

4. FREQUÊNCIAS NATURAIS E CARGAS CRÍTICAS

O presente capítulo apresenta a análise linear de vigas de seção aberta e paredes delgadas simplesmente apoiadas, mostrando o processo de discretização por Galerkin e as equações de movimento linearizadas. Com base nestas equações faz-se o cálculo das frequências naturais, das cargas críticas axiais e da relação entre carga axial e frequência para diversos perfis encontrados em aplicações práticas com o intuito de mostrar o efeito da assimetria nas vibrações e estabilidade da estrutura.

4.1. Aplicação do método de Galerkin

Através do método de Galerkin, as equações diferenciais parciais de movimento (Equações (3.68) a (3.70)) podem ser reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias no domínio do tempo.

Para uma viga simplesmente apoiada, o primeiro modo de vibração em flexão nas duas direções ortogonais e o modo de torção são dados por:

$$v(x,t) = v_o(t) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (4.1)$$

$$w(x,t) = w_o(t) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (4.2)$$

$$\theta(x,t) = \theta_o(t) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (4.3)$$

onde $v_o(t)$, $w_o(t)$, e $\theta_o(t)$ são as amplitudes modais dependentes do tempo, associados aos três graus de liberdade. Cabe ressaltar que para uma barra simplesmente apoiada a solução analítica para os modos de flambagem em flexão e torção coincidem com os modos de vibração.

Substituindo as Equações (4.1) a (4.3) em (3.68) a (3.70), e aplicando o método de Galerkin, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} v_0 + z_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 \right) + P_z \left(v_0 + \frac{\pi^2}{8L^2} v_0^3 \right) - P(v_0 + z_c \theta_0) - P \frac{4y_c \theta_0^2}{3\pi} \\ + (P_z - P_y) \left(\frac{8}{3\pi} w_0 \theta_0 - \frac{3}{4} v_0 \theta_0^2 \right) - \frac{32}{\pi^3} M_{0y} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} w_0 - y_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 \right) + P_y \left(w_0 + \frac{\pi^2}{8L^2} w_0^3 \right) - P(w_0 - y_c \theta_0) - P \frac{4z_c \theta_0^2}{3\pi} \\ + (P_z - P_y) \left(\frac{8}{3\pi} v_0 \theta_0 + \frac{3}{4} w_0 \theta_0^2 \right) - \frac{32}{\pi^3} M_{0z} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{\pi^2} \left(I_0 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + z_c \frac{d^2}{dt^2} v_0 - y_c \frac{d^2}{dt^2} w_0 \right) + I_0 P_0 \theta_0 + \frac{3\pi^2}{8} \frac{EI_t}{L^2} \theta_0^3 \\ - P(I_0 \theta_0 - y_c w_0 + z_c v_0) + P \frac{8z_c w_0 \theta_0}{3\pi} - P \frac{8y_c v_0 \theta_0}{3\pi} \\ + (P_z - P_y) \left(\frac{8}{3\pi} v_0 w_0 - \frac{3}{4} \theta_0 v_0^2 + \frac{3}{4} \theta_0 w_0^2 \right) \\ - M_{0z} \left(\frac{32}{\pi^3} e_y - \frac{8}{\pi^2} e_z \theta_0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nas equações (4.4) - (4.6), P_y , P_z e P_θ , são as cargas de flambagem em flexão e torção para o problema desacoplado, P é a carga axial compressiva, M_{0z} , e M_{0y} são os máximos momentos de flexão resultante das cargas laterais uniformes q_z e q_y respectivamente, para uma viga simplesmente apoiada. Estes parâmetros são dados por:

$$P_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (4.7)$$

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (4.8)$$

$$P_\theta = \frac{1}{I_0} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GJ \right) \quad (4.9)$$

$$M_{0z} = q_z \frac{L^2}{8} \quad \text{e} \quad M_{0y} = q_y \frac{L^2}{8} \quad (4.10)$$

As Equações (4.4) a (4.6) formam um sistema de três equações não lineares acopladas que deve ser resolvido através de métodos numéricos.

4.2. Linearização das equações de movimento.

Para calcular as frequências naturais e a carga crítica, é preciso linearizar as equações (4.4) - (4.6), obtendo-se:

$$\frac{mL^2}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} v_0 + z_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 \right) + P_z v_0 - P(v_0 + z_c \theta_0) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{mL^2}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} w_0 + y_c \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 \right) + P_y w_0 - P(w_0 + y_c \theta_0) = 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{mL^2}{\pi^2} \left(I_0 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + z_c \frac{d^2}{dt^2} v_0 - y_c \frac{d^2}{dt^2} w_0 \right) + I_0 P_\theta \theta_0 \\ - P(I_0 \theta_0 - y_c w_0 + z_c v_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Verifica-se que o acoplamento no sistema linearizado é função dos parâmetros geométricos y_c e z_c . Isto significa que em seções monosimétricas ou assimétricas, onde o centro de cisalhamento não coincide com o centro de gravidade da seção, há modos de vibração e flambagem com acoplamento entre flexão e torção.

4.3. Frequências naturais e cargas críticas axiais da viga.

Para avaliar a possibilidade de ocorrência de ressonância, faz-se necessário conhecer as frequências naturais da estrutura. Estas frequências naturais são obtidas a partir do problema de vibração livre e não amortecida descrito pelas equações diferenciais de movimento, (4.11) a (4.13), que é um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e que pode ser expresso matricialmente como:

$$[M]\{\ddot{U}\} + \{[K_e] - P[K_G]\} \{U\} = 0 \quad (4.14)$$

onde $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos, $[M]$ é a matriz de massa, $[K_e]$ matriz de rigidez, $[K_G]$ é matriz geométrica e $\{F\}$ é o vetor das forças externas.

Para o cálculo das frequências naturais da estrutura descarregada, tem-se o problema de autovalor:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K_e]\{U\} = 0 \quad (4.15)$$

onde:

$$[M] = \frac{mL^2}{\pi^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ z_c & -y_c & I_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

e

$$[K_e] = \begin{bmatrix} P_z & 0 & 0 \\ 0 & P_y & 0 \\ 0 & 0 & I_0 P_\theta \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

a solução da Equação (4.15) é da forma:

$$v_0(t) = \bar{v} e^{i\omega_0 t} \quad (4.18)$$

$$w_0(t) = \bar{w} e^{i\omega_0 t} \quad (4.19)$$

$$\theta_0(t) = \bar{\theta} e^{i\omega_0 t} \quad (4.20)$$

onde ω_0 é a frequência natural e \bar{v} , \bar{w} e $\bar{\theta}$ são as amplitudes modais.

Da substituição das Equações (4.18) a (4.20) na Equação (4.15), chega-se à seguinte equação característica do problema de autovalor:

$$[K_e - \lambda M] = 0 \quad (4.21)$$

onde:

$$\lambda = \omega_0^2 \quad (4.22)$$

ou seja, os autovalores representam o quadrado das frequências naturais e os autovetores os modos de vibração.

Em um problema de instabilidade linearizado, o cálculo da carga crítica e os modos de flambagem também resultam de um problema de autovalor linear generalizado na forma abaixo:

$$[K_e - P K_G] = 0 \quad (4.23)$$

onde:

$$[K_G] = \begin{bmatrix} -P & 0 & -Pz_c \\ 0 & -P & Py_c \\ -Pz_c & Py_c & -PI_0 \end{bmatrix} \quad [K_e] = \begin{bmatrix} P_z & 0 & 0 \\ 0 & P_y & 0 \\ 0 & 0 & I_0 P_\theta \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

As frequências da estrutura carregada e a relação entre carga axial e frequência de vibração podem ser obtidas através da solução do problema de autovalor, Equação (4.14).

4.4. Análise numérica de vários tipos de perfis

Com o propósito de ilustrar melhor os efeitos considerados obtêm-se as frequências naturais, cargas críticas axiais e relação frequência-carga axial para alguns perfis frequentemente utilizados em aplicações práticas como “I”, “T”, “C” e “L”, incluindo assim seções duplamente simétricas, seções monossimétricas e seções assimétricas.

Os resultados numéricos são obtidos para uma viga simplesmente apoiada com módulo de Young $E = 210$ GPa, módulo de Cisalhamento $G = 80.77$ GPa, densidade do material $\rho = 7800$ kg/m³ e comprimento $L = 4$ m. As propriedades geométricas dos perfis foram obtidas com a ajuda do programa ShapeDesigner (2013).

4.4.1. Seção duplamente simétrica - perfil “I”.

A Figura 4.1 apresenta os eixos principais de inércia (eixos de simetria), campo de deslocamentos e características geométricas de um perfil “I” com dupla simetria. Na Tabela 4.1, encontram-se as dimensões do perfil utilizado na presente análise e as principais propriedades geométricas deste perfil.

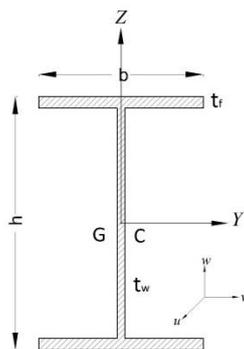


Figura 4.1: Perfil simétrico “I” e suas dimensões características.

Tabela 4.1: Propriedades geométricas da seção “I”.

Propriedades Geométricas					
b	=	15,00 cm	A	=	51,881 cm ²
h	=	30,00 cm	J	=	15,898 cm ⁴
t_f	=	1,07 cm	I_w	=	1,258E+05 cm ⁶
t_w	=	0,71 cm	I_y	=	7999,000 cm ⁴
y_c	=	0,00 cm	I_z	=	602,710 cm ⁴
z_c	=	0,00 cm	I_r	=	1,83E-06 m ⁶

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$65,6029 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 7,8074 \cdot 10^5 v_0 = 0 \quad (4.25)$$

$$65,6029 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 1,0632 \cdot 10^5 w_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$1,0877 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 29136,7652 \theta_0 = 0 \quad (4.27)$$

Note-se que as Equações (4.25) a (4.27) são desacopladas em função do centro de cisalhamento coincidir com o centro de gravidade. Tem-se assim o problema de autovalor:

$$[[K_e - \lambda M]] = \begin{bmatrix} 7,81 \cdot 10^5 - 65,60\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1,04 \cdot 10^7 - 65,60\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 29136,77 - 1,09\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.28)$$

cujos polinômio característico é dado por:

$$-4681,08\lambda^3 + 9,20 \cdot 10^8 \lambda^2 - 3,01 \cdot 10^{13} \lambda + 2,36 \cdot 10^{17} = 0 \quad (4.29)$$

Resolvendo a Equação (4.29), têm-se as três frequências naturais e os respectivos modos de vibração que são apresentados na Tabela 4.2. Estes valores foram corroborados pelos valores obtidos por F. Mohri, L. Azrar e M. Potier-Ferry (2001).

Tabela 4.2: Frequências naturais (rad/s) e modos de vibração da seção “T”.

Modo	ω_o (rad/s)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	109,092	1,000	0,000	0,000
F	397,426	0,000	1,000	0,000
T	163,671	0,000	0,000	1,000

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$[[K_e - P K_G]] = \begin{bmatrix} 7,81 \cdot 10^5 - P & 0 & 0 \\ 0 & 1,04 \cdot 10^7 - P & 0 \\ 0 & 0 & 29136,77 - 0,02P \end{bmatrix} = 0 \quad (4.30)$$

que leva ao seguinte polinômio característico:

$$-0,02P^3 + 2,14 \cdot 10^5 P^2 - 4,59 \cdot 10^{11} P + 2,36 \cdot 10^{17} = 0 \quad (4.31)$$

Resolvendo a Equação (4.31) têm-se as três raízes e os respectivos autovetores apresentados na Tabela 4.3. A carga crítica ($P_{cr}=780,7\text{kN}$), corresponde a um modo de flambagem de flexão em torno do eixo de menor inércia. Note-se também que, neste caso, a carga crítica coincide com a carga crítica de Euler.

Tabela 4.3: Cargas de modos de bifurcação da seção “I”.

Modo	Pcr. (kN)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	780,7	1,000	0,000	0,000
F	10360,0	0,000	1,000	0,000
T	1757,0	0,000	0,000	1,000

Para estudar a variação das frequências naturais em função da carga axial aplicada utilizasse o seguinte determinante:

$$[(K_e - P K_G) - \lambda M] = 0 \quad (4.32)$$

A Figura 4.2 mostra a variação das três frequências com a carga axial compressiva P . À medida que o valor da carga de compressão aumenta, os valores das frequências diminuem até chegar à carga crítica em cada modo. Nota-se que há uma grande influência do carregamento nas frequências de vibração. Para efeito prático, quando se atinge a primeira carga crítica, um dos autovalores se torna negativo e ocorre a flambagem, passando a estrutura a vibrar em torno de uma configuração de equilíbrio pós-crítica. Precisa-se, portanto, de uma formulação não linear para a análise deste problema.

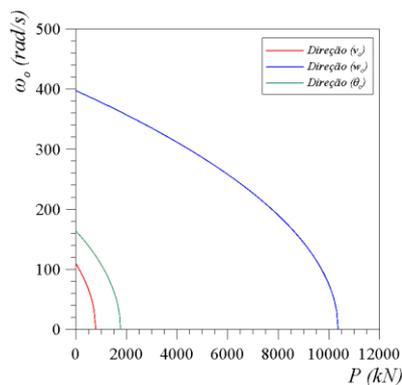
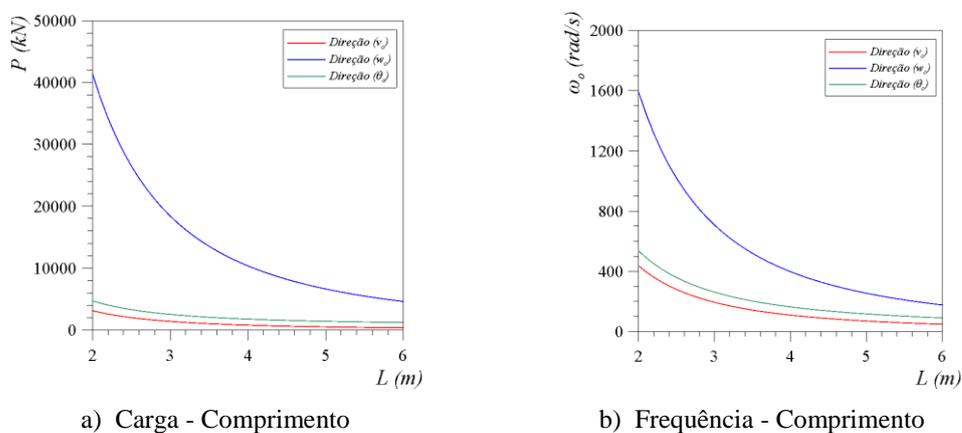


Figura 4.2: Relação carga – frequência de vibração da Seção “I”.

A carga crítica e a frequência natural variam de forma não linear com o comprimento da coluna. A Figura 4.3 mostra a variação das cargas de bifurcação do perfil e das três frequências naturais com o comprimento da viga L . O modo crítico depende da dimensão das seções e também do comprimento da viga. Como esperado, tanto as frequências quanto as cargas de bifurcação decrescem à medida que L cresce.



a) Carga - Comprimento

b) Frequência - Comprimento

Figura 4.3: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “I”.

4.4.2. Seção monossimétrica - perfil “T”.

A Figura 4.4 apresenta uma seção monossimétrica em T. Na Tabela 4.4, apresentam-se as dimensões e as principais propriedades geométricas do perfil aqui analisado.

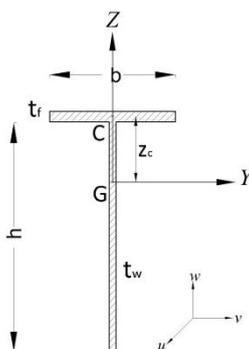


Figura 4.4: Perfil monossimétrico “T” e suas dimensões características.

Tabela 4.4: Propriedades geométricas da Seção “T”.

Propriedades Geométricas					
b	=	10,00 cm	A	=	18,776 cm ²
h	=	19,20 cm	J	=	3,136 cm ⁴
t_f	=	0,85 cm	I_w	=	36,224 cm ⁶
t_w	=	0,56 cm	I_y	=	717,590 cm ⁴
y_c	=	0,00 cm	I_z	=	71,102 cm ⁴
z_c	=	5,21 cm	I_r	=	2,590E-07 m ⁶

As equações de movimento obtidas para este perfil são:

$$23,742 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 1,236 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 92104,505 v_0 = 0 \quad (4.33)$$

$$23,742 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 9,296 \cdot 10^5 w_0 = 0 \quad (4.34)$$

$$1,236 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 0,164 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 2537,236 \theta_0 = 0 \quad (4.35)$$

Note-se que a Equação (4.34) é desacoplada e as demais tem um acoplamento geométrico que depende do parâmetro z_c .

As frequências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left[[K_e - \lambda M] \right] = \begin{bmatrix} 92104,51 - 23,74\lambda & 0 & -1,24\lambda \\ 0 & 9,29 \cdot 10^5 - 23,74\lambda & 0 \\ -1,24\lambda & 0 & 2537,24 - 1,16\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

Resolvendo a Equação (4.36) têm-se as três raízes que são as frequências naturais e os modos de vibração mostradas na Tabela 4.5. Verifica-se que há um modo de flexão relativo ao eixo de maior inércia (Equação desacoplada (4.34)) e dois modos de flexo-torção.

Tabela 4.5: Modos de vibração da seção “T”.

Modo	ω_o (rad/s)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
FT	59,012	0,000	0,910	0,415
F	197,869	-1,000	0,000	0,000
FT	168,349	0,000	-0,998	0,060

As cargas críticas são obtidas a partir de:

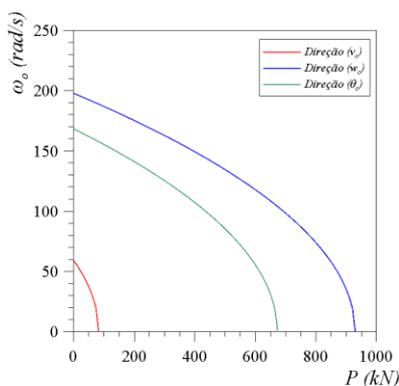
$$\left[[K_e - P K_G] \right] = \begin{bmatrix} 92104,51 - P & 0 & 0,05P \\ 0 & 9,30 \cdot 10^5 - P & 0 \\ 0,05P & 0 & 2537,24 - 0,01P \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Resolvendo a Equação (4.37) têm-se as três raízes que são as cargas de bifurcação dos modos de flambagem apresentados na Tabela 4.6. Neste caso observa-se que tanto a frequência natural fundamental quanto a carga crítica correspondem a um modo acoplado de flexo-torção envolvendo os deslocamentos v_o e θ_o . Note-se também que a carga crítica é aproximadamente 90% da carga crítica de Euler para flambagem por flexão em torno do eixo de menor inércia. Este decréscimo se deve à interação entre flexão e torção que diminui a capacidade de carga do perfil.

Tabela 4.6: Modos de Flambagem da seção “T”.

Modo	Pcr. (KN)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
FT	82,680	0,000	0,910	0,415
F	929,556	-1,000	0,000	0,000
FT	672,879	0,000	-0,998	0,060

A Figura 4.5, apresenta a variação da frequência natural com a carga aplicada para as três direções do sistema.

**Figura 4.5: Relação carga – frequência de vibração da Seção “T”.**

A influência do comprimento da barra nas frequências de vibração e cargas de bifurcação é ilustrada na Figura 4.6. Verifica-se que para $L = 4,78$ m há duas frequências coincidentes, gerando uma ressonância interna 1:1. Pode-se também observar que há outras proporções inteiras entre as frequências naturais, o que pode gerar diversos problemas de ressonância interna. Por exemplo, para $L = 2$ m tem-se que $\omega_{02}=2\omega_{01}$ e $\omega_{03}=2\omega_{02}$. Para este comprimento também há coincidência de duas cargas de bifurcação. Nesta faixa de valores de L a flambagem sempre ocorre no modo flexo-torsional. O modo de flambagem depende da dimensão da seção e também do comprimento da viga.

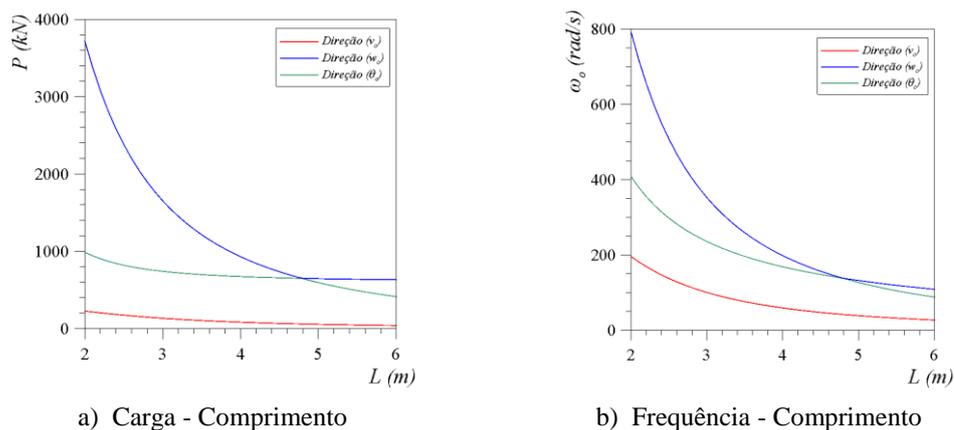


Figura 4.6: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “T”.

4.4.3. Seção monossimétrica - perfil “C”.

A Figura 4.7 apresenta uma viga simplesmente apoiada de seção monossimétrica “C”.

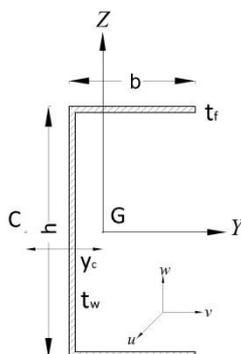


Figura 4.7: Perfil monossimétrico “C” e suas dimensões características.

Na tabela Tabela 4.7, apresentam-se as principais propriedades geométricas deste perfil.

Tabela 4.7: Propriedades geométricas da Seção “C”.

Propriedades Geométricas					
b	=	10,00 cm	A	=	19,500 cm ²
h	=	20,00 cm	J	=	1,692 cm ⁴
t_f	=	0,50 cm	I_w	=	1,289E+04 cm ⁶
t_w	=	0,50 cm	I_y	=	1236,600 cm ⁴
y_c	=	-6,08 cm	I_z	=	193,450 cm ⁴
z_c	=	0,00 cm	I_r	=	3,51E-07 m ⁶

As equações de movimento para este perfil são:

$$24,658 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 2,506 \cdot 10^5 v_0 = 0 \quad (4.38)$$

$$24,658 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 1,500 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 1,602 \cdot 10^5 w_0 = 0 \quad (4.39)$$

$$1,500 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 0,272 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 3035,879 \theta_0 = 0 \quad (4.40)$$

Note-se que a Equação (4.38) tem um desacoplamento linear para a direção v_0 , e as demais equações têm um acoplamento geométrico que depende do parâmetro y_c .

As frequências naturais e modos de vibração são apresentados na Tabela 4.8. Nota-se neste caso que há dois modos de vibração com a praticamente a mesma frequência natural, o que gera uma ressonância interna 1:1.

Tabela 4.8: Frequências naturais e modos de vibração da seção “C”.

Modo	ω_o (rad/s)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	100,811	1,000	0,000	0,000
FT	322,546	0,000	0,160	-0,987
FT	102,390	0,000	-0,012	-0,999

As cargas críticas e os respectivos modos de flambagem são mostrados na Tabela 4.9. Novamente têm-se duas cargas de bifurcação próximas, o que pode levar a um acoplamento modal com perda de rigidez e, conseqüentemente, uma diminuição da capacidade de carga na presença de imperfeições geométricas iniciais.

A Figura 4.8 mostra a variação das frequências naturais com a carga compressiva axial. Nota-se que a ressonância interna ocorre independente do valor da carga, mantendo-se a relação $\omega_{02}=\omega_{01}$.

Tabela 4.9: Cargas e modos de bifurcação da seção “C”.

Modo	Pcr. (kN)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	250,592	1,000	0,000	0,000
FT	2565,276	0,000	0,160	-0,987
FT	258,501	0,000	-0,012	-0,999

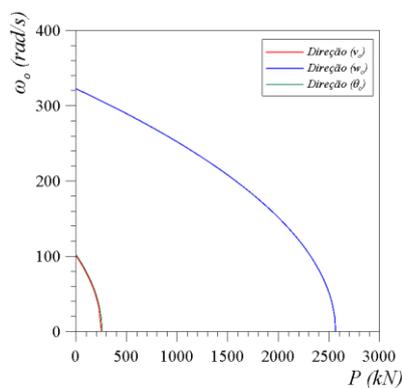
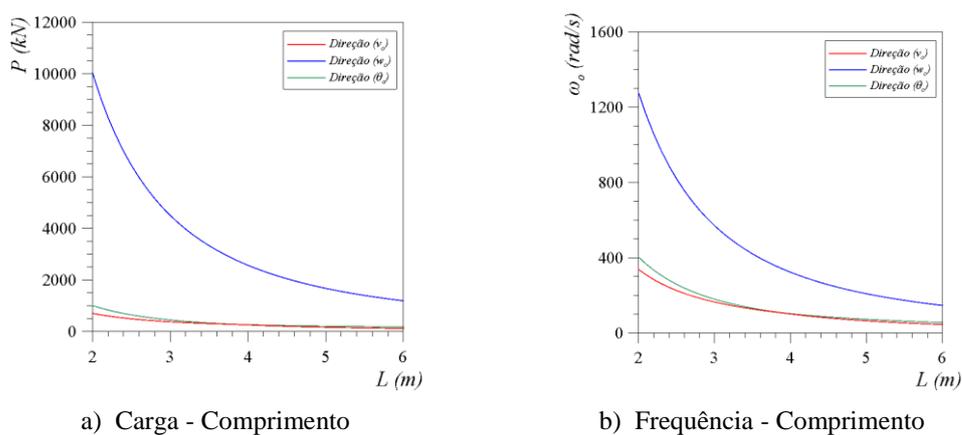


Figura 4.8: Relação carga – frequência de vibração da Seção “C”.



a) Carga - Comprimento

b) Frequência - Comprimento

Figura 4.9: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “C”.

A Figura 4.9 mostra a variação das cargas críticas de flambagem do perfil de seção “C”, e das frequências naturais com o comprimento da viga L . Verifica-se que em toda a faixa de L analisada a interação modal pode ocorrer em virtude da proximidade de cargas e frequências tanto em problemas estáticos quanto dinâmicos.

4.4.4. Seção monossimétrica - perfil “L”.

A Figura 4.10 apresenta uma viga simplesmente apoiada de seção monossimétrica “L”.

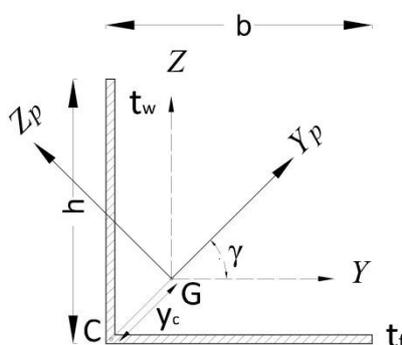


Figura 4.10: Perfil monossimétrico “L” e suas dimensões características.

Na Tabela 4.10, apresenta as propriedades geométricas deste perfil.

Tabela 4.10: Propriedades geométricas da Seção monossimétrica “L”.

Propriedades Geométricas					
b	=	15,00 cm	A	=	14,750 cm ²
h	=	15,00 cm	J	=	1,262 cm ⁴
t_f	=	0,50 cm	I_w	=	22,240 cm ⁶
t_w	=	0,50 cm	I_y	=	334,540 cm ⁴
y	=	-3,68 cm	I_z	=	334,090 cm ⁴
z	=	-3,68 cm	I_r	=	1,39E-07 m ⁶
			I_{yz}	=	-200,45 cm ⁴

Para analisar este exemplo, precisamos que as propriedades geométricas sejam referenciadas a seus eixos principais de inércia. Para isto deve-se utilizar as seguintes formulações:

$$\tan(2\gamma) = \frac{-I_{yz}}{(I_y - I_z)/2} \quad (4.41)$$

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yx}^2} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} x_p &= x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ y_p &= y \cos \gamma - x \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.43)$$

Substituindo os valores da Tabela 4.10 nas Equações (4.41)-(4.43), obtêm-se as seguintes propriedades listadas na Tabela 4.11.

Tabela 4.11: Propriedades geométricas principais da Seção monossimétrica “L”.

Propriedades Geométricas nos Eixos Principais					
y_c	=	-5,210 cm	I_{max}	=	534,990 cm ⁴
z_c	=	0,000 cm	I_{min}	=	134,090 cm ⁴
			γ	=	45,000 °

As equações de movimento fornecidas para este perfil são:

$$18,651 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 1,737 \cdot 10^5 v_0 = 0 \quad (4.44)$$

$$18,651 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 0,971 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 6,930 \cdot 10^5 w_0 = 0 \quad (4.45)$$

$$0,971 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 0,135 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 1022,279 \theta_0 = 0 \quad (4.46)$$

Note-se que as Equações (4.44) - (4.46) tem um acoplamento linear geométrico que depende do parâmetro y_c .

Resolvendo o problema de autovalor têm-se as três raízes que são as frequências naturais com as quais se podem calcular os modos de vibração mostrados na

Tabela 4.12.

Tabela 4.12: Frequências naturais e modos de vibração da seção monossimétrica L.

Modo	ω_o (rad/s)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	96,504	1,000	0,000	0,000
FT	253,925	0,000	0,122	-0,993
FT	83,445	0,000	-0,012	-0,999

As cargas críticas e os modos de flambagem deste perfil são apresentados na Tabela 4.13. A relação frequência natural versus carga axial é apresentada na Figura 4.11.

Tabela 4.13: Cargas e modos de bifurcação da seção monossimétrica “L”.

Direção	Pcr. (kN)	Modos de Flambagem		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
F	173,698	1,000	0,000	0,000
FT	1202,591	0,000	0,122	-0,993
FT	129,870	0,000	-0,012	-0,999

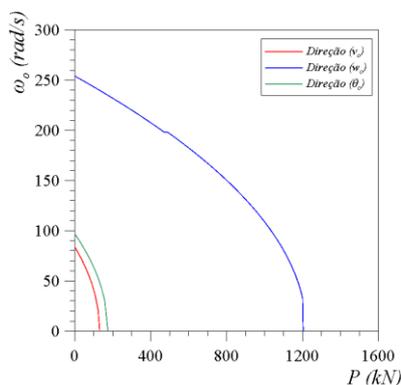


Figura 4.11: Relação carga – frequência de vibração da Seção monossimétrica “L”.

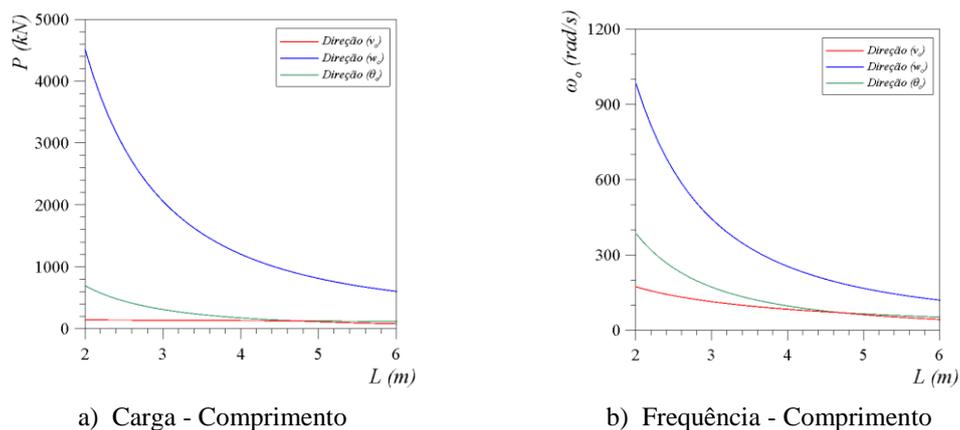


Figura 4.12: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção monossimétrica “L”.

A Figura 4.12 mostra a variação das cargas críticas de bifurcação do perfil “L” em função do comprimento da viga. Pode-se observar que até um comprimento $L = 4.51\text{m}$ a flambagem ocorre para um modo de flexão puro, mais para valores maiores o comportamento é flexo-torsional. Mudança semelhante ocorre no modo associado à frequência de vibração mínima. Assim como o perfil de seção “C”, para certos comprimentos há a possibilidade de ressonância interna e interação modal.

4.4.5. Seção assimétrica - perfil “L”.

Finalmente neste último exemplo analisa-se o problema referente a uma seção assimétrica. A Figura 4.13 apresenta uma viga com seção transversal assimétrica “L”.

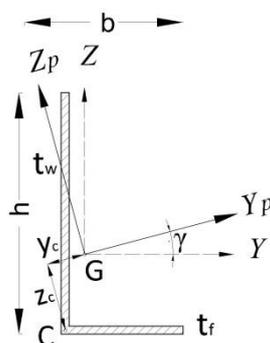


Figura 4.13: Perfil assimétrico “L” e suas dimensões características.

A Tabela 4.14 apresenta as propriedades geométricas deste perfil.

Tabela 4.14: Propriedades geométricas da Seção assimétrica “L”.

Propriedades Geométricas					
b	=	7,50 cm	A	=	11,000 cm ²
h	=	15,00 cm	J	=	0,930 cm ⁴
t_f	=	0,50 cm	I_w	=	12,391 cm ⁶
t_w	=	0,50 cm	I_y	=	266,130 cm ⁴
y	=	-1,20 cm	I_z	=	48,006 cm ⁴
z	=	-4,90 cm	I_r	=	7,10E-08 m ⁶
			I_{yz}	=	-64,879 cm ⁴

Utilizando as Equações (4.41) a (4.43) do exemplo anterior, obtêm-se as propriedades geométricas com relação a seus eixos principais de inércia tal como mostra a Tabela 4.15.

Tabela 4.15: Propriedades geométricas principais da seção assimétrica “L”.

Propriedades Geométricas nos Eixos Principais					
y_c	=	-2,45 cm	I_{max}	=	283,970 cm ⁴
z_c	=	-4,41 cm	I_{min}	=	30,167 cm ⁴
			γ	=	15,374 °

As equações de movimento fornecidas para este perfil são:

$$13,909 \frac{d^2}{dt^2} v_0 - 0,613 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 39077,897 v_0 = 0 \quad (4.47)$$

$$13,909 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 0,341 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 3,678 \cdot 10^5 w_0 = 0 \quad (4.48)$$

$$-0,613 \frac{d^2}{dt^2} v_0 + 0,341 \frac{d^2}{dt^2} w_0 + 0,075 \frac{d^2}{dt^2} \theta_0 + 753,065 \theta_0 = 0 \quad (4.49)$$

Note-se que as Equações (4.47) a (4.49) tem um acoplamento linear geométrico em nas todas as direções e que dependem do parâmetro y_c e z_c .

As frequências naturais e modos de vibração são obtidos a partir do problema de autovalor:

$$[[K_e - \lambda M]] = \begin{bmatrix} 39077,89 - 13,91\lambda & 0 & 0,61\lambda \\ 0 & 3,68 \cdot 10^5 - 13,91\lambda & -0,34\lambda \\ 0,61\lambda & -0,34\lambda & 753,06 - 0,07\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

Sendo os resultados apresentados na Tabela 4.16 onde se observa que, em função da assimetria da seção, todos os modos são de flexo-torção.

Tabela 4.16: Modos de vibração da seção assimétrica “L”.

Modo	ω_o (rad/s)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
FT	120,528	-0,054	-0,998	-0,030
FT	196,654	0,047	0,996	-0,077
FT	50,073	0,344	-0,939	-0,002

As cargas críticas são obtidas de:

$$[[K_e - P K_G]] = \begin{bmatrix} 39077,89 - P & 0 & 0,04P \\ 0 & 3,69 \cdot 10^5 - P & -0,02P \\ 0,04P & -0,02P & 753,06 - 0,01P \end{bmatrix} = 0 \quad (4.51)$$

Os resultados são apresentados na Tabela 4.17, onde, novamente, todos os modos são de flexo-torção.

Tabela 4.17: Modos de Flambagem da seção assimétrica L.

Modo	Pcr. (kN)	Componentes		
		Direção (v_o)	Direção (w_o)	Direção (θ_o)
FT	202,062	-0,054	-0,998	-0,030
FT	537,915	0,047	0,996	-0,077
FT	34,875	0,344	-0,939	-0,002

Os resultados dos diversos exemplos mostram que, em virtude das características geométricas dos perfis esbeltos de seção aberta e assimétricas, a interação entre flexão e torção sempre ocorre, sendo em muitos casos a carga crítica e a frequência fundamental associada a um modo de flexo-torção. Também, em virtude das características geométricas destas estruturas, perfis com modos de

flexão e flexão-torção com a mesma carga crítica pode ocorrer gerando o fenômeno de interação modal. Frequências iguais também podem ocorrer gerando uma ressonância interna 1:1. Finalmente varias relações do tipo $\omega_{0i}/\omega_{0j}=n$ com n inteiro podem ser observadas na presente análise paramétrica, mostrando a possibilidade de diversas ressonâncias internas. Estes problemas de interação modal se tornam ainda mais importantes quando se consideram nas barras esbeltas os acoplamentos devidos as não linearidades geométricas e excentricidades da carga com relação ao centro de cisalhamento, assunto abordado no próximo capítulo da dissertação.