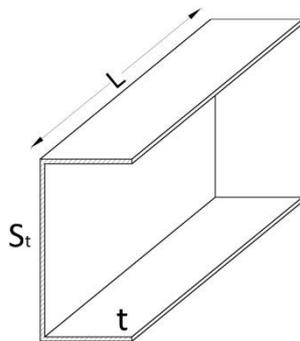


## 2. FLEXO-TORÇÃO EM PERFIS DE SEÇÃO ABERTA E PAREDES DELGADAS.

Neste capítulo são apresentados, de forma concisa, com base no trabalho de Mori e Munaiar Neto (2009), alguns conceitos básicos necessários ao entendimento do presente trabalho e as equações da teoria clássica de vigas esbeltas sob flexo-torção.

### 2.1. Perfis de seção aberta e paredes delgadas.

A principal característica de um perfil de paredes delgadas é que a espessura da seção transversal é muito menor que sua largura, altura ou contorno. Porém, estas dimensões são muito menores do que seu comprimento, de modo que ainda é possível utilizar modelos de barra para sua análise. Usualmente tem-se que  $S_t \geq 10t$  e  $L \geq 10S_t$ , onde  $L$  é o comprimento do elemento,  $S_t$  é o perímetro da seção e  $t$  é a espessura das paredes do elemento, como ilustra a Figura 2.1.



**Figura 2.1: Perfil de seção aberta e paredes delgadas.**

Para a determinação das equações que permitem obter a posição do centro de cisalhamento em seções transversais abertas e delgadas, são admitidas como válidas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- O contorno da seção transversal permanece rígido em seu próprio plano durante a deformação.
- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas.

## 2.2.

### Centro de cisalhamento de uma seção transversal.

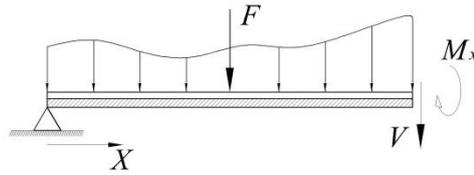
Toma-se como ponto de partida uma viga carregada com forças aplicadas em posições arbitrárias ao longo do seu comprimento (eixo  $X$ ) e contidas em um único plano definido como plano das forças. Inicialmente, admitindo uma posição arbitrária do plano das forças em relação aos pontos da seção, se considera que essa mesma viga possa estar solicitada, simultaneamente, por esforços de flexão e de torção.

Nessa situação mais geral, as tensões de cisalhamento ( $\tau$ ) geradas na seção transversal ocorrem com vistas a garantir o estabelecimento do equilíbrio entre forças externas aplicadas e os esforços internos. Considerando a dimensão da seção transversal  $b$ , as tensões de cisalhamento produzem como resultantes um esforço cortante ( $V$ ) e um momento de torção ( $M_x$ ), dados respectivamente por:

$$V = \int_A \tau dA \quad (2.1)$$

$$M_x = \int_A \tau b dA \quad (2.2)$$

No entanto, os estudos iniciais para barras apenas fletidas submetidas a carregamentos transversais ao próprio eixo, tomam como ponto de partida a hipótese de que existe um plano do carregamento (plano das forças) passando por um ponto específico da seção transversal da barra onde o efeito da torção é nulo, ocorrendo apenas o esforço cortante ( $V$ ), Equação (2.1), como resultante (equivalência estática) das tensões de cisalhamento geradas ao longo da seção, como ilustra a Figura 2.2.



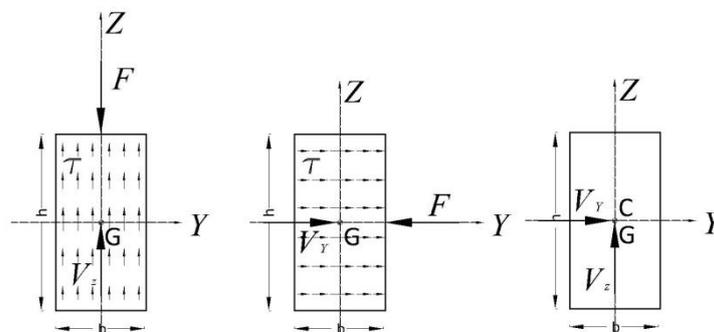
**Figura 2.2: Representação do esforço solicitante cortante (V) na barra.**

Existe, portanto, um ponto pertencente ao plano da seção transversal, coincidente ou não com um ponto da mesma seção, denominado centro de cisalhamento (C) ou centro de torção, pelo qual deve passar o plano de aplicação da resultante das cargas transversais e, conseqüentemente dos esforços cortantes, de modo que não ocorra torção, mas apenas flexão. O centro de cisalhamento é, portanto, uma propriedade geométrica da seção transversal.

### 2.2.1.

#### Centro de cisalhamento para seções com dois eixos de simetria

Para seções com dois eixos de simetria, tem-se que a posição do centro de gravidade (G) coincide com o ponto de interseção dos dois eixos de simetria (centroide da seção transversal), aspecto demonstrado pela condição de momento estático nulo para ambos os eixos. Para uma seção retangular, por exemplo, admitindo que o plano de forças seja coincidente com a posição do centro de gravidade, a distribuição das tensões de cisalhamento dá origem a uma resultante (V) que passa por G e coincide com o plano de carregamento, conforme exemplifica a Figura 2.3.



**Figura 2.3: Resultante das tensões de cisalhamento em perfil bissimétrico.**

Nota-se que, para os casos apresentados na Figura 2.3, o carregamento aplicado provoca apenas flexão e, conseqüentemente, uma distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal que produz como resultante apenas o esforço cortante. Nesse caso, o plano de carregamento e o esforço cortante são colineares.

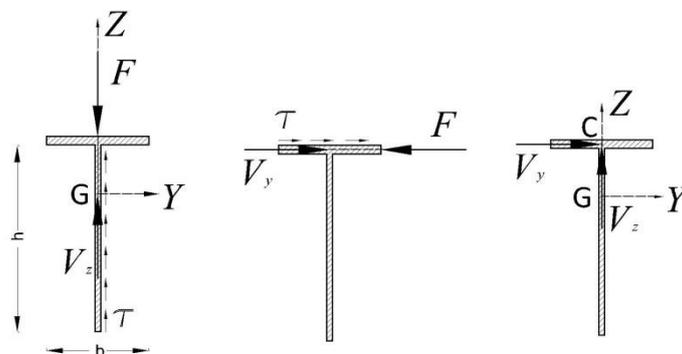
Desse modo, fica estabelecida como centro de cisalhamento (C) a posição na seção transversal em que as resultantes  $V_y$  e  $V_z$  se cruzam. Portanto, para seções transversais com dois ou mais eixos de simetria, a posição do centro de cisalhamento (C) é coincidente com a posição do centro de gravidade (G).

### 2.2.2.

#### Centro de cisalhamento para seções com um eixo de simetria.

Para as seções com apenas um eixo de simetria, sabe-se que o centro de gravidade (G) pertence a esse mesmo eixo. Por exemplo, para uma seção do tipo “T” de paredes delgadas a distribuição das tensões de cisalhamento é admitida paralela às linhas de borda e uniformemente distribuída ao longo da espessura, o que não implica em significativa perda de precisão dos resultados. Em função das espessuras reduzidas das paredes, esse tipo de seção pode ser representado pela linha média da seção.

Como análise inicial, admite-se que o plano de carregamento seja coincidente com o eixo de simetria da seção (eixo Z) e, portanto, tem-se flexão em torno do eixo Y. Nesse caso, representando a seção por meio da linha média, obtém-se uma distribuição das tensões de cisalhamento e sua correspondente resultante,  $V_z$ , conforme ilustrado na Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Resultante das tensões de cisalhamento perfil monossimétrico T.

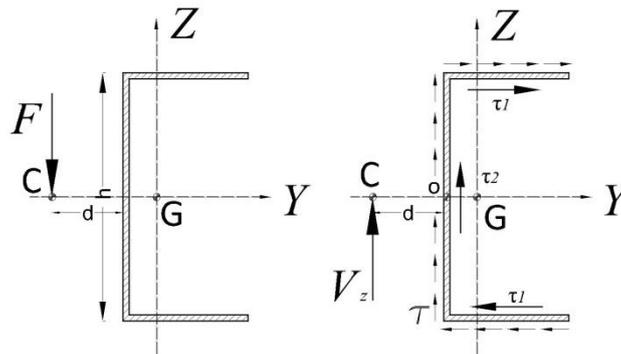
Nesse caso, a parcela da resultante de  $\tau$  na mesa do perfil “T” é pequena e pode ser desconsiderada, uma vez que a seção é delgada, ou seja,  $t \leq 0,1S_t$ , restando apenas a parcela de  $\tau$  na alma da seção, que é coincidente com o plano de carregamento, garantindo a inexistência de torção, situação que tem correspondência direta com a Equação (2.1). Portanto, o lugar geométrico do centro de cisalhamento coincide com o eixo de simetria da seção “T”, e sua posição fica assim parcialmente definida.

Como segunda análise, admite-se que o plano de carregamento seja coincidente com a mesa da seção, com flexão em torno do eixo Z. Nesse caso, obtém-se uma distribuição das tensões de cisalhamento e sua correspondente resultante,  $V_y$ , conforme ilustra a Figura 2.4. Utilizando o mesmo raciocínio da primeira análise, a parcela da resultante de  $\tau$  na alma do perfil “T” é desconsiderada, restando apenas tensões  $\tau$  na mesa da seção cuja resultante é coincidente com o plano de carregamento, garantindo novamente a inexistência de torção.

Finalmente, nota-se que o ponto de intersecção das direções das duas resultantes,  $V_y$  e  $V_z$ , definem a posição do centro de cisalhamento, como mostra a Figura 2.4. Sempre que o plano de carregamento passar por esse ponto, fica garantida a inexistência de torção e a condição apresentada na Equação (2.1) é verificada.

Para seções transversais cujos trechos que as constituem são concorrentes a um único ponto (seções “T”, cantoneira ou similares), fica como regra geral que C coincide com o ponto comum das linhas médias da seção dos trechos que as formam.

Com base nos aspectos identificados para a seção “T”, sabe-se que a seção “C” terá a posição do centro de cisalhamento situada em algum ponto pertencente ao eixo de simetria. Nesse caso, para determinar a posição exata de C, basta considerar a ocorrência de um plano de carregamento que seja perpendicular àquele eixo, uma vez que se sabe que a posição de C é definida pela intersecção desse mesmo eixo de simetria com a direção da resultante de  $\tau$  que aparece em resposta ao referido carregamento, conforme ilustra a Figura 2.5.



**Figura 2.5: Resultante das tensões de cisalhamento perfil monossimétrico “C”.**

Nesse caso, a distribuição de  $\tau$ , admitida conforme idealizada na Figura 2.5, respeitadas às condições de equilíbrio, deve representar, no conjunto das partes que compõem a seção, sentidos que percorram a seção de uma extremidade à outra, podendo, se desejado, ser contrário àquele indicado na mesma figura. Por equivalência estática, com redução ao ponto “o” o efeito de  $V$ , na seção, deverá ser equivalente ao efeito provocado pelas resultantes  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , e a posição final de C fica estabelecida a partir das equações:

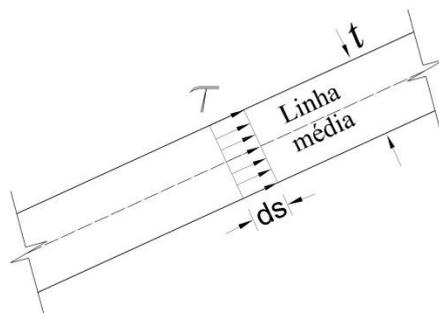
$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad V = \tau_2 \quad (2.3)$$

$$\sum M_o = 0 \quad \rightarrow \quad Vd = \tau_1 h \quad \rightarrow \quad d = \frac{\tau_1}{\tau_2} h \quad (2.4)$$

### 2.2.3.

#### **Centro de cisalhamento para seções transversais assimétricas.**

Assim como no caso anterior, por se considerar as paredes como delgadas (pequena espessura), a distribuição das tensões de cisalhamento é admitida paralela às linhas da borda e uniformemente distribuída ao longo da espessura, não implicando em significativa perda de precisão dos resultados. Em função das espessuras reduzidas das paredes, esse tipo de seção pode ser representado pela linha média da seção, conforme ilustra a Figura 2.6.

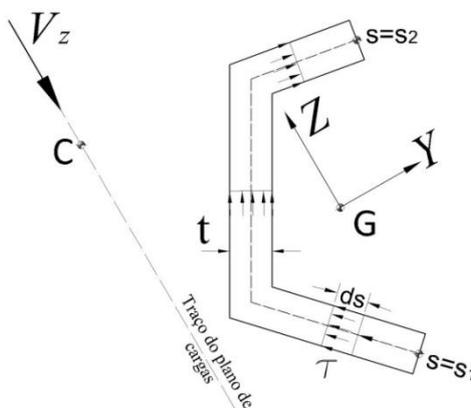


**Figura 2.6: Distribuição de tensões de cisalhamento em seção de parede delgada.**

Inicialmente, por meio dos conceitos da resistência dos materiais, para barras fletidas, vale lembrar que a tensão de cisalhamento pode ser obtida a partir da expressão:

$$\tau = \frac{VM_s}{tI} \quad (2.5)$$

Na Equação (2.5),  $M_s$  e  $I$  representam, respectivamente, o momento estático e o momento de inércia determinados em relação aos eixos principais de inércia, aqui designados por  $Y$  e  $Z$ . Para o estudo que se segue, parte-se de uma seção transversal qualquer, assimétrica e constituída de paredes delgadas e retas com espessura  $t$ , eixos principais de inércia definidos por  $Y$  e  $Z$ , e representada pela linha média da seção à qual está associada uma ordenada “ $s$ ” que a percorre desde  $s_1$  até  $s_2$ , conforme ilustra a Figura 2.7.



**Figura 2.7: Seção transversal aberta assimétrica genérica de parede delgada.**

Supõe-se um plano de carregamento fictício paralelo ao eixo Z, também representado na Figura 2.7. Nesse caso, tem-se que:

$$V = V_z \quad (2.6)$$

$$I = I_y \quad (2.7)$$

$$M_s = \int_A z dA = \int_{s1}^s z t ds \quad (2.8)$$

Deste modo, obtém-se a força elementar resultante de cisalhamento, por meio de equivalência estática em um elemento de comprimento “ $ds$ ”, dada por:

$$dF = \tau dA = \tau t ds \quad (2.9)$$

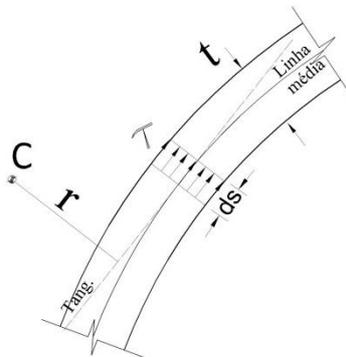
A condição para garantir a não ocorrência de momento de torção consiste em impor que a resultante destas forças elementares deve ser igual, em módulo e posição, à força cortante  $V_z$ . Uma vez garantida essa última condição é possível afirmar que a linha de ação do traço do plano de cargas, ou do esforço cortante, é o lugar geométrico do centro de cisalhamento.

Fica claro, portanto, que se realizando análises para planos de carregamento em duas direções distintas, nesse caso, em direções coincidentes com os eixos principais  $Y$  e  $Z$  (planos paralelos a  $XY$  e  $XZ$ ), se determina a posição de  $C$  pela interseção dos traços dos planos de carga, os quais podem ser interpretados como lugares geométricos desse mesmo ponto.

Com base na primeira análise estabelecida na Figura 2.7, a condição que permite obter o lugar geométrico da posição do centro de cisalhamento é aquela que garante que a resultante dos momentos das forças elementares, obtidas por “ $\tau dA$ ” em relação a  $C$  por meio da integral em toda a seção, de  $s_1$  a  $s_2$ , seja nula, a saber:

$$M_c = \int_A \tau dAr = \int_{s1}^{s2} \tau t dsr = 0 \quad (2.10)$$

Na Equação (2.10), o parâmetro  $r$  é denominado “raio vetor” e definido pela distância de  $C$  até a tangente à linha média da seção do trecho de interesse, e  $M_c$  é denominado o momento com respeito a  $C$  conforme mostra a Figura 2.8.



**Figura 2.8: Representação esquemática do raio vetor  $r$ .**

Para carregamento na direção do eixo  $Z$  e coincidente com o correspondente esforço cortante (plano de carga paralelo ao plano  $XY$ ), e considerando a validade da Equação (2.5) particularizada para flexão em torno do eixo  $Y$  (Equações (2.6) e (2.8)), tem-se:

$$\int \frac{V_z M_s}{t I_y} dA r = 0 \quad (2.11)$$

Como o esforço cortante e o momento de inércia ( $I_y$ ) são constantes para uma mesma seção transversal, e com base na Equação (2.10), da Equação (2.11) tem-se:

$$\frac{V_z}{I_y} \int_{s1}^{s2} \frac{1}{t} \left( \int_{s1}^s z t ds \right) r t ds = \frac{V_z}{I_y} \int_{s1}^{s2} \left( \int_{s1}^s z t ds \right) r ds \quad (2.12)$$

como  $V_z/I_y \neq 0$ , da última igualdade tem-se que:

$$\int_{s1}^{s2} \left( \int_{s1}^s z t ds \right) r ds = 0 \quad (2.13)$$

A Equação (2.13) consiste de duplo procedimento de integração, cuja resolução é obtida por meio de seguinte integração por partes.

$$\left( \int_{s1}^s ztds \right) \int_{s1}^s rds \Big|_{s1}^{s2} - \int_{s1}^{s2} \left( \int_{s1}^s rds \right) ztds = 0 \quad (2.14)$$

Na Equação (2.14), a parcela  $\int_{s1}^s ztds$  representa o momento estático da seção transversal, que, por definição, é nulo ao longo de toda a linha média da seção, isto é,

$$\int_{s1}^s ztds = 0 \quad \text{e} \quad \int_{s1}^{s2} ztds = 0 \quad (2.15)$$

Portanto, como produto final de interesse, obtém-se:

$$\int_{s1}^{s2} \left( \int_{s1}^s rds \right) ztds = 0 \quad (2.16)$$

O termo entre parênteses  $\int_{s1}^s rds$  é denominado área setorial da seção transversal, proposto em Vlasov (1961) e representado por  $\omega_s$ . Nesse caso, a área setorial e a condição para a determinação da posição do ponto C são escritas nas formas:

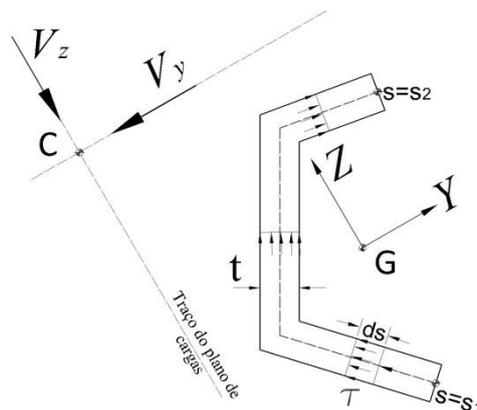
$$\omega_s = \int_{s1}^s rds \quad (2.17)$$

$$\int_A \omega_s z dA = 0 \quad (2.18)$$

Em uma segunda análise, análoga à primeira, supõe-se um plano de carregamento fictício e paralelo ao eixo  $Y$ , procedimento que resulta na equação:

$$\int_A \omega_s y dA = 0 \quad (2.19)$$

Portanto, como condição necessária para determinar o centro de cisalhamento, basta estabelecer planos de carga, nas direções dos eixos principais (por ser mais conveniente), considerados coincidentes com as respectivas forças cortantes resultantes que aparecem em resposta aos carregamentos aplicados. Nesse caso, tem-se como produto final, o conjunto de Equações (2.18) - (2.19), que é suficiente para a determinação de C.



**Figura 2.9: Planos de carregamento fictícios paralelos as direções z e y.**

Cabe destacar que os termos  $\int_A \omega_s z dA$  e  $\int_A \omega_s y dA$  são denominados produtos setoriais da seção transversal, Vlasov (1961), e se referem aos eixos principais de inércia.

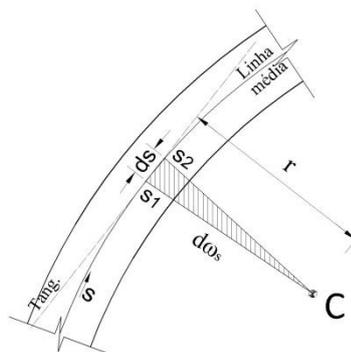
As equações para determinar a posição do centro de cisalhamento são:

$$y_c = \frac{1}{I_y} \int_A z \omega_s dA \quad (2.20)$$

$$z_c = \frac{1}{I_z} \int_A y \omega_s dA \quad (2.21)$$

### 2.3. Área Setorial

Considere-se a linha média de uma seção transversal qualquer, como se mostra na Figura 2.10



**Figura 2.10: Representação da área setorial.**

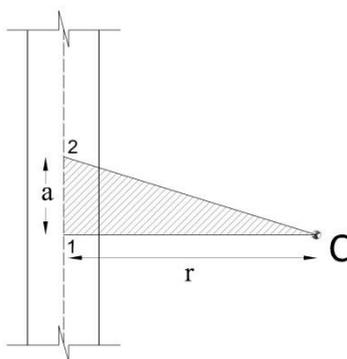
Escolhe-se ao longo da linha média da seção de comprimento de arco  $s$ , um ponto exterior  $C$ , denominado polo (neste caso coincide com o centro de cisalhamento). Sobre o contorno da linha média da seção consideram-se os pontos  $s_1$  e  $s_2$  distantes um do outro de  $ds$ . Denomina-se  $r$  a menor distância entre a reta tangente a  $s_1$  e o polo  $C$ . Liga-se a seguir o ponto  $C$  aos pontos  $s_1$  e  $s_2$ , formando uma área infinitesimal denominada  $d\omega_s$ , que é a diferencial da chamada área setorial.

$$d\omega_s = r \cdot ds \quad (2.22)$$

A área setorial é, pois, dada pela integral:

$$\omega_s = \int_0^s r \cdot ds \quad (2.23)$$

É importante ressaltar que a área setorial  $\omega_s$ , quando calculada em relação a um trecho qualquer da linha média de uma seção, resulta no dobro da área do setor da figura geométrica plana, como mostra a Figura 2.11.



**Figura 2.11: Relação da área setorial com a geométrica.**

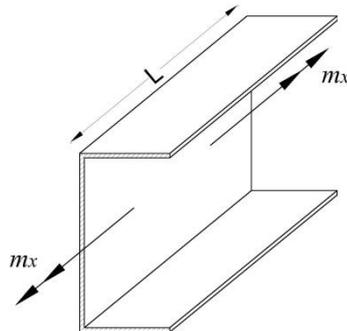
Fazendo uma correlação entre a Figura 2.10 e a Figura 2.11 têm-se:

$$\omega_s = \int_1^2 r ds = r \int_0^a ds = ra \quad (2.24)$$

$$A = \frac{ra}{2} \rightarrow \omega_s = 2A \quad (2.25)$$

## 2.4.

### Torção de perfis de seção aberta e paredes delgadas.



**Figura 2.12: Torção de perfis de seção aberta e parede delgada.**

Quando um perfil de seção aberta e paredes delgadas é submetido a um momento torsor  $m_x$ , Figura 2.12, as suas seções giram em torno do seu próprio eixo e empenam. Se o empenamento for livre nas extremidades e o momento torsor ( $m_x$ ) aplicado for constante, diz-se que o perfil está submetido a uma torção uniforme ou torção de Saint-Venant. Se, por outro lado, o momento torsor for variável ou o empenamento estiver impedido em alguma seção, diz-se que o perfil está submetido a uma torção não uniforme.

No caso mais geral, de um perfil submetido a uma torção não uniforme, o momento torsor resistente é constituído por duas parcelas, o momento devido à torção,  $T_t$ , e o momento devido ao impedimento do empenamento,  $T_e$ . Deste modo, o equilíbrio do perfil corresponde a:

$$m_x = T_t + T_e \quad (2.26)$$

No caso da torção uniforme, apenas existe a primeira parcela.

As duas parcelas do momento torsor relacionam-se com o ângulo de torção  $\theta_x$  do perfil (em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro de cisalhamento da seção transversal) através das expressões:

$$\begin{aligned} T_t &= GJ \frac{d\theta_x}{dx} \\ T_e &= -EI_w \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $X$  é o eixo do perfil e  $GJ$  e  $EI_w$  designam, respectivamente, a rigidez a torção e rigidez ao empenamento. Aqui  $G$  e  $E$  são, respectivamente, os módulos de elasticidade transversal e longitudinal do material e  $J$  e  $I_w$  são respectivamente as constantes de torção e empenamento do perfil. Sabe-se, da resistência dos materiais que:

$$J = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3 \quad (2.28)$$

onde  $b_i$  e  $t_i$  são, respectivamente, a largura e a espessura da  $i$ -ésima parede do perfil.

O cálculo de  $I_w$  é próprio de cada perfil. Por exemplo, para um perfil “C”, a constante de empenamento é obtida pela seguinte equação:

$$I_w = \frac{t_f b^3 h^2}{12} \frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w} \quad (2.29)$$

onde  $t_f$  e  $t_w$  são respectivamente as espessuras da mesa e alma da seção.

A resolução do problema da torção não uniforme de um perfil requer a solução da seguinte equação diferencial de equilíbrio:

$$m_x = GJ \frac{d\theta_x}{dx} - EI_w \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (2.30)$$