

3

Análise Não-Linear Geométrica

3.1

Comentários Iniciais

Este capítulo começa com uma breve discussão sobre o comportamento não linear, o objetivo da análise não linear, e o seu lugar na engenharia estrutural. As fontes de não linearidade mais importantes no projeto de pórticos são listadas e a formulação do problema será definida, onde são apresentados os referenciais Lagrangianos. Estratégias para a solução numérica de equações não lineares são mostradas, bem como as estratégias de incremento de carga, as estratégias de iteração e os critérios de convergência. O capítulo termina mostrando soluções clássicas existentes de alguns problemas elementares.

3.2

Comportamento Não-Linear, Análise e Projeto

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos. É importante notar que, a cada passo do processo de otimização, é necessário se determinar a resposta da estrutura de forma a verificar se as restrições de projeto são atendidas. Conseqüentemente, o processo de análise deve ser o mais eficiente possível.

A maioria das estruturas de engenharia exibem um comportamento linear elástico sob cargas de serviços. Existem exceções como arcos e edifícios altos, e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração, por exemplo, que apresentam um comportamento não-linear. Antes de alcançar o seu limite de resistência, quase todas essas estruturas vão apresentar uma resposta não-linear significativa.

Na análise não-linear tenta-se melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. O objetivo fundamental é se obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como consequência,

tem-se um aumento da complexidade do problema e conseqüente aumento do custo computacional.

3.2.1

Fontes de Não-Linearidade

O comportamento não-linear de uma estrutura, sob ação de um carregamento qualquer, pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se:

Não-linearidade Física. Decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Os efeitos não lineares são descritos por formas mais complexas de equações constitutivas (matrizes constitutivas não-lineares e/ou equações constitutivas em termos de “taxas” ou “incrementos”). Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de conexões semi-rígidas ou flexíveis, ou de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados (flambagem, plastificação ou fissuração localizadas em componentes estruturais).

Não-Linearidade Geométrica. Uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, a deflexão lateral de um membro pode trazer como conseqüência, o aparecimento de momentos fletores adicionais (denominadas de segunda ordem), em virtude da presença de um esforço normal. A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento.

No presente trabalho será considerada somente a não-linearidade geométrica.

3.3

Formulação para a Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas

A formulação para a análise não-linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não-linear, que faz parte da mecânica dos sólidos. A não-linearidade geométrica aparece, na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas.

3.3.1

Descrição do Problema

Neste trabalho, um procedimento incremental-iterativo será utilizado para traçar o caminho de equilíbrio da estrutura ao longo do tempo. O problema fundamental é ilustrado na figura 3.1 onde se examina a resposta de um membro típico de pórtico (figura 3.1a), o tramo ab da estrutura. Sua configuração inicial,

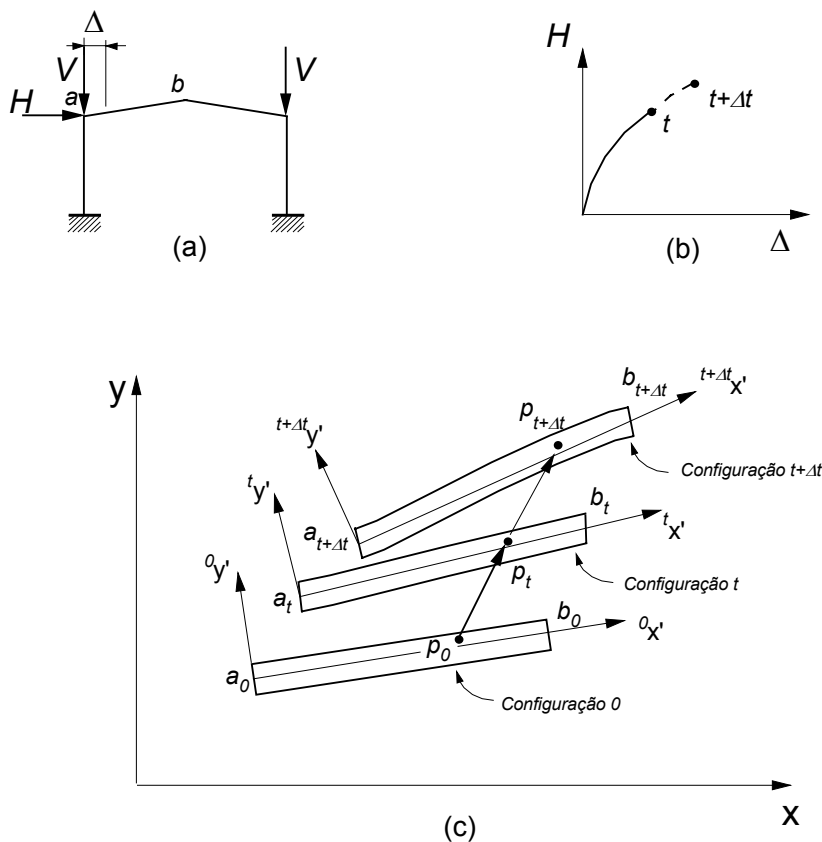


Figura 3.1. Deformações do elemento.

descarregada, indeformada (configuração 0), pode ser definida em termos do sistema de coordenadas global fixo, x, y , ou em termos do sistema de coordenadas locais, ${}^0x', {}^0y'$, no qual ${}^0x'$ corresponde ao eixo da barra, no sentido a_0, b_0 (figura 3.1c). Considerando-se que, após a aplicação gradual do carregamento o sistema muda da configuração 0 para a configuração t e que todas as variáveis do problema já tenham sido determinadas nesta última configuração, estando o sistema em equilíbrio. Pode-se agora tomar como referência o elemento ab na configuração t ou no sistema de coordenadas globais ou no novo sistema local atualizado, ${}^tx', {}^ty'$, com ${}^tx'$ determinado pelos extremos do elemento na nova configuração. O elemento terá mudado a sua forma e dimensão neste processo, mas as equações de equilíbrio formuladas desta forma estão satisfeitas e a posição de qualquer ponto material, na posição inicial, p_0 , pode ser mapeada na nova posição p_t .

Tendo-se por base um estado de equilíbrio conhecido, em uma configuração t , os procedimentos incrementais iterativos procuram determinar o próximo estado de equilíbrio, em uma nova configuração $t + \Delta t$. As equações incrementais de equilíbrio são obtidas a partir de aproximações lineares para os incrementos de deslocamentos e deformações. Portanto, o equilíbrio em $t + \Delta t$ não é satisfeito exatamente e é necessário utilizar um procedimento iterativo em cada passo de carga. Estes procedimentos serão estudados posteriormente. A relação correta entre carga-deslocamento está indicada na figura. 3.1b.

Existem duas formas de descrição do movimento de um ponto material, p , a descrição Lagrangiana e a Euleriana (McGuire, 2000). Para a análise de estruturas a formulação Lagrangiana é mais natural, sendo aqui empregada. Na formulação Lagrangiana usa-se as coordenadas de pontos materiais referidas à estrutura indeformada (configuração 0) ou a uma estrutura de referência temporária (configuração t). No referencial Lagrangiano Total (RLT), todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo $t + \Delta t$ são referidas à configuração inicial (indeformada) da estrutura, ou seja, o membro ab é referido a ${}^0x', {}^0y'$. Por outro lado, no referencial Lagrangiano Atualizado (RLA), todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura, ou seja, o membro ab é referido a ${}^tx', {}^ty'$.

Comumente, as formulações RLT e RLA têm sido usadas na análise incremental não-linear de pórticos. Quando desenvolvidas consistentemente, as duas formulações geram matrizes de rigidez global e vetor de forças idênticos. Ao longo deste trabalho, o RLA será adotado por sua eficiência computacional em resolver problemas do tipo viga (Bathe, 1996).

3.3.2

Princípio dos Deslocamentos Virtuais

O princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis é dado por $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$, para o equilíbrio em $t + \Delta t$, nós temos

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t}R \quad (3.1)$$

onde $\tilde{T}_{ij}$ é o tensor de tensões Piola-Kirchhoff II, ϵ_{ij} é o tensor de deformações de Green-Lagrange e ${}^{t+\Delta t}R$ é o trabalho virtual das forças externas. Aqui, o sobrescrito $t + \Delta t$ refere-se à configuração final e o subscrito t à configuração de referência.

As tensões ${}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{ij}$ podem ser decompostas em

$${}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{ij} = {}^t\tilde{T}_{ij} + {}^{\Delta t}\tilde{T}_{ij} = {}^tT_{ij} + {}^{\Delta t}\tilde{T}_{ij} \quad (3.2)$$

onde ${}^t\tilde{T}_{ij}$, tensões Piola-Kirchhoff II na configuração t , são idênticas às tensões de Cauchy, ${}^tT_{ij}$, na mesma configuração, e ${}^{\Delta t}\tilde{T}_{ij}$ é o incremento das tensões de Piola-Kirchhoff II entre $[t, t + \Delta t]$.

Para as deformações de Green-Lagrange e os incrementos de deslocamento expressos em termos da configuração de referência, ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij}$, tem-se,

$${}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tu_{i,j} + {}^tu_{j,i} + {}^tu_{k,i} {}^tu_{k,j}) \quad (3.3)$$

Decompondo (3.3) em parcelas lineares e não-lineares, ${}^t\epsilon_{ij} = {}^te_{ij} + {}^t\eta_{ij}$, tem-se

$${}_t e_{ij} = \frac{1}{2}({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i}) \quad \text{e} \quad {}_t \eta_{ij} = \frac{1}{2}({}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j}) \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2) e (3.4) em (3.1), obtém-se

$$\int_{V_t} {}^{\Delta t} \tilde{T}_{ij} \delta {}_t \varepsilon_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.5)$$

A solução para a equação (3.5) não pode ser obtida diretamente, uma vez que ela é não-linear nos incrementos dos deslocamentos. Para casos onde o incremento de deformação ${}_t \varepsilon_{ij}$ dentro de cada passo da análise incremental pode ser considerado pequeno, as seguintes suposições podem ser feitas (Yang & Kuo 1994)

$${}^{\Delta t} \tilde{T}_{ij} = {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \quad \text{e} \quad \delta {}_t \varepsilon_{ij} = \delta {}_t e_{ij} \quad (3.6)$$

onde ${}_t C_{ijrs}$ é o tensor da relação incremental de tensão-deformação. O resultado é a equação linearizada

$$\int_{V_t} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.7)$$

onde a segunda integral do lado esquerdo é igual ao trabalho virtual das forças externas atuando no elemento na configuração t de equilíbrio

$${}^t R = \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t e_{ij} dV_t \quad (3.8)$$

Então (3.7) se torna

$$\int_{V_t} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}^t T_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} R - {}^t R \quad (3.9)$$

Na literatura, esta equação ou sua forma equivalente em termos de energia são geralmente adotadas como base para o desenvolvimento de equações de

elementos finitos para análise não-linear de elementos do tipo barra (treliça, pórtico), placas e sólidos.

Com a discretização do campo de deslocamentos pelo método dos elementos finitos, os termos da equação (3.9) podem ser representados por produtos de matrizes e vetores como se segue:

$$\int_V {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} dV_t = \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{k}_e] \{\Delta \mathbf{u}\} \quad (3.10)$$

e

$$\int_V {}^t T_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV_t = \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{k}_g] \{\Delta \mathbf{u}\} \quad (3.11)$$

onde $[\mathbf{k}_e]$ é a matriz de rigidez elástica, $[\mathbf{k}_g]$ é a matriz de rigidez geométrica, $\Delta \mathbf{u}$ são os incrementos de deslocamento gerados durante o intervalo $[t, t + \Delta t]$.

Assumindo que somente cargas concentradas nodais são aplicadas nos elementos, tem-se que:

$${}^t R = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{{}^t \mathbf{f}\} \quad (3.12)$$

e

$${}^{t+\Delta t} R = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{{}^{t+\Delta t} \mathbf{f}\} \quad (3.13)$$

onde $\{{}^t \mathbf{f}\}$ são as forças atuando no elemento em t e $\{{}^{t+\Delta t} \mathbf{f}\}$ são as forças atuando no elemento em $t + \Delta t$.

Substituindo (3.10)-(3.13) em (3.9) e tomando um campo de deslocamento arbitrário $\{\delta \mathbf{u}\}$, tem-se

$$[\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g] \{\Delta \mathbf{u}\} + \{{}^t \mathbf{f}\} = \{{}^{t+\Delta t} \mathbf{f}\} \quad (3.14)$$

que representa o incremento de forças no intervalo $[t, t + \Delta t]$. Uma interpretação física de (3.14) pode ser dada como se segue : o incremento de forças $\{{}^{t+\Delta t} \mathbf{f}\} - \{{}^t \mathbf{f}\}$ será resistido não somente pelas ações elásticas geradas por $[\mathbf{k}_e]$,

mas também pelas forças devidas à mudança da geometria representadas pela matriz $[\mathbf{k}_g]$.

3.3.3

Aplicação a Elementos de Pórtico Plano

Em elementos de pórtico plano existem dois componentes de tensões independentes associados com dois componentes de deformação. Sejam as tensões de Cauchy ${}^t\tau_{xx}$ e ${}^t\tau_{xy}$ e o vetor de deformações incrementais de Green de ${}^t\epsilon_{xx}$ e ${}^t\epsilon_{xy}$, onde as deformações são decompostas em parcelas lineares e não-lineares da seguinte forma:

$${}^t\epsilon_{xx} = {}^te_{xx} + {}^t\eta_{xx} \quad \text{e} \quad {}^t\epsilon_{xy} = {}^te_{xy} + {}^t\eta_{xy} \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.9) tem-se

$$\int_V (Ee_{xx}\delta e_{xx} + 4Ge_{xy}\delta e_{xy}) dV + \int_V ({}^t\tau_{xx}\delta\eta_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\delta\eta_{xy}) dV = {}^{t+\Delta t}R - {}^tR \quad (3.16)$$

onde os fatores 4 e 2, foram adicionados para se levar em conta a simetria das tensões cisalhantes e deformações, e o subscrito direito t para V e o subscrito esquerdo t para ${}^te_{ij}$, ${}^t\eta_{ij}$, ${}^tC_{ijrs}$ foram omitidos para melhor visualização. Tem-se então que todas as variáveis da equação estão referidas à configuração t .

As deformações em um ponto arbitrário da seção x podem ser relacionadas com os deslocamentos longitudinais e transversais, u_x e u_y , por

$$e_{xx} = u_{x,x} \quad \text{e} \quad e_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (3.17)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2}(u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2) \quad \text{e} \quad \eta_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y}u_{x,x} + u_{y,y}u_{y,x}) \quad (3.18)$$

Com base nas hipóteses de Euler-Bernouli, onde as seções transversais inicialmente planas de uma viga permanecem planas e normais ao eixo da viga após a deformação, os deslocamentos u_x e u_y em um ponto arbitrário podem ser referenciados aos deslocamentos u e v do eixo da viga da seguinte forma

$$u_x = u - yv' \quad \text{e} \quad u_y = v \quad (3.19)$$

onde ()' denota a diferenciação em relação a x . Substituindo (3.19) em (3.17), tem-se os termos lineares:

$$e_{xx} = u' - yv'' \quad \text{e} \quad e_{xy} = 0 \quad (3.20)$$

e os não-lineares

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + y^2 v''^2 - 2yu'v'') \quad \text{e} \quad \eta_{xy} = \frac{1}{2}(-u'v' + yv'v'') \quad (3.21)$$

As forças iniciais são obtidas através de integrações das tensões de Cauchy τ_{xx} e τ_{xy} , ou seja:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA; \quad {}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA; \quad \text{e} \quad {}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (3.22)$$

onde tP são as forças axiais, tQ o cisalhamento transversal, tM o momento fletor e A é a área de seção transversal da viga.

Substituindo as equações (3.20) - (3.22) em (3.16), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^L (EAu'\delta u' + EI_z v''\delta v'') dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^tP\delta(u'^2 + v'^2) + {}^tP \frac{I_z}{A} \delta(v''^2) \right] dx \\ & + \int_0^L \left[{}^tM\delta(u'v'') - {}^tQ\delta(u'v') \right] dx = \{\delta \mathbf{u}\}^T \left\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^t \mathbf{f} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

O elemento de viga-coluna adotado é o esquematizado na figura 3.2. Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós 1 e 2, que se deforma no plano de definição da estrutura. As funções que relacionam os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento com os deslocamentos nodais são

$$u = \{\mathbf{N}_1\} \{\bar{u}\} \quad \text{e} \quad v = \{\mathbf{N}_3\} \{\bar{v}\} \quad (3.24)$$

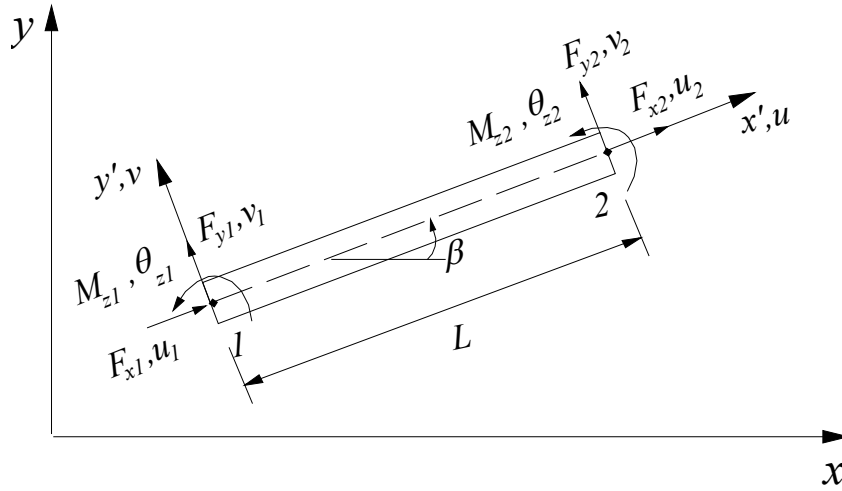


Figura 3.2. Elemento de pórtico.

onde $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_3$ são funções de interpolação lineares dadas por

$$\mathbf{N}_1 = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{N}_3 = \left\{ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right\} \quad (3.26)$$

e os vetores de deslocamentos $\{\bar{u}\}$ e $\{\bar{v}\}$ são definidos como

$$\bar{u} = \{u_1 \quad u_2\} \quad \text{e} \quad \bar{v} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\} \quad (3.27)$$

O primeiro termo de (3.23), de acordo com (3.10), representa a matriz de rigidez elástica. Fazendo uso de (3.24) ele pode ser escrito como

$$\{\delta \bar{u}\}^T \int_0^L EA \{\mathbf{N}'_1\} \{\mathbf{N}'_1\}^T dx \{\bar{u}\} + \{\delta \bar{v}\}^T \int_0^L EI_z \{\mathbf{N}''_3\} \{\mathbf{N}''_3\}^T dx \{\bar{v}\} \quad (3.28)$$

Fazendo uso das funções de forma dadas em (3.25) e (3.26), integrando e combinando-se os termos, a matriz elástica fica da seguinte forma

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Simétrica

Os componentes do segundo termo de (3.23), relacionados com a deformação longitudinal e a interação entre a força axial e flexão, podem ser escritos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \{\delta \bar{u}\}^T \int_0^L {}^tP \{ \mathbf{N}'_1 \} \{ \mathbf{N}'_1 \}^T dx \{ \bar{u} \} + \{ \delta \bar{v} \}^T \int_0^L {}^tP \{ \mathbf{N}'_3 \} \{ \mathbf{N}'_3 \}^T dx \{ \bar{v} \} \\ & + \{ \delta \bar{v} \}^T \int_0^L {}^tP \frac{I_z}{A} \{ \mathbf{N}''_3 \} \{ \mathbf{N}''_3 \}^T dx \{ \bar{v} \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

De acordo com a figura 3.3 e considerando a força cisalhante constante ao longo do elemento, tM e tQ podem ser obtidos por

$${}^tM = - {}^tM_1 + \frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} x \quad \text{e} \quad {}^tQ = - \frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} \quad (3.31)$$

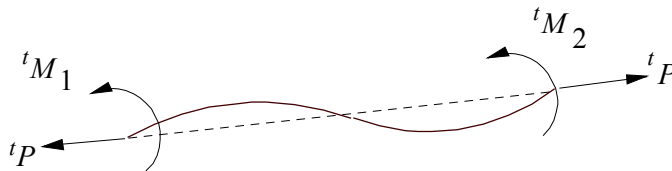


Figura 3.3. Elemento de pórtico.

O último termo de (3.23) representa as fontes de interação entre a flexão e a deformação longitudinal. Fazendo uso de (3.24) e (3.31) tem-se

$$\begin{aligned}
& \{\delta \bar{v}\}^T \int_0^L \left({}^tM_1 + \frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} x \right) \{\mathbf{N}_3''\} \{\mathbf{N}_1'\}^T dx \{\bar{u}\} \\
& + \{\delta \bar{u}\}^T \int_0^L \left({}^tM_1 + \frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} x \right) \{\mathbf{N}_1'\} \{\mathbf{N}_3''\}^T dx \{\bar{v}\} \\
& + \{\delta \bar{v}\}^T \int_0^L \left(\frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} \right) \{\mathbf{N}_3'\} \{\mathbf{N}_1'\}^T dx \{\bar{u}\} \\
& + \{\delta \bar{u}\}^T \int_0^L \left(\frac{{}^tM_1 + {}^tM_2}{L} \right) \{\mathbf{N}_1'\} \{\mathbf{N}_3'\}^T dx \{\bar{v}\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Fazendo uso das funções de forma dadas em (3.25) e (3.26), integrando e combinando os termos das equações (3.30) e (3.32), a matriz geométrica fica da seguinte forma

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_g]_1 & [\mathbf{k}_g]_2 \\ [\mathbf{k}_g]_2^T & [\mathbf{k}_g]_3 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

onde

$$[\mathbf{k}_g]_1 = \begin{bmatrix} \frac{{}^tP}{L} & 0 & -\frac{{}^tM_1}{L} \\ \frac{6{}^tP}{5L} + \frac{12I_z{}^tP}{AL^3} & \frac{{}^tP}{10} + \frac{6I_z{}^tP}{AL^2} & \\ \text{Simétrica} & \frac{2{}^tPL}{15} + \frac{4I_z{}^tP}{AL} & \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$[\mathbf{k}_g]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{{}^tP}{L} & 0 & -\frac{{}^tM_2}{L} \\ 0 & -\frac{6{}^tP}{5L} - \frac{12I_z{}^tP}{AL^3} & \frac{{}^tP}{10} + \frac{6I_z{}^tP}{AL^2} \\ \frac{{}^tM_1}{L} & -\frac{{}^tP}{10} - \frac{6I_z{}^tP}{AL^2} & -\frac{{}^tP}{10} - \frac{6I_z{}^tP}{AL^2} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$[\mathbf{k}_g]_3 = \begin{bmatrix} \frac{{}^tP}{L} & 0 & \frac{{}^tM_2}{L} \\ \frac{6{}^tP}{5L} + \frac{12I_z{}^tP}{AL^3} & -\frac{{}^tPL}{30} + \frac{2I_z{}^tP}{AL} & \\ \text{Simétrica} & \frac{2{}^tPL}{15} + \frac{4I_z{}^tP}{AL} & \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.3.4

Montagem das Equações da Estrutura

No referencial Lagrangiano Atualizado, a última configuração calculada é tomada como referência para descrever o movimento da estrutura no passo incremental de t para $t+\Delta t$. Com base nesta formulação, foi desenvolvida a equação incremental de equilíbrio, equação (3.14). Nos métodos utilizados neste trabalho a matriz $\mathbf{k} = [\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g]$ é chamada de matriz de rigidez tangente.

Uma vez que a equação incremental de equilíbrio foi desenvolvida para cada elemento, o próximo passo é transformar essa relação para a estrutura em estudo. Desta forma a equação (3.14) fica da seguinte forma

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^t\mathbf{P} \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{P}$ é o vetor das forças externas e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez da estrutura, ou de maneira equivalente

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P} \quad (3.38)$$

onde $\Delta\mathbf{P}$ é o incremento das forças externas e $\Delta\mathbf{F}$ é o incremento das forças internas.

O vetor de forças internas e os deslocamentos totais da estrutura são obtidos de maneira incremental, ou seja, a cada passo de carga o acréscimo nas forças internas e deslocamentos devem ser calculados. Para isso consideram-se válidas as seguintes relações

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} \quad (3.39)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (3.40)$$

O problema estrutural não-linear a ser resolvido pode ser expresso da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0 \quad (3.41)$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor de forças residuais e o sobrescrito à esquerda representa a configuração considerada.

Pode-se ainda expressar $\mathbf{P}$ da seguinte forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{P} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{P}_{\text{ref}} \quad (3.42)$$

onde λ é o parâmetro de carga, $\mathbf{P}_{\text{ref}}$ é o vetor de forças nodais tomado como referência.

O vetor de forças internas é obtido no sistema local e transformado para o sistema global através de uma matriz de rotação $\mathbf{T}$ da seguinte forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{ne} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} \quad (3.43)$$

com ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}$ dado pela equação (3.14).

Da mesma maneira, a matriz de rigidez global da estrutura é obtida a partir das matrizes de rigidez do elemento, (3.29) e (3.33), e transformada para o sistema global através de uma matriz de rotação $\mathbf{T}$ da seguinte forma.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{ne} \mathbf{T}^T [\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g] \mathbf{T} \quad (3.44)$$

3.4

Estratégias de Solução para Problemas Não-Lineares

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante durante os ciclos iterativos, funcionando bem na parte ascendente do caminho de equilíbrio (trecho OA), figura 3.4, mas falha ao descrever esta curva após o primeiro ponto limite (ponta A), o que levaria a uma incorreta avaliação da capacidade pois o equilíbrio será atingido no ponto C.

Para se traçar a curva carga-deslocamento completa (trecho OABC), com possíveis passagens pelos pontos limites, é necessário que seja permitida a variação de λ a cada iteração.

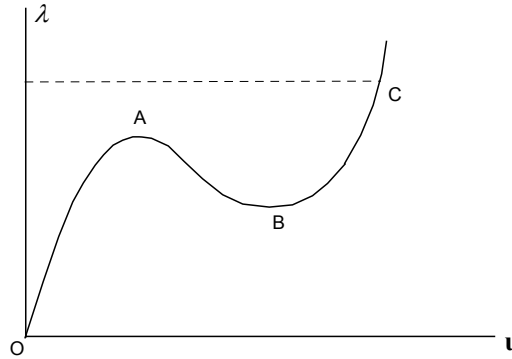


Figura 3.4. Curva carga-deslocamento.

Basicamente, as dificuldades para o traçado da curva completa se devem ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente nos pontos limites, onde ela é singular, e o algoritmo apresentará um erro de *over-flow* na fatorização da matriz. Felizmente esse não é um problema muito sério, pois é praticamente impossível chegar precisamente em um ponto crítico.

3.4.1 Análise Incremental-Iterativa

Considerando um instante $t+\Delta t$, que representa as diferentes etapas de aplicação do carregamento e as correspondentes configurações de equilíbrio da estrutura, tem-se que o vetor de forças residuais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)}$, $w=0,1,\dots$, computado após a w -ésima iteração de Newton-Raphson é dado por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(w)}\mathbf{P}_{\text{ref}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(w)} = 0 \quad (3.45)$$

e

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(w)} = \mathbf{F}({}^t\mathbf{F}, \Delta\mathbf{u}^{(w)}) \quad (3.46)$$

A fim de se obter o próximo ponto de equilíbrio ($w+1$), as estratégias incrementais para o tratamento de efeitos não-lineares consideram que em torno de uma configuração deformada ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$, o problema é localmente linear. Desta forma é feita uma expansão em série de Taylor da equação (3.45), sendo esta

aproximada por termos lineares obtidos a partir do truncamento dos termos de ordem superior da série:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w+1)} \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)}}{\partial \Delta \mathbf{u}^{(w)}} \delta \mathbf{u}^{(w+1)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(w)}} \delta \lambda^{(w+1)} \cong 0 \quad (3.47)$$

onde

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)}}{\partial \Delta \mathbf{u}^{(w)}} = - \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(w)}}{\partial \Delta \mathbf{u}^{(w)}} = - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(w)} \quad (3.48)$$

sendo $\mathbf{K}^{(T)}$ a matriz de rigidez tangente, e

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(w)}} = \mathbf{P} \quad (3.49)$$

Substituindo as equações (3.48) e (3.49) em (3.47) e reorganizando os termos se obtém a equação de equilíbrio

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(w)} \delta \mathbf{u}^{(w+1)} = \mathbf{P} \delta \lambda^{(w+1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)} \quad (3.50)$$

onde $\delta \lambda$ e $\delta \mathbf{u}$ são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidas durante o processo iterativo. De (3.50) tem-se que os deslocamentos nodais iterativos ($\delta \mathbf{u}$) podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta \mathbf{u}^{(w+1)} = \delta \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{(w+1)} + \delta \lambda^{(w+1)} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{r}}^{(w+1)} \quad (3.51)$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(w)} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{(w+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(w)} \quad (3.52)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(w)} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{r}}^{(w+1)} = \mathbf{P} \quad (3.53)$$

A correção do parâmetro de carga, $\delta \lambda^{(w+1)}$, única incógnita da equação (3.51), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração fornecidas a

seguir, onde será introduzida uma equação de restrição que deve ser respeitada a cada iteração. Para se considerar esses métodos de iteração tem-se inicialmente que se supor que, para $w=0$, $\Delta\lambda^0$ tenha um valor prescrito dado pelo usuário ou calculado automaticamente como será visto na seção 3.4.4.

Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$ caracterizam a chamada ***solução incremental predita***.

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental inicial tangente ($\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$) consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$. Após a definição de $\mathbf{K}$, resolve-se o sistema de equações:

$${}^t\mathbf{K}^{(T)}\delta\mathbf{u}_t = \mathbf{P} \quad (3.54)$$

para determinar os deslocamentos nodais tangente, $\delta\mathbf{u}_t$.

Com a definição de $\Delta\lambda^0$ e $\delta\mathbf{u}_t$ tem-se:

$$\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{u}_t \quad (3.55)$$

Nesse estágio o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.56)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0 \quad (3.57)$$

onde ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{u}$ caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

A Figura 3.5 fornece um esquema de solução incremental-iterativa para sistemas com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico (Crisfield, 1991).

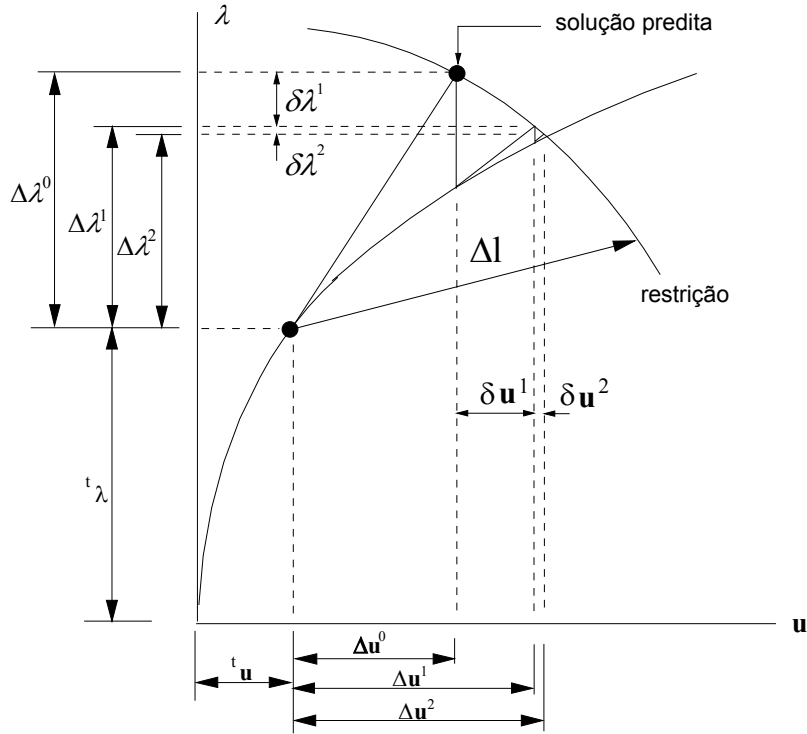


Figura 3.5. Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade.

Com a obtenção da solução iterativa $(\delta\lambda^{(w+1)} e \delta\mathbf{u}^{(w+1)})$, faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema:

$$\Delta\lambda^{(w+1)} = \Delta\lambda^{(w)} + \delta\lambda^{(w+1)} \quad (3.58)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(w+1)} = \Delta\mathbf{u}^{(w)} + \delta\mathbf{u}^{(w+1)} \quad (3.59)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais tem-se que:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(w+1)} = {}^t\lambda + \Delta\lambda^{(w+1)} \quad (3.60)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(w+1)} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(w+1)} \quad (3.61)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido (veja a seção 3.4.3).

3.4.2

Estratégias de Iteração

A determinação do parâmetro de carga iterativo, $\delta\lambda^{(w+1)}$ é função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema, que tem a função de otimizar a convergência do processo iterativo. A seguir são apresentadas duas estratégias bastante eficientes que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

3.4.2.1

Carga Constante

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga constante, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^{(w+1)} = 0 \quad w \geq 0 \quad (3.62)$$

Dessa forma a Equação (3.51) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo método convencional de Newton-Raphson.

3.4.2.2

Comprimento de Arco Cilíndrico

Segundo Crisfield (1981), a cada iteração, a seguinte equação de restrição deve ser satisfeita:

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \Delta l^2 \quad (3.63)$$

Substituindo (3.51) em (3.59) e o resultado desta operação em (3.63), chega-se a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, a saber:

$$A \delta\lambda^2 + B \delta\lambda + C = 0 \quad (3.64)$$

onde, os coeficientes A, B e C têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A &= \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)T} \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)} \\
B &= 2 \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)T} (\Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)}) \\
C &= (\Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)})^T (\Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)}) - \Delta l^2
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Com a resolução de (3.64), chega-se aos dois valores $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$, de forma que se deve escolher entre as soluções:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{u}_1 &= \Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)} + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)} \\
\Delta \mathbf{u}_2 &= \Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)} + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{u}^{(w)}$. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento utilizado, consiste em se achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{u}^{(w+1)}$ e $\Delta \mathbf{u}^{(w)}$. Isto equivale a achar o máximo co-seno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(w)T} \Delta \mathbf{u}^{(w+1)}}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(w)T} (\Delta \mathbf{u}^{(w)} + \delta \mathbf{u}_g^{(w+1)})}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2} \frac{\Delta \mathbf{u}^{(w)T} \delta \mathbf{u}_r^{(w+1)}}{\Delta l^2} \tag{3.67}$$

Como (3.64) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se $(B^2 - 4AC)$ for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto.

3.4.3 Critérios de Convergência

O processo iterativo descrito termina indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise quando um dos dois, ou os dois critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

(1) o primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{R}^{(w)}\|}{\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{P}\|} \leq \zeta \quad (3.68)$$

onde $\|\mathbf{R}^{(w)}\|$ é igual à norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior, $\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{P}\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo e ζ é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

(2) o segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado no final da iteração corrente. Ele é definido por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{u}\|}{\|\Delta\mathbf{u}^{(w+1)}\|} \leq \zeta \quad (3.69)$$

onde $\|\delta\mathbf{u}\|$ é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais), $\|\Delta\mathbf{u}^{(w+1)}\|$ é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e ζ segue a mesma definição do critério anterior.

(3) o terceiro critério de convergência consiste em obedecer a ambas as relações (forças e deslocamentos) dadas em (3.68) e (3.69), assim este critério é verificado se:

$$\zeta_1 \leq \zeta \text{ e } \zeta_2 \leq \zeta \quad (3.70)$$

onde ζ , ζ_1 e ζ_2 são definidos nos itens (1) e (2).

3.4.4

Incremento Automático de Carga

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial $\Delta\lambda^0$. A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro é importante, e deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Em outras palavras, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes requisitos: (i) produzir grandes incrementos quando a resposta da estrutura for aproximadamente linear; (ii) gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear; (iii) ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando os pontos limites são ultrapassados.

A seguir são apresentadas algumas estratégias de incremento de carga que satisfazem esses requerimentos.

3.4.4.1

Incremento do Comprimento de Arco

Como proposto por Crisfield (1991), o incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente pode ser definido como:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{N_d}{{}^tN} \right)^{1/2} \quad (3.71)$$

onde ${}^t\Delta l$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente; N_d é o numero de iterações desejadas para o processo iterativo corrente, especificado pelo usuário, e tN é o numero de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior.

Através da Equação (3.71) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial:

$$\Delta \mathbf{u}^{0^T} \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \quad (3.72)$$

chega-se facilmente, usando-se (3.55) e (3.72), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_t^T \delta \mathbf{u}_t}} \quad (3.73)$$

O critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão (3.73) é o sugerido por Yang e Kuo (1994), baseando-se no sinal do parâmetro GSP, que será apresentado na seção seguinte.

No programa desenvolvido nesse trabalho, o usuário deve especificar $\Delta\lambda_1^0$ como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular $\Delta\mathbf{u}_1^0$ através de (3.55). Substituindo-se $\Delta\mathbf{u}^0$ na Equação (3.72), chega-se a Δl_1 . Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente Δl através de (3.71).

3.4.4.2

Incremento Baseado no Parâmetro GSP

Uma estratégia baseada na introdução de um parâmetro de rigidez generalizado foi adotada por Yang e Kuo (1994) para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. O método de solução é denominado de estratégia de controle de deslocamento generalizado. Yang e Kuo (1994) propuseram a seguinte equação para avaliar o parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{{}^1\delta \mathbf{u}_t^T {}^1\delta \mathbf{u}_t}{{}^t\delta \mathbf{u}_t^T \delta \mathbf{u}_t}} \quad (3.74)$$

considerando-se o parâmetro de rigidez generalizado (GSP) do sistema como se segue:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta \mathbf{u}_t^T {}^1\delta \mathbf{u}_t}{{}^t\delta \mathbf{u}_t^T \delta \mathbf{u}_t} \quad (3.75)$$

Pode-se, portanto, reescrever (3.74) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (3.76)$$

Observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de seqüências de soluções $(\mathbf{u}, \lambda)$ que permitam um avanço contínuo na resposta carga-deslocamento. De acordo com Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_t$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{u}_t$ (passo de carga corrente), conforme (3.75).

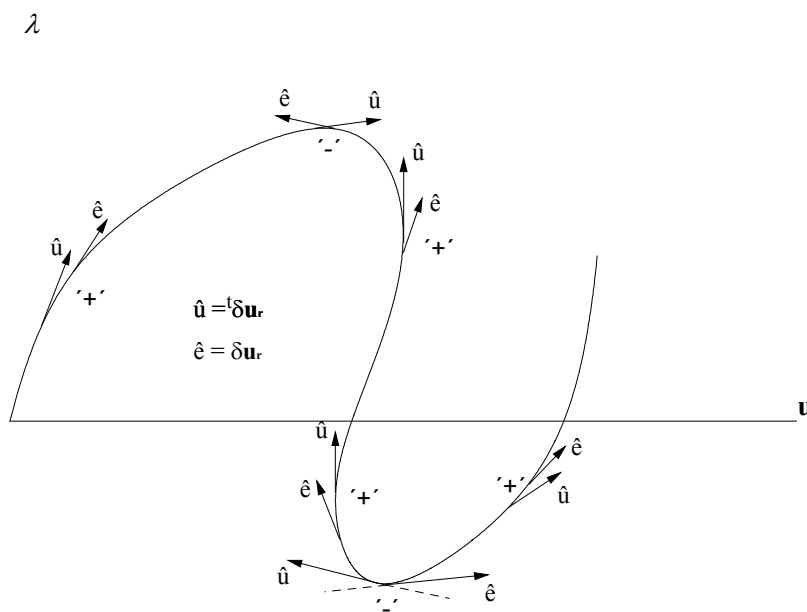


Figura 3.6. Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP).

O GSP torna-se negativo somente para o passo imediatamente após o ponto limite, para os demais passos este permanecerá sempre positivo, o que pode ser visto na figura 3.6.

3.5 Determinação dos Pontos Críticos

Os pontos críticos são aqueles em que um caminho de equilíbrio atinge um valor extremo ou aqueles onde diferentes caminhos de equilíbrio se encontram. Na figura 3.7 podem ser observados três pontos críticos (A, B e C), onde os pontos (B e C) são chamados de pontos limite e o ponto (A) ponto de bifurcação. No presente trabalho serão considerados somente pontos limite. Caso a estrutura

apresente ponto de bifurcação, uma pequena imperfeição será considerada para se eliminar a bifurcação.

Matematicamente, um ponto de equilíbrio é um ponto crítico se a matriz de rigidez do modelo de elementos finitos for singular $\det \mathbf{K}^{(T)} = 0$. Além disso, sabe-se que o equilíbrio é estável quando todos os autovalores são positivos o que leva a $\det \mathbf{K}^{(T)} > 0$ e torna-se instável quando o menor autovalor se torna negativo e, portanto, $\det \mathbf{K}^{(T)} < 0$.

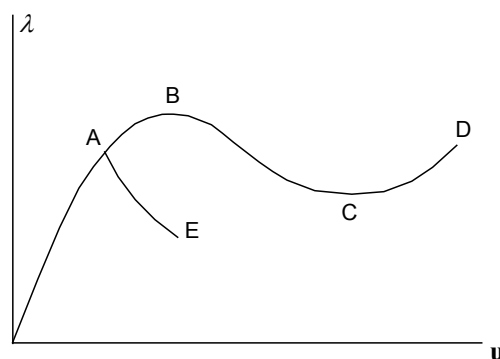


Figura 3.7. Pontos críticos de uma estrutura.

Conforme visto na seção acima, as estratégias de incremento automático de carga têm como objetivo gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear além de detectar pontos limites. A determinação dos pontos críticos se faz de forma aproximada, através do sinal do GSP, que controla os incrementos de carga, ou seja, a medida que o problema se aproxima de um ponto limite, os incrementos de carga dados pela equação (3.76) se tornam muito pequenos, sendo tomado como ponto limite o valor imediatamente após a inversão de sinal do GSP.

3.6 Exemplos

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas estruturais encontrados freqüentemente na literatura em função da acentuada não-linearidade da relação carga-deslocamento. Pretende-se, assim, verificar a eficiência da formulação de elementos finitos não-linear aqui apresentada, bem como determinar a melhor malha a ser utilizada no processo de otimização. As estruturas escolhidas apresentam grandes deslocamentos e pontos limite.

Detalhes adicionais e outros problemas podem ser encontrados nas referências ao longo do texto.

3.6.1

Pórtico de Lee

Neste exemplo é feita a análise do chamado Pórtico de Lee. Esta estrutura é interessante porque apresenta instabilidade por ponto limite depois de sofrer grandes deslocamentos e rotações. É usada frequentemente por pesquisadores para validar estratégias de solução não-linear (Galvão, 2000; Parente, 2000). A geometria do pórtico é mostrada na figura 3.8. Os valores numéricos empregados são $L = 120$, $H = 120$, $L_p = 24$ e $P = 1$. A seção transversal do pórtico é retangular de dimensões $b = 3$ e $h = 2$ e o módulo de elasticidade do material é 720.

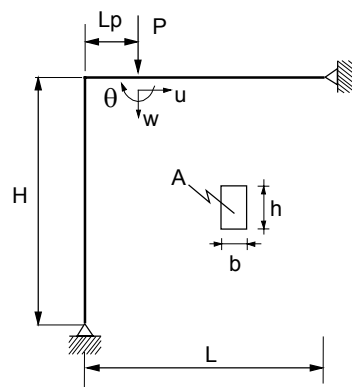


Figura 3.8. Pórtico de Lee.

A estrutura foi analisada utilizando-se 5 malhas distintas, sendo 3 delas ilustradas na figura 3.9. As malhas são formadas por elementos de pórtico. As malhas com 20 e 100 elementos, não mostradas na figura, são subdivisões dos modelos de 10 elementos

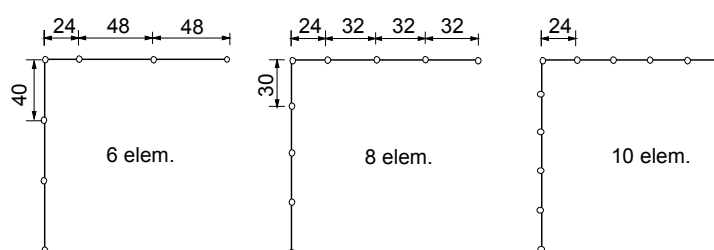


Figura 3.9. Pórtico de Lee – malhas utilizadas.

Adotou-se a estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico juntamente com o método de Newton-Raphson, com incremento automático do

comprimento de arco controlando o valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. No início do processo adotou-se: $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$. Para controlar a convergência foi adotado $\zeta = 10^{-3}$.

Foram efetuadas análises para modelos estruturais com: 6, 8, 10 e 20 elementos finitos, mostradas na figura 3.10. A análise considerando um modelo com 100 elementos foi feita para servir de referência e avaliar a precisão dos resultados analisados.

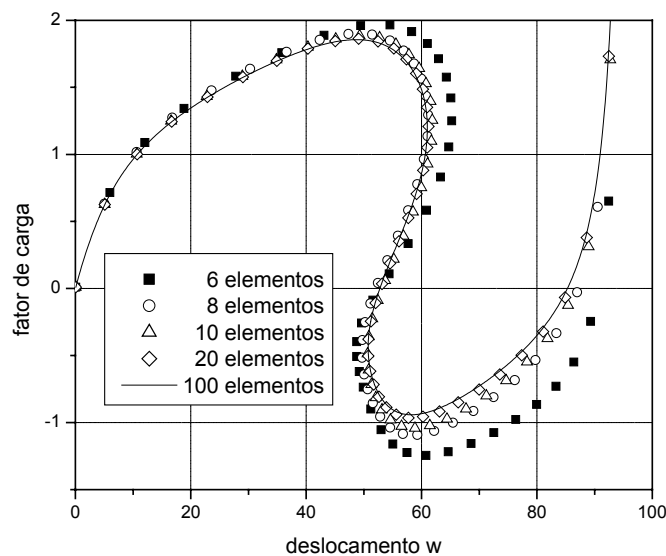


Figura 3.10. Pórtico de Lee – curvas de equilíbrio.

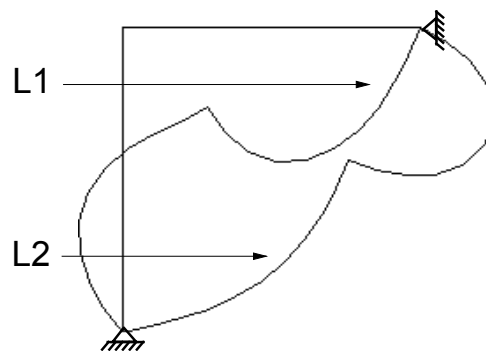


Figura 3.11. Pórtico de Lee – configuração deformada.

Utilizando os resultados apresentados na figura 3.10, pode-se verificar que a estrutura apresenta dois pontos limite. Estes pontos, encontrados ao longo da curva, foram detectados através da mudança de sinal do parâmetro GSP.

TABELA 3.1
Pórtico de Lee – cargas críticas

Elementos da malha	L1	L1 – erro (%)	L2	L2 - erro (%)
06	1.97095	6.21	-1.24505	32.23
08	1.90181	2.48	-1.09332	16.11
10	1.88497	1.58	-1.04141	10.60
20	1.86291	0.39	-0.96560	2.55
100	1.85570	-	-0.94161	-

A configuração deformada correspondente a cada um dos dois pontos limite (L1 e L2) é ilustrada na figura 3.11. Pode-se verificar que esses pontos ocorrem depois da estrutura sofrer grandes deslocamentos e rotações. O valor do fator de carga crítica para as cinco malhas é mostrado na tabela 3.1. Estes resultados mostram que o fator de carga em L1, obtido para a malha com 20 elementos, é praticamente o mesmo que para a malha de 100. Portanto, como o interesse na otimização é o ramo ascendente, utilizando-se apenas 20 elementos ao longo das barras, o comportamento do pórtico é modelado com a precisão desejada. Os valores obtidos para L1 e L2 concordam com os valores encontrados na literatura: $\lambda_c = 1.855$ e $\lambda_c = -0.9298$ (Parente, 2000), respectivamente.

3.6.2 Pórtico de Williams

Neste exemplo é feita a análise não-linear do Pórtico de Williams. Este problema possui resultados analíticos e experimentais apresentados por (Williams, 1964), sendo freqüentemente utilizados para validar modelos numéricos (Yang e Kuo, 1994). Esta estrutura apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente

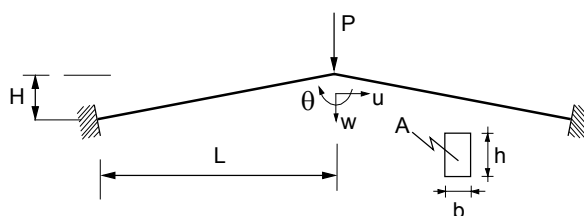


Figura 3.12. Pórtico de Williams.

não linear com perda de estabilidade por ponto limite. A geometria do pórtico é mostrada na figura 3.12. Os valores numéricos empregados são $L = 12.943$, $H =$

0.386, e $P = 1$. A seção transversal do pórtico é retangular de dimensões $b = 0.753$ e $h = 0.243$ e o módulo de elasticidade é 1.03×10^7 .

A estrutura foi analisada utilizando 5 malhas distintas formadas por 6, 8, 10, 20 e 100 elementos, sendo a subdivisão feita de forma uniforme para cada barra.

Adotou-se a estratégia de iteração com comprimento de arco cilíndrico juntamente com o método de Newton-Raphson Padrão, com incremento automático do comprimento de arco controlando o valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. No início do processo adotou-se: $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$. Para controlar a convergência foi adotado $\zeta = 10^{-3}$.

Os resultados das análises para as malhas seleccionadas são apresentados na figura 3.13. A análise considerando um modelo com 100 elementos foi feita para servir de referência e avaliar a precisão dos resultados obtidos.

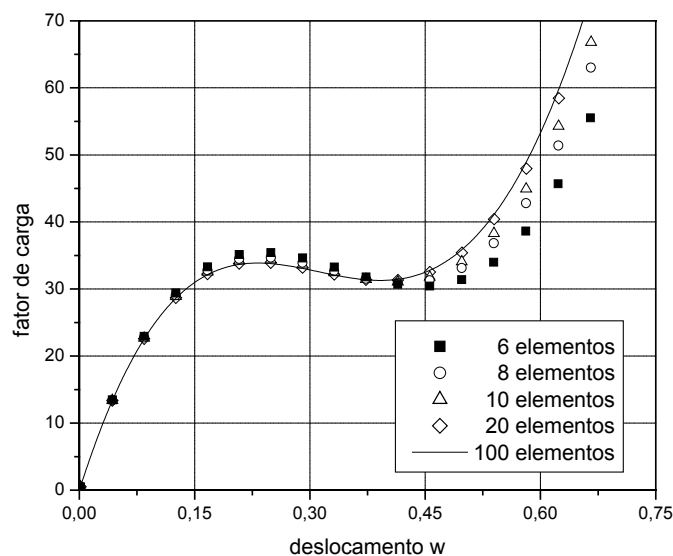


Figura 3.13. Pórtico de Williams – curvas de equilíbrio.

Analisando as curvas da figura 3.13, pode-se verificar que a estrutura apresenta dois pontos limite. Estes pontos foram detectados através da mudança de sinal do parâmetro GSP.

O valor do fator de carga crítica para as cinco malhas é mostrado na tabela 3.2. Estes resultados mostram que o fator de carga em L1 obtido para a malha com 20 elementos é praticamente o mesmo que o obtido com a malha de 100. Portanto,

TABELA 3.2
Pórtico de Williams – cargas críticas

Elementos da malha	L1	L1 – erro (%)	L2	L2 – erro (%)
06	35.46690	4.41	30.40257	2.81
08	34.75060	2.60	30.89583	1.24
10	34.42747	1.65	31.06543	0.69
20	34.00402	0.40	31.23855	0.14
100	33.87000	-	31.28282	-

como o interesse na otimização é apenas ramo ascendente, utilizando-se apenas 20 elementos ao longo das barras, o comportamento do pórtico é modelado com a precisão desejada.