

5

Análise não linear

Este capítulo apresenta os resultados da análise não linear da casca cilíndrica sob vibração livre. Mostra-se o processo de discretização da casca utilizado o método de *Galerkin* e como as equações discretizadas são resolvidas pelo método de *Newton-Raphson* para se obter a relação frequência-amplitude.

5.1

Introdução

Após a análise linear de cascas cilíndricas, apresenta-se agora a análise não linear do problema. Inicialmente, deve-se obter os modos de vibração não lineares (Equações 4.2) para uma casca cilíndrica biapoada e que atendam além das condições de contorno, as condições de periodicidade.

A obtenção dos modos de vibração não lineares foi apresentada no trabalho de Gonçalves (1987) e, de maneira mais geral, no trabalho de Silva (2008), a partir do método de perturbação.

Gonçalves (1987) explica que existem dois tipos de modos, os clássicos (principais) e os secundários, sendo estes últimos adotados para que se tenha uma solução fisicamente consistente, ou seja, eles são os modos que se acoplam com os modos principais. Ainda, segundo o autor, o acoplamento modal é característico da não linearidade do problema. Aqui se usa a seguinte aproximação para os modos não lineares de vibração:

$$u = A_1 \delta_{u_1} + A_2 \delta_{u_2} + A_3 \delta_{u_3} + A_4 \delta_{u_4} + A_5 \delta_{u_5} + A_6 \delta_{u_6} \quad (5.1a)$$

$$v = B_1 \delta_{v_1} + B_2 \delta_{v_2} + B_3 \delta_{v_3} + B_4 \delta_{v_4} \quad (5.1b)$$

$$w = F_1 \delta_{w_1} + F_2 \delta_{w_2} \quad (5.1c)$$

onde $q = m\pi/L$ e,

$$\delta_{u_1} = \cos^2(\omega t) \left[\sin(2 q x) - \frac{1}{2} \sin(4 q x) \right] \quad (5.2a)$$

$$\delta_{u_2} = \cos(\omega t) \cos(q x) \cos(n \theta) \quad (5.2b)$$

$$\delta_{u_3} = \cos^2(\omega t) \cos(2 n \theta) \left[\sin(2 q x) - \frac{1}{2} \sin(4 q x) \right] \quad (5.2c)$$

$$\delta_{u_4} = \cos^3(\omega t) \cos(n \theta) \cos(3 q x) \quad (5.2d)$$

$$\delta_{u_5} = \cos^5(\omega t) \cos(n \theta) \cos(5 q x) \quad (5.2e)$$

$$\delta_{u_6} = \cos^6(\omega t) \left[\sin(6 q x) - \frac{3}{4} \sin(8 q x) \right] \quad (5.2f)$$

$$\delta_{v_1} = \cos(\omega t) \sin(q x) \sin(n \theta) \quad (5.2g)$$

$$\delta_{v_2} = \cos^2(\omega t) \sin(2 n \theta) [\cos(2 q x) - 1] \quad (5.2h)$$

$$\delta_{v_3} = \cos^3(\omega t) \sin(n \theta) \sin(3 q x) \quad (5.2i)$$

$$\delta_{v_4} = \cos^5(\omega t) \sin(n \theta) \sin(5 q x) \quad (5.2j)$$

$$\delta_{w_1} = \cos^2(\omega t) \left[\cos(2 q x) - \frac{1}{4} \cos(4 q x) - \frac{3}{4} \right] \quad (5.2k)$$

$$\delta_{w_2} = \cos(\omega t) \sin(q x) \cos(n \theta) \quad (5.2l)$$

Nota-se que nas expressões (5.2), os termos δ_{u_2} , δ_{v_1} e δ_{w_2} são iguais às Equações (4.2) para o caso linear. Estes termos, como já mencionado, são os modos clássicos. Os outros termos são os modos secundários.

5.2

Utilização do método de *Galerkin*

Sabe-se que o método de *Galerkin* é um caso particular do método de resíduos ponderados, e pode ser aplicado a problemas de contorno que não podem ser reduzidos aos variacionais (Rezende, 2005). O Método de *Galerkin* é aqui utilizado para passar o sistema que é contínuo para um sistema discretizado. Para tal, as funções de interpolação precisam atender a todas as condições de contorno (ver seção 2.5.1.).

Para se obter as equações discretizadas, as Equações (5.1), juntamente com suas derivadas, são substituídas nas três equações de equilíbrio (Equações 4.1) que estão em função dos deslocamentos u , v e w , e integra-se ao longo do domínio e de um período natural (procedimento de Galerkin-Urabe), obtendo-se:

$$u_1 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_1} dx d\theta dt \quad (5.3a)$$

$$u_2 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_2} dx d\theta dt \quad (5.3b)$$

$$u_3 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_3} dx d\theta dt \quad (5.3c)$$

$$u_4 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_4} dx d\theta dt \quad (5.3d)$$

$$u_5 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_5} dx d\theta dt \quad (5.3e)$$

$$u_6 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 1^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{u_6} dx d\theta dt \quad (5.3f)$$

$$v_1 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 2^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{v_1} dx d\theta dt \quad (5.3g)$$

$$v_2 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 2^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{v_2} dx d\theta dt \quad (5.3h)$$

$$v_3 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 2^a \text{ equação de equilíbrio} \cdot \delta_{v_3} dx d\theta dt \quad (5.3a)$$

$$v_4 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 2^a \text{equação de equilíbrio} \cdot \delta_{v_4} dx d\theta dt \quad (5.3i)$$

$$w_1 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 3^a \text{equação de equilíbrio} \cdot \delta_{w_1} dx d\theta dt \quad (5.3j)$$

$$w_2 = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^L 3^a \text{equação de equilíbrio} \cdot \delta_{w_2} dx d\theta dt \quad (5.3k)$$

onde as funções peso δ_{ij} as funções mostradas nas Equações (5.2)

Ao se resolver as integrais das Equações (5.3), obtém-se um sistema com 12 equações algébricas não lineares. Estas equações estão em função das constantes presentes nas Equações (5.1): $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_4, F_1$ e F_2 . O passo seguinte consiste em calcular o valor destas constantes, que nada mais são que as amplitudes modais do sistema, para um dado valor de frequência.

Devido o número de modos adotados e por se utilizar a teoria de *Sanders*, os resultados das Equações (5.3) são excessivamente longos. Elas são apresentadas no Apêndice A1 para o caso isotrópico.

5.3

Implementação do método de *Newton-Raphson*

Para se chegar ao valor das constantes (amplitudes modais) mencionadas na seção 5.2, usa-se o método de *Newton-Raphson* (NR). Esse método está baseado na expansão das equações não lineares em séries de *Taylor* (Venegas, 2007).

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (5.4)$$

Truncando a Equação (5.4) na primeira derivada e fazendo $f(x) = 0$, resulta na equação:

$$x = x_0 - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (5.5)$$

Passando a expressão (5.5) para o problema desta dissertação, tem-se a Equação (5.6), que está na forma generalizada para aplicação no algoritmo de *Newton-Raphson*.

$$var^{i+1} = var^i - (H^i)^{-1} \cdot g^i \quad (5.6)$$

A expressão *var* designa o vetor das variáveis, ou seja, das constantes que se deseja obter. *H* é a matriz hessiana, também chamada por Demidovich (1973) de matriz *Jacobiana*, *g* é o vetor gradiente e o índice *i* indica a iteração. Tem-se, pois:

$$var = \{A_1 \quad \cdots \quad A_6 \quad B_1 \quad \cdots \quad B_4 \quad F_1 \quad F_2\}_{1 \times 12}^T \quad (5.7a)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial A_6} & \frac{\partial u_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial B_4} & \frac{\partial u_1}{\partial F_1} & \frac{\partial u_1}{\partial F_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_6}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial u_6}{\partial A_6} & \frac{\partial u_6}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial u_6}{\partial B_4} & \frac{\partial u_6}{\partial F_1} & \frac{\partial u_6}{\partial F_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial A_6} & \frac{\partial v_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial B_4} & \frac{\partial v_1}{\partial F_1} & \frac{\partial v_1}{\partial F_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_4}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial v_4}{\partial A_6} & \frac{\partial v_4}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial v_4}{\partial B_4} & \frac{\partial v_4}{\partial F_1} & \frac{\partial v_4}{\partial F_2} \\ \frac{\partial w_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial A_6} & \frac{\partial w_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial B_4} & \frac{\partial w_1}{\partial F_1} & \frac{\partial w_1}{\partial F_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial A_6} & \frac{\partial w_2}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial B_4} & \frac{\partial w_2}{\partial F_1} & \frac{\partial w_2}{\partial F_2} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (5.7b)$$

$$g = \{u_1 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_4 \quad w_1 \quad w_2\}_{1 \times 12}^T \quad (5.7c)$$

Entretanto, para o caso de vibração livre, a solução do sistema resulta sempre na solução trivial. Para resolver este problema, considera-se a frequência como uma variável e adotar-se-a como parâmetro de controle o deslocamento radial F_2 . Tem-se, pois:

$$var = \{A_1 \quad \cdots \quad A_6 \quad B_1 \quad \cdots \quad B_4 \quad F_1 \quad \omega\}_{1 \times 12}^T \quad (5.8a)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial A_6} & \frac{\partial u_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial B_4} & \frac{\partial u_1}{\partial F_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_6}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial u_6}{\partial A_6} & \frac{\partial u_6}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial u_6}{\partial B_4} & \frac{\partial u_6}{\partial F_1} & \frac{\partial u_6}{\partial \omega} \\ \frac{\partial v_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial A_6} & \frac{\partial v_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial B_4} & \frac{\partial v_1}{\partial F_1} & \frac{\partial v_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial v_4}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial v_4}{\partial A_6} & \frac{\partial v_4}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial v_4}{\partial B_4} & \frac{\partial v_4}{\partial F_1} & \frac{\partial v_4}{\partial \omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial A_6} & \frac{\partial w_1}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial B_4} & \frac{\partial w_1}{\partial F_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial w_2}{\partial A_1} & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial A_6} & \frac{\partial w_2}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial B_4} & \frac{\partial w_2}{\partial F_1} & \frac{\partial w_2}{\partial \omega} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (5.8b)$$

$$g = \{u_1 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_4 \quad w_1 \quad w_2\}_{1 \times 12}^T \quad (5.8c)$$

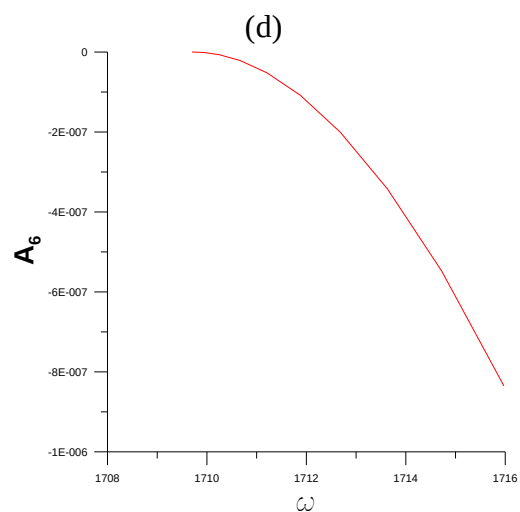
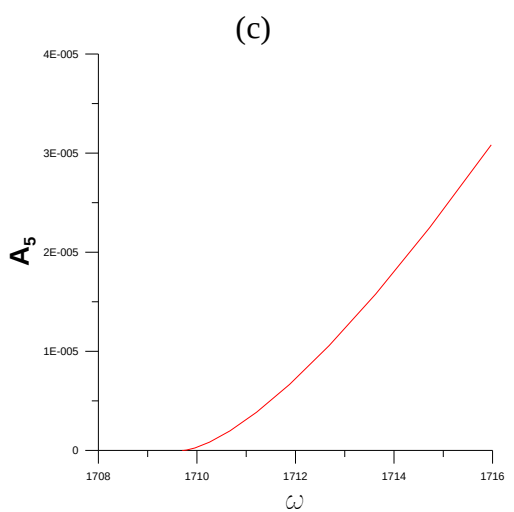
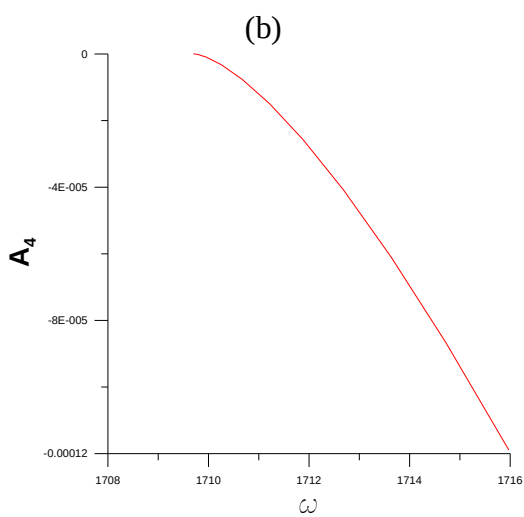
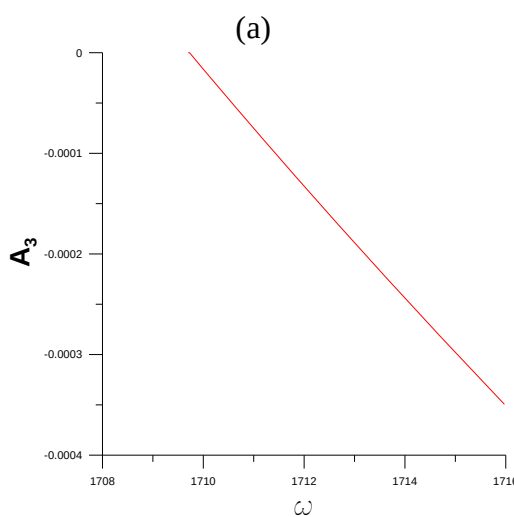
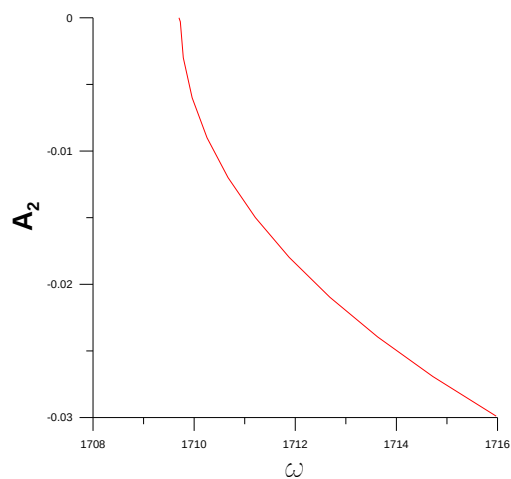
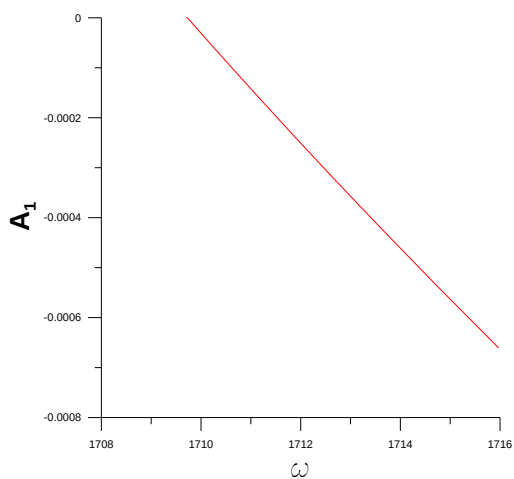
A escolha de F_2 como parâmetro de controle mostra-se bastante eficiente, pois sempre se obtém convergência com poucas iterações. O valor numérico inicial para esta amplitude foi sempre de 0,01 e variou-se a amplitude até 1, o que corresponde a uma amplitude de vibração igual a espessura da casca.

5.4

Análise das vibrações livres não lineares e não amortecidas

Após empregar o método de *Galerkin* e resolver o sistema com NR, utilizando como parâmetro de controle F_2 , obtém-se a relação não linear frequência-amplitude. Apresenta-se na Figura 5.1 a variação de todas as amplitudes modais em função da frequência de vibração. A geometria e as propriedades do material isotrópico são as mesmas encontradas na Tabela 4.1. Observa-se na Figura 5.1 que, conforme cresce a amplitude F_2 , a frequência natural aumenta, apresentando a casca um comportamento com ganho de rigidez (*hardening*). Observa-se que F_2 , que corresponde à amplitude do modo de vibração clássico na direção radial, é a maior amplitude modal, o que é esperado,

já que o modo é predominantemente radial. As outras amplitudes modais são bem menores, mas todas são diferentes de zero, indicando a presença do acoplamento modal não linear.



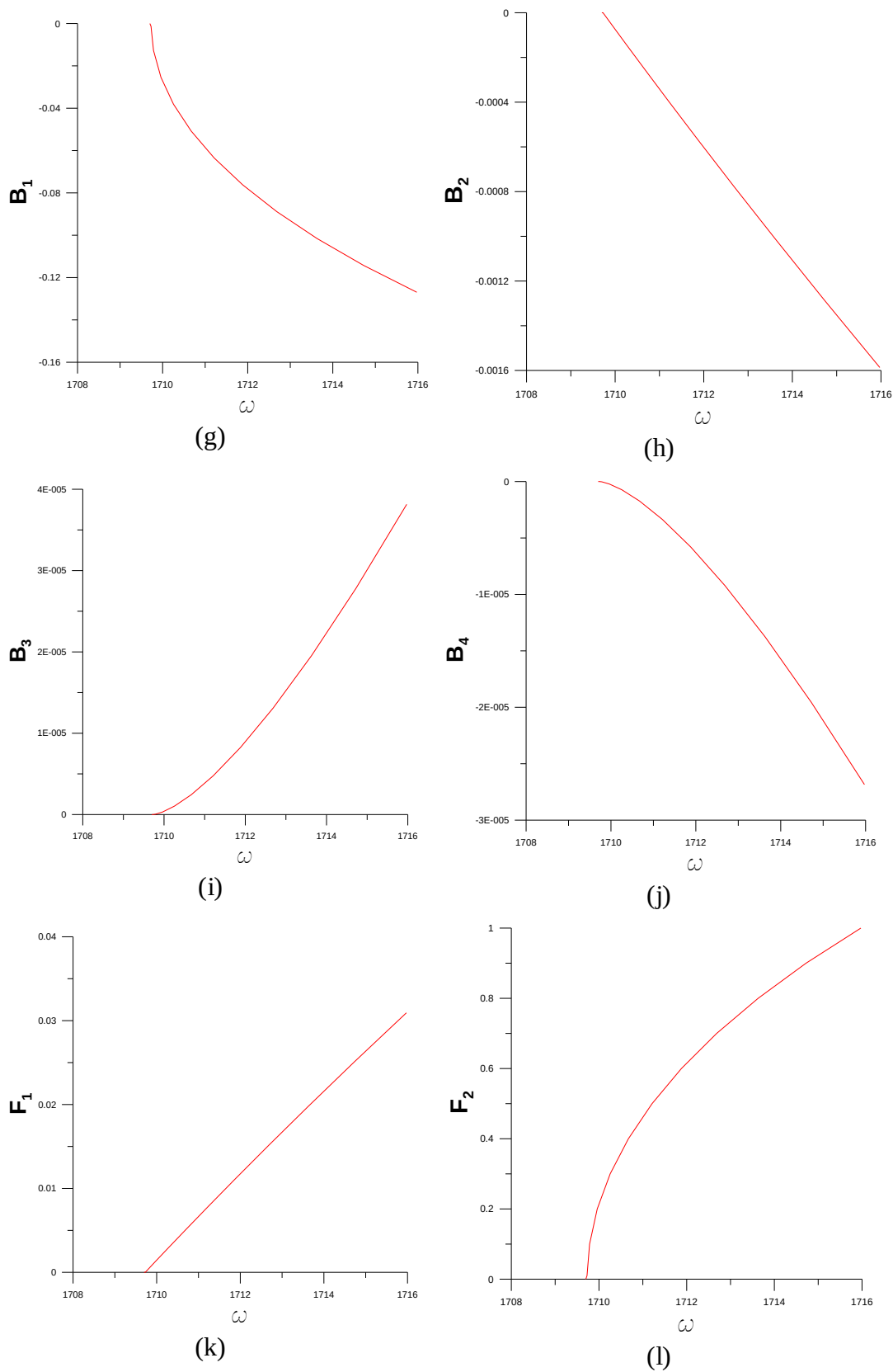
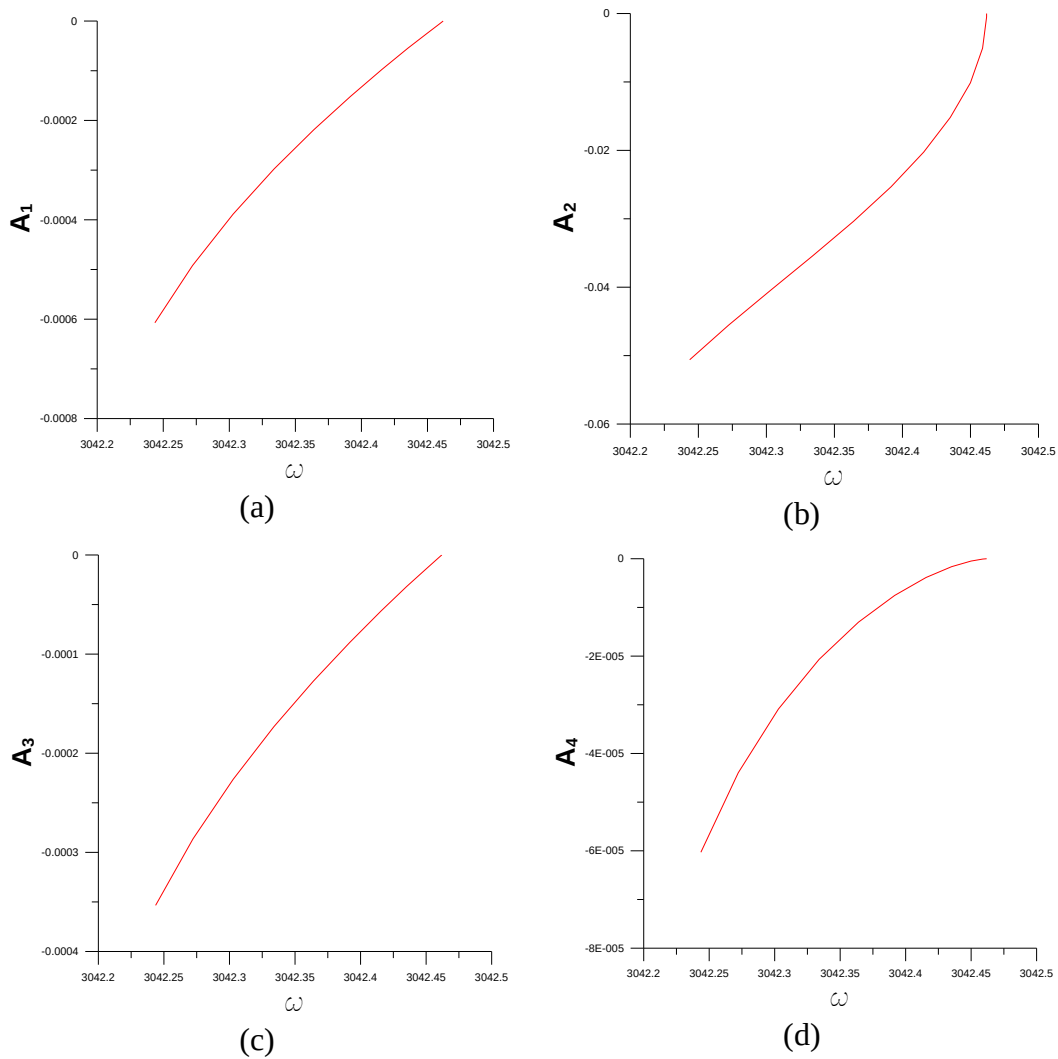
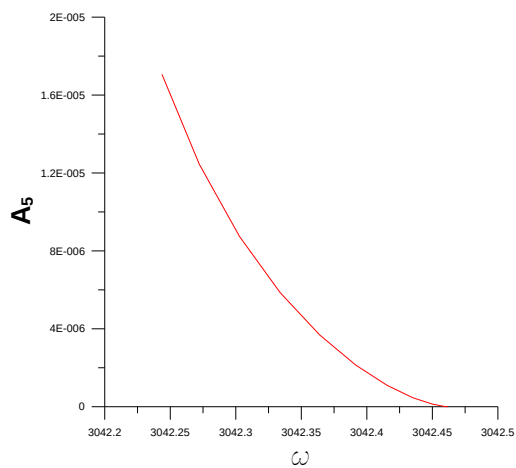


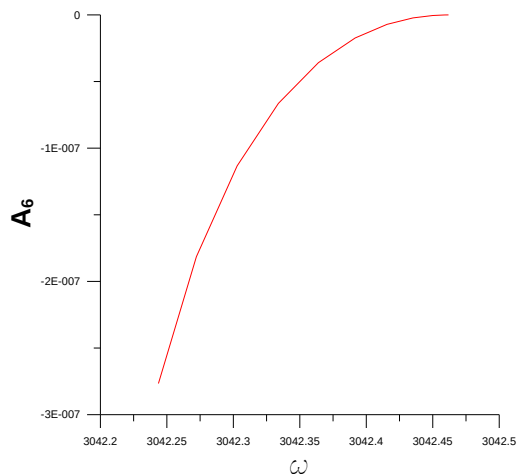
Figura 5.1 – Variação das amplitudes modais em função da frequência de vibração - $m = 1, n = 8, L = 0,41m, h = 0,001m$ e $R = 0,3015m$.

Para efeito de verificação e ratificação dos resultados, considera-se agora a mesma geometria e propriedades de uma casca cilíndrica esbelta analisada por Gonçalves (1987), e aplica-se o mesmo processo descrito nas seções 5.2 e 5.3. Os resultados são apresentados nas Figuras 5.2, que estão de acordo com o trabalho tomado como referência. Contudo, ao contrário do exemplo anterior, ocorre agora um decréscimo na frequência natural à medida que amplitude modal F_2 cresce (Figura 5.2l), indicando um comportamento com perda de rigidez (*softening*).

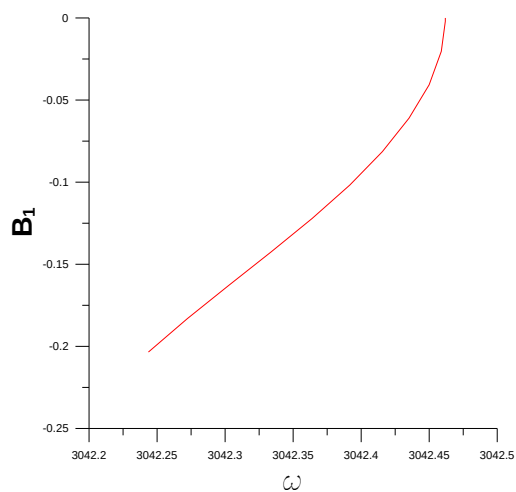




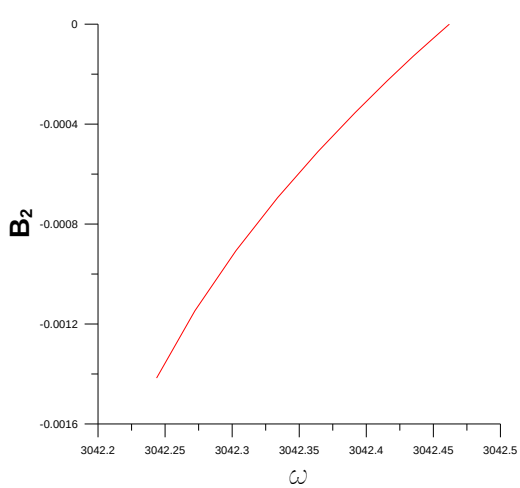
(e)



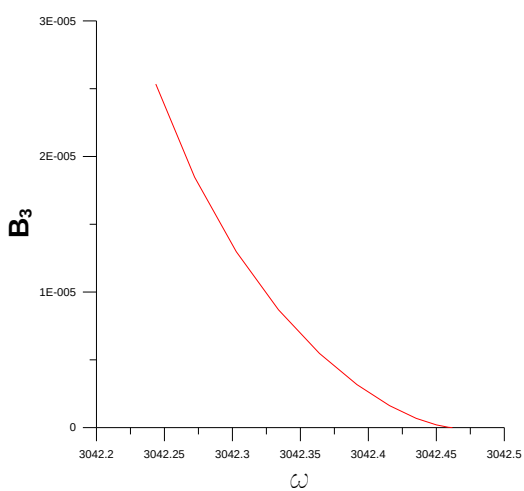
(f)



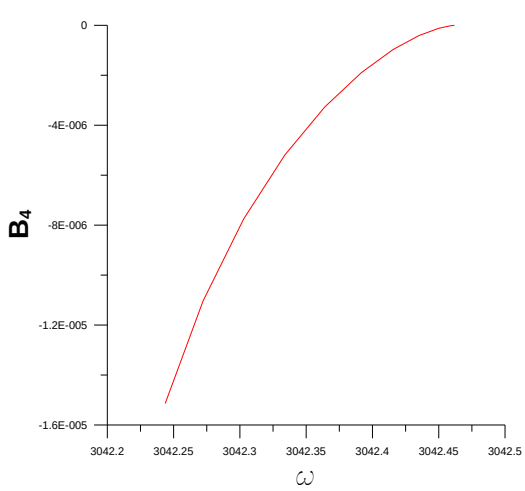
(g)



(h)



(i)



(j)

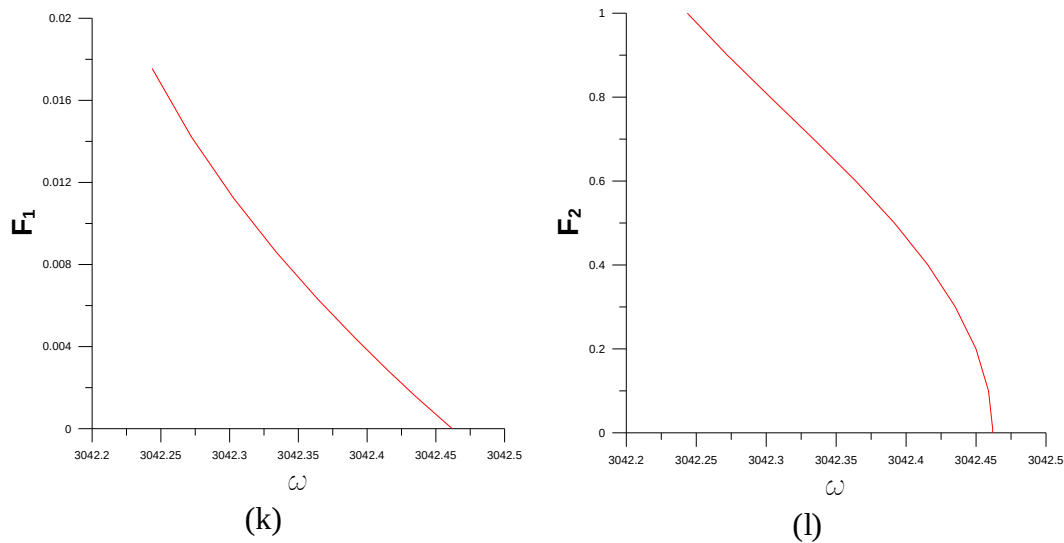


Figura 5.2 – Frequência natural em função das amplitudes modais. $R = 0,2m$, $L = 0,4m$, $h = 0,002m$, $E = 2,1 \times 10^{11} N/m^2$, $\nu = 0,3$, $\rho = 7850 kg/m^3$, $m = 1$ e $n = 5$.

5.4.1

Material com gradação funcional para o caso não linear

Para uma casca cilíndrica com MGF, utiliza-se como exemplo a mesma geometria encontrada no trabalho de Gonçalves (1987), entretanto, não mais com apenas um material e sim com dois, que são o aço e o níquel, cujas propriedades são dadas na Tabela 5.1. Consideram-se os mesmos valores de k (0,5, 1 e 5) usados na Tabela 4.6. A predominância do aço está na parte externa da casca, já o níquel predomina na parte interna, como apresentado no capítulo 3 desta dissertação.

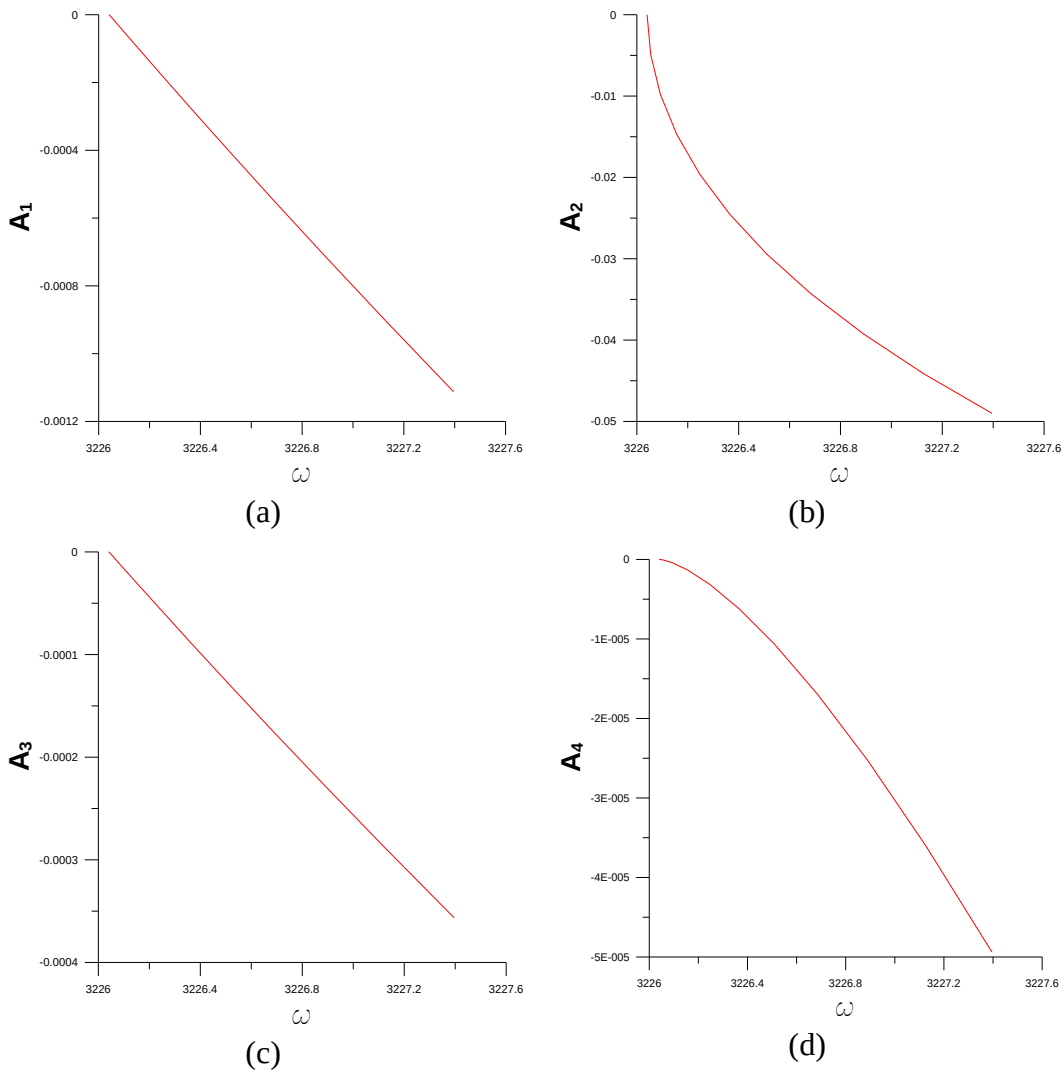
Vale lembrar que o níquel (Ni) é classificado na tabela periódica como um metal de transição, não obstante, aqui ele será denominado genericamente com um material cerâmico para distingui-lo do material aço que é uma liga metálica entre o ferro (Fe), que também é classificado como metal de transição, e o carbono (C), que é não metálico.

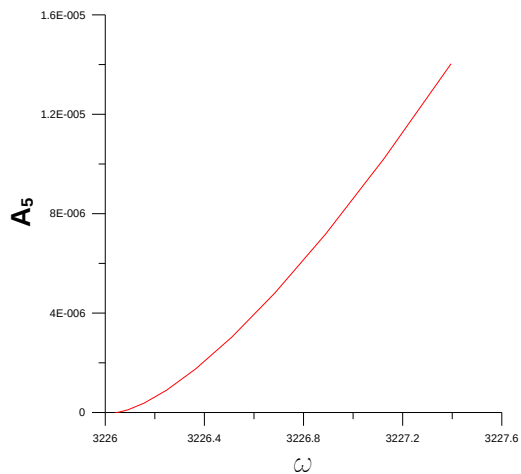
Tabela 5.1 – Propriedades dos materiais aço e níquel para uma casca com MGF.

	$E (N/mm^2)$	ν	$\rho (Ns^2/mm^4)$
Aço	$2,07788 \times 10^5$	0,317756	$8,166 \times 10^{-9}$
Níquel	$2,05098 \times 10^5$	0,31	$8,900 \times 10^{-9}$

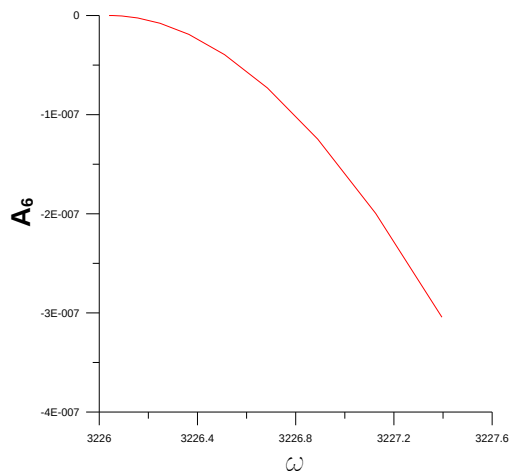
Fonte: Arshad *et al.* (2010).

Para o material com gradação funcional e $k = 0,5$ a frequência natural aumenta conforme a amplitude modal F_2 cresce (Figura 5.3), exibindo a casca neste caso um ganho de rigidez, ao contrário da casca isotrópica cujos resultados foram mostrados na Figura 5.2. Para este valor de k o número de ondas associado à frequência mínima não muda, ou seja, o número de ondas circunferenciais permanesse o mesmo nesta estrutura independente do material ($m = 1$ e $n = 5$).

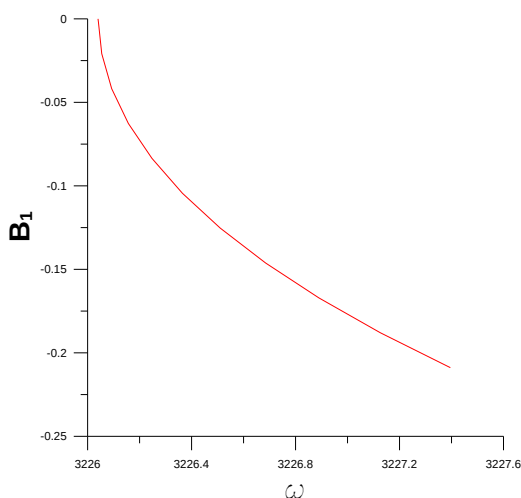




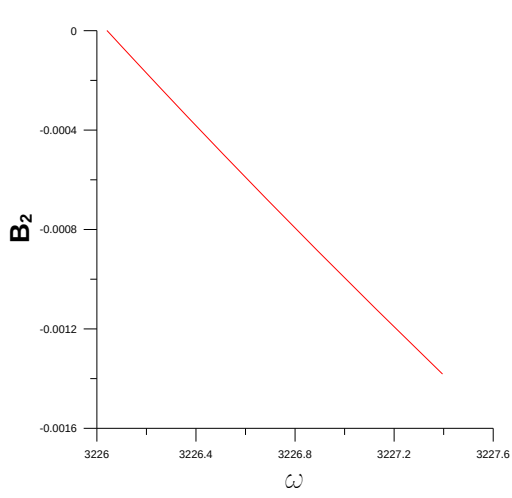
(e)



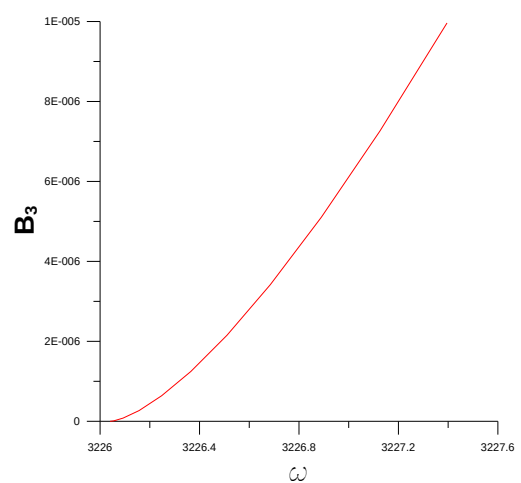
(f)



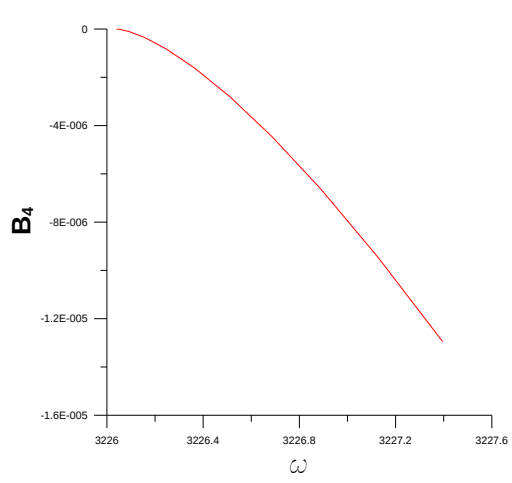
(g)



(h)



(i)



(j)

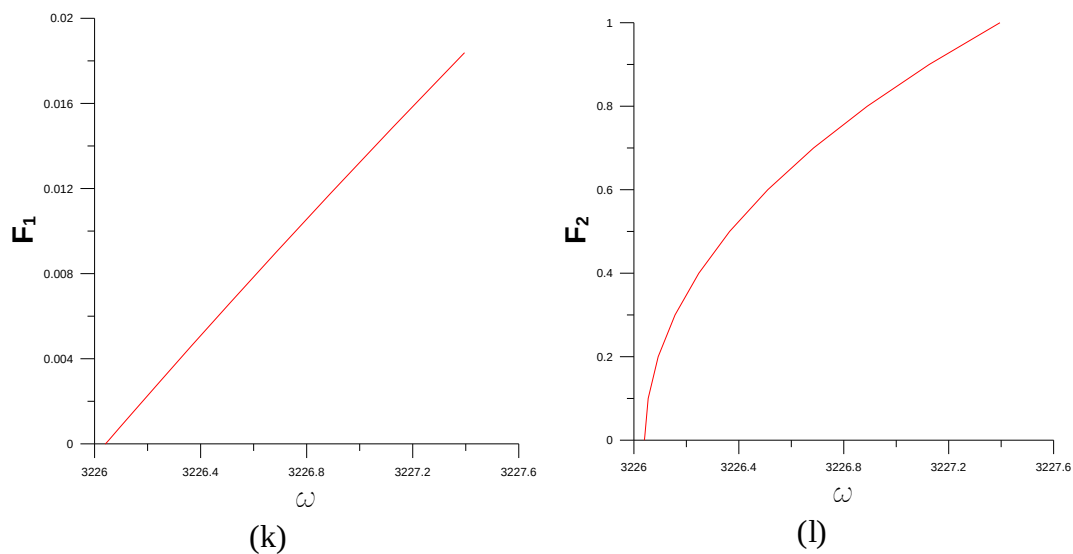
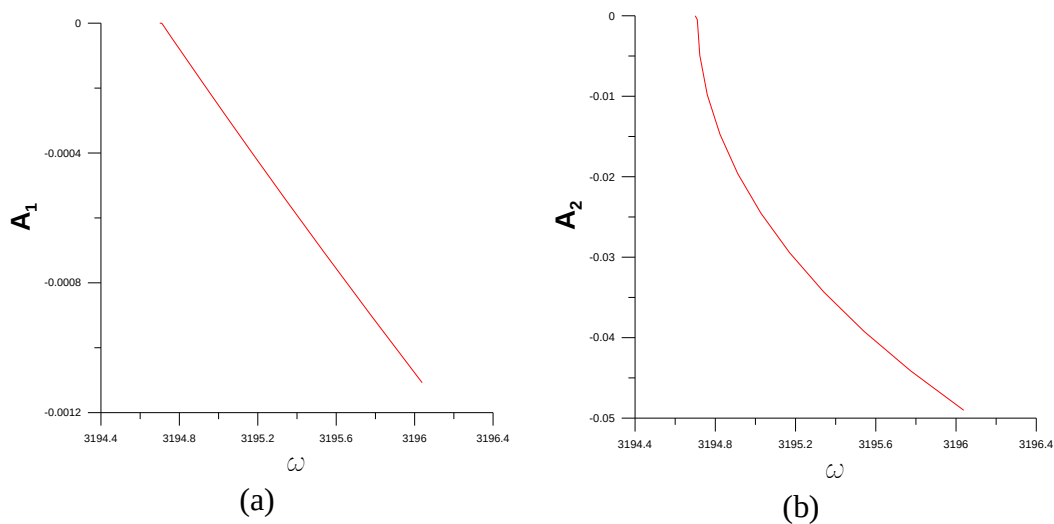
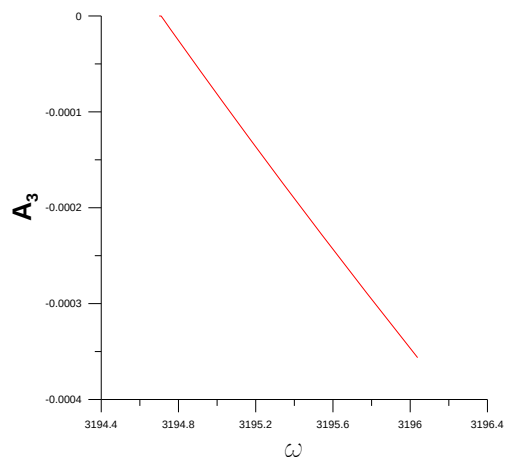


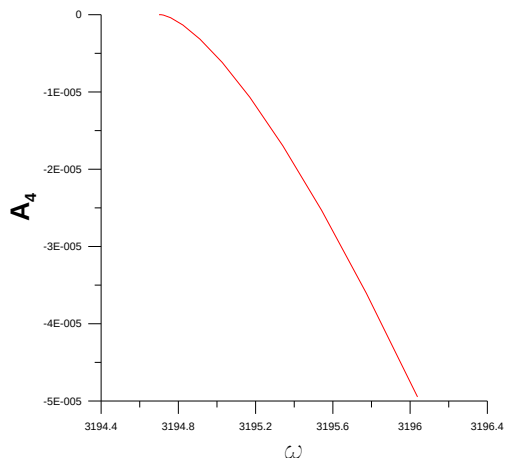
Figura 5.3 – Frequencia natural em função das amplitudes modais para $k = 0,5$.
Gometria: $R = 0,2m$, $L = 0,4m$ e $h = 0,002m$. $m = 1$ e $n = 5$.

A Figura 5.4 mostra os resultados para $k = 1$, onde observa-se um comportamento não linear semelhante ao da Figura 5.3, onde também se tem um aumento da frequência natural. Todavia, as frequências naturias são menores em termos absolutos.

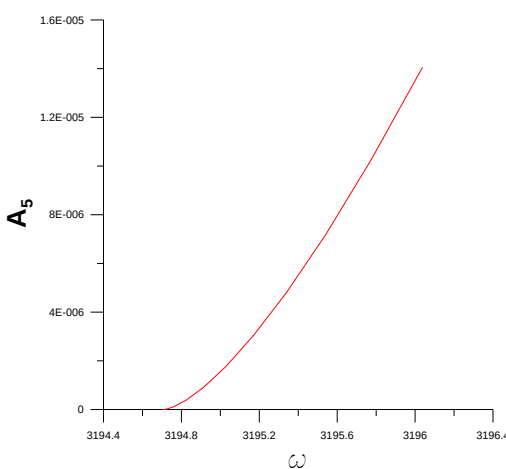




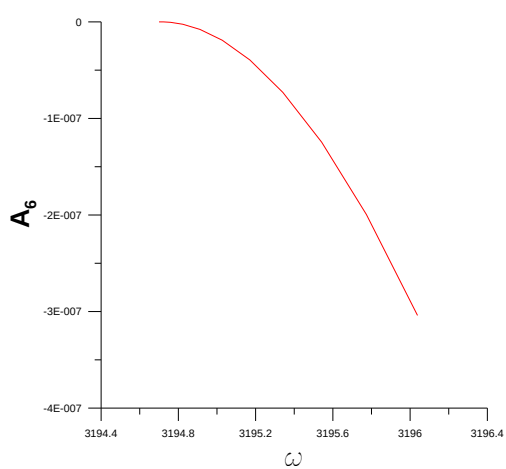
(c)



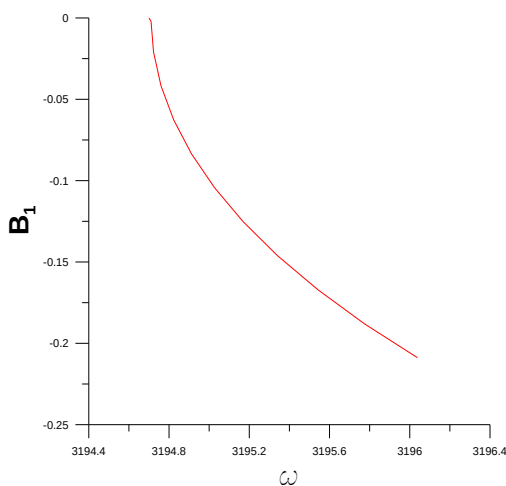
(d)



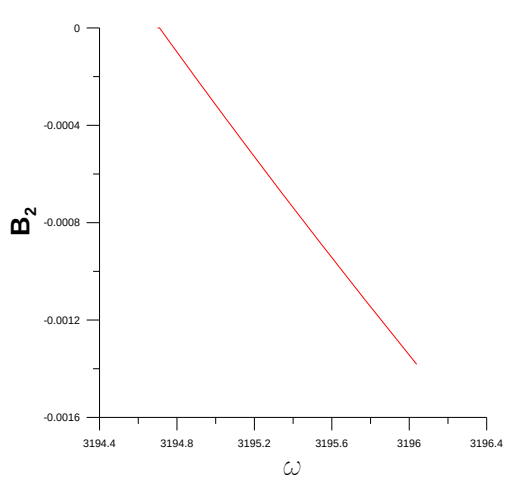
(e)



(f)



(g)



(h)

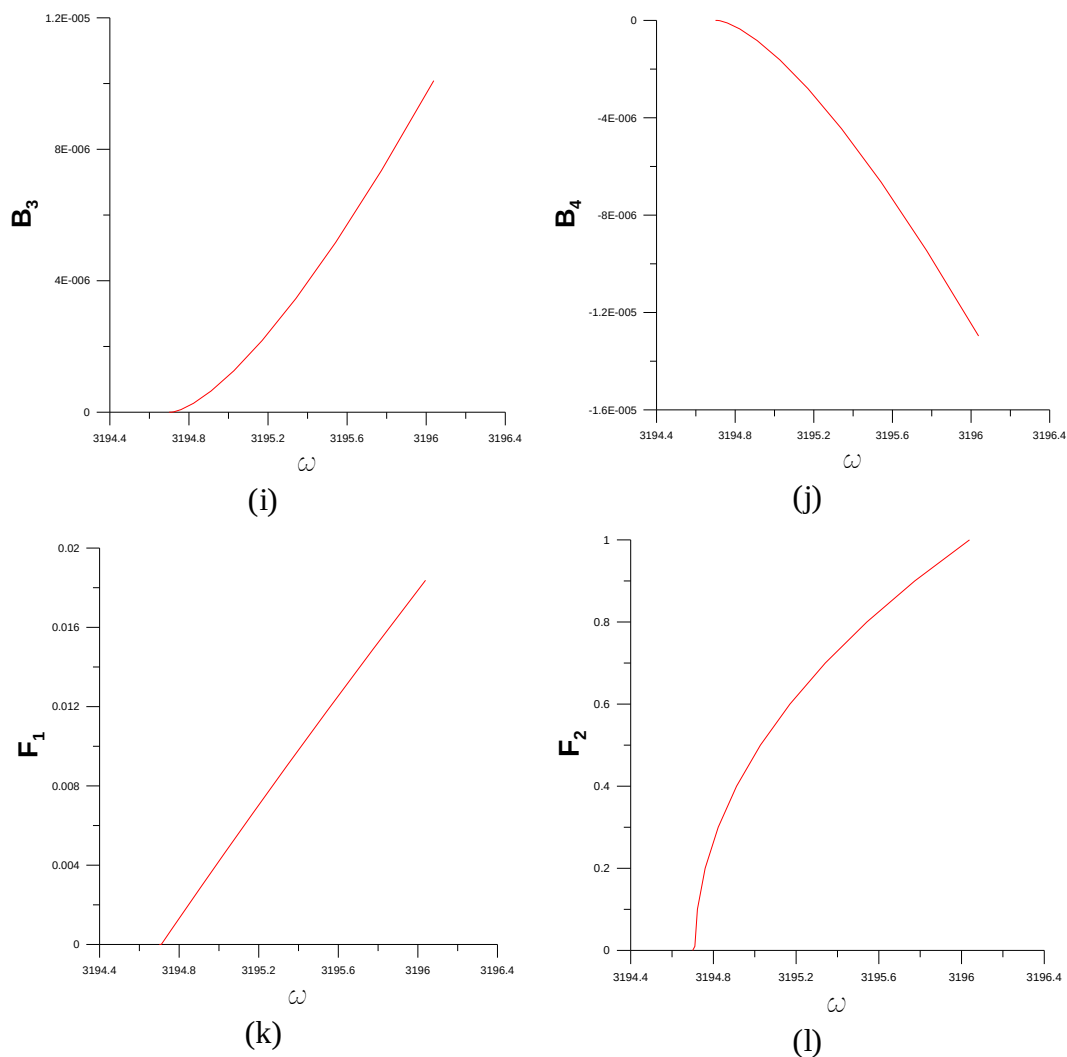
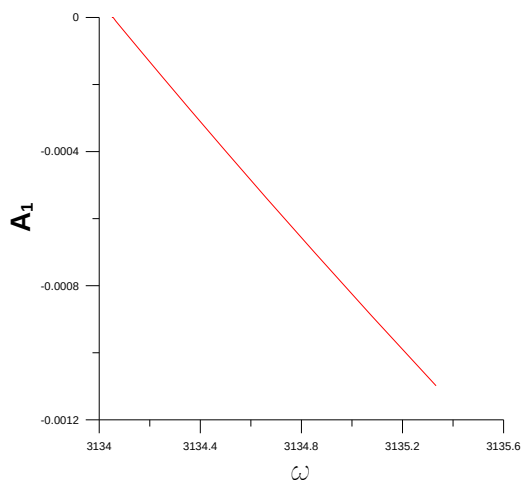
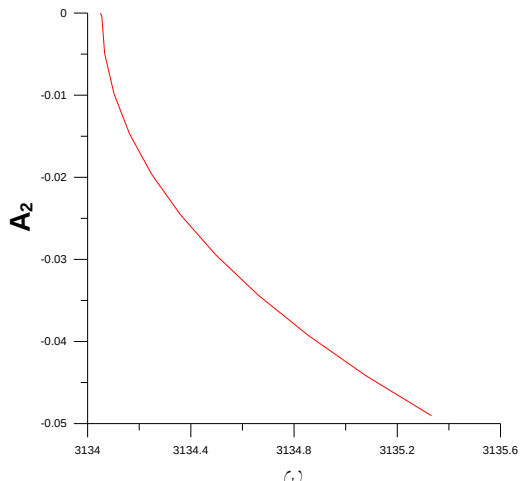


Figura 5.4 – Frequência natural em função das amplitudes modais para $k = 1$.
 Geometria: $R = 0,2m$, $L = 0,4m$ e $h = 0,002m$. $m = 1$ e $n = 5$.

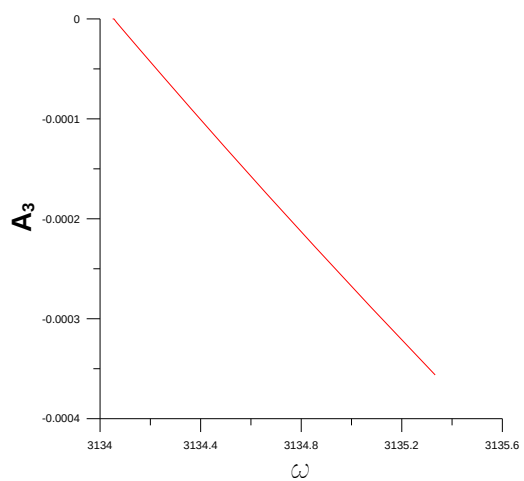
Assim como as figuras anteriores 5.3 e 5.4, a Figura 5.5 apresenta um aumento na não linearidade conforme se eleva o valor da constante F_2 para $k = 5$. Contudo, os valores absolutos da frequência natural são menores em comparação com os das variações para $k = 0,5$ e $k = 1$.



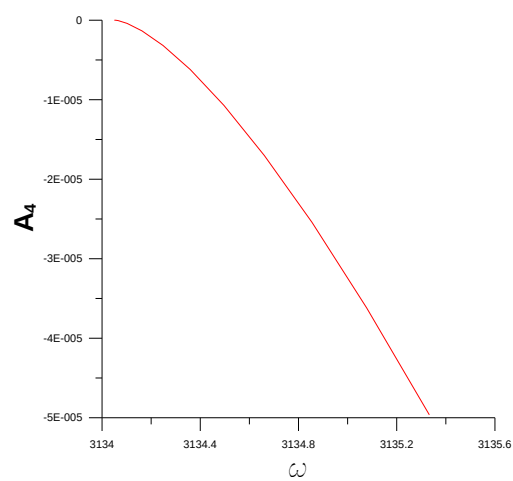
(a)



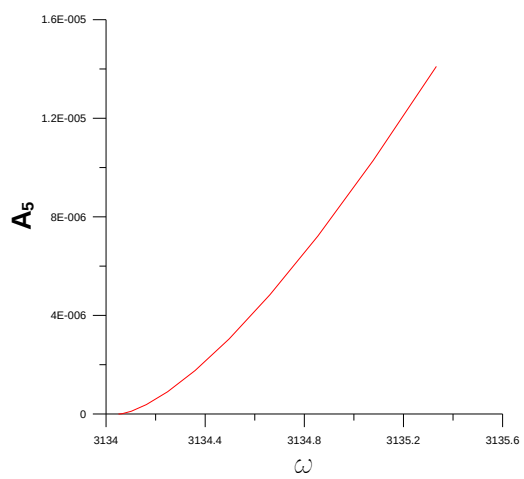
(b)



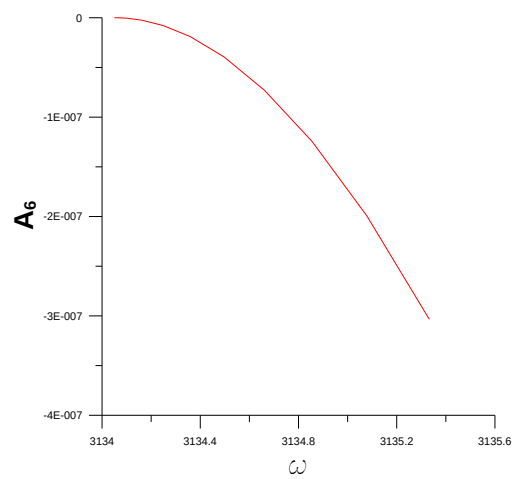
(c)



(d)



(e)



(f)

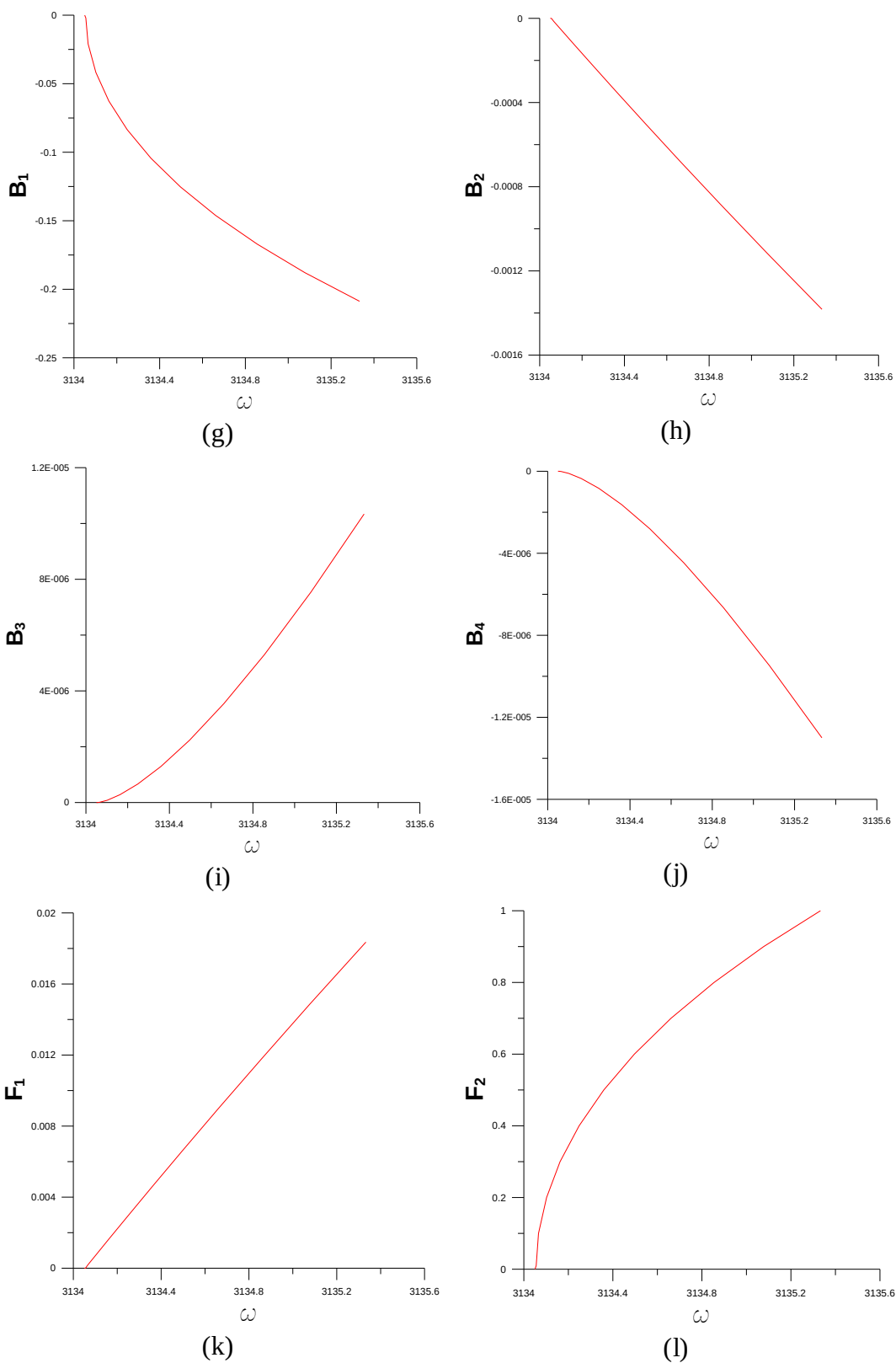


Figura 5.5 – Frequência natural em função das amplitudes modais para $k = 5$.
 Geometria: $R = 0,2m$, $L = 0,4m$ e $h = 0,002m$.

Para melhor entedimento dos resultados, a Figura 5.6a mostra a variação dos dois materiais componentes ao longo da espessura e a Figura 5.6b mostra a relação frequência-amplitude para os três valores de k usados nos exemplos anteriores. Observa-se que, embora o valor de k tenha influência na frequência natural, sua influência no grau e tipo de não linearidade da casca é muito pequena.

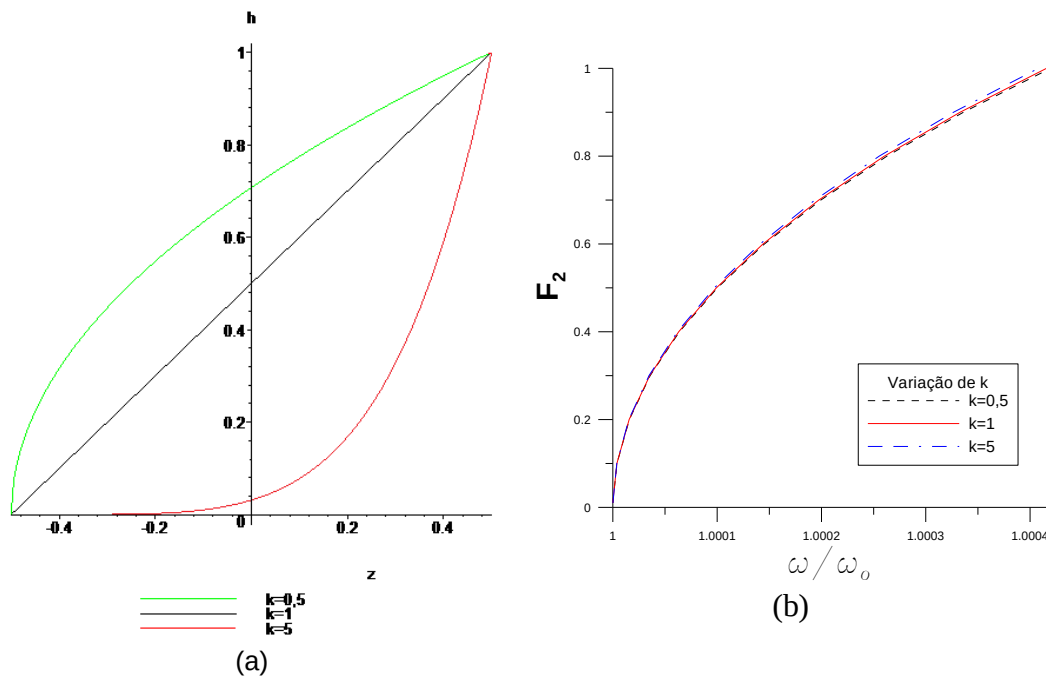


Figura 5.6 – (a)Variação do volume dos materiais aço e níquel ao longo da espessura da casca cilíndrica com MFG. (b) Variação da frequência natural para os valores de k considerados nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5.

5.5

Análise paramétrica

Prosseguindo-se com o mesmo material adotado no item anterior (MGF aço e níquel), faz-se agora uma variação da geometria da casca cilíndrica. As geometrias a serem analisadas são apresentadas na Tabela 5.2. Conserva-se o valor da espessura (h) da casca constante, variando-se os valores de L e R . Desta forma, analisa-se um amplo espectro de relações geométricas L/R e R/h .

Tabela 5.2 – Dimensões de cascas cilíndricas variando os valores L e o R , e $h = 1$.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
$L(\text{mm})$	410	820	410	205	410	410	300
$R(\text{mm})$	300	300	600	300	150	410	300
$h(\text{mm})$	1	1	1	1	1	1	1

Para melhor entender a casca cilíndrica e seu material, apresenta-se a Figura 5.7, onde se mostra por meio das cores verde (■) para o aço e vermelho (■) para o níquel a variação dos materiais ao longo da espessura de um elemento de casca cilíndrica.

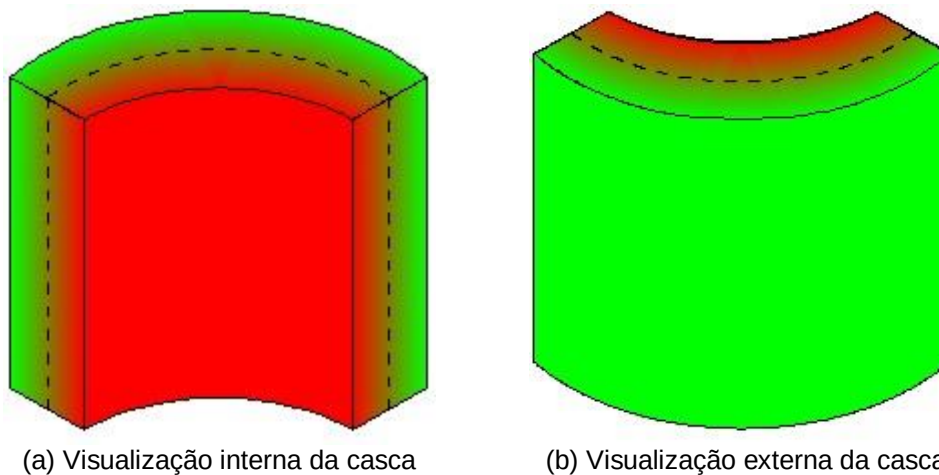


Figura 5.7 – Amostra genérica de um pedaço de casca cilíndrica com MGF. O vermelho (■) representa o níquel e o verde (■) representa o aço.

Antes de se efetuar a análise não linear para os exemplos de casca da Tabela 5.2, faz-se uma análise linear para se obter os valores das frequências naturais para essas geometrias. Apresenta-se na Tabela 5.3 o valor da frequência mínima para cada geometria e os três valores de k aqui considerados bem como o número de ondas circunferenciais do modo de vibração associado à frequência mínima. Em todos os casos as menores frequências ocorrem para $m = 1$.

Tabela 5.3 – Frequências naturais mínimas para os modelos de I a VII, com seus respectivos valores de n .

	I	II	III	IV	V	VI	VII
$k = 0,5$	$n = 8$ 1687,89	$n = 6$ 832,02	$n = 14$ 1207,90	$n = 11$ 3395,03	$n = 5$ 2322,88	$n = 10$ 1452,92	$n = 9$ 2327,05
$k = 1$	$n = 8$ 1673,58	$n = 6$ 824,95	$n = 14$ 1197,61	$n = 11$ 3366,23	$n = 5$ 2303,15	$n = 10$ 1440,61	$n = 9$ 2307,38
$k = 5$	$n = 8$ 1645,85	$n = 6$ 811,22	$n = 14$ 1177,65	$n = 11$ 3310,35	$n = 5$ 2264,86	$n = 10$ 1416,74	$n = 9$ 2269,22

De imediato, observa-se na Tabela 5.3, que há um decréscimo no valor das frequências naturais à medida que se aumenta o k , em outras palavras, significa dizer que, conforme se eleva o teor de níquel, a frequência natural diminui. O aço tem maior módulo de elasticidade (E) que o níquel, logo, quanto maior é o módulo de elasticidade maior será a rigidez do sistema, e consequentemente maior será a frequência natural, pois a frequência natural é diretamente proporcional à rigidez da estrutura.

Ao defrontar as Tabela 5.2 e 5.3, percebe-se que, quando se aumenta o valor de L , o valor da frequência natural (ω) diminui assim como o valor do número de ondas circunferenciais (n). Já quando se aumenta o valor do R , o valor de n aumenta, mas o valor da frequência natural diminui.

Para melhor elucidar o parágrafo precedente, apresenta-se na Figura 5.8 uma visão comparativa das diversas geometrias analisadas bem como as conclusões quanto aos valores de ω e n (cresce ($\uparrow$) ou decresce ($\downarrow$)), tomando como referência o modelo I. Esta variação é similar para todos os k .

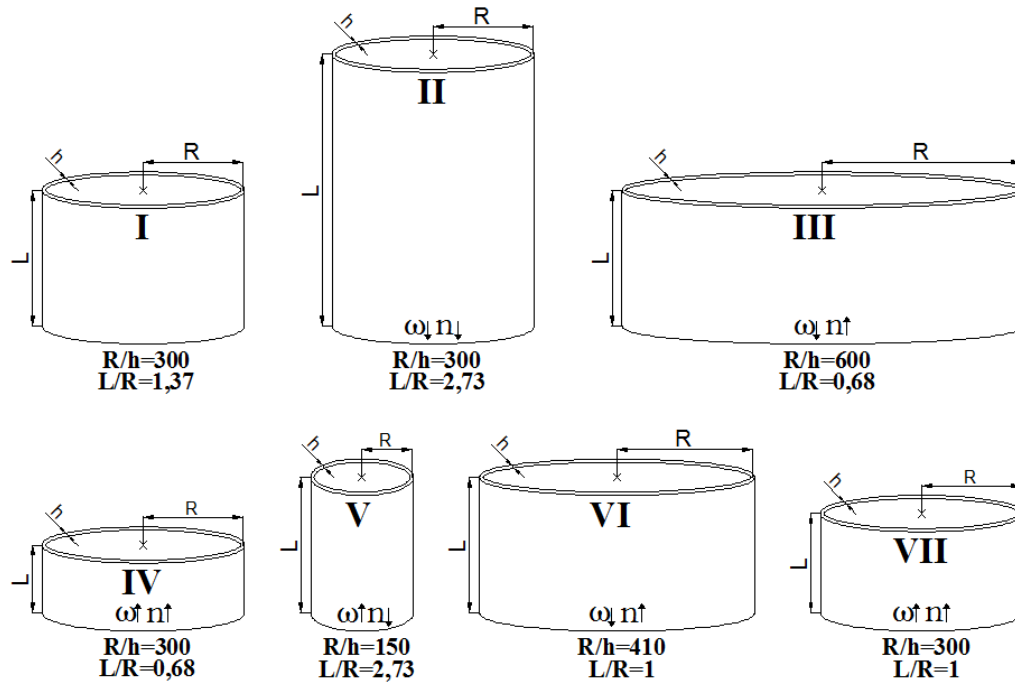


Figura 5.8 – Cilindros estudados com suas respectivas variações de ω e n

A seguir, efetua-se a análise não linear, tendo como valores iniciais das frequências naturais no método de *Newton-Raphson* os valores presentes na Tabela 5.3.

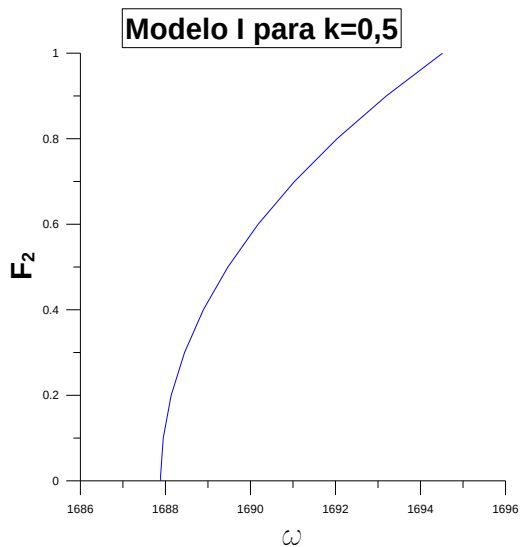
A Figura 5.9 exhibe a relação entre a frequência e a maior e mais significativa amplitude modal F_2 para cada modelo da Tabela 5.2 e para $k = 0,5$. Para observar melhor a influência da geometria no grau de não linearidade, apresenta-se na Figura 5.10 a variação da amplitude modal F_2 em função da frequência adimensional ω/ω_0 . Para melhor entender a Figura 5.10 e as posteriores, Figuras 5.12 e 5.14, deve-se ter em conta que para estes gráficos o ω é a frequência não linear e o ω_0 é a frequência linear.

Nos modelos III, IV e VII as frequências diminuem conforme a amplitude modal F_2 aumenta, já os modelos I, II e III apresentam um comportamento não linear com ganho de rigidez. O modelo VI apresenta um comportamento quase linear. Enquanto o modelo II apresenta o maior ganho de rigidez, o modelo IV apresenta a maior perda de rigidez. Estes resultados mostram a grande influência da geometria na relação frequência-amplitude associada à frequência mínima. Cabe lembrar que o número de ondas circunferenciais é diferente em cada caso.

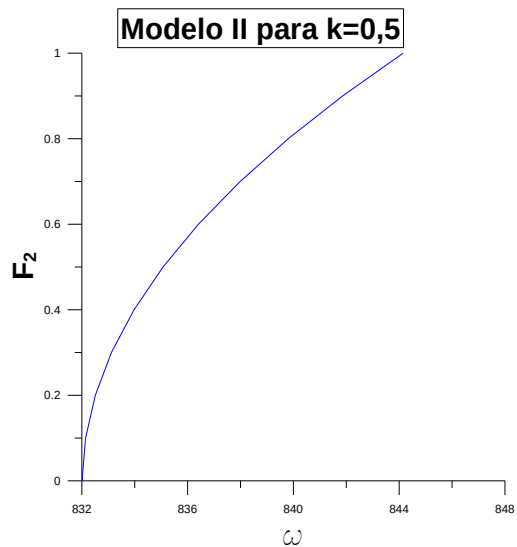
Na verdade, o modelo VI, de certa forma, mescla as características dos outros modelos, porque se inicia com a diminuição da frequência natural

conforme a amplitude F_2 cresce e, em um determinado momento, a frequência deixa de diminuir e começa a crescer conforme F_2 mantém seu crescimento, como mostra a Figura 5.9. Observa-se no modelo VI que para uma mesma frequência natural pode haver duas amplitudes modais.

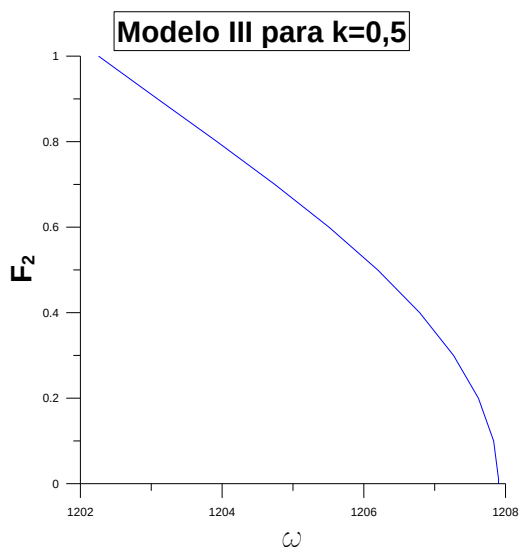
As relações geométricas escolhidas permitem algumas conclusões sobre a influência da geometria sobre o grau e tipo de não linearidade da casca. Os modelos I, II, IV e VII têm a mesma relação R/h ($R/h = 300$) e diferentes valores de L/R (veja Fig. 5.8). Observa-se que a casca mais curta ($L/R = 0,68$, modelo IV) apresenta a maior perda de rigidez. À medida que L/R cresce, ou seja, a casca se torna mais longa, a não linearidade decresce e, a partir de certo valor, passa a apresentar ganho de rigidez, sendo o modelo II ($L/R = 2,73$, casca longa) aquele que apresenta maior ganho de rigidez. Ao se comparar as curvas para os modelos II e V que apresentam o mesmo L/R ($L/R = 2,73$), observa-se que ambos os modelos apresentam ganho de rigidez sendo que a maior não linearidade ocorre para o modelo com maior relação R/h . Comparando agora os modelos III e IV que apresentam $L/R = 0,68$, observa-se que ambos apresentam perda de rigidez, sendo que o modelo com maior perda de rigidez é aquele com a menor relação R/h . Conclui-se, pois, que para o mesmo L/R a curva tende para a direita à medida que a relação R/h aumenta (a casca se torna mais fina, tendendo para uma membrana). Cabe lembrar que a relação entre rigidez de membrana e flexão (C/D) é nas equações adimensionais proporcional a $(R/h)^2$ (Gonçalves, 1987). Estas conclusões independem dos valores de k utilizados neste estudo paramétrico (0,5, 1 e 5), ou seja, da gradação dos dois materiais ao longo da espessura, como mostram os resultados das Figuras 5.11 a 5.14.



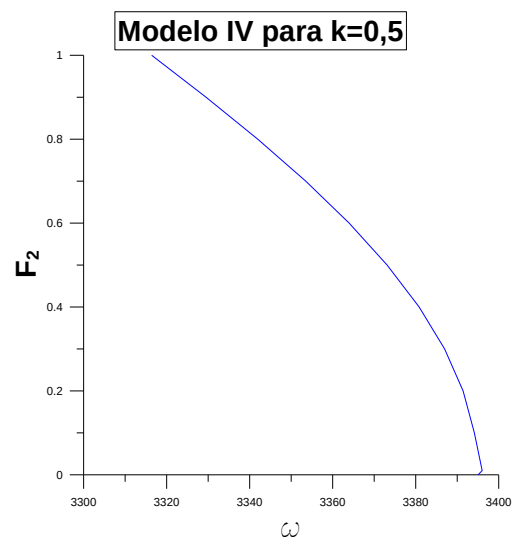
(a)



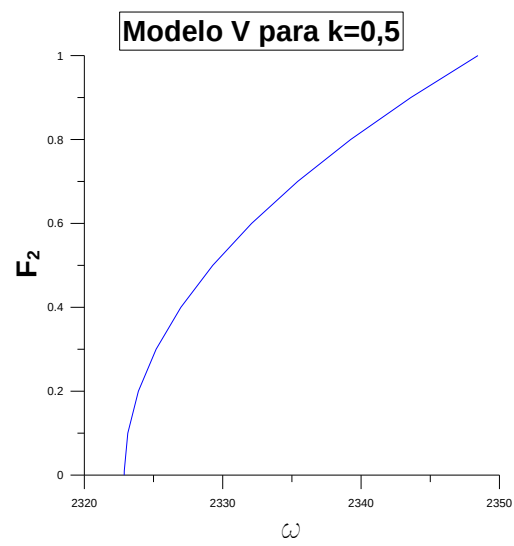
(b)



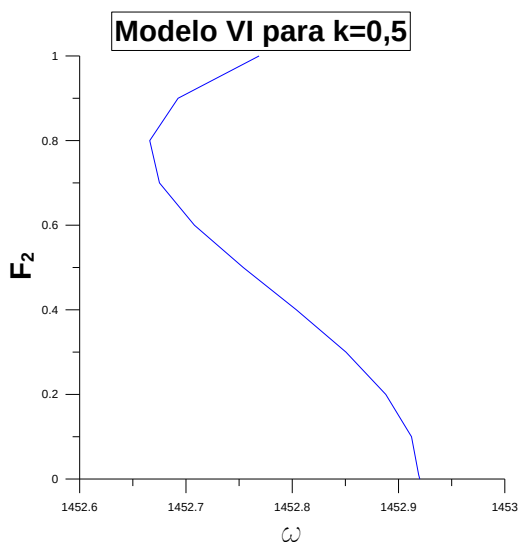
(c)



(d)



(e)



(f)

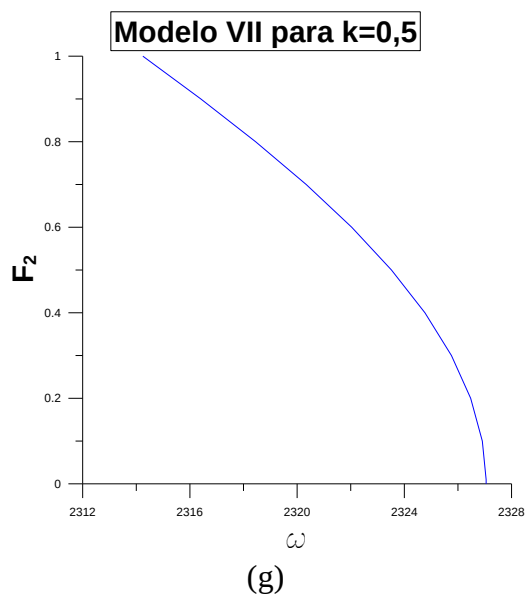


Figura 5.9 – Relação não linear frequência-amplitude para o $k = 0,5$

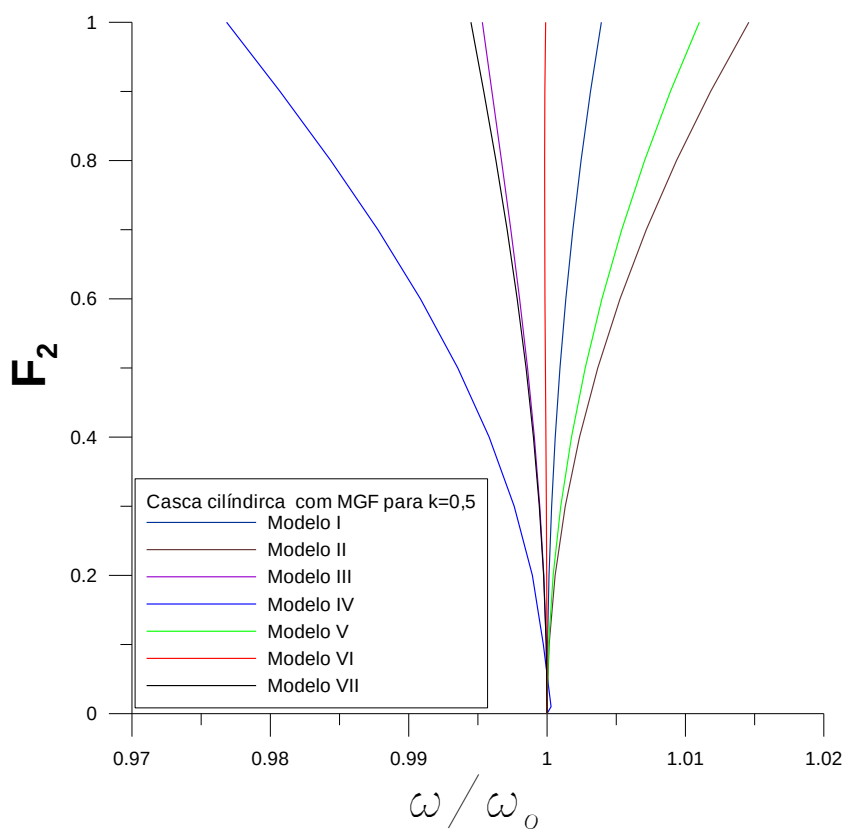
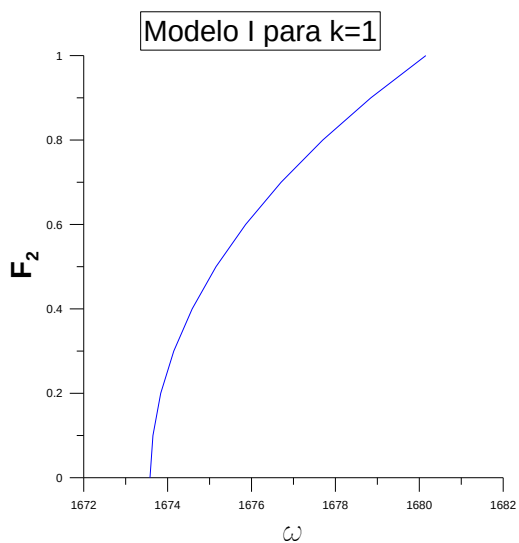
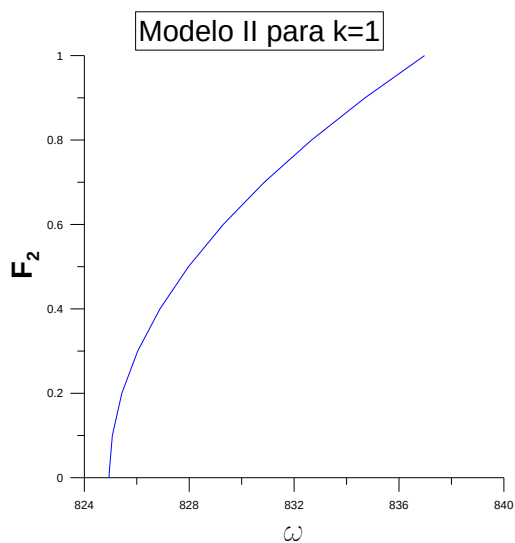


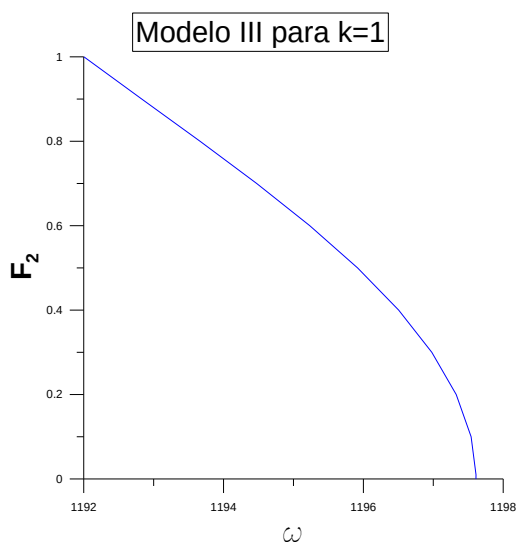
Figura 5.10 – Relação não linear frequência-amplitude em função de ω/ω_0 para $k = 0,5$



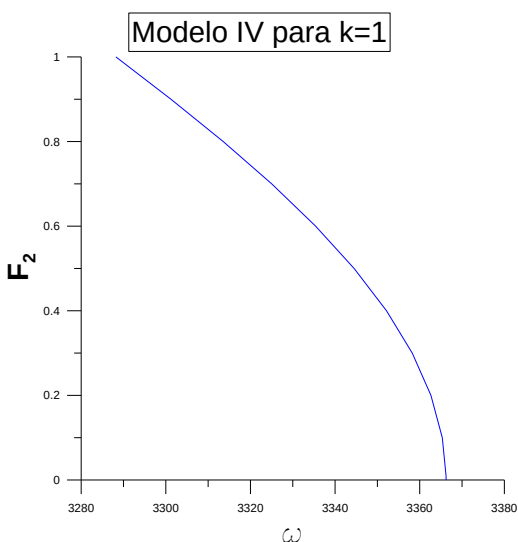
(a)



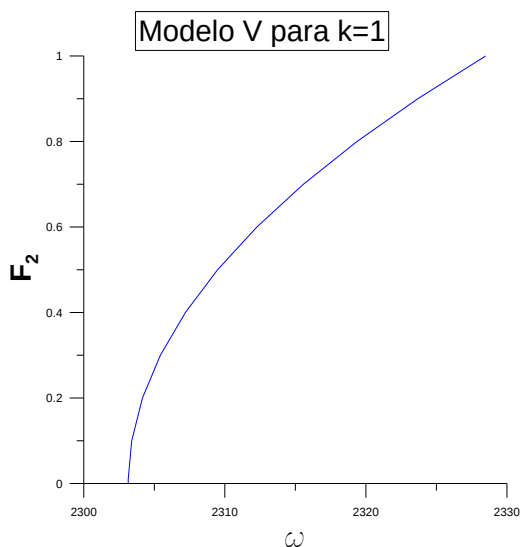
(b)



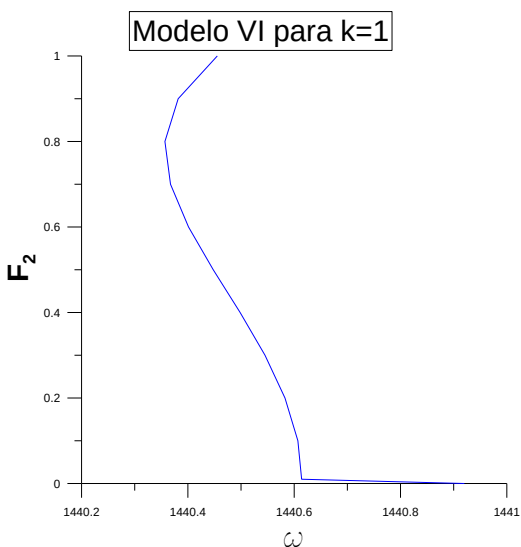
(c)



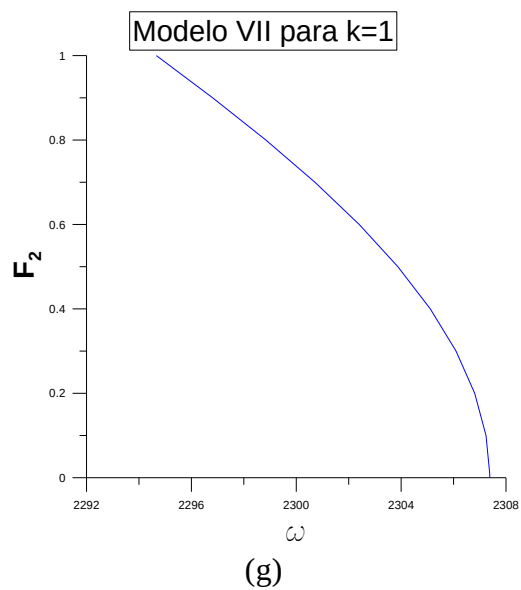
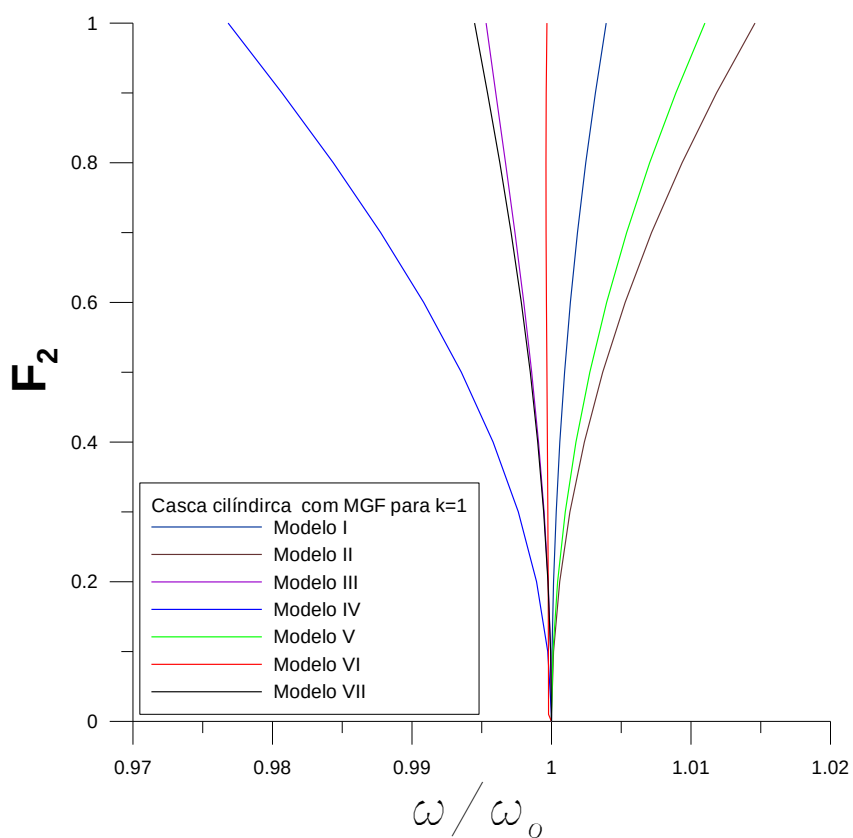
(d)

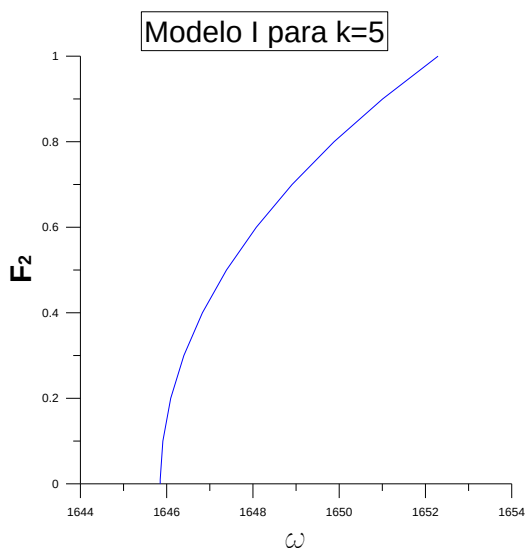


(e)

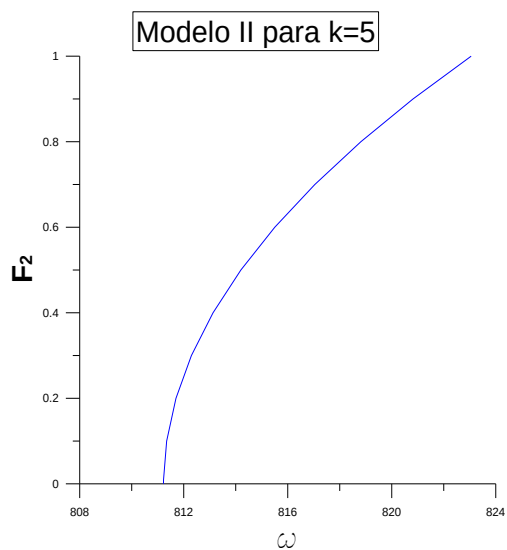


(f)

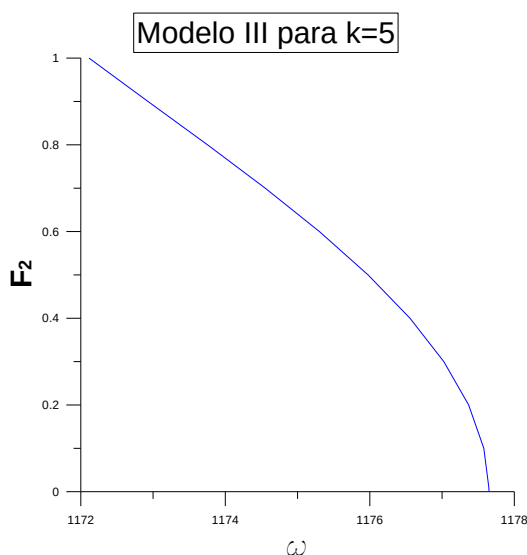
Figura 5.11 – Relação não linear frequência-amplitude para $k = 1$ Figura 5.12 – Relação não linear frequência-amplitude para $k = 1$



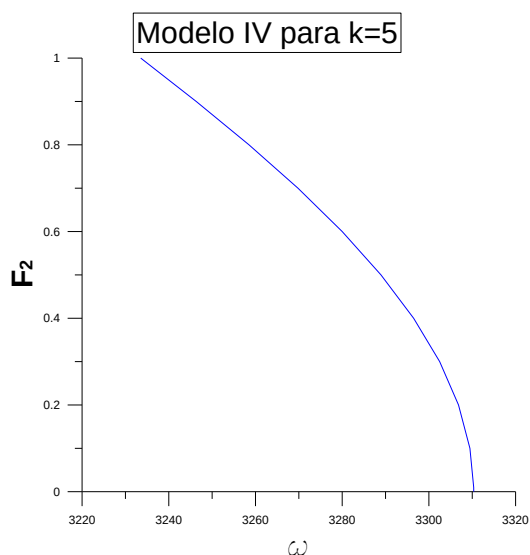
(a)



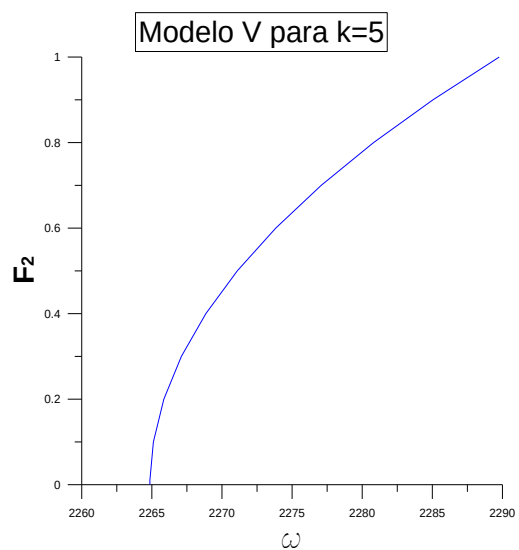
(b)



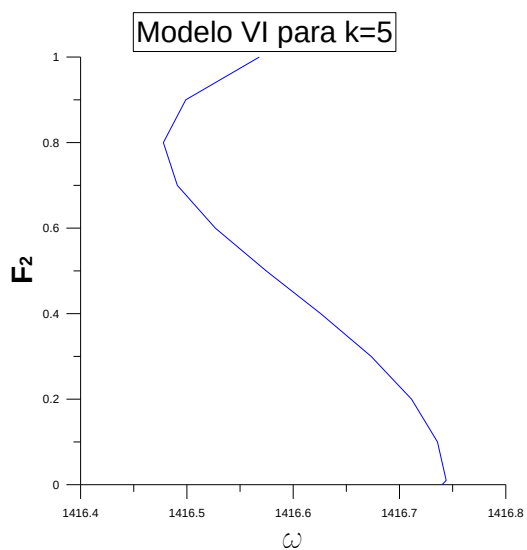
(c)



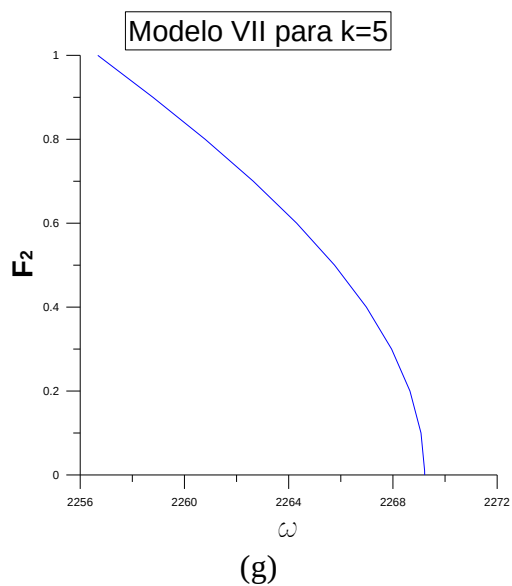
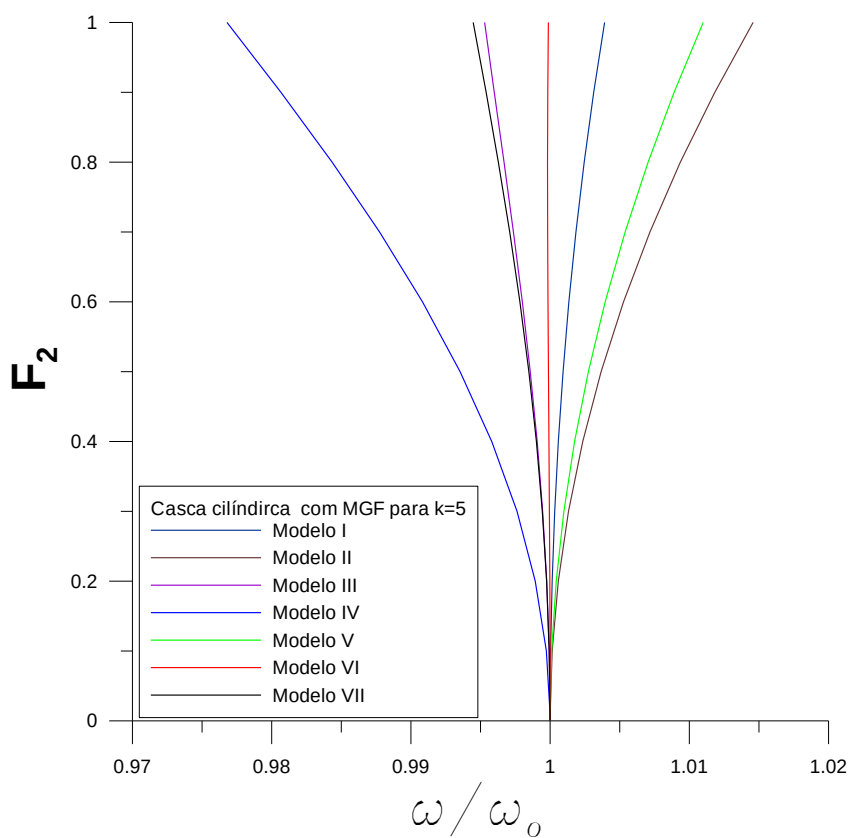
(d)



(e)



(f)

Figura 5.13 – Relação não linear frequência-amplitude para $k = 5$ Figura 5.14 – Relação não linear frequência-amplitude para o $k = 5$

Deve-se ter em mente que, para uma dada geometria, a não linearidade depende do modo de vibração. As Figuras 5.16 a 5.18 mostram, respectivamente,

para os modelos III e VI a influência do número de ondas circunferenciais na relação frequência-amplitude.

Considerando o modelo III, a Figura 5.15 mostra como varia a frequência natural linear com número de ondas circunferenciais n para diversos valores de k . Observa-se nas Figuras 5.16 a 5.18 que à medida que n diminui a perda de rigidez e consequentemente o grau de não linearidade da resposta aumenta. Assim, a não linearidade da estrutura sob vibração forçada depende da frequência da excitação.

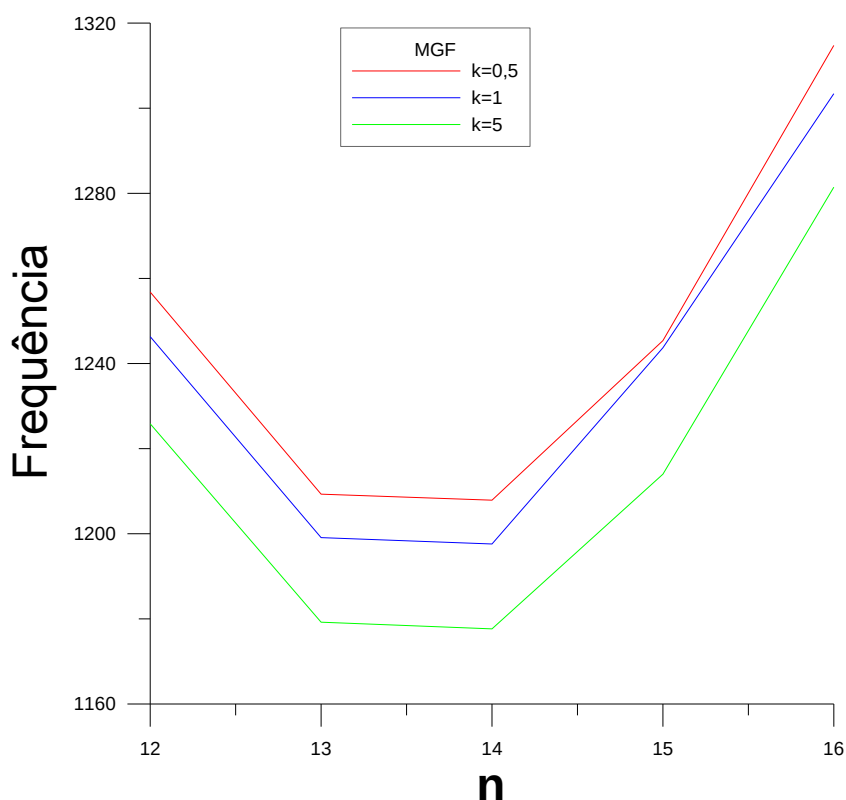


Figura 5.15 – Variação das frequência natural linear em função de n para com diferentes tipos de k (modelo III).

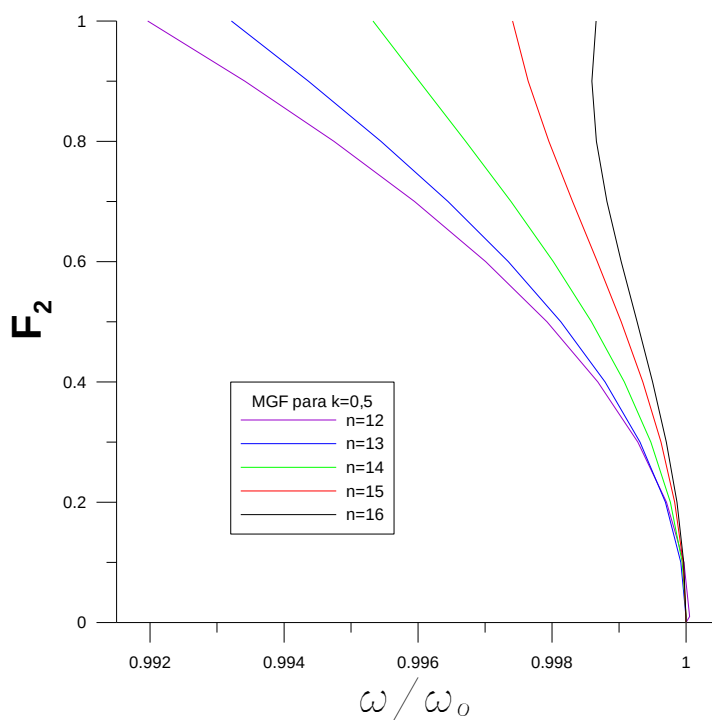


Figura 5.16 – Influência do número de ondas circunferenciais n na relação não linear frequência-amplitude para o Modelo III e $k = 0,5$

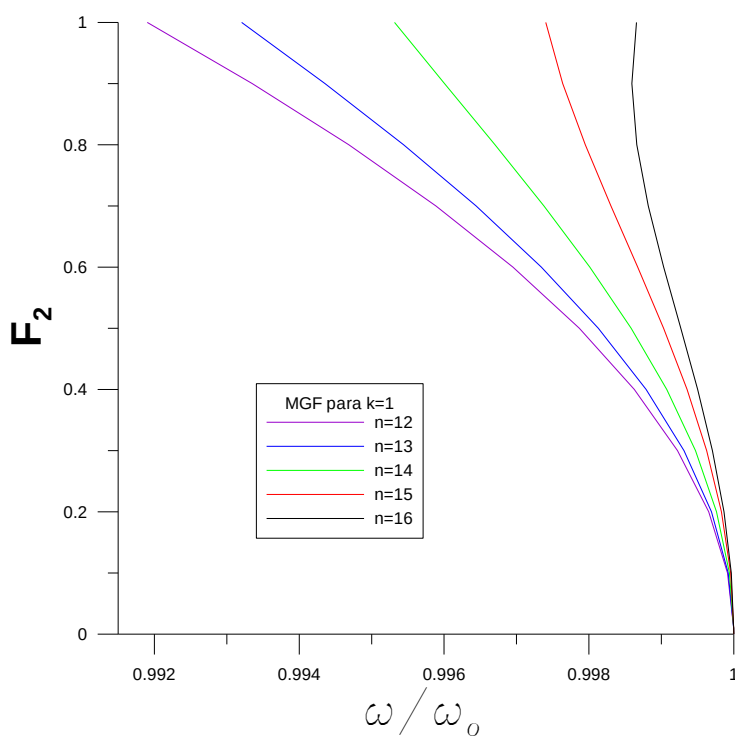


Figura 5.17 – Influência do número de ondas circunferenciais n na relação não linear frequência-amplitude para o Modelo III e $k = 1$

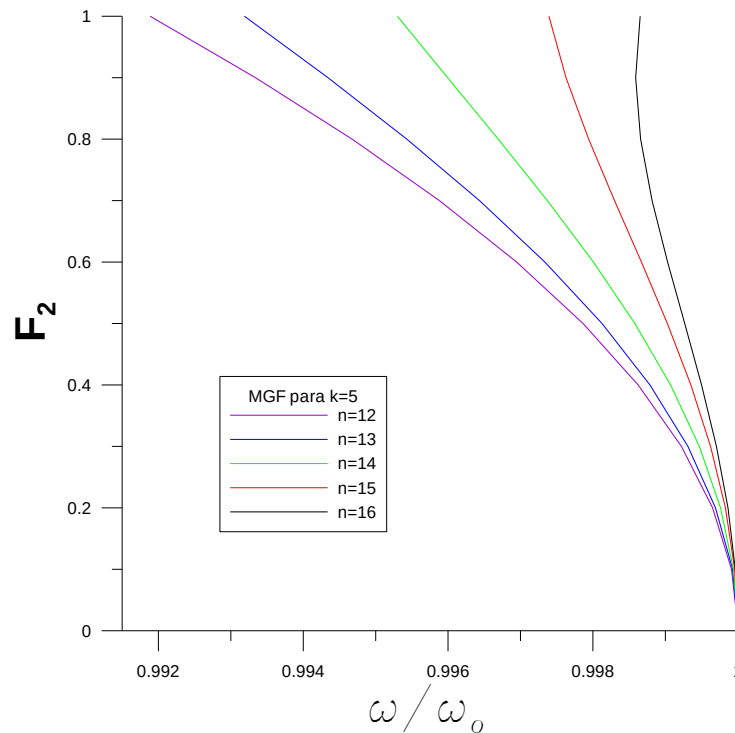


Figura 5.18 – Influência do número de ondas circunferenciais n na relação não linear frequência-amplitude para o Modelo III e $k = 5$

Verifica-se nas Figuras 5.16 a 5.18 que, conforme se aumenta o n o grau de não linearidade diminui, independente do valor de k .

A seguir estuda-se a influência de um carregamento estático inicial nas frequências naturais e na relação frequência-amplitude. Considera-se ou uma carga crítica axial ou uma pressão lateral, carregamentos mais usuais em cascas cilíndricas. O procedimento de cálculo é semelhante ao caso anterior. As cargas críticas e frequências naturais são obtidas para três valores de parâmetros k (0,5, 1 e 5). Empregando-se agora as Equações (2.32) no mesmo processo descrito ao decorrer deste capítulo, calculam-se as frequências naturais para carregamentos de 0%, 20%, 40%, 60%, 80% e 100% das cargas crítica axial e lateral.

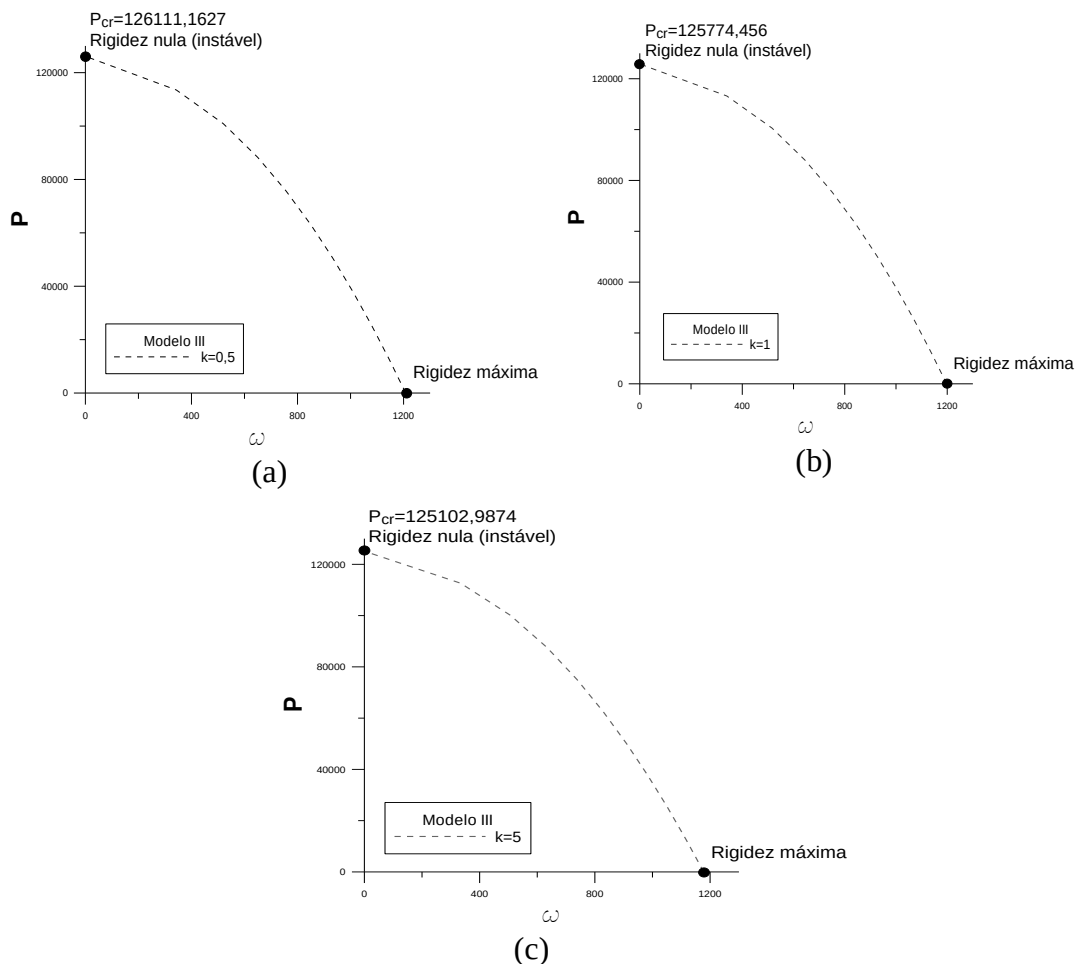


Figura 5.19 – Variação da frequência natural mínima em função da carga axial para o Modelo III e três valores de k (0,5, 1 e 5) (carga em Newton – N).

A Figura 5.19 mostra a variação da frequência natural mínima em função de uma carga axial compressiva para o Modelo III e três valores de k (0,5, 1 e 5). Observa-se que, para cada k , a frequência natural decresce à medida que a carga axial compressiva cresce e torna-se zero quando se atinge a carga crítica e ocorre a perda de estabilidade da estrutura. Este decréscimo deve-se à diminuição da rigidez efetiva da casca (rigidez-rigidez geométrica) que diminui com a carga e se torna nula quando a carga atinge o valor crítico.

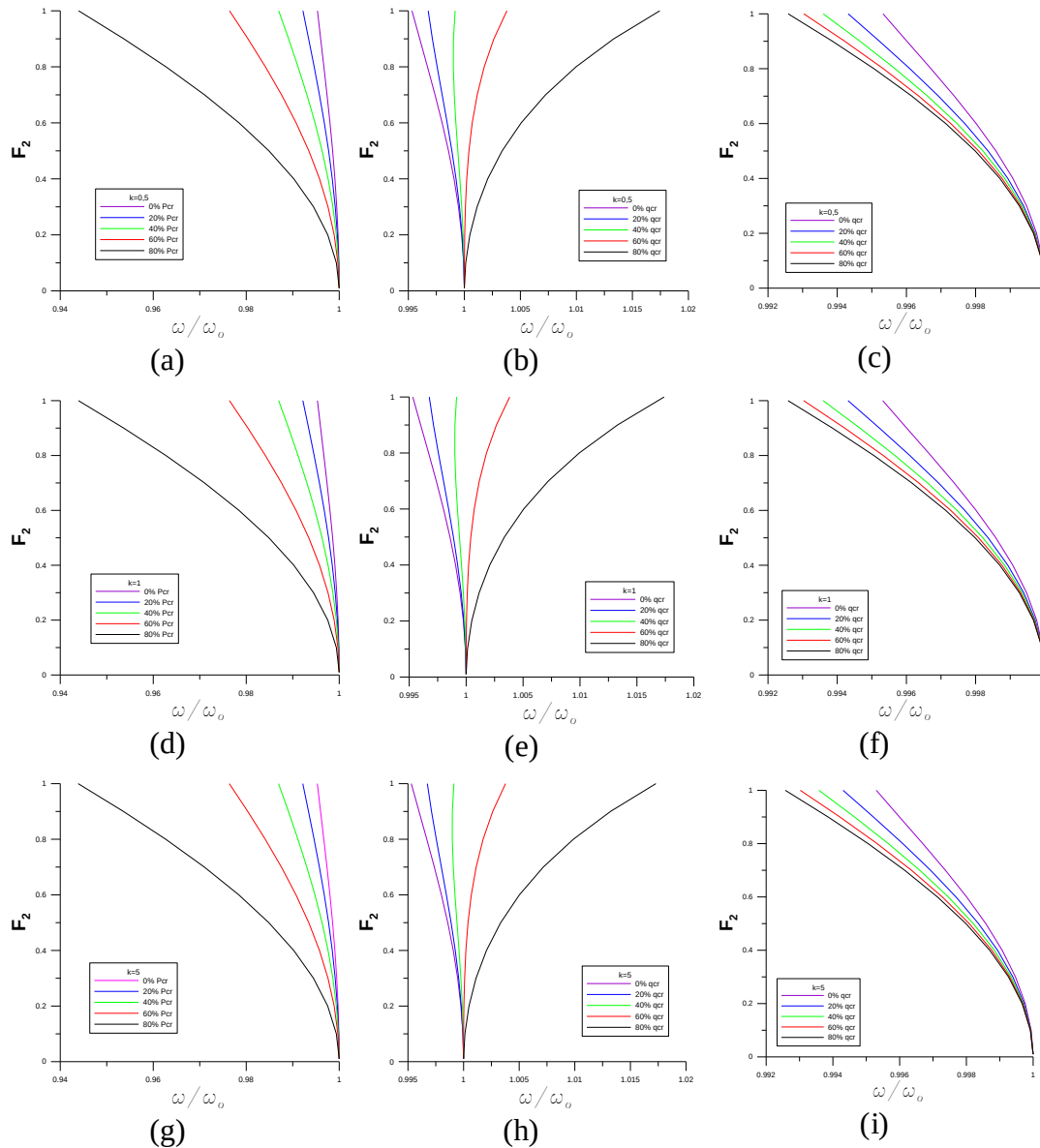


Figura 5.20 – Influência do carregamento na relação não linear frequência-amplitude. (a, d, g) Carregamento axial compressivo. (b, e, h) pressão lateral interna (tração). (c, f, i) pressão lateral externa (compressão).

Na análise da Figura 5.20 o cilindro está submetido a um carregamento estático de compressão axial (Figuras a, d e g), pressão lateral interna (Figuras b, e e h) e pressão lateral externa (Figuras c, f e i). Observa-se que um carregamento que gere um estado de tensões de compressão, à medida que o carregamento se aproxima do valor crítico, a não linearidade se torna mais acentuada. Já a pressão lateral interna que gera um estado de tensões de tração tende inicialmente a diminuir a não linearidade da resposta e, a partir de uma certa carga de tração, a frequência passa a aumentar à medida que a amplitude modal aumenta. Verifica-

se que a inclusão do efeito de um pré-carregamento estático é essencial para avaliar corretamente o comportamento não linear de cascas esbeltas.