

4 Análise de Sensibilidade

4.1 Considerações Gerais

Conforme visto no Capítulo 2, os algoritmos utilizados neste trabalho necessitam das derivadas da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto para determinar a direção de busca do processo de otimização.

De forma geral, os gradientes da função objetivo e das restrições são calculados a partir dos gradientes das respostas da estrutura determinadas na etapa de análise. Dependendo do problema, as respostas de interesse podem ser deslocamentos, tensões, frequências naturais e cargas críticas. Outra grandeza de interesse, muito utilizada como função objetivo, é o peso (volume) da estrutura.

A análise de sensibilidade, também chamada de gradientes das respostas da estrutura, desempenha um papel central no processo de otimização pois é avaliada a cada passo do algoritmo.

Neste capítulo, são desenvolvidas analiticamente as sensibilidades dos deslocamentos e a sensibilidade da carga limite para o elemento de pórtico com comportamento geometricamente não-linear, bem como uma aproximação utilizada neste trabalho a fim de se adaptar as características da análise não-linear vista no capítulo anterior. É apresentado também o método das diferenças finitas a fim de se validar as formulações analíticas. Por fim são analisados alguns exemplos para validar as implementações.

4.2 Método Analítico

O método analítico consiste na diferenciação direta das equações de equilíbrio lineares e não-lineares. Para facilitar o desenvolvimento das equações para o cálculo da sensibilidade, considera-se uma estrutura descrita por uma única variável de projeto x .

4.2.1 Sensibilidade dos Deslocamentos

A equação de equilíbrio na análise linear é dada por:

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{u}(x) = \mathbf{P}(x) \quad (4.1)$$

derivando-se (4.1) em relação a variável de projeto x , obtém-se

$$\frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{u}(x) + \mathbf{K}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \frac{d\mathbf{P}}{dx} \quad (4.2)$$

Reorganizando (4.2) temos

$$\mathbf{K}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \frac{d\mathbf{P}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{u}(x) \quad (4.3)$$

onde $d\mathbf{u}/dx$ representa a sensibilidade dos deslocamentos com relação às variáveis de projeto x . Para calcular $d\mathbf{u}/dx$, os seguintes passos devem ser seguidos:

- (i) resolver a equação (4.1) para \mathbf{u} ,
- (ii) computar o lado direito da equação (4.3) (chamado de *pseudo-forças*),
- (iii) resolver a equação (4.3) para $d\mathbf{u}/dx$ usando a já decomposta matriz de rigidez, realizando somente retrosubstituições com o vetor de *pseudo-forças*.

Na análise não-linear, a equação de equilíbrio incremental é dada da seguinte forma:

$$\Delta\mathbf{R}(\mathbf{F}(x), \Delta\mathbf{u}(x); x) = \Delta\mathbf{P}(x) - \Delta\mathbf{F}(\mathbf{F}(x), \Delta\mathbf{u}(x); x) = 0 \quad (4.4)$$

onde \mathbf{P} é suposto, no caso geral, dependente das variáveis de projeto.

Derivando-se (4.4) em relação a variável de projeto x

$$\frac{d\Delta\mathbf{P}}{dx} - \frac{\partial\Delta\mathbf{F}}{\partial\mathbf{F}}\frac{d\mathbf{F}}{dx} - \frac{\partial\Delta\mathbf{F}}{\partial\Delta\mathbf{u}}\frac{d\Delta\mathbf{u}}{dx} - \frac{\partial\Delta\mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

Reorganizando os termos de (4.5) e fazendo uso da seguinte relação

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} = \frac{\partial \Delta \mathbf{F}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \quad (4.6)$$

tem-se

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\Delta \mathbf{u}}{dx} = \frac{d\Delta \mathbf{P}}{dx} - \frac{\partial \Delta \mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{F}} \frac{d{}^t\mathbf{F}}{dx} - \frac{\partial \Delta \mathbf{F}}{\partial x} \quad (4.7)$$

onde $d\Delta \mathbf{u}/dx$ representa a sensibilidade dos incrementos de deslocamentos com relação às variáveis de projeto x . A equação (4.7) pode ser escrita usando a seguinte notação

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\Delta \mathbf{u}}{dx} = \frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}}{dx} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(x)} = \frac{d\Delta \mathbf{P}}{dx} - \frac{d\Delta \mathbf{F}}{dx} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(x)} \quad (4.8)$$

onde o lado direito de (4.7) é diferenciado de forma total desconsiderando-se a dependência implícita de $\Delta \mathbf{u}$ sobre x .

Observa-se agora que, devido a formulação utilizar o RLA, tem-se um problema dependente do caminho (*path-dependent*), ou seja, a sensibilidade das forças internas $d{}^t\mathbf{F}/dx$ computada na etapa anterior entra no lado direito da equação (4.7), e sua atualização para o próximo passo é dada da seguinte forma:

$$\frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{dx} = \frac{d\Delta \mathbf{F}}{dx} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(x)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d\Delta \mathbf{u}}{dx} \quad (4.9)$$

A equação (4.8) é a equação básica para a solução da sensibilidade incremental dos deslocamentos e algumas observações podem ser feitas ao seu respeito:

- A matriz do lado esquerdo da equação (4.8) é a mesma matriz de rigidez tangente obtida após a convergência para um ponto de equilíbrio.
- Na etapa de referência t , o lado direito da equação (4.8) é conhecido.

- A equação de sensibilidade em (4.8) é linear em $d\Delta\mathbf{u}/dx$. Assim nenhuma iteração é necessária para resolvê-la.
- A sensibilidade é computada de forma incremental no final do passo, uma vez conhecida a sensibilidade de $d^t\mathbf{F}/dx$ no início do passo. Conseqüentemente as sensibilidades incrementais têm que ser computadas no final do passo, atualizadas e armazenadas para serem usadas no próximo passo.

4.2.2 Método Analítico Aproximado (MAA)

A equação (4.8), descrita acima, necessita de um grande esforço computacional para o cálculo das sensibilidades incrementais. Em cada passo de carga é necessário avaliar a sensibilidade dos deslocamentos incrementais, o que envolve a resolução de um sistema de equações lineares para cada variável de projeto x .

A determinação dos pontos críticos feita no presente trabalho (seção 3.5) gera, com a diminuição do GSP, muitos incrementos de carga antes do ponto crítico, o que tornaria o processo de otimização bastante lento se para cada ponto de equilíbrio fossem atualizadas as sensibilidades incrementais. Para adaptar a análise de sensibilidade ao presente trabalho, foram feitas algumas considerações apresentadas a seguir.

A sensibilidade dos deslocamentos incrementais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\Delta\mathbf{u}}{dx} = \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{dx} - \frac{d^t\mathbf{u}}{dx} \quad (4.10)$$

Pré-multiplicando (4.10) por ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)}$ e substituindo o resultado em (4.8), tem-se

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{dx} = \frac{d\Delta\mathbf{P}}{dx} - \frac{d\Delta\mathbf{F}}{dx} \Big|_{\Delta\mathbf{u} \neq \Delta\mathbf{u}(x)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d^t\mathbf{u}}{dx} \quad (4.11)$$

Tomando-se derivada de x da relação de equilíbrio no passo anterior dada abaixo

$$\frac{d}{dx} \left[{}^t \mathbf{P} - \mathbf{F}({}^t \mathbf{u}(x); x) \right] = \frac{d {}^t \mathbf{P}}{dx} - {}^t \mathbf{K}^{(T)} \frac{d {}^t \mathbf{u}}{dx} - \frac{\partial {}^t \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

e somando-se (4.12) a (4.11), tem-se a seguinte relação

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(T)} \frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{dx} = \frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}}{dx} - \frac{\partial {}^t \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{d \Delta \mathbf{F}}{dx} \Bigg|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(x)} + ({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(T)} - {}^t \mathbf{K}^{(T)}) \frac{d {}^t \mathbf{u}}{dx} \quad (4.13)$$

onde

$$\frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}}{dx} = \frac{d {}^t \mathbf{P}}{dx} + \frac{d \Delta \mathbf{P}}{dx} \quad (4.14)$$

Conforme visto na seção 3.44, as estratégias de incremento automático de carga têm como objetivo gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear e produzir grandes incrementos quando a resposta da estrutura for aproximadamente linear, o que faz com que a variação da rigidez da estrutura no intervalo $[t, t + \Delta t]$ seja pequena, então

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(T)} - {}^t \mathbf{K}^{(T)} \cong 0 \quad (4.15)$$

e o termo $d {}^t \mathbf{u}/dx$ é eliminado de (4.13).

Finalmente, quando as forças externas \mathbf{P} independem de x ,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(T)} \frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{dx} = - \frac{\partial {}^t \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{d \Delta \mathbf{F}}{dx} \Bigg|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(x)} = {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}} \quad (4.16)$$

onde ${}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}}$ seria o vetor de *pseudo-forças*.

A equação (4.16) é uma equação aproximada para o cálculo da sensibilidade total dos deslocamentos e algumas observações podem ser feitas a seu respeito:

- A matriz do lado esquerdo da equação (4.16) é a mesma matriz de rigidez tangente obtida após a convergência para equilíbrio em $t + \Delta t$.
- Na etapa de referência t , o lado direito da equação (4.16) é conhecido.

- A equação de sensibilidade em (4.16) é linear em $d^{t+\Delta t} \mathbf{u}/dx$. Assim nenhuma iteração é necessária para resolvê-la.
- A sensibilidade $d^{t+\Delta t} \mathbf{u}/dx$ é computada a qualquer instante desejado, uma vez conhecida a sensibilidade de $\partial^t \mathbf{F}/\partial x$. Conseqüentemente, somente a sensibilidade da força interna tem que ser computada no final do passo, atualizada e armazenada para ser usada no próximo passo.

4.2.3

Sensibilidade da Carga Limite

Para se calcular a sensibilidade da carga limite basta considerar o fator de carga λ como dependente implicitamente de x , ou seja, o vetor de carregamento externo fica definido como :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{P} = {}^{t+\Delta t} \lambda(x) \mathbf{P}_{\text{ref}}(x) = {}^t \lambda(x) \mathbf{P}_{\text{ref}}(x) + \Delta \lambda \mathbf{P}_{\text{ref}}(x) \quad (4.17)$$

onde \mathbf{P}_{ref} é um vetor de referência de magnitude arbitrária.

Derivando-se (4.17) em relação a x , tem-se:

$$\frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}}{dx} = \frac{d {}^{t+\Delta t} \lambda}{dx} \mathbf{P}_{\text{ref}} + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{d \mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx} \quad (4.18)$$

Assim a equação (4.13) fica da seguinte forma

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(T)} \frac{d {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{dx} = \frac{d {}^{t+\Delta t} \lambda}{dx} \mathbf{P}_{\text{ref}} + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{d \mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx} - {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}} \quad (4.19)$$

No nível da carga crítica (${}^{t+\Delta t} \lambda = \lambda^*$), um asterisco é adicionado nos termos de (4.19) para identificar o ponto onde eles estão sendo avaliados. Então se escreve

$$\mathbf{K}^{(T)*} \frac{d \mathbf{u}^*}{dx} = \frac{d \lambda^*}{dx} \mathbf{P}_{\text{ref}} + \lambda^* \frac{d \mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx} - \bar{\mathbf{F}}^* \quad (4.20)$$

A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}^{(T)*}$ é singular e $\mathbf{K}^{(T)*}\varphi = \varphi^T\mathbf{K}^{(T)*} = 0$, onde φ é o autovetor associado com o autovalor nulo da matriz $\mathbf{K}^{(T)*}$. Pré-multiplicando a equação anterior por φ^T , tem-se

$$\varphi^T\mathbf{K}^{(T)*}\frac{d\mathbf{u}^*}{dx} = \varphi^T\frac{d\lambda^*}{dx}\mathbf{P}_{\text{ref}} + \varphi^T\lambda^*\frac{d\mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx} - \varphi^T\bar{\mathbf{F}}^* \quad (4.21)$$

Eliminando os termos nulos $\mathbf{K}^{(T)*}\varphi = \varphi^T\mathbf{K}^{(T)*} = 0$ e isolando o termo com $d\lambda^*/dx$, tem-se

$$\varphi^T\frac{d\lambda^*}{dx}\mathbf{P}_{\text{ref}} = \varphi^T\bar{\mathbf{F}}^* - \varphi^T\lambda^*\frac{d\mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx} \quad (4.22)$$

Finalmente, tem-se a expressão para o cálculo da sensibilidade do ponto limite:

$$\frac{d\lambda^*}{dx} = \frac{\varphi^T\left[\bar{\mathbf{F}}^* - \lambda^*\frac{d\mathbf{P}_{\text{ref}}}{dx}\right]}{\varphi^T\mathbf{P}_{\text{ref}}} \quad (4.23)$$

ou, quando as forças externas \mathbf{P}_{ref} independem de x

$$\frac{d\lambda^*}{dx} = \frac{\varphi^T\bar{\mathbf{F}}^*}{\varphi^T\mathbf{P}_{\text{ref}}} \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é uma equação aproximada para o cálculo da sensibilidade da carga crítica e algumas observações podem ser feitas a seu respeito:

- A sensibilidade é calculada de maneira direta, uma vez que o vetor das pseudo-forças é calculado de maneira incremental e conhecido no ponto crítico.
- O autovetor associado com o autovalor nulo da matriz é calculado através do método das inversas generalizadas para a matriz $\mathbf{K}^{(T)*}$.

4.3 Método das Diferenças Finitas (MDF)

A mais simples técnica para cálculo da sensibilidade com respeito a variável de projeto é a aproximação por diferenças finitas. Esta técnica é geralmente cara computacionalmente, mas é de fácil implementação e por isto muito usada.

A mais simples aproximação por diferenças finitas é a de primeira ordem, chamada de diferença a frente. Seja a função $f(x)$, onde x é a variável de projeto. A aproximação de primeira ordem, $\Delta f / \Delta x$, para a derivada, df/dx , é dada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.25)$$

onde Δx é uma perturbação absoluta, pequena o suficiente para produzir resultados satisfatórios. Geralmente essa perturbação é definida através da seguinte expressão:

$$\Delta x = \eta x \quad (4.26)$$

onde η é o valor da perturbação relativa.

A maior dificuldade no MDF é selecionar o valor da perturbação η , se for selecionada uma pequena perturbação, para reduzir o erro de truncamento (pois a derivada só é exata quando Δx tende a zero), pode-se ter um excessivo erro de arredondamento causado pela forma como os números reais são representados nos computadores. Perturbações relativas entre 10^{-4} a 10^{-8} geralmente levam a bons resultados, o suficiente para aplicações práticas.

4.4 Exemplos

Nesta seção são apresentados exemplos de análise de sensibilidade de estruturas geometricamente não-lineares. Os exemplos tratam tanto da sensibilidade dos deslocamentos nodais como da sensibilidade das cargas críticas das estruturas. Os objetivos são verificar a validade das expressões apresentadas neste capítulo, testar a implementação computacional e comparar a precisão dos métodos discutidos anteriormente.

As estruturas foram analisadas através do MEF utilizando a estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico juntamente com o método de Newton-Raphson Padrão, com incremento automático do comprimento de arco controlando o valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. No início do processo adotou-se: $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$. Para controlar a convergência foi adotado $\zeta = 10^{-3}$. A malha menos refinada possui 20 elementos e a malha mais refinada 100 elementos sendo as mesmas utilizadas na seção 3.6.

O MDF foi utilizado para verificar a consistência das sensibilidades calculadas pelo MAA, utilizou-se η variando de 10^{-4} a 10^{-8} , sendo considerado como válido o que melhor representa a tendência dos resultados. Geralmente a perturbação de 10^{-5} apresentou bons resultados.

4.4.1 Pórtico de Lee

A geometria do pórtico é mostrada na figura 4.1. O comportamento desta estrutura foi estudado no capítulo anterior. Os valores numéricos empregados são $L = 120$, $H = 120$, $L_p = 24$ e $P = 1$. A seção transversal do pórtico é retangular de dimensões $b = 3$ e $h_1 = h_2 = 2$ e o material utilizado apresenta $E = 720$. As variáveis de projeto são as alturas das barras (h).

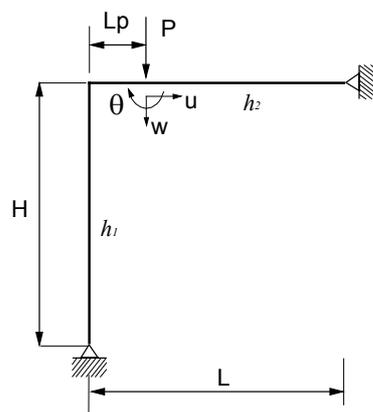


Figura 4.1. Pórtico de Lee.

O deslocamento vertical (w) do ponto de aplicação da carga e a sua sensibilidade calculada pelos MAA e MDF, para diversos fatores de carga, são apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2.

TABELA 4.1
Pórtico de Lee – deslocamentos e sensibilidades para h_1

λ	n° de Elementos	w	dw/dh ₁	
			MAA	MDF
0,6	20	4.8014	-3.8981	-3.8949
	100	4.8105	-3.9101	-3.9103
1,5	20	25.7312	-47.1949	-47.0603
	100	25.8404	-47.1719	-47.1741
1,8	20	41.0602	-76.3053	-76.0002
	100	41.3742	-77.7288	-77.7172

TABELA 4.2
Pórtico de Lee – deslocamentos e sensibilidades para h_2

λ	n° de Elementos	w	dw/dh ₂	
			MAA	MDF
0,6	20	4.8014	-5.8162	-5.8122
	100	4.8105	-5.8314	-5.8314
1,5	20	25.7312	-45.6404	-45.5511
	100	25.8404	-45.8695	-45.8706
1,8	20	41.0602	-119.6585	-119.5125
	100	41.3784	-126.3417	-126.3255

A carga crítica e a sua sensibilidade calculada pelos MAA e MDF são mostradas na tabela 4.3.

TABELA 4.3
Pórtico de Lee – cargas críticas e sensibilidades

n° de elementos	λ_{cr}	d λ_{cr} / dh ₁		d λ_{cr} / dh ₂	
		MAA	MDF	MAA	MDF
20	1.86291	0.5665	0.5635	2.2323	2.2323
100	1.85570	0.5591	0.5623	2.2240	2.2280

4.4.2 Pórtico de Williams

A geometria do pórtico é mostrada na figura 4.2. O comportamento desta estrutura foi estudado no capítulo anterior. Os valores numéricos empregados são

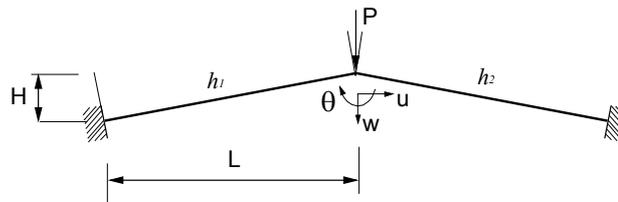


Figura 4.2. Pórtico de Williams.

$L = 12.943$, $H = 0.386$, e $P = 1$. A seção transversal do pórtico é retangular de dimensões $b = 0.753$ e $h_1 = h_2 = 0.243$ e o módulo de elasticidade é 1.03×10^7 . As variáveis de projeto são as alturas das barras (h).

TABELA 4.4
Pórtico de Williams – deslocamentos e sensibilidades para h_1

λ	n° de elementos	W	dw/dh ₁	
			MAA	MDF
10	20	3.0740×10^{-2}	-0.1154	-0.1155
	100	3.0760×10^{-2}	-0.1156	-0.1156
25	20	9.8397×10^{-2}	-0.5899	-0.5908
	100	9.8694×10^{-2}	-0.5956	-0.5954
33	20	18.1613×10^{-2}	-3.4035	-3.4066
	100	18.4330×10^{-2}	-3.7314	-3.7355

O deslocamento vertical (w) do ponto de aplicação da carga e a sua sensibilidade calculada pelos MAA e MDF, para diversos fatores de carga, são apresentados na tabela 4.4. A carga crítica e a sua sensibilidade calculada pelos MAA e MDF são mostradas na tabela 4.5.

TABELA 4.5
Pórtico de Williams – cargas críticas e sensibilidades

n° de elementos	λ_{cr}	d λ_{cr} / dh ₁	
		MAA	MDF
20	34.005	17.1285	17.1001
100	33.870	17.0632	17.0823