical Shells. **Nonlinear Dynamics**, v. 41, p. 129-145, 2005.

\_\_\_\_\_. Effect of non-linear modal interaction on the dynamic instability of axially excited cylindrical shells. **Computers and Structures**, vol. 82, p. 2621-2634, 2004.

GONÇALVES, P.B., SILVA, F.M.A.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Global Stability Analysis of Parametrically Excited Cylindrical Shells through the Evolution of Basin Boundaries. **Nonlinear Dynamics**, v. 50, n. 1-2, p. 121-145, 2007.

HAJJAR, J. H.; WHITE, D. W. Stability of steel frames: The case for simple elastic and rigorous inelastic analysis/design procedures. **Engineering structures**, v. 22, n. 200, p. 155-167, 2000.

HANCOCK, G.J. Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS) – What have we learned and where are we going? **Thin-Walled Structures**, 2017.

HANSEN, J.S. Some Two-Mode Buckling Problems and Their relation to Catastrophe Theory. **AIAA Journal**, v. 15, n. 11, p. 1638, 1977.

HELLESLAND, J. Application of the method of means to the stability analysis of unbraced frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 46, n. 1–3, p. 98, 1998.

HELLESLAND, J. Evaluation of effective length formulas and applications in system instability analysis. **Engineering Structures**, v. 45, p. 405–420, 2012.

HUNT, G. W. Symmetries of elastic buckling. **Engineering Structures**, v. 4, n. 1, p. 21–28, 1982.

\_\_\_\_\_. Hidden (A)Symmetries of Elastic and Plastic Bifurcation. **Applied Mechanics Reviews**, v. 39, n. 8, p. 1165, 1986.

\_\_\_\_\_. Bifurcations of structural components. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 87, n. 4, p. 443–467, 1989.

HUNT, G. W.; BURGAN, B. A. Hidden asymmetries in the Shanley model. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 33, n. 1, p. 83–94, 1985.

HUNT, G. W., REAY, N. A., YOSHIMURA, T. Local Diffeomorphisms in the Bifurcational Manifestations of the Umbilic Catastrophes. **Proc. R. Soc. Lond., A**, v. 369, p. 47-65, 1979.

HUNT, G. W., WILLIAMS, K.A.J., COWELL, R.G. Hidden Symmetry Concepts in the Elastic Buckling of Axially-Loaded Cylinders. **International Journal of Solids and Structures**, v. 22, n. 12, p. 1501-1515, 1986.

HUTCHINSON, J.W. Plastic Buckling. **Advances in Applied Mechanics**, v. 14, Academic Press, 1974.

IWICKI, P. Buckling of Frame Braced by Linear Elastic Springs. **Mechanics and Mechanical Engineering**, v. 14, n. 2, Technical University of Lodz, p. 201-2013, 2010.

JOHNS, K.C. Imperfection sensitivity of coincident buckling systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 9, n. 1, p. 1–21, 1974.

KALA, Z. Geometrically Non-linear Finite Element Reliability Analysis of Steel Plane Frames with Initial Imperfections. **Journal of Civil Engineering and Management**, v. 18, n. 1, p. 81–90, 2012.

KING, C.M. Plastic design of single-storey pitched-roof portal frames to Eurocode 3. **Technical report. Publication 147**. UK: The Steel Construction Institute, 86p., 1995.

KING, W.S. The limit loads of steel semi-rigid frames analyzed with different methods. **Computers & Structures**, v. 51, n. 5, p. 475–487, 1994.

KOITER, W.T. On the Stability of Elastic Equilibrium. **Nasa Report no TT-F- 10833** (Translation of: Over Stabiliteit van het Elastische Evenwicht, Ph. D. Thesis, Delft, ND, 1945), 1967.

LACARBONARA, W.; YABUNO, H. Nonlinear cancellation of the parametric resonance in elastic beams: theory and experiment. **International Journal of Solids Structures**, v. 44, n. 7-8, p. 2209-2224, 2007.

LEMESSURIER, W. A practical method of second order analysis Part 2- Rigid Frames. **Engineering Journal**, v. 14, p. 49-67, 1977.

LUONGO, A. On the amplitude modulation and localization phenomena in interactive buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 27, n. 15, p. 1943–1954, 1991.

LUONGO, A.; PIGNATARO, M. On the perturbation analysis of interactive buckling in nearly symmetric structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 29, n. 6, p. 721–733, 1992.

MACHADO, V.L., Bifurcações Múltiplas e Comportamento Não Linear de Sistemas Dinâmicos”, Rio de Janeiro: COPPE – UFRJ. 1993 (Tese de Doutorado).

MACHADO, S. P.; CORTÍNEZ, V. H. Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations. **Engineering Structures** v. 29, p. 372-382, 2007.

MAGEIROU, G. E.; GANTES, C. J. Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 62, n. 9, p. 893–905, 2006.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. Applied Nonlinear Dynamics. Analytical Computational and Experimental Methods, **John Wiley & Sons Inc.**, New York, 1995.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. Wiley, New York, 1995.

OLIVEIRA, S. S. **Instabilidade Paramétrica de Colunas**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 1998. p. 177. (Tese de Doutorado).

ORLANDO, D. **Dinâmica Não-Linear, Instabilidade e Controle de Sistemas Estruturais com Interação Modal**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 2010. p. 300. (Tese de Doutorado).

ORLANDO, D.; GONÇALVES, P.B.; REGA, G.; LENCI, S. Influence of Modal Coupling on the Nonlinear Dynamics of Augusti's Model. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 6, n. 4, p. 41014, 2011.

\_\_\_\_\_. Influence of symmetries and imperfections on the non-linear vibration modes of archetypal structural systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 49, p. 175–195, 2013a.

\_\_\_\_\_. S. Nonlinear Dynamics and Instability as Important Design Concerns for a Guyed Mast. **IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Advanced Technologies and Engineering Design**, p. 223–234, 2013b.

RAFTOYIANNIS, I.G., KOUNADIS, A.N. Dynamic Buckling of 2-DOF Systems with Mode Interaction Under Step Loading. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 35, p. 531-542, 2000.

RAITHEL, A.; CLEMENTE, P. On the stability of pin-joined stiffened frames. **Thin-Walled Structures**, v. 19, n. 2–4, p. 211–220, 1994.

RIZZI, N.; Di CARLO, A.; PIGNATARO, M. A Parametric Postbuckling Analysis of an Asymmetric Two-Bar Frame. **Journal of Structural Mechanics**, v. 8, n. 4, p. 435–448, 1980.

ROORDA, J. **The instability of imperfect elastic structures**. Ph. D. University College London, England, 1965.

ROORDA, J.; CHILVER, A. H. Frame buckling: An illustration of the perturbation technique. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 5, n. 2, p. 235–246, 1970.

SALAMA, M. I. New simple equations for effective length factors. **HBRC Journal**, v. 10, n. 2, p. 156–159, 2014.

SAVI, M. A. **Dinâmica Não-linear e Caos**. Rio de Janeiro, E-Papers, 2006.

SEKULOVIC, M.; SALATIC, R.; NEFOVSKA, M. Dynamic analysis of steel frames with flexible connections. **Computers & Structures**, v. 80, n. 11, p. 935–955, 2002.

Silvestre, N.; Camotim, D. Coupled global instabilities in pitched-roof frames. In *Coupled Instabilities In Metal Structures: CIMS'2000* (pp. 475-485), 2000.

SOPHIANOPOULOS, D. S. The effect of joint flexibility on the free elastic vibration characteristics of steel plane frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, n. 8, p. 995–1008, 2003.

SOPHIANOPOULOS, D.S. Bifurcations and Catastrophes of a Two Degrees of Freedom Nonlinear Model Simulation the Buckling and Postbuckling of Rectangular Plates. **Journal of the Franklin Institute**, v. 344, p. 463-488, 2007.

STANDARDS AUSTRALIA. Steel structures: **AS 4100**. Sydney, Australia, 2001.

STEELCONSTRUCTION.INFO. Allowing for the effects of deformed frame geometry. Disponível em: <[https://www.steelconstruction.info/Allowing\\_for\\_the\\_effects\\_of\\_deformed\\_frame\\_geometry](https://www.steelconstruction.info/Allowing_for_the_effects_of_deformed_frame_geometry)> Acesso em: 22 nov. 2017.

TENG, J.G., HONG, T. Postbuckling Analysis of Elastic Shells of Revolution Considering Mode Switching and Interaction. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 3-4, p. 551-568, 2006.

THOMPSON, J.M.T., GASPARD, Z. A Buckling Model for the Set of Umbilic Catastrophes. **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, v. 82, p. 497, 1977.

THOMPSON, J.M.T., HUNT, G.W. **A General Theory of Elastic Stability**. John Wiley and Sons, London, 1973.

\_\_\_\_\_. **Elastic Instability Phenomena**. John Wiley and Sons, London, 1984.

THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B. **Nonlinear Dynamics and Chaos. Geometrical Methods for Engineers and Scientists**, John Wiley and Sons, Great Britain, 1993.

TRAHAIR, N.S. Steel structures - elastic in-plane buckling of pitched roof portal frames. Limit states data sheet AS 4100 DS04. **Australian Institute of Steel Construction and Standards Australia**, Sidney, p. 1-2, 1993.

WEBBER, A.; ORR, J. J.; SHEPHERD, P.; CROTHERS, K. The effective length of columns in multi-storey frames. **Engineering Structures**, v. 102, p. 132–143, 2015.

XU, L.; LIU, Y. Story-based effective length factors for unbraced PR frames. **Engineering Journal**, v. 39, n. 1, p. 13–29, 2002.

XU, R., WU, Y-F. Free vibration and buckling of composite beams with interlayer slip by two-dimensional theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 313, n. 3-5, p.875-890, 2008.

YURA, J. A. The Effective Length of Columns in Unbraced Frames. **Engineering Journal**, American Institute of Steel Construction, Vol. 8, pp. 37-42, 1971.

ZAVODNEY, L. D.; NAYFEH, A. H. The nonlinear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 24, p. 105-125, 1989.

ZHUANG, Y. Storey-based Stability Analysis of Unbraced Steel Frames at Ambient and Elevated Temperatures, Ontario, Canada: University of Waterloo, 2013. p. 177.

## Apêndice A

Este apêndice mostra as coordenadas de cada ponto de equilíbrio, o valor da energia no ponto e os dois autovalores da matriz Hessiana (Equação 3.8), para as superfícies de energia potencial apresentadas no Capítulo 3.

Tabela A.1: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.10$ . Modelo de Raithele e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,0	-1,570	-1,570	0,499	-0,299	-0,499
	0,000	0,000	0,000	0,500	0,200
	1,570	1,57	0,499	-0,299	-0,499
	0,508	2,633	0,344	0,463	-0,118
	-0,508	-2,633	0,344	0,463	-0,118
	2,633	0,508	0,344	0,463	-0,118
	-2,633	-0,508	0,344	0,463	-0,118
0,4	-1,159	-1,159	0,179	-0,299	-0,419
	0,000	0,000	0,000	0,300	0,000
	1,159	1,159	0,179	-0,299	-0,419
	-0,457	1,668	0,024	0,240	-0,073
	0,457	-1,668	0,024	0,240	-0,073
	1,668	-0,457	0,024	0,240	-0,073
	-1,668	0,457	0,024	0,240	-0,073
0,5	-1,047	-1,047	0,124	-0,299	-0,374
	0,000	0,000	0,000	0,250	-0,050
	1,047	1,047	0,124	-0,299	-0,374
	-1,131	1,131	-0,031	0,093	-0,015
	1,131	-1,131	-0,031	0,093	-0,015
0,9	-0,451	-0,451	0,005	-0,094	-0,299
	0,000	0,000	0,000	0,050	-0,250
	0,451	0,451	0,005	-0,094	-0,299
	-2,023	2,023	-0,474	0,396	0,292
	2,023	-2,023	-0,474	0,396	0,292
	-0,772	2,368	-0,406	0,622	-0,166
	0,772	-2,368	-0,406	0,622	-0,166
	-2,368	0,772	-0,406	0,622	-0,166
	2,368	-0,772	-0,406	0,622	-0,166
1,0	-1,895	1,895	-0,600	0,359	0,210
	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,300
	1,895	-1,895	-0,600	0,359	0,210
	-0,679	2,462	-0,506	0,714	-0,211
	0,679	-2,462	-0,506	0,714	-0,211
	-2,462	0,679	-0,506	0,714	-0,211
	2,462	-0,679	-0,506	0,714	-0,211
1,4	-2,389	2,389	-1,280	0,777	0,710
	0,000	0,000	0,000	-0,500	-0,200
	2,389	-2,389	-1,280	0,777	0,710
	-0,465	2,676	-0,906	0,993	-0,393
	0,465	-2,676	-0,906	0,993	-0,393
	2,676	-0,465	-0,906	0,993	-0,393
	-2,676	0,465	-0,906	0,993	-0,393

Tabela A.2: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.15$ . Modelo de Raithele e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,0	-1,570	-1,570	-0,898	-0,200	-0,500
	0,000	0,000	0,000	-0,400	-0,200
	1,570	1,570	-0,898	-0,200	-0,500
	0,740	2,400	-0,964	0,648	-0,532
	-0,740	-2,400	-0,964	0,648	-0,532
	2,400	0,740	-0,964	0,648	-0,532
	-2,400	-0,740	-0,964	0,648	-0,532
0,6	-0,927	-0,927	0,079	-0,199	-0,319
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,200
	0,927	0,927	0,079	-0,199	-0,319
	-0,354	1,305	0,014	0,175	-0,093
	0,354	-1,305	0,014	0,175	-0,093
	-1,305	0,354	0,014	0,175	-0,093
	1,305	-0,354	0,014	0,175	-0,093
0,8	-0,643	-0,643	0,019	-0,179	-0,199
	0,000	0,000	0,000	-0,100	0,100
	0,643	0,643	0,019	-0,179	-0,199
	-1,275	1,275	-0,079	0,183	-0,074
	1,275	-1,275	-0,079	0,183	-0,074
1,0	-1,660	1,660	-0,262	0,344	0,048
	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,200
	1,660	-1,660	-0,262	0,344	0,048
	-1,229	1,911	-0,259	0,421	-0,066
	1,229	-1,911	-0,259	0,421	-0,066
	-1,911	1,229	-0,259	0,421	-0,066
	1,911	-1,229	-0,259	0,421	-0,066
1,2	-1,895	1,895	-0,504	0,491	0,241
	0,000	0,000	0,000	-0,300	-0,100
	1,895	-1,895	-0,504	0,491	0,241
	-0,903	2,238	-0,459	0,690	-0,199
	0,903	-2,238	-0,459	0,690	-0,199
	2,238	-0,903	-0,459	0,690	-0,199
	-2,238	0,903	-0,459	0,690	-0,199
1,4	-2,059	2,059	-0,784	0,628	0,438
	0,000	0,000	0,000	-0,400	-0,200
	2,059	-2,059	-0,784	0,628	0,438
	-0,738	2,403	-0,659	0,878	-0,305
	0,738	-2,403	-0,659	0,878	-0,305
	-2,403	0,738	-0,659	0,878	-0,305
	2,403	-0,738	-0,659	0,878	-0,305

Tabela A.3: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.20$ . Modelo de Raithele e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,0	-1,570	-1,570	-0,898	-0,200	-0,500
	0,000	0,000	0,000	-0,300	-0,200
	1,570	1,570	-0,898	-0,200	-0,500
	1,005	2,136	-0,915	0,378	-0,547
	-1,005	-2,136	-0,915	0,378	-0,547
	2,136	1,005	-0,915	0,378	-0,547
	-2,136	-1,005	-0,915	0,378	-0,547
0,4	-1,159	-1,159	0,179	-0,099	-0,419
	0,000	0,000	0,000	0,300	0,200
	1,159	1,159	0,179	-0,099	-0,419
	0,511	1,642	0,164	0,174	-0,295
	-0,511	-1,642	0,164	0,174	-0,295
	1,642	0,511	0,164	0,174	-0,295
	-1,642	-0,511	0,164	0,174	-0,295
0,8	-0,643	-0,643	0,019	-0,099	-0,179
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,100
	0,643	0,643	0,019	-0,099	-0,179
	-0,240	0,890	0,004	0,094	-0,072
	0,240	-0,890	0,004	0,094	-0,072
	0,890	-0,240	0,004	0,094	-0,072
	-0,890	0,240	0,004	0,094	-0,072
1,0	-1,131	1,131	-0,062	0,187	-0,122
	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,100
	1,131	-1,131	-0,062	0,187	-0,122
1,2	-1,490	1,490	-0,215	0,354	-0,042
	0,000	0,000	0,000	-0,200	-0,100
	1,490	-1,490	-0,215	0,354	-0,042
1,4	-1,728	1,728	-0,424	0,509	0,121
	0,000	0,000	0,000	-0,300	-0,200
	1,728	-1,728	-0,424	0,509	0,121
	-1,114	2,027	-0,413	0,644	-0,147
	1,114	-2,027	-0,413	0,644	-0,147
	-2,027	1,114	-0,413	0,644	-0,147
	2,027	-1,114	-0,413	0,644	-0,147

Tabela A.4: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.25$ . Modelo de Raithele e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,0	-1,570	-1,570	0,499	0,000	-0,499
	0,000	0,000	0,000	0,500	0,500
	1,570	1,570	0,499	0,000	-0,499
0,4	-1,159	-1,159	0,179	0,000	-0,419
	0,000	0,000	0,000	0,300	0,300
	1,159	1,159	0,179	0,000	-0,419
0,8	-0,643	-0,643	0,019	-0,179	0,000
	0,000	0,000	0,000	0,100	0,100
	0,643	0,643	0,019	-0,179	0,000
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,2	1,026	-1,026	-0,051	0,189	-0,176
	0,000	0,000	0,000	-0,100	-0,100
	-1,026	1,026	-0,051	0,189	-0,176
1,4	1,372	-1,372	-0,182	0,361	-0,118
	0,000	0,000	0,000	-0,200	-0,200
	-1,372	1,372	-0,182	0,361	-0,118

Tabela A.5: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.30$ . Modelo de Raithele e Clemente perfeito.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,0	-1,570	-1,570	0,499	0,100	-0,499
	0,000	0,000	0,000	0,500	0,600
	1,570	1,570	0,499	0,100	-0,499
0,8	-0,643	-0,643	0,019	-0,179	0,100
	0,000	0,000	0,000	0,200	0,100
	0,643	0,643	0,019	-0,179	0,100
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,100
1,1	0,000	0,000	0,000	0,050	-0,050
1,2	0,000	0,000	0,000	0,050	-0,100
1,3	-0,946	0,946	-0,011	0,097	-0,203
	0,000	0,000	0,000	-0,050	-0,150
	0,946	-0,946	-0,011	0,097	-0,203

Tabela A.6: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.10$ ,  $\theta_{10} = \pi/180$  e  $\theta_{20} = 2\pi/180$ .

Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,4	1,152	1,140	0,156	-0,285	-0,400
	-1,165	-1,176	0,204	-0,314	-0,438
	-0,331	0,431	-0,001	0,244	0,013
	-0,451	1,588	0,013	0,222	-0,068
	1,604	-0,422	0,020	0,226	-0,073
	0,462	-1,737	0,035	0,258	-0,077
	-1,727	0,488	0,027	0,255	-0,073
0,8	0,578	0,565	0,005	-0,121	-0,275
	-0,688	-0,699	0,036	-0,224	-0,320
	0,144	0,127	-0,001	0,087	-0,203
	-2,278	0,862	-0,311	0,529	-0,118
	2,199	-0,942	-0,300	0,494	-0,122
	-0,928	2,213	-0,311	0,503	-0,124
	0,877	-2,264	-0,300	0,520	-0,115
-1,924	1,877	-0,342	0,329	0,181	
1,4	1,866	-1,913	-0,329	0,325	0,174
	-2,404	2,380	-1,287	0,780	0,712
	2,375	-2,399	-1,271	0,775	0,709
	-0,061	-0,068	0,001	-0,203	-0,501
	-0,481	2,660	-0,911	0,989	-0,396
	-2,697	0,443	-0,911	0,999	-0,392
	2,654	-0,486	-0,900	0,985	-0,395
0,449	-2,692	-0,900	0,997	-0,391	

Tabela A.7: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.25$ ,  $\theta_{10} = 0$  e  $\theta_{20} = \pi/180$ .

Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,8	0,794	0,388	0,013	0,013	0,045
	-0,346	-0,883	0,023	0,023	0,056
	0,043	0,043	-0,000	-0,000	0,099
1,0	0,300	-0,505	-0,001	-0,001	0,042
1,4	-1,367	1,353	-0,170	-0,170	0,353
	1,377	-1,391	-0,194	-0,194	0,370
	-0,021	-0,021	0,000	0,000	-0,200

Tabela A.8: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.30$ ,  $\theta_{10} = 2\pi/180$  e $\theta_{20} = -\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Parâmetro de carga $\lambda$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0,8	0,746	0,470	0,013	0,013	0,123
	-0,490	-0,802	0,023	0,023	0,114
	0,123	-0,034	-0,000	-0,000	0,200
1,0	-0,046	-0,394	-0,000	-0,000	0,098
	-0,863	0,839	-0,014	-0,014	0,138
1,4	1,010	-1,030	-0,074	-0,074	0,233
	-0,182	0,140	0,003	0,003	-0,091

Tabela A.9: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.10$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\theta_{10} = n\pi/180$  e $\theta_{20} = 2n\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Magnitude $n$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1,4	1,151	1,136	0,152	-0,282	-0,396
	-1,166	-1,180	0,209	-0,316	-0,441
	1,149	1,132	0,147	-0,279	-0,392
	-1,168	-1,183	0,214	-0,319	-0,445
	-0,359	0,504	-0,001	0,229	0,017
	-0,449	1,552	0,009	0,214	-0,064
	1,578	-0,407	0,019	0,220	-0,072
	1,140	1,106	0,121	-0,261	-0,368
2,6	-1,175	-1,202	0,246	-0,336	-0,466
	-0,407	0,716	-0,004	0,186	0,024
	-0,442	1,417	-0,000	0,188	-0,049
	1,495	-0,357	0,016	0,204	-0,068
	0,472	-1,737	0,055	0,284	-0,078
	-1,816	0,532	0,034	0,278	-0,071
	1,137	1,096	0,113	-0,255	-0,359
	-1,177	-1,208	0,257	-0,341	-0,473
3,0	-0,416	0,798	-0,005	0,172	0,024
	-0,440	1,355	-0,003	0,178	-0,040
	1,465	-0,338	0,015	0,198	-0,067
	0,474	-1,854	0,061	0,291	-0,079
	-1,837	0,542	0,036	0,284	-0,070

Tabela A.10: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.10$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\theta_{10} = n\pi/180$  e $\theta_{20} = 2n\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Magnitude $n$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1,8	0,477	0,451	-0,003	-0,047	-0,247
	-0,717	-0,736	0,052	-0,255	-0,335
	0,303	0,274	-0,003	0,042	-0,217
	-2,311	0,829	-0,314	0,544	-0,117
	2,168	-0,972	-0,294	0,481	-0,124
	-0,947	2,194	-0,314	0,498	-0,128
	0,855	-2,286	-0,294	0,528	-0,113
	-1,947	1,864	-0,346	0,332	0,185
1,844	-1,929	-0,322	0,325	0,172	
2,8	-0,748	-0,775	0,072	-0,290	-0,352
	-2,354	0,787	-0,316	0,565	-0,116
	2,132	-1,009	-0,285	0,468	-0,126
	-0,970	2,171	-0,316	0,492	-0,133
	0,826	-2,315	-0,285	0,539	-0,110
	-1,977	1,848	-0,350	-0,350	0,189
	1,816	-1,949	-0,313	0,325	0,169
3,0	-0,753	-0,783	0,077	-0,297	-0,356
	-2,362	0,778	-0,317	0,568	-0,116
	2,125	-1,016	-0,284	0,466	-0,127
	-0,974	2,167	-0,317	0,491	-0,134
	0,820	-2,320	-0,284	0,541	-0,109
	-1,982	1,845	-0,351	0,337	0,190
	1,811	-1,953	-0,311	0,325	0,168

Tabela A.11: Estabilidade dos pontos críticos para  $\alpha = 0.25$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\theta_{10} = n\pi$  e $\theta_{20} = n\pi/180$ . Modelo de Raithel e Clemente com imperfeição geométrica.

Magnitude $n$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\Pi$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1,4	1,128	0,657	0,068	0,060	-0,287
	-0,611	-1,200	0,087	0,073	-0,303
	0,061	0,000	-0,000	0,200	0,198
2,6	1,151	0,590	0,058	0,087	-0,268
	-0,524	-1,267	0,091	0,110	-0,295
	0,113	0,000	-0,000	0,200	0,196
3,0	1,155	0,571	0,055	0,095	-0,261
	-0,501	-1,285	0,093	0,120	-0,293
	0,131	0,000	-0,000	0,200	0,194