

EXTENSÃO DAS FORMULAÇÕES AO PROBLEMA DO ACOPLAMENTO FLUIDO-MECÂNICO

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes do acoplamento fluido-mecânico para um corpo cortado por uma descontinuidade. As equações adotam a formulação apresentada por Lewis e Schrefler (1982) que, por sua vez, foi desenvolvida segundo a Teoria da Poroelasticidade de Biot (1941).

Idealiza-se o corpo ou o meio poroso submetido a um regime de pequenas deformações com o fluxo obedecendo à lei de Darcy. Admitindo que a deformação da matriz rochosa seja pequena, o fluxo é descrito em termos do valor absoluto da velocidade do fluido e não pela diferença de velocidades entre fluido e grãos. Além disso, considera-se que o fluido provoca apenas uma variação volumétrica nos grãos do meio poroso e que os valores de tensão cisalhante no fluido são desprezíveis.

Adotando essas hipóteses, as equações de equilíbrio mecânico e de fluxo de fluido, vistas separadamente nos capítulos 2 e 3, são agora acopladas por meio da introdução de termos relativos à deformação volumétrica do esqueleto sólido e pela aplicação do Princípio da Tensão Efetiva. Exceto pela inserção desses termos, nenhuma outra alteração é feita nas equações ou na aproximação dos campos de deslocamento e poro-pressão.

Ao acoplar as equações do elemento enriquecido, são mantidas as hipóteses de salto de poro-pressão através da direção normal e a variação suave de poro-pressão ao longo da direção tangencial. Características essas que são presentes no meio geológico devido ao contraste de propriedades físicas e reduzida espessura da descontinuidade.

Cabe ressaltar que a principal diferença da formulação do elemento enriquecido para aquela apresentada por de Borst et al (2008) é a descrição do fluxo nas direções normal e tangencial à descontinuidade física. Em sua formulação, de Borst et al (2008) tratou apenas do fluxo tangencial. Como mencionado na seção de revisão bibliográfica, a ausência do salto de poro-

pressão, associado ao fluxo normal, pode conduzir a um menor esforço aplicado na descontinuidade física e, conseqüentemente, a uma menor deformação da descontinuidade física.

4.1. Equação de equilíbrio

O acoplamento da equação de equilíbrio com o fluxo de fluido para um corpo cortado por uma descontinuidade é obtido pela introdução do Princípio de tensão efetiva. Aplicado à descontinuidade e à região fora dela, o Princípio permite relacionar a deformação do meio poroso à variação de poro-pressão que ocorre nele. De acordo com a expressão (2.44), a equação de equilíbrio para um corpo cortado por uma descontinuidade tem a forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_b d\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_s d\Gamma_s + \int_{\Gamma_f} \delta \|\mathbf{u}\| \cdot \dot{\mathbf{F}}_T d\Gamma_f \quad (4.1)$$

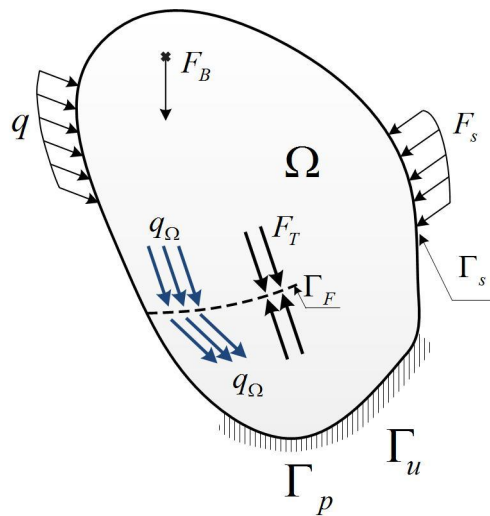


Figura 4-1: Meio poroso parcialmente seccionado por uma descontinuidade

A Figura 4-1 mostra o domínio Ω e o contorno Γ_F como a representação de um meio poroso seccionado por uma descontinuidade e preenchido por um fluido. Se o Princípio da Tensão Efetiva é aplicável ao meio poroso Ω (região fora da descontinuidade), o Princípio é igualmente aplicável sobre o contorno Γ_F (descontinuidade). Desta forma, as variáveis da equação (4.1) passam ser interpretadas como:

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – incremento do vetor tensão total no domínio Ω ;

$\dot{\mathbf{F}}_b$ - incremento do vetor força de massa;

$\dot{\mathbf{F}}_s$ - incremento do vetor força de superfície no contorno Γ_s ;

$\dot{\mathbf{F}}_T$ - incremento do vetor força de superfície total na descontinuidade;

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ – vetor de variação virtual de deformação;

$\delta \mathbf{u}$ – vetor de variação virtual de deslocamento;

$\delta \|\mathbf{u}\|$ – vetor de variação virtual de salto de deslocamento.

Admitindo esta interpretação e, temporariamente, adotando a convenção de que a tensão de tração é positiva, os incrementos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\dot{\mathbf{F}}_T$ podem ser decompostos de acordo com a expressão (4.2).

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{m}\dot{p} \\ \dot{\mathbf{F}}_T &= -1 \cdot (\dot{\mathbf{F}}_T' - \mathbf{m}_F \dot{p})\end{aligned}\quad (4.2)$$

Sendo:

$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]$ para corpos bidimensionais,

$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ para corpos tridimensionais.

Onde:

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ - incremento do vetor tensão efetiva;

$\dot{\mathbf{F}}_T'$ - incremento do vetor de força de superfície efetiva na descontinuidade;

$\dot{p}$ - incremento de poro-pressão;

O vetor $\mathbf{m}$ da expressão (4.2) faz com que a poro-pressão seja somada apenas às componentes normais de tensão. A i -ésima componente do vetor $\mathbf{m}$ assume o valor um para as componentes normais de tensão e zero para as componentes cisalhantes. Referente ao incremento de força de superfície efetiva, a multiplicação por -1 garante que o trabalho realizado por ela seja negativo.

O vetor $\mathbf{m}_F$ tem a mesma função do vetor $\mathbf{m}$, diferenciando-se apenas na forma. Como a descontinuidade tem uma orientação qualquer em relação ao eixo x do sistema global, $\mathbf{m}_F$ pode ser definido como o vetor unitário normal à descontinuidade ($\mathbf{n}_F$). Considerando um intervalo infinitesimal de uma descontinuidade (ilustrado na Figura 4-2, página 101), as componentes do vetor $\mathbf{m}_F$ podem ser associadas aos módulos dos cossenos diretores φ_x e φ_y segundo a expressão (4.3).

$$\mathbf{m}_F = \begin{Bmatrix} |\cos(\varphi_x)| \\ |\cos(\varphi_y)| \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde:

φ_x - ângulo entre o vetor unitário normal à descontinuidade e o eixo x global;

φ_y - ângulo entre o vetor unitário normal à descontinuidade e o eixo y global.

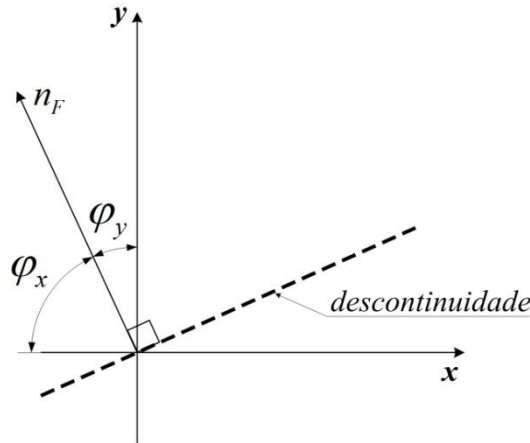


Figura 4-2: Orientação de um infinitésimo da descontinuidade em relação ao sistema de eixo global

O módulo do cosseno diretor é adotado na expressão (4.3) para garantir que a poro-pressão tenha sempre um valor positivo. Para geometrias tridimensionais, a mesma definição do vetor $\mathbf{m}_F$ é válida devendo-se adicionar o cosseno diretor em relação ao eixo z.

Seguindo a formulação apresentada por Lewis e Schrefler (1982) e desprezando qualquer deformação referente à *creep*, processo térmico ou químico, o incremento de tensão efetiva pode ser relacionado à deformação do meio poroso pela relação:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (4.4)$$

Onde:

$\mathbf{D}$ - matriz constitutiva;

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - incremento do vetor deformação total do esqueleto sólido;

$\dot{\epsilon}_p$ - incremento do vetor deformação dos grãos relacionada à variação de poro-pressão.

Adotando que a poro-pressão causa apenas uma deformação volumétrica na partícula sólida (grão), Lewis e Schrefler definiram que:

$$\dot{\epsilon}_p = -\frac{1}{3K_s} \mathbf{m} \dot{p} \quad (4.5)$$

Onde:

K_s - módulo de variação volumétrica da partícula sólida.

A divisão por 3 surge da hipótese de que o grão deforma-se igualmente em todas as direções, logo, em um sistema cartesiano, os incrementos $\dot{\epsilon}_p$ nas direções x, y e z são iguais. O sinal negativo na expressão (4.5) indica que para um aumento de poro-pressão ocorre uma redução no volume do grão.

Analogamente ao incremento de tensão efetiva, é possível estabelecer uma relação entre incremento de força de superfície efetiva e salto de deslocamento.

$$\dot{\mathbf{F}}'_T = \mathbf{D}_F (\|\dot{\mathbf{u}}\| - \|\dot{\mathbf{u}}\|_p) \quad (4.6)$$

$\mathbf{D}_F$ - matriz constitutiva da descontinuidade;

$\|\dot{\mathbf{u}}\|$ - incremento de salto de deslocamento total da descontinuidade;

$\|\dot{\mathbf{u}}\|_p$ - incremento de salto de deslocamento relacionado à deformação dos grãos devido a poro-pressão.

Assumindo que os grãos localizados dentro e fora da descontinuidade têm comportamento idêntico e que apenas a componente normal de salto $\|\dot{\mathbf{u}}\|_p$ contribui para a variação volumétrica, semelhante ao incremento $\dot{\epsilon}_p$, a seguinte relação é estabelecida:

$$\|\dot{\mathbf{u}}\|_p = -\frac{e}{3K_s} \mathbf{m}_F \dot{p} \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) foi obtida a partir da interpretação de que deformação do grão na direção normal à descontinuidade é igual à divisão do incremento de salto $\|\dot{\mathbf{u}}\|_p$ pela espessura da descontinuidade (e).

Introduzindo as expressões (4.4) a (4.7) na expressão (4.2) tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{D}\dot{\epsilon} + \left(-\mathbf{m} + \frac{1}{3K_s}\mathbf{D}\mathbf{m}\right)\dot{p} \\ \dot{\mathbf{F}}_T &= -\mathbf{D}_F\|\dot{\mathbf{u}}\| + \left(\mathbf{m}_F - \frac{e}{3K_s}\mathbf{D}_F\mathbf{m}_F\right)\dot{p}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Inserindo a expressão (4.8) na expressão (4.1), multiplicando a expressão resultante por -1 para tornar a tensão de compressão positiva (Engenharia Geotécnica) e passando os termos referentes à descontinuidade para o lado esquerdo da expressão, define-se a equação de equilíbrio do acoplamento fluido-mecânico por:

$$\begin{aligned}& -\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta \|\mathbf{u}\| \cdot \mathbf{D}_F \cdot \|\dot{\mathbf{u}}\| \, d\Gamma_f + \\ & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_s}\mathbf{D}\mathbf{m}\right) \cdot \dot{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \|\mathbf{u}\| \cdot \left(\mathbf{m}_F - \frac{e}{3K_s}\mathbf{D}_F\mathbf{m}_F\right) \cdot \dot{p} \, d\Gamma_f \\ & = -\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_b \, d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_s \, d\Gamma_s\end{aligned}\quad (4.9)$$

Na expressão (4.9), os termos do lado direito da igualdade representam a ação das forças externas sobre o meio poroso. Do lado esquerdo, os dois primeiros termos têm a mesma interpretação da equação de equilíbrio da seção 2.3. O terceiro e quarto termos introduzem o acoplamento e representam a parcela do carregamento suportado pelo fluido e a variação volumétrica dos grãos devido à variação de poro-pressão respectivamente.

4.2. Equação de fluxo

Ao estabelecer a equação de fluxo no capítulo 3, admitiu-se uma diferença no tratamento dos fluxos normal e tangencial à descontinuidade. Esta abordagem permitiu introduzir uma variação brusca e outra suave de poro-pressão (salto) na descontinuidade. Além disso, afirmou-se que o fluxo ao longo da direção tangencial à descontinuidade e o da região fora dela poderiam ser representados pela mesma equação, devendo-se trocar apenas os parâmetros de material.

Ao estender a equação de fluxo para o acoplamento fluido-mecânico, todas as hipóteses do capítulo 3 são utilizadas, exceto a que despreza o termo de acoplamento. Como o comportamento mecânico deve ser inserido, dois termos de acoplamento ligados ao deslocamento e ao salto surgem. Isso obriga o estabelecimento de duas equações diferenciais: uma para a descontinuidade e outra para a região fora dela. Apesar dessa mudança, o significado e a forma das equações de fluxo das duas regiões são os mesmos.

Os termos que permitem acoplar a equação de fluxo ao comportamento mecânico serão introduzidos primeiro para a região fora da descontinuidade. Esta aproximação já existe e foi apresentada por Lewis e Schrefler (1982). Em seguida, por analogia, os termos de acoplamento são inseridos para a descontinuidade.

Fazendo referência à Figura 4-1, definiu-se, no capítulo 3, que a equação de fluxo para um corpo cortado por uma descontinuidade em um ponto qualquer possui a forma:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4.10)$$

Ao montar a equação de fluxo (4.10), diferentes fatores que influenciam a variação de fluido no interior de um volume infinitesimal foram enumerados e somados (expressões (3.6) a (3.10)). A fim de acoplar o fluxo de fluido ao comportamento mecânico para a região fora da descontinuidade, dois fatores anteriormente desprezados na montagem da equação (4.10) devem ser incluídos. Tratam-se da deformação volumétrica do meio poroso e das partículas sólidas. Como citado no capítulo 3, estes fatores são:

- Taxa de deformação volumétrica do meio poroso

$$\dot{\epsilon}_v = \mathbf{m}^T \dot{\epsilon} \quad (4.11)$$

- Taxa de deformação volumétrica das partículas sólidas devido à mudança na tensão efetiva

$$-\frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \dot{\sigma}' \quad (4.12)$$

O sinal negativo na expressão (4.12) indica que para uma redução no volume da partícula sólida ocorre um aumento no volume de fluido. Referente à tensão efetiva, ela pode ser substituída pelas variáveis de deformação e poro-pressão. Inserindo a expressão (4.5) na expressão (4.4), o incremento de tensão efetiva torna-se:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{D} \left(\dot{\epsilon} + \frac{1}{3K_s} \mathbf{m} \dot{p} \right) \quad (4.13)$$

Introduzindo a expressão (4.13) em (4.12), a taxa de deformação volumétrica das partículas sólidas devido à mudança de tensão efetiva pode ser reescrita na forma:

$$-\frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \left(\dot{\epsilon} + \frac{1}{3K_s} \mathbf{m} \dot{p} \right) \quad (4.14)$$

Conhecidos os termos de acoplamento para a região fora da descontinuidade, a equação de fluxo (4.10) é estendida. Adicionando os termos de acoplamento (4.11) e (4.14) à equação (4.10), define-se a equação de fluxo para a região fora da descontinuidade considerando o acoplamento por:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho g h) \right\} + \left\{ \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \right\} \dot{\epsilon} + s \dot{p} = 0 \quad (4.15)$$

O parâmetro de armazenamento s da equação (4.15) não é o mesmo da equação de fluxo desacoplada (4.10), seu novo valor é:

$$s = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_s} + \frac{1}{(3K_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \mathbf{m} \quad (4.16)$$

Os fatores descritos pelas expressões (4.11) e (4.14) permitem acoplar o comportamento mecânico ao fluxo de fluido para a região fora da descontinuidade. Para a descontinuidade, fatores semelhantes são introduzidos.

A expressão (4.11) mostra que a taxa de deformação volumétrica do meio poroso está relacionada apenas às componentes normais de deformação. Este mesmo raciocínio é aplicado à descontinuidade. Por hipótese, a descontinuidade

não é descrita por deformação, mas este valor pode ser aproximado ou idealizado. Dividindo o salto de deslocamento na direção normal pela espessura da descontinuidade, uma variável equivalente à deformação é obtida. Logo:

➤ Taxa de variação volumétrica da descontinuidade

$$\mathbf{m}_F^T \cdot \frac{1}{e} \|\dot{\mathbf{u}}\| \quad (4.17)$$

Onde:

e - espessura da descontinuidade

O vetor $\mathbf{m}_F$ na expressão (4.17) tem o mesmo significado da equação de equilíbrio e garante que apenas a componente normal de salto de deslocamento seja contabilizada.

Com relação à taxa de deformação das partículas sólidas devido à mudança de tensão efetiva, a expressão (4.12) diz que a deformação dos grãos é obtida pela divisão da tensão média atuante pelo módulo de variação volumétrica dos grãos (K_s). Assumindo que o grão na descontinuidade deforma-se do mesmo modo que fora dela e trocando a tensão efetiva pela força de superfície efetiva, a taxa de variação volumétrica dos grãos na descontinuidade é representada por:

$$-\frac{1}{3K_s} \cdot \mathbf{m}_F^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_T \quad (4.18)$$

Semelhante à tensão efetiva, a força de superfície efetiva pode ser descrita pelo salto de deslocamento e pela poro-pressão na descontinuidade. Substituindo a expressão (4.7) na expressão (4.6), o incremento de força de superfície efetiva torna-se:

$$\dot{\mathbf{F}}_T = \mathbf{D}_F \left(\|\dot{\mathbf{u}}\| + \frac{e}{3K_s} \mathbf{m}_F^T \dot{\mathbf{p}} \right) \quad (4.19)$$

Introduzindo a expressão (4.19) em (4.18), a taxa de deformação volumétrica dos grãos devido à mudança de força de superfície efetiva pode ser reescrita como:

$$-\frac{1}{3K_S} \cdot \mathbf{m}_F^T \cdot \mathbf{D}_F \left(\|\dot{\mathbf{u}}\| + \frac{e}{3K_S} \mathbf{m}_F \dot{p} \right) \quad (4.20)$$

Adicionando os termos de acoplamento (4.17) e (4.20) à expressão (4.10), define-se a equação de fluxo acoplada para a descontinuidade por:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\frac{1}{e} \mathbf{m}_F^T - \frac{1}{3K_S} \mathbf{m}_F^T \mathbf{D}_F \right) \|\dot{\mathbf{u}}\| + s_F \dot{p} = 0 \quad (4.21)$$

Sendo o parâmetro de armazenamento na descontinuidade (s_F):

$$s_F = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_S} + \frac{e}{(3K_S)^2} \mathbf{m}_F^T \mathbf{D}_F \mathbf{m}_F \quad (4.22)$$

As expressões (4.21) e (4.15) são as equações de fluxo acopladas para a descontinuidade e para a região fora dela. Apesar de diferentes, os seus termos possuem os mesmos significados. O primeiro termo do lado esquerdo da igualdade indica a variação que o fluxo sofre ao atravessar um volume infinitesimal de meio poroso, o segundo e terceiro termos indicam a variação de fluido no interior do volume infinitesimal.

Conhecidas as equações de fluxo diferenciais (4.15) e (4.21), elas são agora integradas sobre os domínios Ω e Γ_F . Quanto ao processo de integração, apenas uma observação é feita. Diferente da equação de equilíbrio, a área da seção transversal da descontinuidade deve ser considerada. O motivo é que o fluxo sempre é associado ao volume de um corpo.

Ao serem colocadas estas observações e mantendo os símbolos Γ_F e Ω para designar a descontinuidade e a região fora dela, a equação de fluxo, considerando o acoplamento para um corpo cortado por uma descontinuidade, é definida por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_S} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \right) \dot{\mathbf{e}} + s \dot{p} \right) d\Omega + \\ \int_{\Gamma_F} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\frac{1}{e} \mathbf{m}_F^T - \frac{1}{3K_S} \mathbf{m}_F^T \mathbf{D}_F \right) \|\dot{\mathbf{u}}\| + s_F \dot{p} \right) A_F d\Gamma_F = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Onde:

A_F - área da seção transversal da descontinuidade.

Para um corpo bidimensional com profundidade unitária, o valor da área A_F é igual ao próprio valor da espessura da descontinuidade (expressão (4.24)).

$$A_F = 1 \cdot e \quad (4.24)$$

Esta consideração permite reescrever a equação (4.23) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_S} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + s \dot{p} \right) d\Omega + \\ \int_{\Gamma_F} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} e + \left(\mathbf{m}_F^T - \frac{e}{3K_S} \mathbf{m}_F^T \mathbf{D}_F \right) |\dot{\mathbf{u}}| + s_F \dot{p} e \right) d\Gamma_F = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ao considerar a área da seção transversal, nota-se que o termo de acoplamento da equação de fluxo (4.25) é o mesmo da equação de equilíbrio (4.9). Adotando a notação do capítulo 3, as integrais de fluxo nos domínios Ω e Γ_F passarão a ser representadas pelos termos C' e C'' respectivamente, permitindo definir a equação de fluxo para o corpo da Figura 4-1 como:

$$C' + C'' = 0 \quad (4.26)$$

As condições de contorno de poro-pressão e fluxo prescrito são as mesmas da seção 3.1.

4.3.

Aplicação do Método de Elementos Finitos às equações de equilíbrio e fluxo de fluido

A aplicação do MEF às equações de equilíbrio e fluxo de fluido para um corpo cortado por uma descontinuidade segue os mesmos procedimentos descritos nos capítulos 2 e 3. Por essa razão, detalhes referentes à aproximação dos campos de deslocamento e poro-pressão e integração não são feitos.

Empregando as aproximações de deslocamento, deformação e poro-pressão (expressões (2.55), (2.56) e (3.37)), define-se a equação de equilíbrio do acoplamento fluido-mecânico para o elemento enriquecido por:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta]^T \cdot \mathbf{D} \cdot [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta] d\Omega_e \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{u}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{u}}^\beta \end{matrix} \right\} \\
 & - \int_{\Gamma_{Fe}} [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \mathbf{D}_F \cdot [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}^\beta] d\Gamma_{Fe} \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{u}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{u}}^\beta \end{matrix} \right\} + \\
 & \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta]^T \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_s} \mathbf{D} \mathbf{m} \right) \cdot [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta] \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{p}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{p}}^\beta \end{matrix} \right\} d\Omega_e + \\
 & \int_{\Gamma_{Fe}} [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \left(\mathbf{m}_F - \frac{e}{3K_s} \mathbf{D}_F \mathbf{m}_F \right) \cdot [\mathbf{N}^f] \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{p}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{p}}^\beta \end{matrix} \right\} d\Gamma_{Fe} \\
 & = - \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \mathbf{F}_b d\Omega_e - \int_{\Gamma_{Se}} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \mathbf{F}_s d\Gamma_{Se}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

O vetor $\mathbf{N}^f$ da expressão (4.27) é o mesmo apresentado item 3.2.2. Referente às integrais ao longo de Γ_F , um vetor linha nulo ($\mathbf{0}$) foi incluído para eliminar a contribuição dos graus de liberdade $\dot{\mathbf{u}}^\alpha$, tratando-se apenas de uma notação matricial.

Utilizando as aproximações dos campos de deformação, salto de deslocamento, poro-pressão e gradiente de poro-pressão (expressões (2.55), (2.56), (3.37) e (3.38)), define-se a forma aproximada dos termos C' e C'' da equação de fluxo (4.26) por:

$$\begin{aligned}
 C'_e &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_p^\alpha \quad \mathbf{B}_p^\beta]^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta] d\Omega_e \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{matrix} \right\} + \\
 & \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D} \right) \cdot [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta] d\Omega_e \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{u}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{u}}^\beta \end{matrix} \right\} + \\
 & \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot s \cdot [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta] d\Omega_e \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{p}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{p}}^\beta \end{matrix} \right\} + \\
 & \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_p^\alpha \quad \mathbf{0}]^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega_e + \int_{\Gamma_{qe}} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{qe}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
 C''_e &= \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_{Fe} \mathbf{p}^\beta + \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^f e d\Gamma_{Fe} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{matrix} \right\} + \\
 & \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^f)^T \cdot \left(\mathbf{m}_F^T - \frac{e}{3K_s} \mathbf{m}_F^T \mathbf{D}_F \right) \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_{Fe} \dot{\mathbf{u}}^\beta + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^f)^T \cdot s_F \cdot \mathbf{N}^f e d\Gamma_{Fe} \left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{p}}^\alpha \\ \dot{\mathbf{p}}^\beta \end{matrix} \right\} \\
 & + \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Gamma_F^e + \int_{\Gamma_q^f} (\mathbf{N}^f)^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^f
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

O termo $\mathbf{B}_p^f$ na expressão (4.29) é a matriz gradiente associada à poro-pressão ao longo da descontinuidade apresentada no item 3.2.2. A equação de fluxo acoplada para o elemento enriquecido é obtida somando-se as expressões (4.28) e (4.29) como mostrado na equação (4.30).

$$C_e' + C_e'' = 0 \quad (4.30)$$

As equações de equilíbrio (4.27) e fluxo de fluido (4.30) podem ser reescritas, em um modo mais compacto, nas equações (4.31) e (4.32) respectivamente por:

$$\mathbf{K}_e \cdot \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{L}_e \cdot \dot{\mathbf{p}}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \quad (4.31)$$

$$\mathbf{H}_e \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{S}_e \cdot \dot{\mathbf{p}}_e + \mathbf{L}_e^T \cdot \dot{\mathbf{u}}_e = \mathbf{Q}_e \quad (4.32)$$

$\mathbf{K}_e$, $\mathbf{H}_e$, $\mathbf{S}_e$ e $\mathbf{L}_e$ são as matrizes de rigidez, permeabilidade, armazenamento e de acoplamento do elemento enriquecido. Seguindo a mesma notação dos capítulos 2 e 3, cada matriz tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{K}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{H}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{H}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{H}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{L}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{L}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{L}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{S}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{S}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{S}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\alpha)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^\alpha d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\alpha)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^\beta d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{\beta\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\beta)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^\alpha d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{\beta\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\beta)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^\beta d\Omega_e + \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \mathbf{D}_F \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_{Fe} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\alpha d\Omega_e \\
 \mathbf{H}_e^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\beta d\Omega_e \\
 \mathbf{H}_e^{\beta\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_p^\beta)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\alpha d\Omega_e \\
 \mathbf{H}_e^{\beta\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_p^\beta)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\beta d\Omega_e + \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_{Fe} \\
 &\quad + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^f d\Gamma_F^e
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega_e \\
 \mathbf{S}_e^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega_e \\
 \mathbf{S}_e^{\beta\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_e^{\beta\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega_e + \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^f)^T \cdot \mathbf{s}_F \cdot \mathbf{N}^f d\Gamma_{Fe} \\
 \mathbf{L}_e^{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\alpha)^T \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3Ks} \mathbf{Dm} \right) \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega_e \\
 \mathbf{L}_e^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\alpha)^T \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3Ks} \mathbf{Dm} \right) \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega_e \\
 \mathbf{L}_e^{\beta\alpha} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\beta)^T \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3Ks} \mathbf{Dm} \right) \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega_e \\
 \mathbf{L}_e^{\beta\beta} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\beta)^T \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3Ks} \mathbf{Dm} \right) \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega_e + \\
 &\quad \int_{\Gamma_{Fe}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \left(\mathbf{m}_F - \frac{e}{3Ks} \mathbf{D}_F \mathbf{m}_F \right) \cdot \mathbf{N}^f d\Gamma_{Fe}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Os vetores de força ($\dot{\mathbf{F}}_e$) e fluxo nodal ($\mathbf{Q}_e$) são:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{F}}_e &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_e^\alpha \\ \dot{\mathbf{F}}_e^\beta \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_e &= \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e^\alpha \\ \mathbf{Q}_e^\beta \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{F}}_e^\alpha &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_b d\Omega_e + \int_{\Gamma_{S_e}} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_s d\Gamma_{S_e} \\
 \dot{\mathbf{F}}_e^\beta &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_b d\Omega_e + \int_{\Gamma_{S_e}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_s d\Gamma_{S_e} \\
 \mathbf{Q}_e^\alpha &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_e}} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{q_e} + \int_{\Gamma_q^F} (\mathbf{N}^f)^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^F \\
 \mathbf{Q}_e^\beta &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{0})^T \cdot \frac{\mathbf{k}_T}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_e}} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{q_e}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

A maioria das integrais referentes ao domínio Γ_{F_e} nas expressões (4.34) a (4.39) pode ser obtida analiticamente. Em relação às submatrizes $\mathbf{K}_e^{\beta\beta}$ e $\mathbf{L}_e^{\beta\beta}$, expressões (4.34) e (4.37) respectivamente, deve-se atentar que as integrais ao longo de Γ_{F_e} estão expressas no sistema global de coordenadas. Caso essas integrais sejam resolvidas no sistema de coordenadas da descontinuidade, é necessário introduzir a matriz de rotação antes de adicioná-las à matriz do elemento enriquecido expressa no sistema global. A integral ao longo de Γ_{F_e} presente na submatriz $\mathbf{K}_e^{\beta\beta}$ deve ser pré e pós-multiplicada pela matriz de rotação, enquanto a integral ao longo de Γ_{F_e} na submatriz $\mathbf{L}_e^{\beta\beta}$ deve ser apenas pré-multiplicada pela matriz de rotação.

Quanto à solução do sistema de equações formado, duas técnicas podem ser aplicadas: *staggered* ou totalmente acoplado. Nessa pesquisa, adota-se o método totalmente acoplado, isto é, as equações de equilíbrio mecânico e de fluxo de fluido são solucionadas ao mesmo tempo.