

2

Casca cilíndrica delgada

Inicia-se este capítulo com uma pequena introdução sobre cascas e, em seguida, apresenta-se a teoria de cascas cilíndricas de *Sanders*. São apresentadas as expressões para as rotações, deformações, mudanças de curvatura, esforços normais e momentos, funcionais de energia e equações de equilíbrio, juntamente com a formulação da estrutura sujeita a um estado de tensões inicial. Por fim, mostra-se as condições de contorno

2.1

Introdução

Brush & Almroth (1975) afirmam que os cilindros são uma das configurações mais comuns de cascas em aplicações estruturais. Afirmam também que o estudo de cascas cilíndricas pode servir como uma introdução às formulações para cascas com diferentes geometrias.

Cascas cilíndricas são usadas em muitas aplicações de engenharia e, devido sua forma e capacidade de transporte de carga, são ideais para a indústria aeroespacial e estruturas civis (Hrinda, 2012).

Ademais, são elementos estruturais que otimizam o material do qual são fabricadas, tornando-se assim estruturas muito leves. De acordo com Hrinda (2012), elas são projetadas para ter um peso mínimo e resistência máxima a várias condições de carga.

Apresentam-se, respectivamente, nas Figuras 2.1 e 2.2 exemplos que demonstram algumas das aplicações de cascas cilíndricas em estruturas aeroespaciais e estruturas civis.



(a) Saturno V



(b) Ariane V



(b) Saturno V – Estágio S-II

Figura 2.1 – Estruturas cilíndricas aeroespaciais.
Fonte: Hrinda (2012).



(a) Armazenamento a granel



(b) Silo de grãos



(b) Tanque de água elevado

Figura 2.2 – Exemplos de grandes estruturas cilíndricas civis.
Fonte: Hrinda (2012).

2.2

Formulação de casca

Seja uma casca cilíndrica esbelta de comprimento L , espessura constante h e raio da superfície média R . Considera-se que a casca seja delgada de forma que $h \ll R$. Em geral, considera-se que a casca é esbelta quando:

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{50}$$

Ademais, considera-se o material elástico, homogêneo e isotrópico, possuindo densidade ρ , módulo de elasticidade E e coeficiente de *Poisson* ν .

Adota-se um sistema de coordenadas cilíndrico x , θ e z (Figura 2.3), onde u , w e v denotam o campo de deslocamentos nas direções axial, radial e circunferencial, respectivamente.

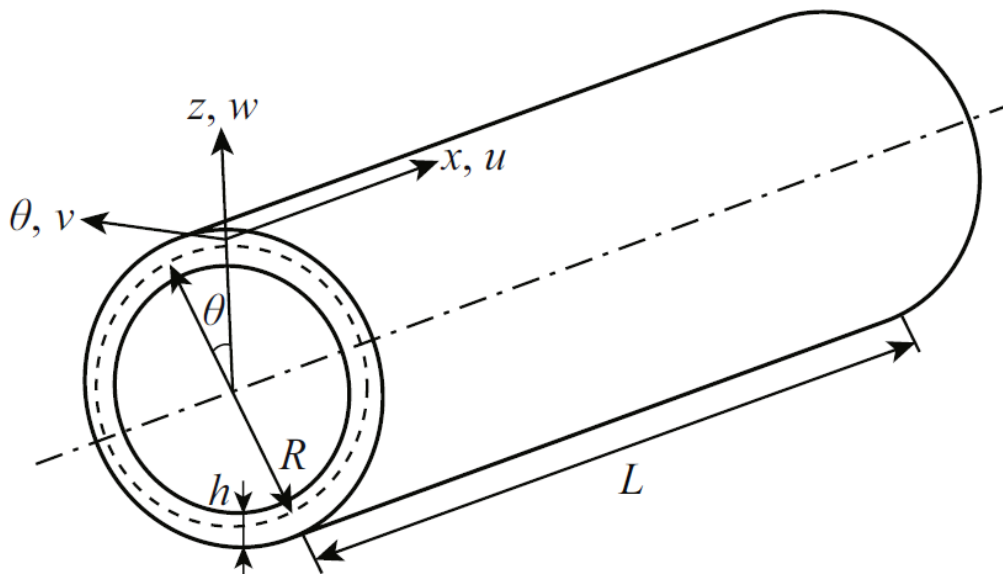


Figura 2.3 – Geometria da casca cilíndrica e seu sistema de coordenada.
Fonte: Shah, Mahmood & Naeem (2009).

Na Figura (2.4) apresenta-se um elemento de casca cilíndrica em sua configuração deformada com os esforços de membrana e de flexão. Na presente dissertação, adota-se a teoria de *Sanders*. A escolha dessa teoria se deve ao fato da mesma reter todos os termos não lineares essenciais à análise dinâmica de cascas

cilíndricas e de ser geralmente aceita como a melhor aproximação de primeira ordem (Gonçalves, 1987).

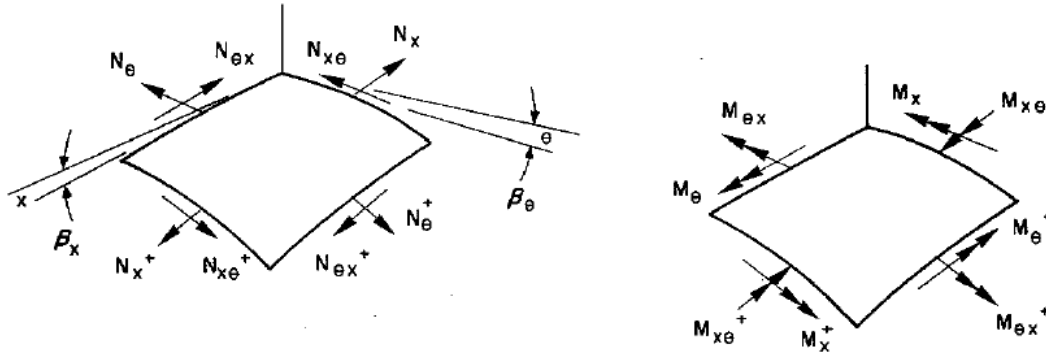


Figura 2.4 – Elemento de casca cilíndrica na configuração deformada.
Fonte: Gonçalves (1987).

Partindo da formulação geral de casca presente em Gonçalves (1987), as rotações β_j ($j = x, \theta$) são dadas por:

$$\beta_x = -w_{,x} \quad (2.1a)$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{R} (w_{,\theta} - \alpha v) \quad (2.1b)$$

De forma análoga, as deformações específicas em um ponto da superfície média da casca, segundo a teoria de Sanders, são dadas por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (2.2a)$$

$$\varepsilon_\theta = (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} (w_{,\theta} - \alpha v)^2 \quad (2.2b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \varepsilon_{x\theta} + \varepsilon_{\theta x} = v_{,x} + \frac{1}{R} (u_{,\theta} + w_{,x} w_{,\theta} - \alpha v w_{,x}) \quad (2.2c)$$

Adicionalmente, as mudanças de curvatura são:

$$\kappa_x = -w_{,xx} \quad (2.3a)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R^2} (\alpha v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}) \quad (2.3b)$$

$$\kappa_{x\theta} = \kappa_{\theta x} = -\frac{w_{,x\theta}}{R} + \alpha \left(\frac{3v_{,x}}{4R} - \frac{u_{,\theta}}{4R^2} \right) \quad (2.3c)$$

Nas Equações (2.1) a (2.3) ao se considerar $\alpha = 0$, tem-se as expressões das deformações e rotações para a teoria de Donnell (1933), (1934) e (1976), presente também em Brush & Almroth (1975), sendo esta uma teoria mais simples porque desconsidera alguns termos associados à curvatura inicial da casca na direção circunferencial.

As deformações específicas em um ponto qualquer da casca a uma distância z da superfície média, com $-h/2 \leq z \leq h/2$, são:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + z \kappa_x \quad (2.4a)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + z \kappa_\theta \quad (2.4b)$$

$$\bar{\gamma}_{x\theta} = \gamma_{x\theta} + 2z \kappa_{x\theta} \quad (2.4c)$$

2.3

Esforços de membrana

De posse das deformações dadas pelas Equações (2.4) e da lei constitutiva, obtêm-se as tensões da casca cilíndrica, a saber:

$$\{\bar{\sigma}\} = [C] \{\bar{\varepsilon}\} \quad (2.5)$$

onde $\{\bar{\sigma}\}$ e $\{\bar{\varepsilon}\}$ são respectivamente os tensores de tensão e deformação. A matriz constitutiva $[C]$ depende do material adotado.

Os esforços de membrana e os esforços de flexão são obtidos (Equações 2.6) pela integração das tensões ao longo da espessura da casca (Brush & Almroth, 1975; Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959). Tem-se, pois:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.6a)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta dz \quad (2.6b)$$

$$N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.6c)$$

$$N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} dz \quad (2.6d)$$

$$M_x = R \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (2.6e)$$

$$M_\theta = R \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta z dz \quad (2.6f)$$

$$M_{x\theta} = R \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (2.6g)$$

$$M_{\theta x} = R \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{\theta x} z dz \quad (2.6h)$$

Os esforços são visualizados na Figura (2.4).

Nas Equações (2.6) o termo z/R é desprezado, pois z é muito pequeno, compreendido entre $-h/2 \leq z \leq h/2$ e, dividido por R , torna-se insignificante. Ao realizar as integrais supracitadas, chega-se aos esforços N_x , N_θ , $N_{x\theta}$, $N_{\theta x}$, M_x , M_θ , $M_{x\theta}$ e $M_{\theta x}$, em termos dos deslocamentos da superfície média e suas derivadas:

$$N_x = C \left\{ \left[u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] + \nu \left[\frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} (w_{,\theta} - \alpha v)^2 \right] \right\} \quad (2.7a)$$

$$N_\theta = C \left\{ \left[\frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} (w_{,\theta} - \alpha v)^2 \right] + \nu \left[u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] \right\} \quad (2.7b)$$

$$N_{x\theta} = C \left[\frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} + \frac{1}{R} w_{,x} (w_{,\theta} - \alpha v) \right] \frac{(1 - \nu)}{2} \quad (2.7c)$$

$$M_x = -D \left\{ w_{,xx} + \frac{\nu}{R^2} [w_{,\theta\theta} - \alpha v_{,\theta}] \right\} \quad (2.7d)$$

$$M_\theta = -D \{ [w_{,\theta\theta} - \alpha v_{,\theta}] + \nu w_{,xx} \} \quad (2.7e)$$

$$M_{x\theta} = -D \left\{ \frac{w_{,x\theta}}{R} - \frac{\alpha}{4} \left[\frac{3v_{,x}}{R} - \frac{u_{,\theta}}{R^2} \right] \right\} (1 - \nu) \quad (2.7f)$$

onde C e D são respectivamente a rigidez de membrana e a rigidez à flexão, sendo para o material isotrópico iguais a:

$$C = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.8a)$$

$$D = \frac{E z^2}{1 - \nu^2} \quad (2.8b)$$

2.4

Funcionais de energia

Considere a casca cilíndrica perfeita da Figura (2.5), com suas extremidades simplesmente apoiadas e submetida a carregamentos de borda (P), pressão lateral interna (p_i) e pressão lateral externa (p_e).

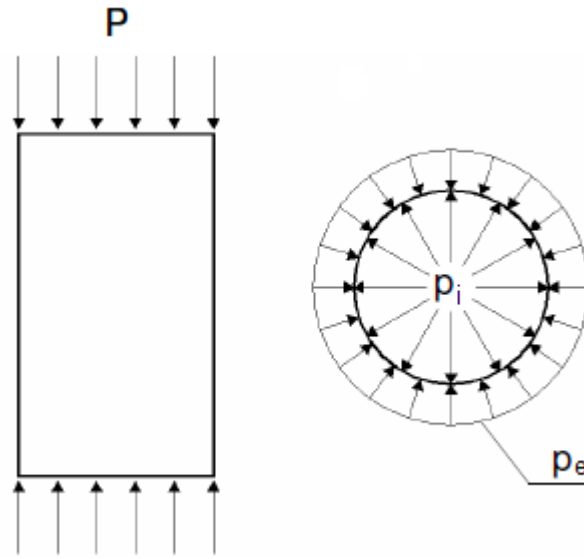


Figura 2.5 – Representação do carregamento aplicado à casca.
Fonte: Silva (2008).

2.4.1

Energia interna de deformação elástica

A energia interna de deformação armazenada em um corpo elasticamente deformado, U , é dada por (Wang, 1953):

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\epsilon}_y + \bar{\sigma}_z \bar{\epsilon}_z + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\tau}_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \bar{\tau}_{zx} \bar{\gamma}_{zx}) dx dy dz \quad (2.9)$$

Para o caso de uma casca cilíndrica delgada, Brush & Almroth (1975) omitem os termos $\bar{\gamma}_{yz}$, $\bar{\gamma}_{zx}$ e $\bar{\sigma}_z$, e a Equação (2.9) reduz-se a:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\epsilon}_y + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dx dy dz \quad (2.10)$$

A relação das tensões com as deformações (Equações 2.11) para o caso bidimensional advindas da lei generalizada de *Hooke*, são (Vlasov & Leont'ev, 1966):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) \quad (2.11a)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \quad (2.11b)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy} \quad (2.11c)$$

O termo dy para a casca cilíndrica, equivale a um comprimento de arco proveniente do produto do raio R , e do ângulo $d\theta$, ou seja:

$$dy = R d\theta \quad (2.12)$$

Substituindo na Equação (2.10) as Equações (2.11), tem-se a Equação (2.13) para a energia interna de deformação de uma casca cilíndrica:

$$U = \frac{E R}{2(1-\nu^2)} \iiint \left(\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_\theta^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_\theta + \frac{1-\nu}{2} \bar{\gamma}_{x\theta}^2 \right) dx d\theta dz \quad (2.13)$$

Ao realizar a integração desta equação com relação a z , no intervalo de $-h/2$ a $h/2$, e substituindo na mesma as Equações (2.4), obtém-se:

$$U = \frac{E R}{2(1-\nu^2)} \iint \left\{ h \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{x\theta}^2 \right] + \frac{h^3}{12} [\kappa_x^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_\theta + 2(1-\nu) \kappa_{x\theta}^2] \right\} dx d\theta \quad (2.14)$$

Observa-se que a energia interna de deformação pode ser escrita como a soma de duas parcelas de energia, chamadas de energia de membrana (U_M) e energia de flexão (U_F), dadas respectivamente por:

$$U_M = \frac{R C}{2} \iint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{x\theta}^2 \right) dx d\theta \quad (2.15a)$$

$$U_F = \frac{R D}{2} \iint (\kappa_x^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_\theta + 2(1-\nu) \kappa_{x\theta}^2) dx d\theta \quad (2.15b)$$

2.4.2

Energia cinética

Seja $\mathbf{U} = (u, v, w)$ o campo de deslocamentos relativos à configuração inicial de equilíbrio. Para um sistema submetido a um conjunto de forças conservativas de superfície e de volume, mudando continuamente o seu estado de equilíbrio entre os instantes t_1 e t_2 , tem-se a energia cinética dada por (Kraus, 1967):

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}} dV \quad (2.16)$$

sendo ρ a densidade da casca. Para uma casca cilíndrica homogênea isotrópica a energia cinética é definida como:

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy dz \quad (2.17)$$

Integrando a energia cinética ao longo da espessura, tem-se:

$$T = \frac{\rho R h}{2} \iint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx d\theta \quad (2.18)$$

2.4.3

Energia potencial das cargas externas

A energia potencial, Ψ , das cargas externas é dada por:

$$\Psi = \int_A \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{U} dA \quad (2.19)$$

onde, para casca cilíndrica, $\bar{q}$ é um vetor de forças conservativas por unidade de área.

$$\Psi = \iint (\bar{q}_x u + \bar{q}_\theta v + \bar{q}_z w) dx d\theta \quad (2.20)$$

Entende-se $\bar{q}_x$ e $\bar{q}_\theta$, como as componentes de forças na direção axial (u) e circunferencial (v), respectivamente, e $\bar{q}_z$ é a componente normal à superfície na direção w .

Para o carregamento considerado na Figura (2.5), o trabalho das forças externas (W_E) é dado por:

$$W_E = -R \iint (p_i + p_e) w dx d\theta - \frac{R}{2} \int P u_{,x} d\theta \quad (2.21)$$

onde p_i e p_e designam a pressão lateral interna e externa, respectivamente, atuantes na casca, enquanto P indica o carregamento axial uniformemente distribuído ao longo das bordas.

2.4.4

Trabalho das forças de dissipação

As forças de dissipação podem ser calculadas a partir da função da dissipação de *Rayleigh*, que, segundo Popov *et al.* (1998), pode ser escrita como:

$$R_E = \frac{1}{2} \iiint [2\eta_1 \rho \omega_0 (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + \dot{u}^2)] dx dy dz + \frac{1}{2} \iiint \left[\eta_2 \frac{E h^2}{12(1 - \nu^2)} (\Delta \dot{w})^2 \right] dx dy dz \quad (2.22)$$

Integrando a Equação (2.22) em relação a z , tem-se:

$$R_E = \frac{1}{2} \beta_1 R \iint (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + \dot{u}^2) dx d\theta + \frac{1}{2} \beta_2 R \iint (\Delta \dot{w})^2 dx d\theta \quad (2.23)$$

O primeiro termo representa as forças viscosas lineares decorrentes da resistência do meio em que a casca está, enquanto o segundo termo designa as forças viscosas elásticas do material da casca. Os termos β_1 e β_2 representam os coeficientes de amortecimentos, dados por:

$$\beta_1 = 2 \eta_1 \rho h \omega_0 \quad (2.24a)$$

$$\beta_2 = \eta_2 D \quad (2.24b)$$

onde η_1 e η_2 são, respectivamente, os coeficientes de amortecimento viscoso e do material e, ω_0 é a menor frequência natural da casca cilíndrica, e o operador Δ é dado por:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.25)$$

2.5

Equações de equilíbrio

Após determinar os funcionais de energia nas seções 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4, tem-se a seguinte função de *Lagrange* ($\bar{L}$):

$$\bar{L} = T - (U_M + U_F) + W_E \quad (2.26)$$

onde $\bar{L}$ é função de:

$$\bar{L}(x, \theta, t, u, \dot{u}, u_{,x}, u_{,\theta}, v, \dot{v}, v_{,x}, v_{,\theta}, w, \dot{w}, w_{,x}, w_{,\theta}, w_{,xx}, w_{,\theta\theta}, w_{,x\theta})$$

As equações de *Euler-Lagrange* são, pois dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial u_{,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial u_{,\theta}} \right) \right] = \frac{\partial R_E}{\partial \dot{u}} \quad (2.27a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial v_{,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial v_{,\theta}} \right) \right] = \frac{\partial R_E}{\partial \dot{v}} \quad (2.27b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{w}} \right) - \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_{,\theta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_{,xx}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_{,\theta\theta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_{,x\theta}} \right) \right] = \frac{\partial R_E}{\partial \dot{w}} \end{aligned} \quad (2.27c)$$

Substituindo as Equações (2.15), (2.18) e (2.21) na Equação (2.26) e em seguida nas Equações (2.27), chega-se às seguintes equações de movimento:

$$N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} - \frac{\alpha}{2R^2} M_{x\theta,\theta} - \rho h \ddot{u} = \beta_1 \dot{u} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} + N_{x\theta,x} - \frac{\alpha}{R} (N_\theta \beta_\theta + N_x \beta_x) + \frac{\alpha}{R} M_{x\theta,x} + \frac{\alpha}{R^2} (M_{\theta,\theta} + R M_{x\theta,x}) \\ - \rho h \ddot{v} = \beta_1 \dot{v} \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} N_\theta + (N_x \beta_x + N_{x\theta} \beta_\theta)_{,x} + \frac{1}{R} (N_\theta \beta_\theta + N_{x\theta} \beta_x)_{,\theta} \\ - \frac{1}{R} (M_{x\theta,\theta} + R M_{x,x})_{,x} - \frac{1}{R^2} (M_{\theta,\theta} + R M_{x\theta,\theta})_{,\theta} + \rho h \ddot{w} \\ + p_e + p_i = \beta_1 \dot{w} \end{aligned} \quad (2.28c)$$

2.6

Estado de tensão inicial

Considera-se agora a estrutura (Figura 2.3) inicialmente carregada quase estaticamente até que atinja um estado de equilíbrio denominado fundamental (F). Posteriormente, carregando-a dinamicamente, o sistema passa a ocupar uma nova configuração de equilíbrio denominado incremental (I). Ademais, supõe-se

inicialmente, por simplicidade, que a casca cilíndrica está submetida a um estado inicial de membrana (Brush & Almroth, 1975).

Partindo das Equações (2.28) de movimento e realizando simplificações para que as mesmas atendam a um estado inicial de membrana, chega-se aos esforços fundamentais de membrana:

$$N_x^F = -P \quad (2.29a)$$

$$N_\theta^F = -R(p_e + p_i) \quad (2.29b)$$

$$N_{x\theta}^F = M_x^F = M_\theta^F = M_{x\theta}^F = 0 \quad (2.29c)$$

Os novos esforços atuantes na casca são a soma dos esforços fundamentais com os esforços incrementais (Brush & Almroth, 1975):

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^F + N_x^I & M_x &= M_x^F + M_x^I \\ N_\theta &= N_\theta^F + N_\theta^I & M_\theta &= M_\theta^F + M_\theta^I \\ N_{x\theta} &= N_{x\theta}^F + N_{x\theta}^I & M_{x\theta} &= M_{x\theta}^F + M_{x\theta}^I \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por fim, substituindo as Equações (2.29) e (2.30) nas Equações (2.28), chega-se às equações não lineares de movimento mostradas a seguir.

$$N_{x,x}^I + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta}^I - \frac{\alpha}{2R^2} M_{x\theta,\theta}^I - \rho h \ddot{u} = \beta_1 \dot{u} \quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} N_{\theta,\theta}^I + N_{x\theta,x}^I - \frac{\alpha}{R} \{ [-R(p_e + p_i) + N_\theta^I] \beta_\theta + (-P + N_x^I) \beta_x \} + \frac{\alpha}{R} M_{x\theta,x}^I \\ + \frac{\alpha}{R^2} (M_{\theta,\theta}^I + R M_{x\theta,x}^I) - \rho h \ddot{v} = \beta_1 \dot{v} \end{aligned} \quad (2.31b)$$

$$\begin{aligned} -(p_e + p_i) + \frac{1}{R} N_\theta^I + [(-P + N_x^I) \beta_x + N_{x\theta}^I \beta_\theta]_{,x} \\ + \frac{1}{R} \{ [-R(p_e + p_i) + N_\theta^I] \beta_\theta + N_{x\theta}^I \beta_x \}_{,\theta} \\ - \frac{1}{R} (M_{x\theta,\theta}^I + R M_{x,x}^I)_{,x} - \frac{1}{R^2} (M_{\theta,\theta}^I + R M_{x\theta,x}^I)_{,\theta} + \rho h \ddot{w} \\ + p_e + p_i = \beta_1 \dot{w} \end{aligned} \quad (2.31c)$$

2.7

Condições de contorno

Sabe-se que a casca cilíndrica é completa na coordenada θ . Por conseguinte, nesta direção, sua condição de contorno será substituída pela condição de periodicidade (CP). Na direção axial se aplicam as condições de contorno (CC) em $x = 0, L$.

A condição de periodicidade dos deslocamentos circunferenciais implica em:

$$v(x, 0) = v(x, 2\pi) \quad (2.32)$$

Para uma casca simplesmente apoiada, os deslocamentos circunferenciais e radiais devem ser nulos nas extremidades da casca, ou seja:

$$v(0, \theta) = v(L, \theta) = 0 \quad (2.33a)$$

$$w(0, \theta) = w(L, \theta) = 0 \quad (2.33b)$$

Igualmente, o momento e o esforço normal axial devem ser nulos na extremidade da casca, a saber:

$$M_x(0, \theta) = M_x(L, \theta) = 0 \quad (2.34a)$$

$$N_x(0, \theta) = N_x(L, \theta) = 0 \quad (2.34b)$$