

3

Amortecedores de Massa Sintonizados Múltiplos (AMSM)

3.1 Introdução

Como visto anteriormente no Capítulo 2, o amortecedor de massa sintonizado (AMS) trata-se de um dispositivo de controle passivo clássico que consiste em uma massa, uma mola e um amortecedor viscoso conectado ao sistema principal. A frequência natural do amortecedor é sintonizada em uma frequência natural próxima à da massa principal. A vibração da mesma faz com que o amortecedor vibre em ressonância e, como resultado disso, a energia vibratória do sistema é dissipada através do amortecimento no AMS.

A maior desvantagem em se utilizar um único AMS é a sua sensibilidade a alguma discrepância na frequência natural da estrutura e/ou na taxa de amortecimento do amortecedor considerados no projeto. Sabe-se, que erros na identificação de frequências naturais e na fabricação do amortecedor acontecem ainda que em pequeno grau. Sendo assim, o uso de mais de um AMS com características dinâmicas diversas foi proposto como uma alternativa para eliminar essa deficiência (Kareem & Sun, 1987; Xu & Igusa, 1992; Park & Reed, 2001).

Os chamados amortecedores de massa sintonizados múltiplos (AMSM) consistem em um grande número de pequenos amortecedores com frequências distribuídas em volta da frequência natural correspondente ao modo a ser controlado.

Estudos realizados por Abé & Fujino (1994), Igusa & Xu (1994) e Jangid (1999) evidenciam que, pelo fato dos AMSM serem praticamente insensíveis às variações na frequência e no amortecimento considerados em projeto, estes se mostram bem mais eficientes e robustos no controle das vibrações indesejáveis do que um único AMS. Segundo Janjid & Datta (1997) existe, inclusive, uma faixa de frequência ótima para a qual essa eficiência se torna máxima.

Abé & Fujino (1994) chamam atenção ainda, para o fato de que em estruturas de grande escala, os AMSM têm sido utilizados, ao invés de um único AMS, para evitar problemas como o pouco espaço disponível para instalação do amortecedor. A facilidade de instalação e sua portabilidade, devido ao tamanho

reduzido, permitem que sistemas AMSM possam ser utilizados temporariamente durante a construção e em projetos de recuperação de estruturas.

Estudos paramétricos foram realizados de forma a determinar a influência de parâmetros como faixa de frequência, taxa de amortecimento de cada amortecedor e número de amortecedores na eficiência e robustez do sistema AMSM. Yamaguchi & Harnporchai (1993) realizaram esse tipo de estudo para o caso de cargas harmônicas, mais tarde Kareem & Kline (1995) consideraram o caso de carregamento aleatório. Gu *et al* (2001) realizaram um estudo paramétrico dos AMSM visando o controle de vibrações causadas pelo vento em uma ponte estaiada

3.2 Modelo estrutural

Considere um sistema principal amortecido equipado com um número n de amortecedores de massa sintonizados com características dinâmicas diversas, como mostrado na Figura (3.1).

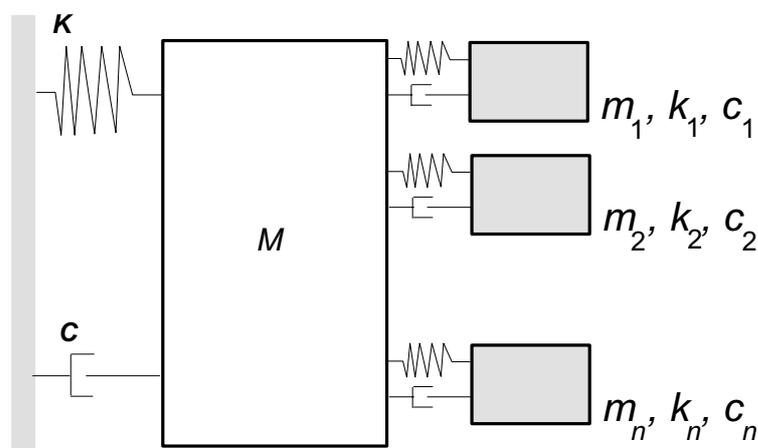


Figura 3.1 - Modelo estrutural de um sistema principal equipado com AMSM

O sistema principal é caracterizado pela rigidez K , a massa M e amortecimento C . Os parâmetros do j -ésimo AMS são a massa m_j , o amortecimento c_j e a rigidez k_j . As frequências naturais do amortecedor de massa sintonizado múltiplo são uniformemente distribuídas ao redor da frequência média.

Existem na literatura várias proposições para se calcular os parâmetros dos amortecedores. Em alguns casos, fixa-se a massa de cada AMS e varia-se a rigidez de forma a cobrir uma certa faixa de frequências ao redor da frequência média. Em outros casos, fixa-se a rigidez das molas e varia-se a massa. Segundo Xu & Igusa (1992), a fabricação do AMSM com rigidez uniforme é mais simples do que variando-se a rigidez, a distribuição das frequências naturais é feita mantendo a rigidez constante e variando a massa ($k_1 = k_2 = \dots k_n = k_T$).

A constante de amortecimento do j -ésimo AMS é expressa por

$$c_j = 2m_j \xi_T \omega_j \quad (3.1)$$

onde ξ_T é a taxa de amortecimento que pode ser mantida constante para todos os AMSM.

A massa total do AMSM é expressa pela taxa de massa de projeto definida por

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^n m_j}{M} \quad (3.2)$$

Segundo Jangid (1999) expressões para os parâmetros ótimos do AMSM não podem ser obtidas através dos mesmos procedimentos utilizados por Warburton (1982) que considera um único AMS. Em seu estudo esses parâmetros são determinados através de uma técnica de busca numérica. Outro estudo de otimização, realizado por Li (2000), inclui a determinação de parâmetros do AMSM tais como faixa de frequência, taxa de amortecimento média, razão entre as massas e número de amortecedores para estruturas submetidas a acelerações na base.

3.3 Equações de movimento e funções de resposta em frequência

As equações de movimento do sistema estrutural da Figura (3.1) são dadas por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{y}(t)$ é o vetor $(n+1)$ dos deslocamentos relativos à base, onde a primeiro componente corresponde à resposta da massa principal e as componentes restantes

correspondem aos n amortecedores. As $(n+1) \times (n+1)$ matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + \sum_{j=1}^n m_j & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_n & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O lado direito da equação (3.3) representa a excitação externa $\mathbf{F}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T$. A resposta harmônica permanente do sistema é obtida substituindo-se $f_i(t) = f_i e^{-i\omega t}$ para $i = 1 \dots n$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(\omega) e^{-i\omega t}$ na equação (3.3) e isolando $\mathbf{Y}(\omega)$

$$\mathbf{Y}(\omega) = (\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \quad (3.7)$$

Admitindo-se, por exemplo, que a excitação seja uma aceleração na base, $f_i = m_i$, tem-se que o primeiro elemento de $\mathbf{Y}(\omega)$ representa a amplitude da resposta harmônica $y(\omega)$ da massa principal, dada por

$$y(\omega) = \frac{M - (i\omega)^{-1} Z(\omega)}{K - \omega^2 M - i\omega C - i\omega Z(\omega)} \quad (3.8)$$

Com

$$Z(\omega) = -i\omega \sum_{j=1}^n \frac{m_j (k_j - i\omega c_j)}{k_j - i\omega c_j - \omega^2 m_j} \quad (3.9)$$

, onde $Z(\omega)$ é a impedância do sistema, definida como a amplitude da força necessária para produzir uma velocidade harmônica unitária na base do AMS.

3.4 Otimização dos parâmetros e estudo do efeito da interligação entre as massas

Com o objetivo de analisar o efeito da interligação entre as massas de um sistema AMSM em sua eficiência, propõe-se o estudo de um sistema com duas massas em quatro diferentes configurações, mostradas na Figura (3.2). O deslocamento relativo de cada massa, q_i está indicado nesta mesma figura, além da sua relação com os respectivos deslocamentos absolutos d_i , para cada configuração analisada.

Esse estudo consiste em uma análise paramétrica visando otimizar cada uma dessas configurações. A otimização se dá através de uma busca numérica que conduza ao melhor comportamento de cada sistema.

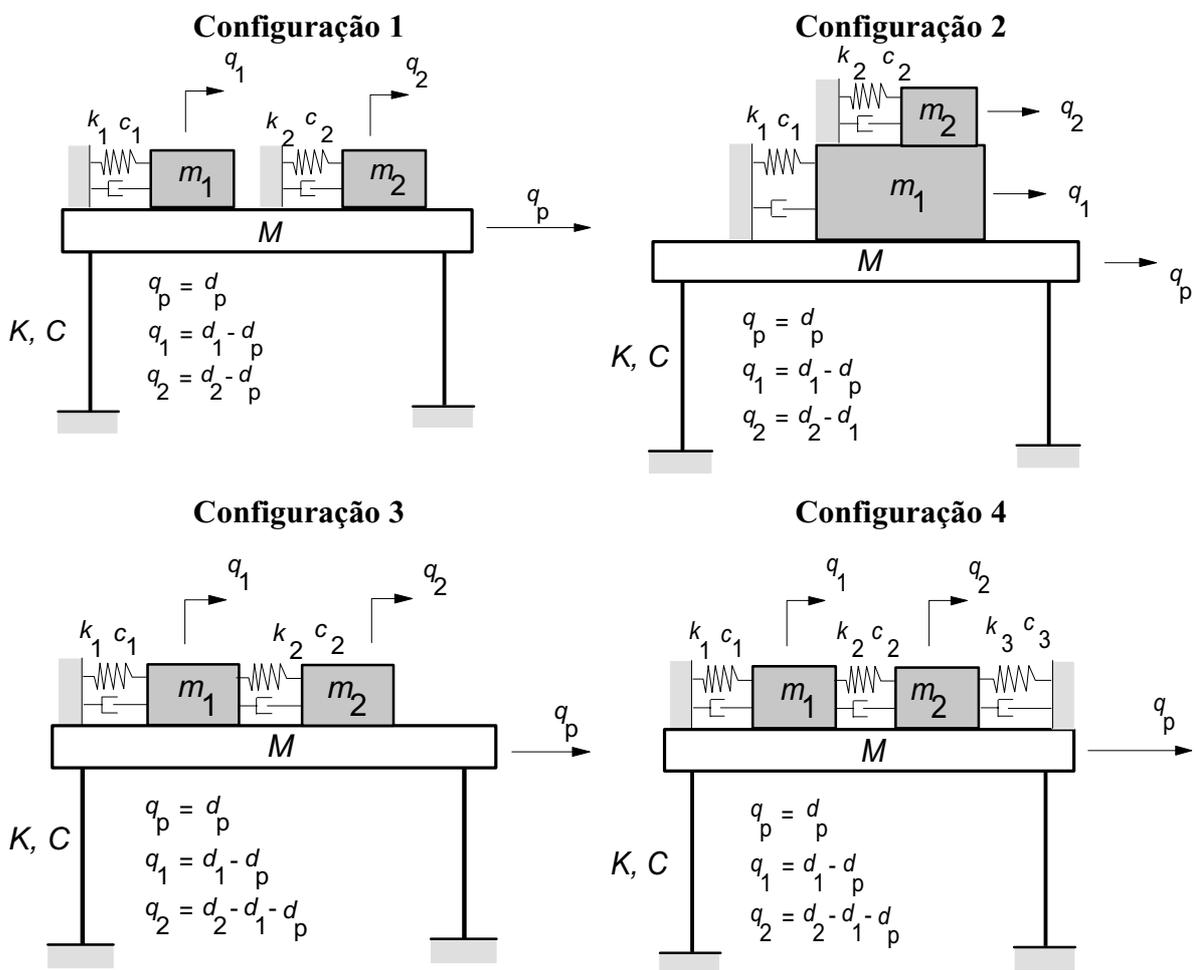


Figura 3.2 - Configurações de sistemas AMSM

O sistema de equações de movimento da estrutura com cada uma das configurações apresentadas na Figura (3.2) é o apresentado na equação (3.3).

Cada configuração, a depender da interligação entre as massas, possui matrizes de massa, rigidez e amortecimento diversas que são apresentadas a seguir

Configuração 1:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_1 & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Configuração 2:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 + m_2 & m_2 \\ m_1 + m_2 & m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Configuração 3:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + m_1 & m_1 & 0 \\ m_1 & m_1 + m_2 & m_2 \\ 0 & m_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C + c_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ -c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K + k_2 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_1 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Configuração 4:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + m_1 & m_1 & 0 \\ m_1 & m_1 + m_2 & m_2 \\ 0 & m_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C + c_2 + c_3 & -c_3 & -c_3 - c_2 \\ -c_3 & c_1 + c_3 & c_3 \\ -c_3 - c_2 & c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K + k_2 + k_3 & -k_3 & -k_3 - k_2 \\ -k_3 & k_1 + k_3 & k_3 \\ -k_3 - k_2 & k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Onde:

M , C e K são a massa, amortecimento e rigidez do sistema principal;

m_1 e m_2 são as massas dos amortecedores;

c_1 e c_2 são as constantes de amortecimento dos amortecedores;

k_1 , k_2 e k_3 (no caso 4) são as rigidezes dos amortecedores.

De forma a facilitar o procedimento numérico de otimização é feita uma normalização das equações de movimento e as matrizes M , C e K assumem o seguinte formato

Configuração 1

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 + \mu_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_1 \mu_1 \alpha_1 \omega_s & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \omega_s^2 \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Configuração 2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 + \mu_2 & \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 & \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_1 \mu_1 \alpha_1 \omega_s & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \omega_s^2 \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Configuração 3

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_s + 2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 0 & -2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s \\ 0 & 2\xi_1 \mu_1 \alpha_1 \omega_s & 0 \\ -2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 0 & 2\xi_2 \mu_2 \alpha_2 \omega_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 + \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & 0 & -\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \\ 0 & \mu_1 \omega_s^2 \alpha_1^2 & 0 \\ -\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & 0 & \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Configuração 4

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_s + 4\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & -2\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & -4\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s \\ -2\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 2\xi_{s1} \mu_1 \alpha_1 \omega_s + 2\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 2\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s \\ -4\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 2\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s & 4\xi_{s2} \mu_2 \alpha_2 \omega_s \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_s^2 + 2\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & -\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & -2\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \\ -\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & \mu_1 \omega_s^2 \alpha_1^2 + \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \\ -2\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & \mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 & 2\mu_2 \omega_s^2 \alpha_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde:

ω_s e ξ_s são, respectivamente, a frequência natural e a taxa de amortecimento da massa principal,

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{\omega_s} \tag{3.18}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2}{\omega_s} \tag{3.19}$$

ω_1 e ω_2 são as frequências dos amortecedores, e

$$\mu_1 = \frac{m_1}{M} \tag{3.20}$$

$$\mu_2 = \frac{m_2}{M} \tag{3.21}$$

O módulo do primeiro elemento da matriz $\mathbf{Y}(\omega)$, definida em (3.7), é a função da amplitude resposta harmônica permanente da massa principal. Define-se R_d como sendo o primeiro elemento da matriz $(\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$.

Jangid (1999) realizou uma busca numérica dos parâmetros ótimos de um AMSM baseando-se no procedimento *minimax* proposto por Tsai & Lin (1993) para otimizar os parâmetros de um AMS instalado em um sistema amortecido.

Esse procedimento consiste em realizar-se uma busca numérica dos parâmetros ótimos que produzam o menor pico da resposta R_d . Isto é feito, no caso de um único AMS, fixando-se ξ_s e μ e, para um conjunto de valores de α e ξ . Cada par de valores é substituído na expressão de R_d e o valor máximo é armazenado. Ao final, escolhe-se o mínimo desses valores e os parâmetros correspondentes são os parâmetros ótimos procurados.

No caso do AMSM, Jangid (1999), para dado número de amortecedores n_a e massa relativa μ , variou os parâmetros do AMSM (taxa de amortecimento, ξ_T , relação entre a frequência média dos AMSM e a frequência da massa principal, α , e a largura de banda adimensional de frequência, δ) até a amplitude de R_d atingir o valor mínimo. Foram determinados os parâmetros ótimos para uma série de valores diferentes de n_a e μ e, a partir destes parâmetros, realizou-se um ajuste de curvas determinando expressões para os parâmetros ótimos em função de n_a e μ .

O presente trabalho baseou-se também no procedimento sugerido por Tsai & Lin (1993), porém a determinação do valor máximo da curva de resposta em frequência é feito através da solução da equação

$$\frac{\partial R_d}{\partial \beta} = 0 \quad (3.22)$$

sujeita a condição

$$\frac{\partial^2 R_d}{\partial \beta^2} > 0 \quad (3.23)$$

que define o ponto de máximo de uma função, onde β é a razão entre frequência ω e a frequência da excitação. Como a equação (3.22) é uma equação não-linear, ela é resolvida numericamente através do método de Newton-Raphson.

Considere o edifício de dez andares, analisado anteriormente no Exemplo (2.2) reduzido a um sistema com um grau de liberdade, as propriedades do sistema reduzido, correspondentes ao modo fundamental, são: massa modal $M_1^* = 589.1t$; amortecimento modal $C_1^* = 74.79$ kNs/m e rigidez modal $K_1^* = 0.5935 \times 10^4$ kN/m. A Tabela (3.1) apresenta uma comparação entre os resultados do presente trabalho e os obtidos por Tsai & Lin (1993) para um AMS com $\mu = 0.01$ e $\xi_s = 0.02$, observa-se que os parâmetros ótimos do presente trabalho levam a um $R_{d \text{ máx}}$ inferior.

	α	ξ	$R_{d \text{ máx}}$
Presente Trabalho	0.98666	0.062	90.22945
Tsai & Lin (1993)	0.9925	0.0636	98.12083

Tabela 3.1 - Parâmetros ótimos para AMS

No presente trabalho realizou-se a otimização do AMSM com duas massas para cada uma das configurações apresentadas na Figura (3.2) a fim de verificar a

influência da interligação entre as massas. Nessa otimização, ao invés de se utilizar uma relação entre frequências média e a mesma taxa de amortecimento para todas as massas como foi realizado em Jangid (1999), variaram-se as relações entre frequências α_1 e α_2 e taxas de amortecimento ξ_1 e ξ_2 , além das massas relativas μ_1 e μ_2 .

Utilizando-se as expressões sugeridas por Jangid (1999) para parâmetros ótimos de um AMSM com $n_a = 2$ e um $\mu = 0.1$, para a configuração 1, encontraram-se os seguintes valores: $\mu_1 = 0.061$; $\mu_2 = 0.042$; $\alpha_1 = 0.825137$; $\alpha_2 = 0.995401$; $\xi_1 = \xi_2 = 0.12145$. Os valores dos parâmetros ótimos obtidos no presente trabalho para cada configuração com estas massas relativas estão apresentados na Tabela (3.2). A resposta máxima de cada configuração aqui estudada é comparada com a resposta máxima considerando um único AMS dimensionado segundo os parâmetros ótimos de Den Hartog e com o AMSM com os parâmetros ótimos calculados segundo as expressões de Jangid (1999), sendo estes valores mostrados na Tabela (3.3). Verifica-se que a metodologia aqui estudada leva a resultados mais eficientes que os obtidos segundo as expressões de Jangid (1999) ou quando se considera um AMS.

	α_1	α_2	ξ_1	ξ_2
Configuração 1	0.8500	1.000	0.1378	0.1600
Configuração 2	1.3375	0.9625	0.0400	0.5330
Configuração 3	1.6250	1.1750	0.0050	0.0050
Configuração 4	0.8500	0.8750	0.3389	0.0050

Tabela 3.2 - Parâmetros ótimos para AMSM

	$R_d \text{ máx}$
AMS	0.409
Jangid (1999)	0.392
Configuração 1	0.368
Configuração 2	0.365
Configuração 3	0.365
Configuração 4	0.372

Tabela 3.3 - Valores máximos de R_d

Analisando-se estes resultados em conjunto, desta vez na forma da curva da resposta em frequência, mostrada na Figura (3.3), verifica-se que as quatro configurações, neste caso, levam a um comportamento semelhante da estrutura, sendo que a configuração 3 apresenta o menor pico. Pode-se perceber que o uso

do AMSM forma um patamar que evita amplificação da resposta caso a frequência da excitação seja diferente da considerada no projeto, o que é comum nos casos dos carregamentos dinâmicos a que são submetidos edifícios altos. A Figura (3.4) apresenta as curvas de resposta em frequência da configuração 1 com os parâmetros ótimos de Jangid (1999) e os do presente trabalho. Verifica-se que a curva com os parâmetros de Jangid (1999) apesar de apresentar amplitudes menores para determinadas frequências possui um pico maior.

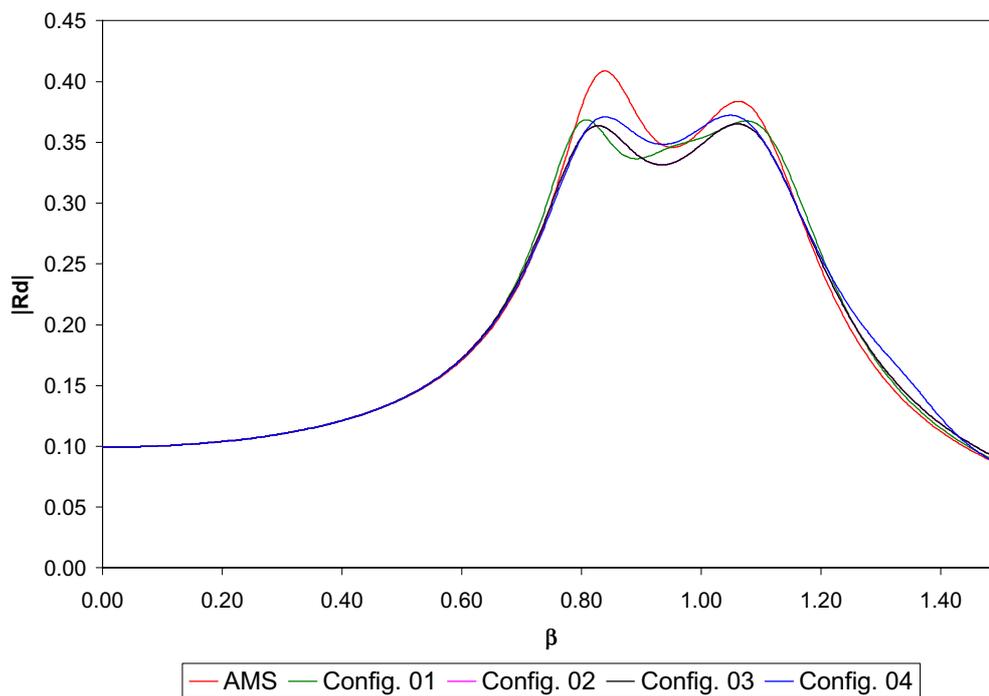


Figura 3.3 - Curvas de resposta em frequência

Submetendo a estrutura mencionada anteriormente, equipada com AMSM, a uma carga harmônica senoidal $F(t) = 10^3 \text{ sen}(\omega t)$ N com $\omega = 2.8566 \text{ rad/s}$ ($\beta = 0.9$), realiza-se uma análise no domínio do tempo para o sistema. A seguir, nas Tabelas (3.4) a (3.7) são apresentadas as respostas máximas e *rms* em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações de cada uma das massas em cada uma das configurações

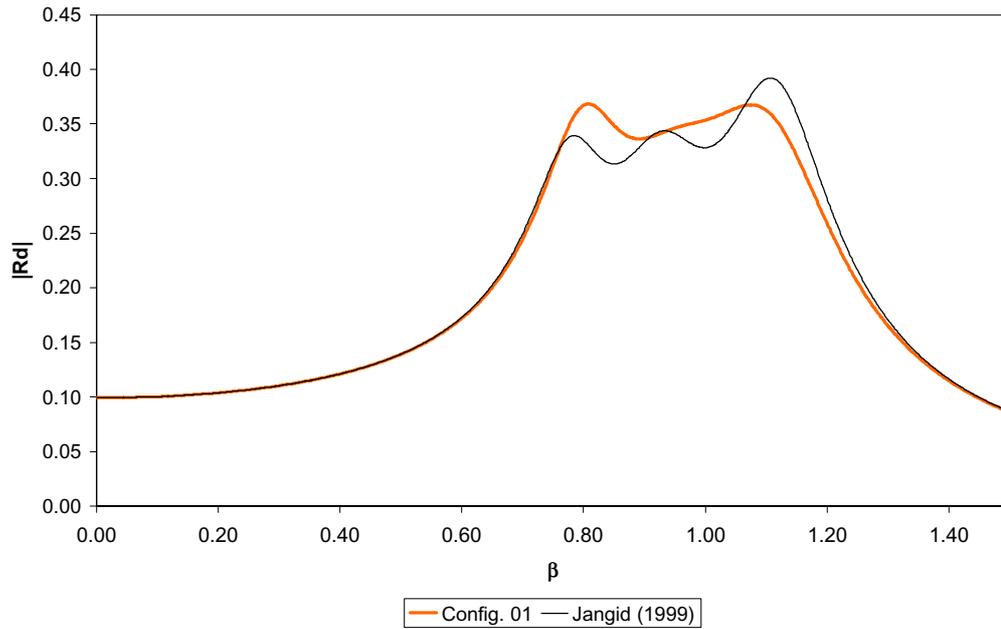


Figura 3.4 Curva de resposta em frequência, comparação com Jangid (1999)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6223	1.7789	5.1469
2	2.0990	5.9602	16.9477
3	1.4492	4.1978	12.2661
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4018	1.1456	3.2830
2	1.3950	3.9929	11.3813
3	0.9328	2.6706	7.6583

Tabela 3.4 – Respostas máximas e *rms* (Configuração 1)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6137	1.7513	5.0127
2	1.2914	3.6664	11.5623
3	1.1338	3.7895	10.7992
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4019	1.1457	3.2829
2	0.8754	2.5061	7.1592
3	0.9028	2.5823	7.3782

Tabela 3.5 – Respostas máximas e *rms* (Configuração 2)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6079	1.7349	5.7735
2	1.1330	3.7977	10.846
3	0.9077	2.5780	7.3526
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4150	1.1833	3.3906
2	0.9148	2.6192	7.4878
3	0.6148	1.7577	5.0161

Tabela 3.6 – Respostas máximas e *rms* (Configuração 3)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6301	1.7953	5.1359
2	1.5902	4.5220	12.8768
3	1.2666	3.6307	10.8817
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4209	1.1999	3.4382
2	1.0722	3.0862	8.8047
3	0.8610	2.4567	7.0493

Tabela 3.7 – Respostas máximas e *rms* (Configuração 4)

Apresentam-se nas Figuras (3.5) a (3.8) a evolução do deslocamento da massa principal no tempo para cada uma das configurações estudadas

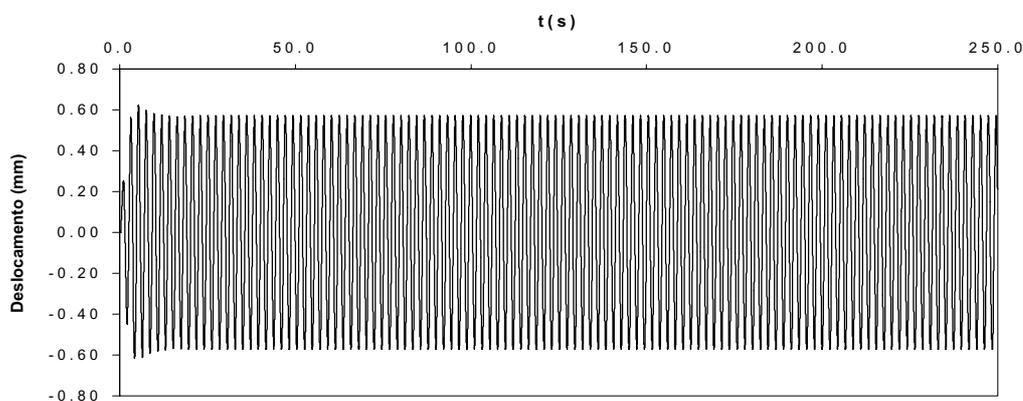


Figura 3.5 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal (configuração 1)

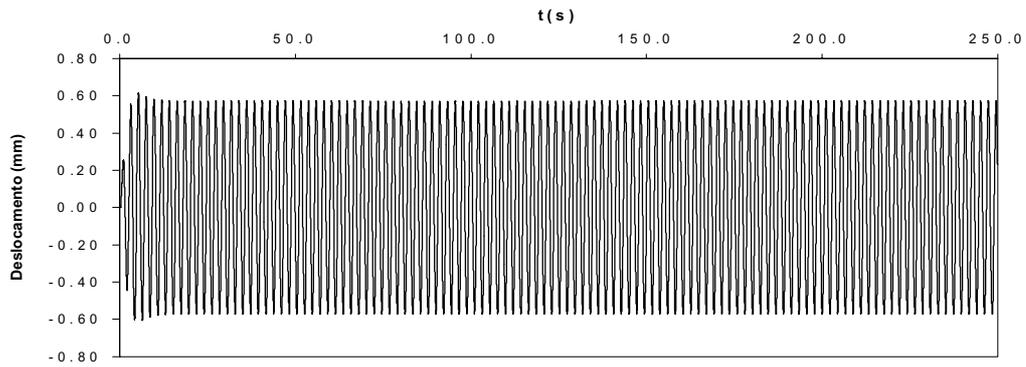


Figura 3.6 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal (configuração 2)

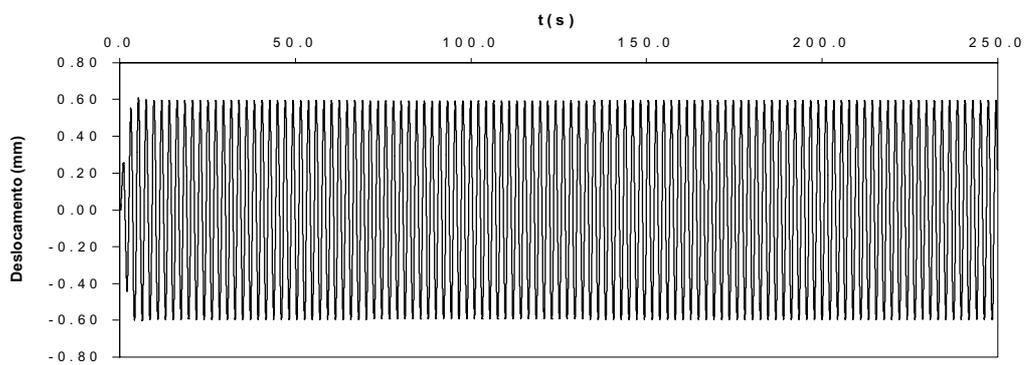


Figura 3.7 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal (configuração 3)

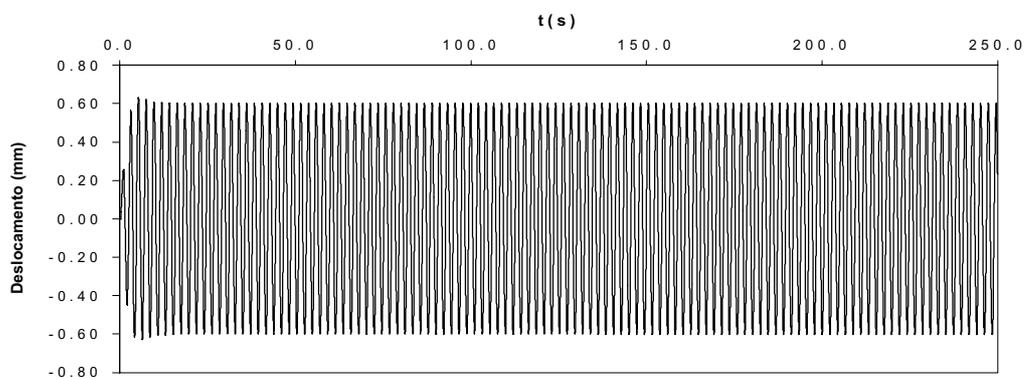


Figura 3.8 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal (configuração 4)

Analisando-se conjuntamente a amplitude da resposta permanente de cada uma das configurações mostradas a seguir, verifica-se que os resultados são bastante próximos para a frequência em questão segundo mostra a Tabela (3.8)

	Amplitude da Resposta Permanente (mm)
Config. 01	0.571
Config. 02	0.572
Config. 03	0.593
Config. 04	0.600

Tabela 3.8 - Amplitudes da resposta permanente

Uma questão importante no projeto de sistemas de controle passivo com AMSM é a questão do espaço disponível para instalação do mesmo. A seguir, nas Figuras (3.9) e (3.10) apresentam-se os deslocamentos máximos e *rms* em relação ao edifício da segunda massa para cada configuração.

Para a segunda massa a configuração que levaria a um resultado mais satisfatório seria a configuração 1 onde as massas não são interligadas, já para a primeira massa, como se pode verificar nos diagramas mostrados nas Figuras (3.11) e (3.12), as configurações 2 e 3 onde as massas são interligadas conduzem a melhores resultados.

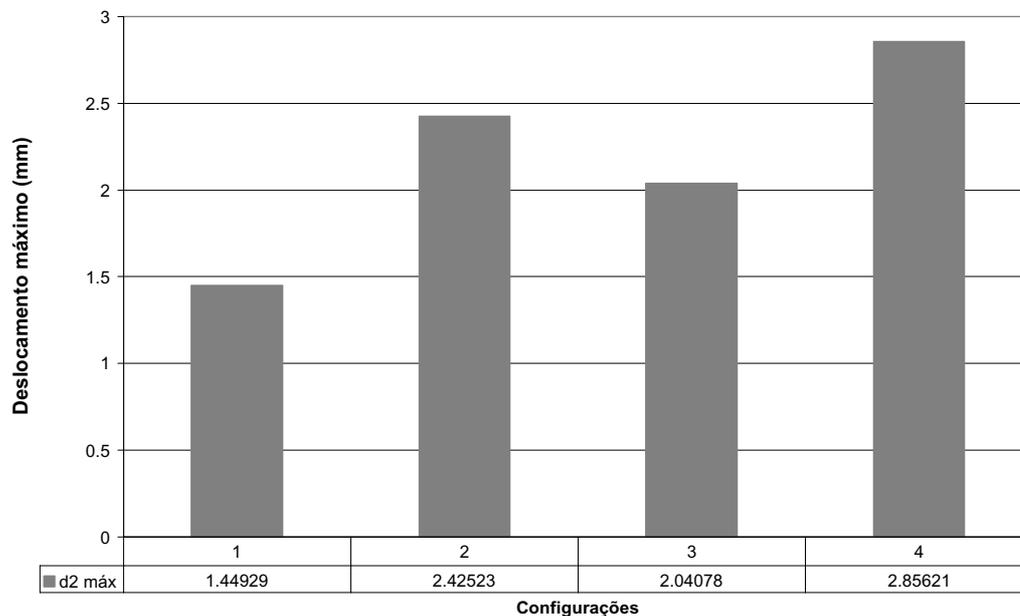


Figura 3.9 - Deslocamento total máximo da segunda massa

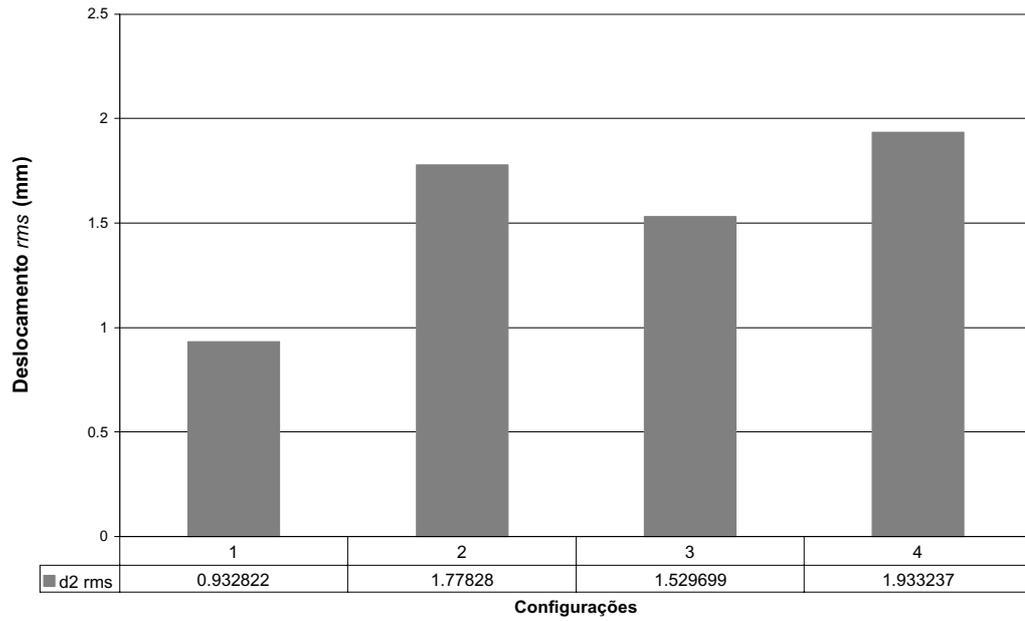


Figura 3.10 Deslocamento total *rms* da segunda massa

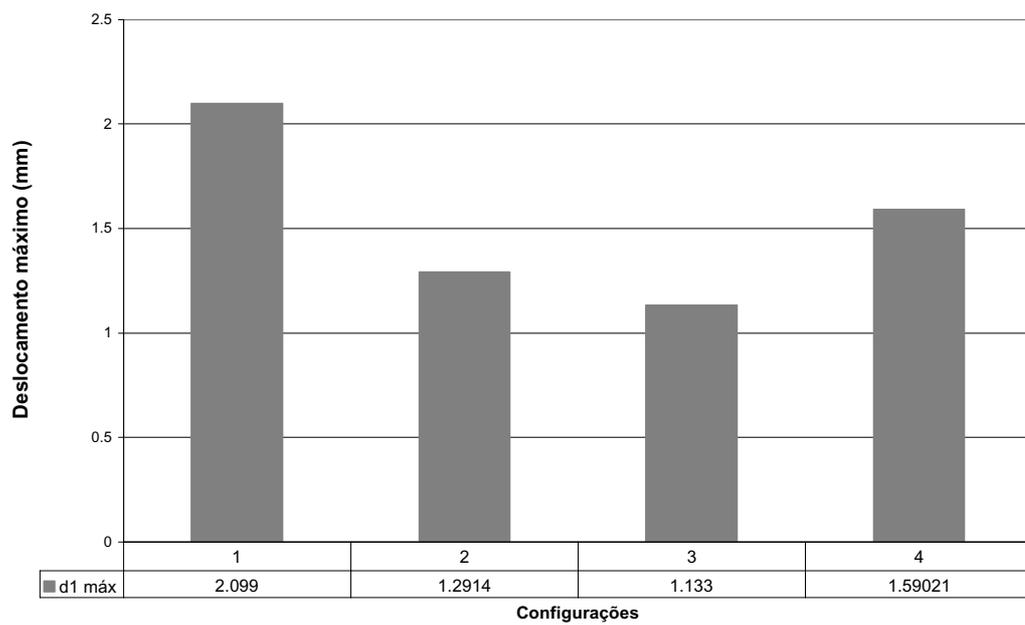


Figura 3.11 - Desl. total máximo da primeira massa

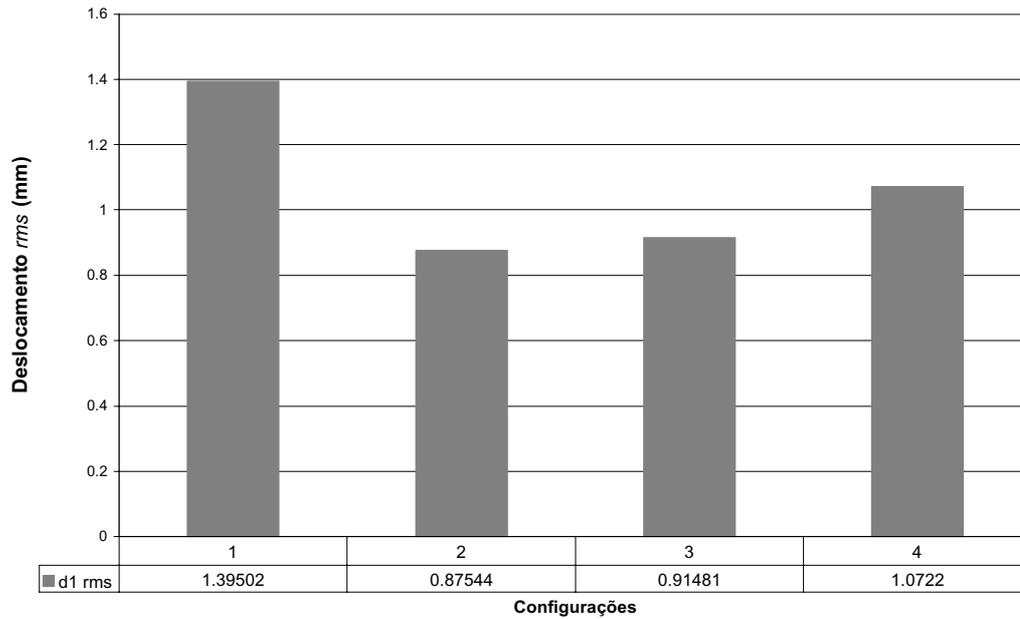


Figura 3.12 - Desl. total *rms* da primeira massa

A fim de verificar qual seria a influência da relação entre as massas do AMSM realizou-se uma nova otimização, agora incluindo este fator através dos parâmetros μ_1 e μ_2 , que conduziria ao menor pico de R_d . A Tabela (3.9) apresenta os valores ótimos encontrados e os respectivos picos de R utilizando uma massa relativa total $\mu = 0.1$:

	α_1	α_2	ξ_1	ξ_2	μ_1	μ_2	$R_d \text{ máx}$
Config. 01	0.9	0.9	0.2	0.2	-	-	0.3977
Config. 02	1.1	0.9	0.05	0.35	0.08	0.02	0.3560
Config. 03	1.1	0.9	0.05	0.35	0.08	0.02	0.3560
Config. 04	1.1	0.8	0.05	0.25	0.03	0.07	0.3942

Tabela 3.9 - Parâmetros ótimos para $\mu = 0.1$

Verifica-se que as configurações 2 e 3, apresentando resultados equivalentes, mostraram-se mais eficientes. Vale ressaltar ainda que, neste caso, a relação entre as massas não afetou os resultados da configuração 1. A Figura (3.13) apresenta as curvas de resposta em frequência para cada configuração e para o caso de um único AMS.

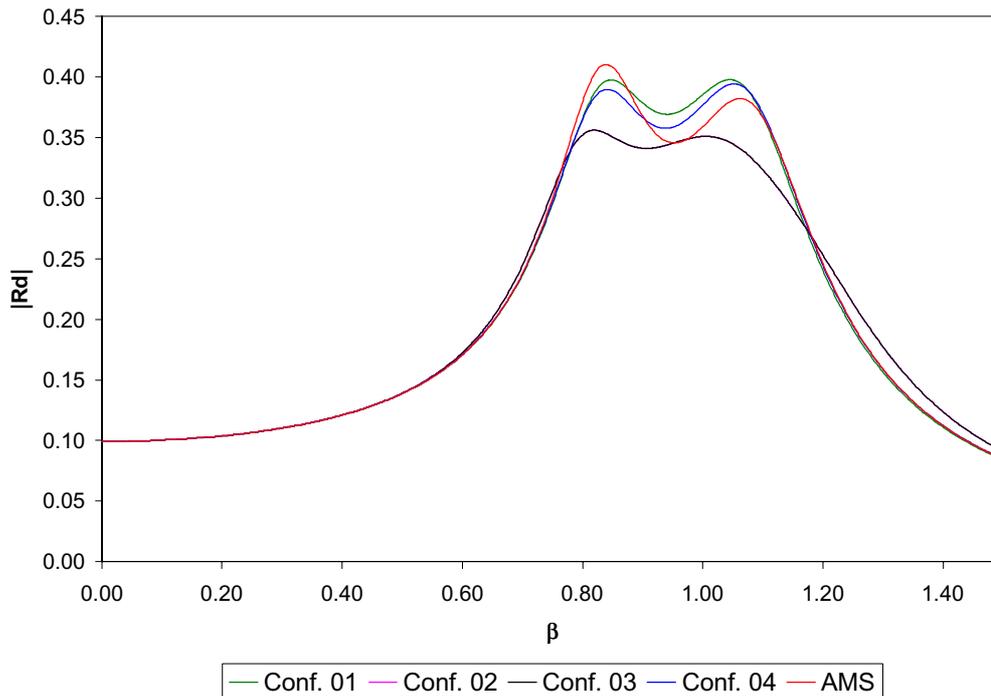


Figura 3.13 - Curvas de resposta em frequência ($\mu = 0.1$)

Considerando-se o caso de uma massa relativa total igual a $\mu = 0.05$ os valores dos parâmetros ótimos obtidos estão apresentados na Tabela (3.10). Neste caso, a configuração 4 foi a que apresentou os piores resultados e as demais configurações apresentaram resultados equivalentes.

	α_1	α_2	ξ_1	ξ_2	μ_1	μ_2	$R_d \text{ máx}$
Config. 01	0.9	1.0	0.1	0.1	0.025	0.025	0.5041
Config. 02	1.0	0.8	0.05	0.35	0.045	0.005	0.5042
Config. 03	1.0	0.8	0.05	0.35	0.045	0.005	0.5042
Config. 04	1.0	0.8	0.05	0.30	0.03	0.02	0.5171

Tabela 3.10 - Parâmetros ótimos para $\mu = 0.05$

A Figura (3.14) apresenta as curvas de resposta em frequência de cada configuração e de um único AMS, pode-se perceber que o uso do AMSM, apesar de levar a uma amplitude da resposta superior na região da frequência de ressonância, forma um patamar que evita amplificação da resposta caso a frequência da excitação seja um pouco diferente da considerada no projeto.

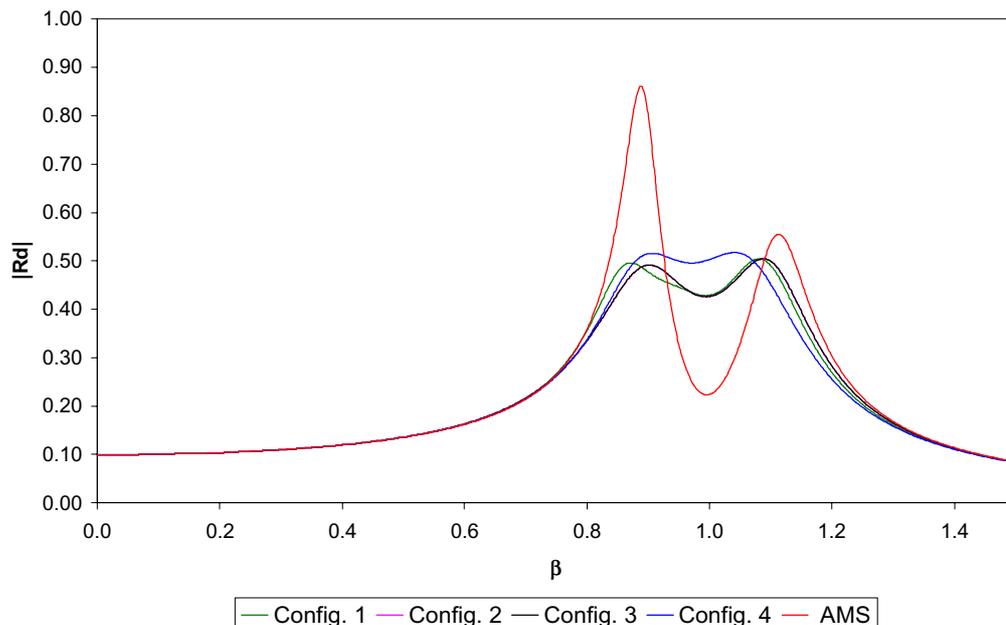


Figura 3.14 - Curvas de resposta em frequência ($\mu = 0.05$)

Utilizando uma carga harmônica senoidal $F(t) = 10^3 \text{ sen}(\omega t)$ N com $\omega = 3.174 \text{ rad/s}$ ($\beta = 1.0$) realizou-se a análise no domínio do tempo para a mesma estrutura analisada anteriormente, com cada configuração fazendo uso dos parâmetros ótimos de massa, frequência e amortecimento obtidos no item anterior para o caso de $\mu = 0.1$. A seguir, nas Tabelas (3.11) a (3.14) são apresentados as respostas máximas e *rms* em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações de cada uma das configurações

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	$a_{\text{máx}}$ (mm/s ²)
1	0.6756	2.1419	6.8184
2	1.6623	5.2525	16.7970
3	1.6623	5.2525	16.7970
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4557	1.4485	4.5901
2	1.1097	3.5151	11.1757
3	1.1097	3.5151	11.1757

Tabela 3.11 – Respostas máximas e rms para $\mu = 0.1$ (Configuração 1)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6068	1.9162	6.0767
2	1.5488	4.8719	16.6537
3	2.3740	7.4867	23.6299
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4149	1.3192	4.1798
2	1.0320	3.2683	10.4020
3	1.5793	5.0210	15.9021

Tabela 3.12 – Respostas máximas e *rms* para $\mu = 0.1$ (Configuração 2)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6068	1.9162	6.0768
2	1.5488	4.8720	16.6539
3	1.7876	5.6184	17.6986
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4149	1.3192	4.1798
2	1.0320	3.2684	10.4021
3	1.1681	3.7128	11.7570

Tabela 3.13 – Respostas máximas e *rms* para $\mu = 0.1$ (Configuração 3)

Massa	$d_{\text{máx}}$ (mm)	$v_{\text{máx}}$ (mm/s)	a_{max} (mm/s ²)
1	0.6632	2.1045	6.7102
2	1.5739	4.9724	16.649
3	0.3790	1.1596	3.605
Massa	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.4458	14.1781	4.4931
2	1.0479	3.1866	10.5571
3	0.1801	0.5713	1.8100

Tabela 3.14 – Respostas máximas e *rms* para $\mu = 0.1$ (Configuração 4)

Apresenta-se nas Figuras (3.15) a (3.18) a evolução do deslocamento da massa principal no tempo para cada uma das configurações estudadas.

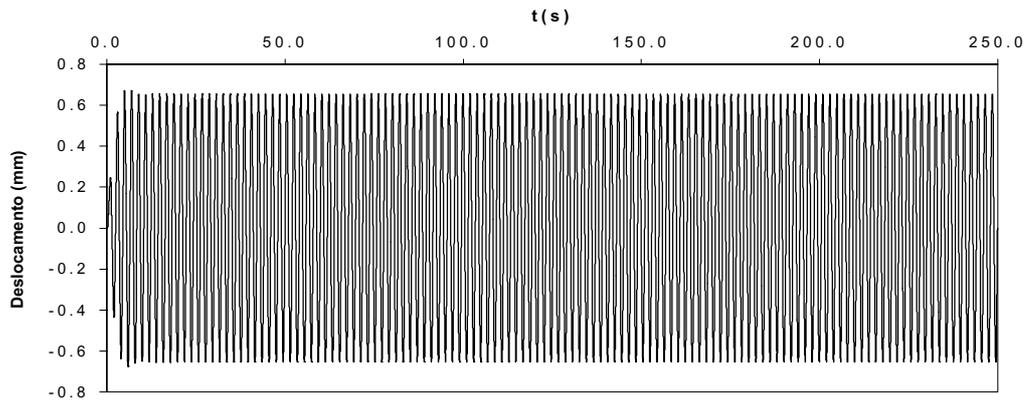


Figura 3.15 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal ($\mu = 0.1$; conf. 1)

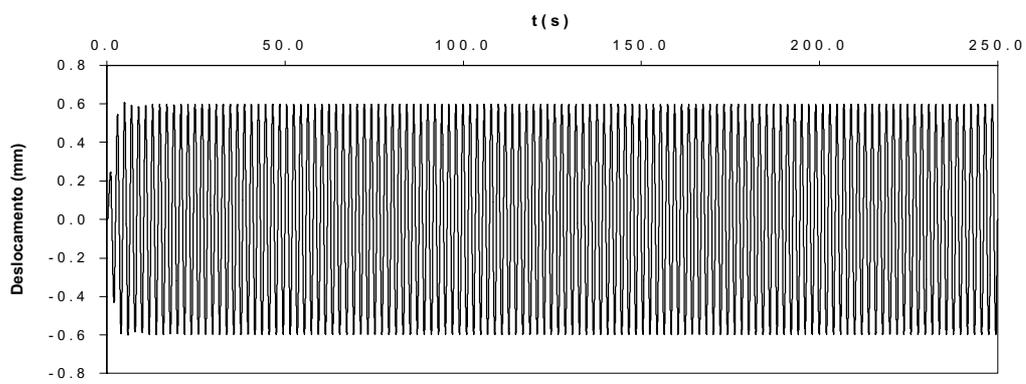


Figura 3.16 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal ($\mu = 0.1$; conf. 2)

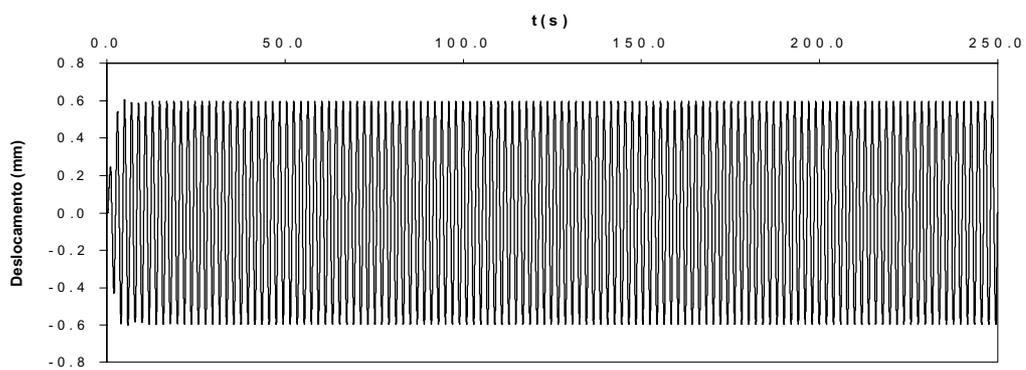


Figura 3.17 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal ($\mu = 0.1$; conf. 3)

Analisando-se conjuntamente a amplitude da resposta permanente de cada uma das configurações mostradas na Tabela (3.15), verifica-se que as configurações 2 e 3 são mais eficientes para a frequência de carregamento em questão

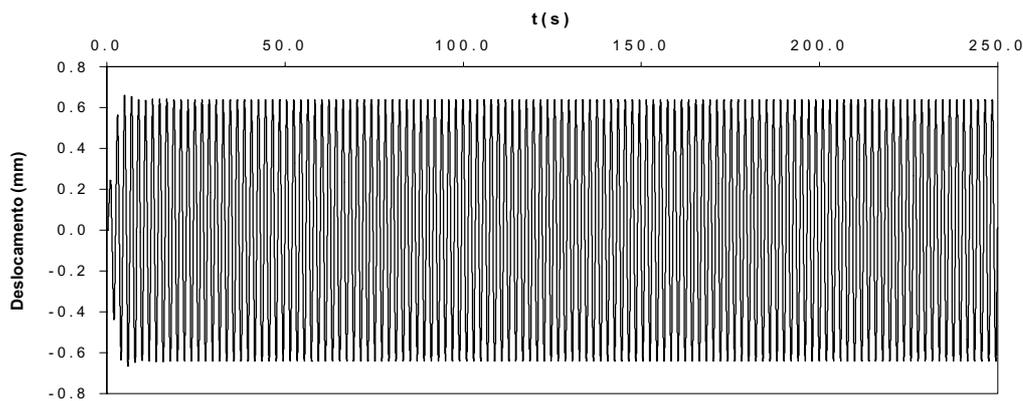


Figura 3.18 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal ($\mu = 0.1$; conf. 4)

	Amplitude da Resposta Permanente (mm)
Config. 01	0.650
Config. 02	0.591
Config. 03	0.595
Config. 04	0.638

Tabela 3.15 - Amplitude da resposta permanente para $\mu = 0.1$

A seguir, nas Figuras (3.19) e (3.20) são apresentados os deslocamentos máximos e *rms* das massas do AMSM para cada configuração, verifica-se que no caso da primeira massa, a resposta é praticamente a mesma, independentemente da configuração utilizada. Já para a segunda massa as configurações 1 e 4 conduzem a melhores resultados.

A influência da relação $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ no valor de R_d máx, para cada configuração, utilizando um valor total $\mu = 0.05$, podem ser analisadas nas curvas apresentadas nas Figura (3.21). Para a configuração 1 o melhor é que as duas massas sejam iguais, já as configurações 2 e 3 são mais eficientes se a primeira massa for maior. No caso da configuração 4 uma das massas deve ser 50% maior que a outra para se obter um menor valor máximo de R .

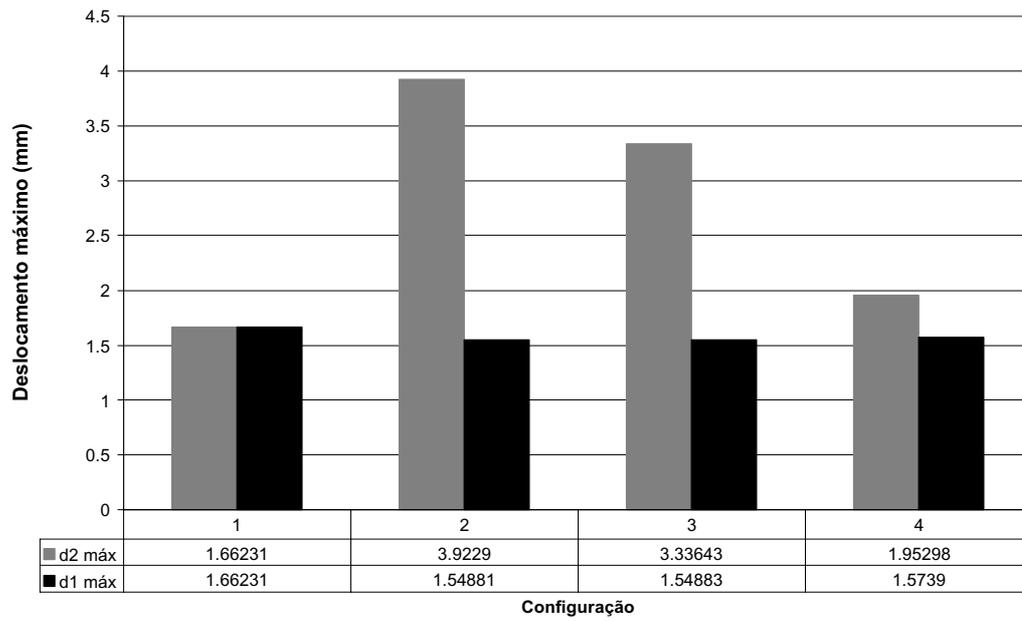


Figura 3.19 - Deslocamento total Máximo

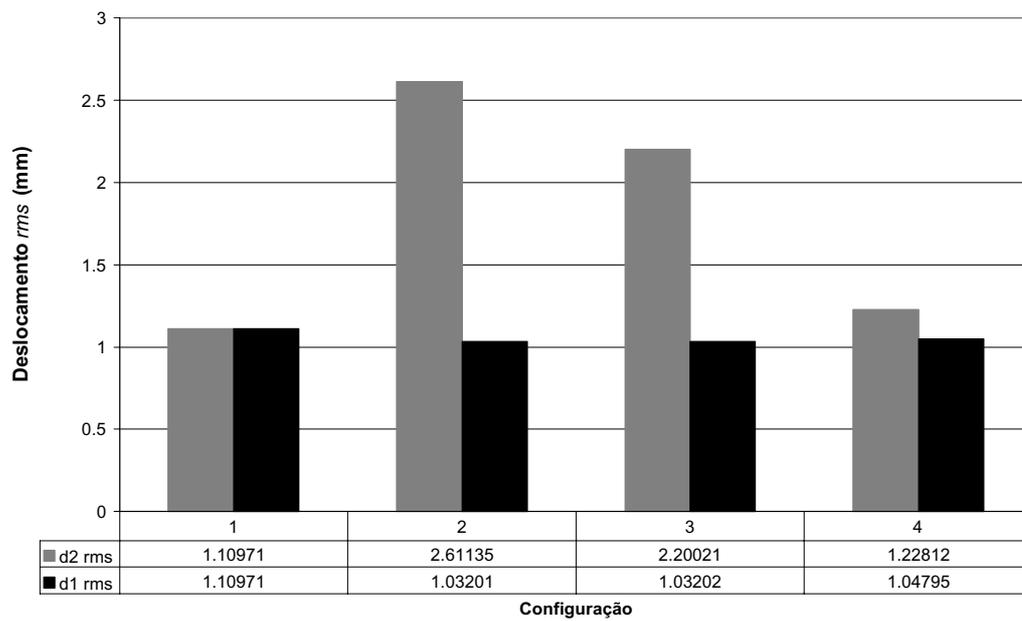


Figura 3.20 - Deslocamento total rms

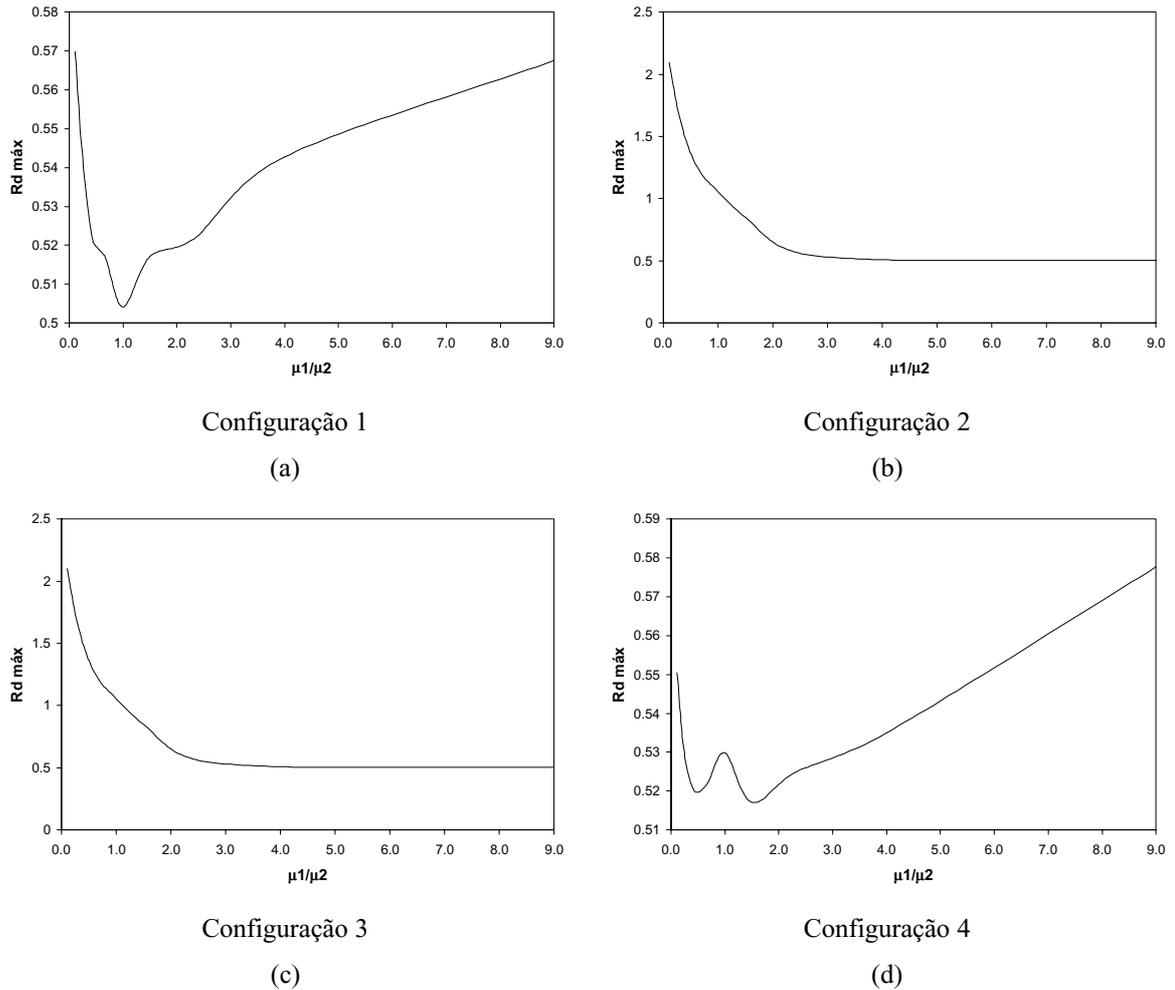


Figura 3.21 - Influência da relação entre as massas no pico de R_d

3.5 Exemplo - Aplicação a um edifício alto : o Citycorp Center

O Citycorp Center é um arranha-céus com 274 m de altura, localizado em Nova York, mostrado na Figura (3.22a). Por ser uma estrutura esbelta tem baixa frequência natural e por estar normalmente submetida a um carregamento devido à ação do vento (de baixa frequência) apresenta amplificação de seus deslocamentos. Se trata de um dos dois únicos edifícios nos Estados Unidos equipados com um AMS. O amortecedor foi instalado no 63º andar, nessa altura o edifício pode ser modelado como uma simples massa modal a qual o AMS é conectado formando um sistema de dois graus de liberdade. As características dinâmicas da estrutura e do sistema absorvedor estão resumidas na Figura (3.22b)



	Estrutura	Sistema Absorvor
Massa	1.8×10^4 t	3.6×10^2 t
Frequência Natural	1.0 rad/s	0.91 rad/s
Rigidez	1.82×10^2 kN/cm	3.03 kN/cm
Taxa de Amortecimento	1%	3.6%

Figura 3.22 – (a) Citycorp Center; (b) Características dinâmicas da estrutura (Soong & Dargush, 1997)

O carregamento dinâmico da ação do vento na estrutura foi aproximado por uma força harmônica na forma

$$F(t) = P(3 \sin \omega_e t + 7 \sin 2\omega_e t + 5 \sin 3\omega_e t + 4 \sin 4\omega_e t) \quad (3.24)$$

onde P é a magnitude da carga que é de aproximadamente 40 kN e ω_e é a frequência básica da excitação, de valor igual à frequência da estrutura, 1.0 rad/s (Petersen, 1980; 1981). A Figura (3.23) mostra a evolução no tempo do deslocamento da massa principal sem controle e com o AMS. Verifica-se que o sistema de controle passivo se apresenta bastante eficiente, o que se confirma verificando os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações máximos e *rms* apresentados na Tabela (3.16)

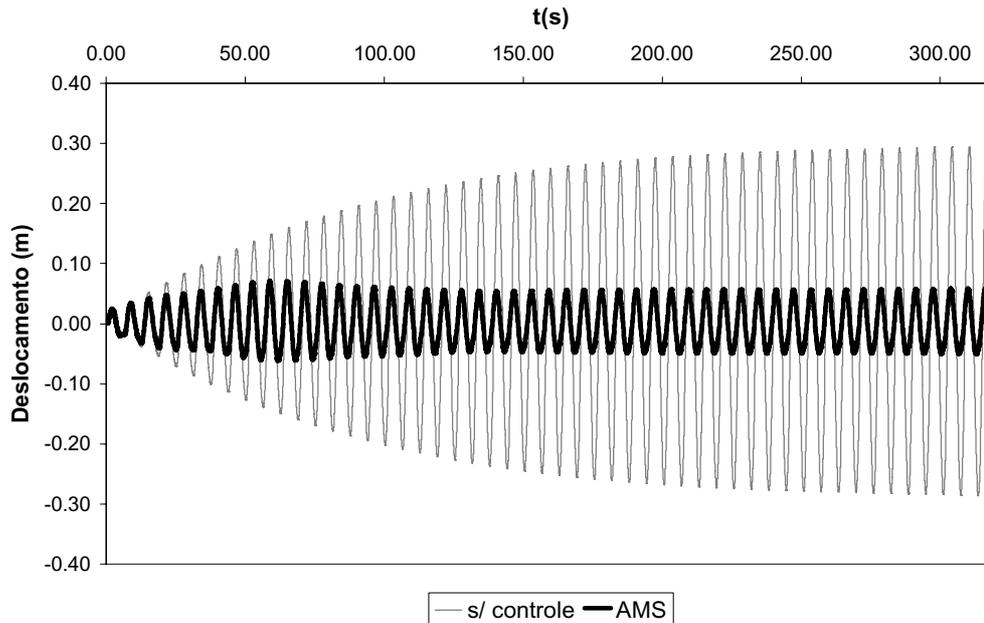


Figura 3.23 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal

	$d_{m\acute{a}x}$ (m)	$v_{m\acute{a}x}$ (m/s)	$a_{m\acute{a}x}$ (m/s ²)	d_{rms} (m)	v_{rms} (m/s)	a_{rms} (m/s ²)
Estrutura s/ controle	0.295	0.303	0.305	0.092	0.093	0.094
Estrutura com AMS	0.071	0.074	0.079	0.039	0.039	0.043

Tabela 3.16 – Resposta máxima e *rms* (Citycorp Center)

Admitindo-se que a mesma carga harmônica tenha uma frequência básica $\omega_e = 1.035$ rad/s, levemente superior a frequência natural do sistema principal, verifica-se, observando a Figura (3.24), que o sistema absorber já não funciona de forma eficiente chegando a amplificar a resposta permanente da estrutura

Isto se confirma observando a Figura (3.25) que apresenta a curva de resposta em frequência da estrutura equipada com AMS. Verifica-se que para $\omega_e = 1.035$ rad/s existe um pico na resposta. E confirma-se a limitação deste tipo de dispositivo quando a estrutura sofre um carregamento fora da faixa de frequência de projeto.

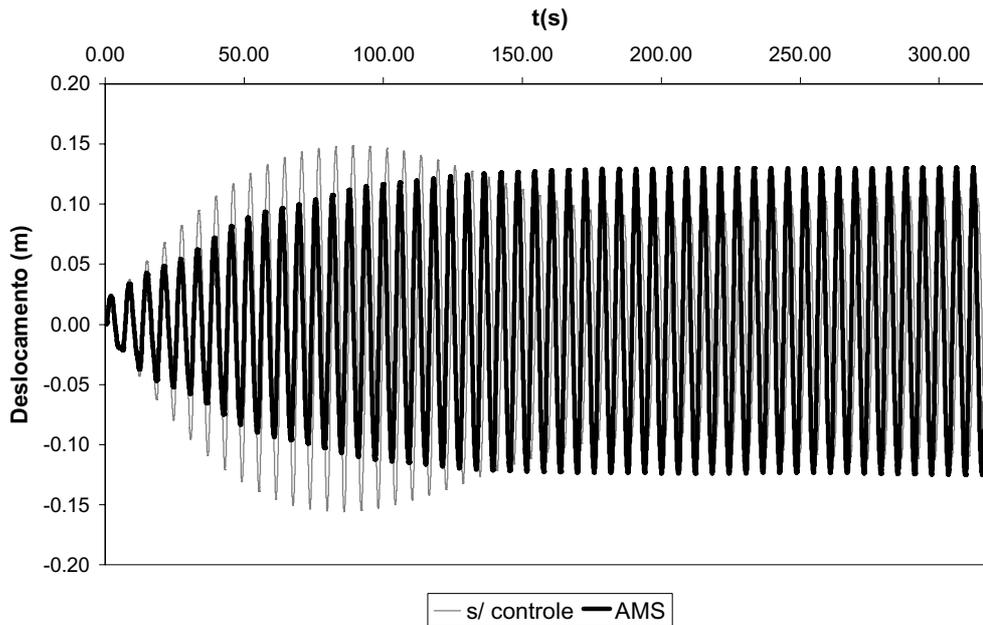


Figura 3.24 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal ($\omega = 1.035$ rad/s)

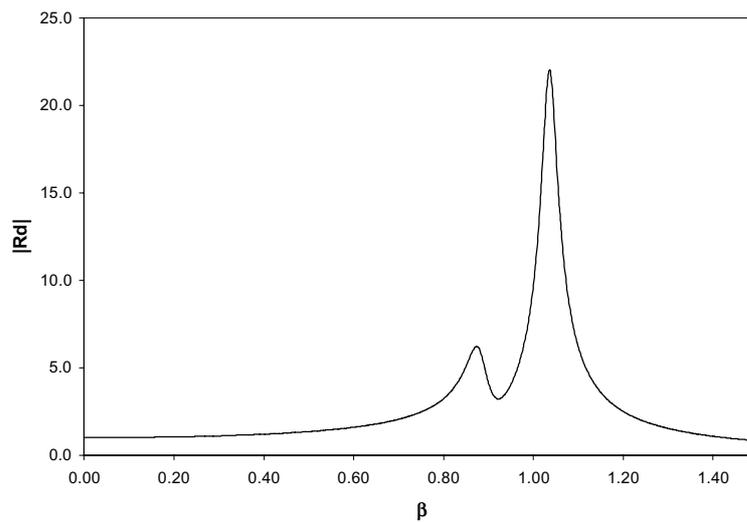


Figura 3.25 - Curva de resposta em frequência da estrutura equipada com AMS

Se, ao invés, de um único AMS, se utilizasse um AMSM com duas massas ($m_1 = m_2 = 180$ t) o sistema de controle seria bem mais eficiente como se pode observar na curva de resposta em frequência do AMSM apresentada na Figura (3.26). As propriedades do AMSM são apresentadas na Tabela (3.17). A Figura (3.27) apresenta a resposta da estrutura submetida a um carregamento com frequência $\omega_e = 1.035$ rad/s sem controle e equipada com AMSM.

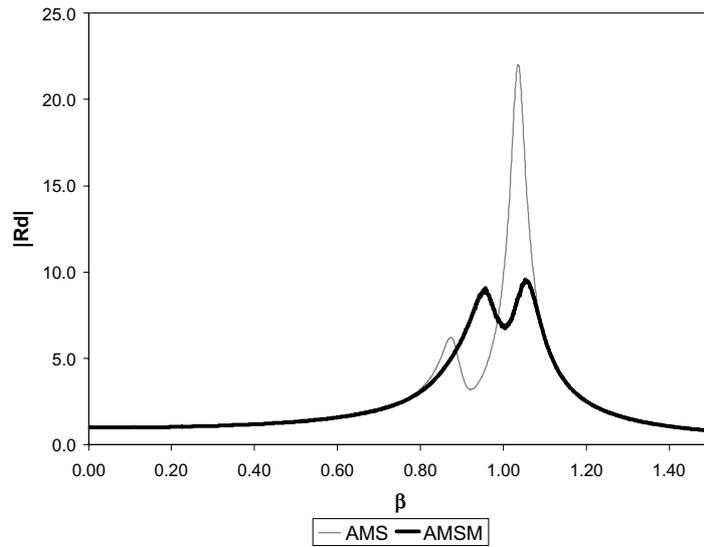


Figura 3.26 - Curva de resposta em frequência da estrutura equipada com AMSM

μ_1	0.01
μ_2	0.01
ω_1	0.9 rad/s
ω_2	1.0 rad/s
ξ_1	10 %
ξ_2	5 %

Tabela 3.17 - Propriedades do AMSM

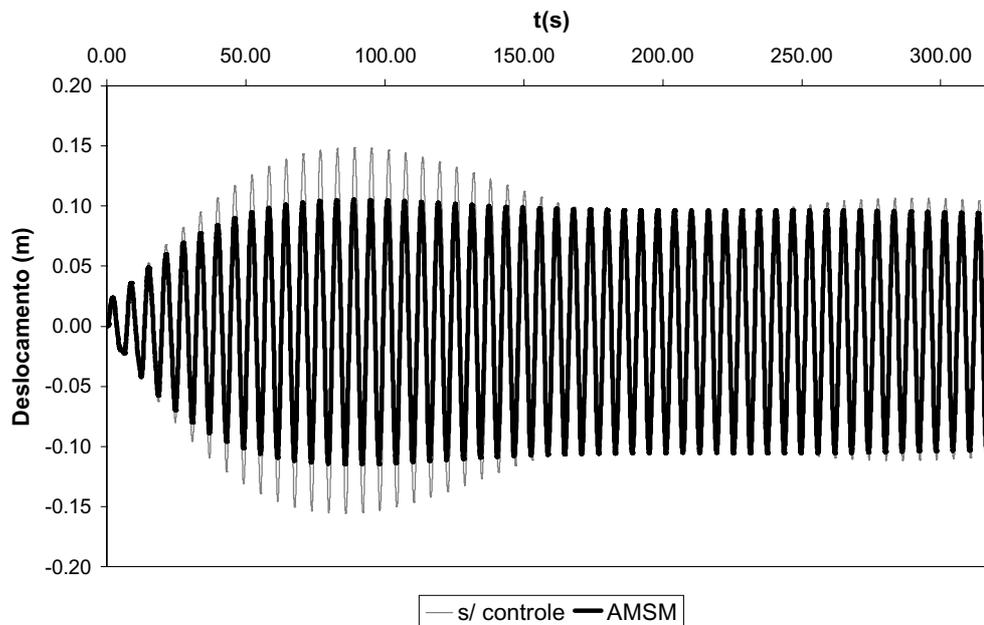


Figura 3.27 -- Evolução do deslocamento da estrutura com AMSM

3.6 Influência do número de amortecedores n_a

Este item tem como objetivo mostrar a influência do número de amortecedores adotados no projeto de um sistema AMSM. Para isso utilizam-se as expressões para cálculo dos parâmetros ótimos de AMSM com $n_a \geq 2$, apresentadas por Jangid (1999). Em seu estudo esses parâmetros são determinados através de uma técnica de busca numérica, não há consideração de interligação entre as massas, sendo estas dispostas conforme o modelo apresentado na Figura (3.1). Para uma dada razão entre massas μ e um número n_a de AMSM, os parâmetros ξ_T , taxa de amortecimento mantida constante para todas as massas, β_ω , faixa de frequência adimensional do sistema, e f_ω , razão entre as frequências sintonizadas, são variados de forma que a amplitude do deslocamento do sistema principal R_d tenha um valor mínimo para todas as frequências de excitação. As restrições para os valores dos parâmetros no estudo de otimização são: $0 \leq \xi_T < 1$; $0 \leq \beta_\omega < 2$ e $f_\omega > 0$. Essas condições satisfazem as restrições: (i) as frequências naturais do AMSM são reais positivas e (ii) o AMSM é sub-amortecido. Jangid (1999) apresenta uma tabela de parâmetros ótimos para diferentes valores de n_a e μ , e através destes, com o auxílio de um ajuste de curvas, propõe as seguintes expressões para os parâmetros ótimos do AMSM

$$\xi_T^{\text{ótimo}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)(1-0.5\mu)}} + (a_1 + a_2\sqrt{\mu} + a_3\mu)\sqrt{\mu} \left\{ a_4 \left(\frac{1}{\sqrt{n_a}} - 1 \right) + a_5 \left(\frac{1}{n_a} - 1 \right) + a_6 (\sqrt{n_a} - 1) \right\} \quad (3.25)$$

$$\beta_\omega^{\text{ótimo}} = (a_1 + a_2\sqrt{\mu} + a_3\mu)\sqrt{\mu} \left\{ a_4 \left(\frac{1}{\sqrt{n_a}} - 1 \right) + a_5 (n_a - 1) + a_6 (\sqrt{n_a} - 1) \right\} \frac{1}{\sqrt{n_a}} \quad (3.26)$$

$$f_\omega^{\text{ótimo}} = \frac{\sqrt{1-0.5\mu}}{1+\mu} + (a_1 + a_2\sqrt{\mu} + a_3\mu)\sqrt{\mu} \left\{ a_4 \left(\frac{1}{\sqrt{n_a}} - 1 \right) + a_5 (n_a - 1) + a_6 (\sqrt{n_a} - 1) \right\} \frac{1}{\sqrt{n_a}} \quad (3.27)$$

$$R_d^{\text{ótimo}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}(1 + \mu) + (a_1 + a_2\sqrt{\mu} + a_3\mu)\sqrt{\frac{1}{\mu}}\left\{a_4\left(\frac{1}{\sqrt{n_a}} - 1\right) + a_5\left(\frac{1}{n_a} - 1\right)\right. \\ \left. + a_6\left(\frac{1}{n_a\sqrt{n_a}} - 1\right)\right\} \quad (3.28)$$

Os valores dos coeficiente nas equações (3.25) a (3.28) são dados na Tabela (3.18).

Coeficientes	$\xi_T^{\text{ótimo}}$	$\beta^{\text{ótimo}}$	$f^{\text{ótimo}}$	$R^{\text{ótimo}}$
a_1	0.5474	0.42113	-0.00241	0.2985
a_2	0.1038	0.04479	0.72152	-0.0078
a_3	-0.4522	-0.38909	-0.43970	0.2355
a_4	0.7604	-0.73518	-0.66385	-0.0442
a_5	0.3916	-0.11866	-0.01138	0.6265
a_6	0.0403	4.86136	0.99522	0.4789

Tabela 3.18 - Valores dos vários coeficientes nas expressões dos parâmetros ótimos, Jangid(1999)

Considere, novamente, o sistema de dez graus de liberdade estudado no Exemplo (2.2), reduzido a um sistema de um grau de liberdade equivalente, com propriedades correspondentes ao modo fundamental: massa modal $M_1^* = 589.1\text{t}$; amortecimento modal $C_1^* = 74.8 \text{ kNs/m}$ e rigidez modal $K_1^* = 0.593355 \times 10^4 \text{ kN/m}$. Obtém-se os parâmetros ótimos através das expressões (3.25), (3.26) e (3.27) e através destas calculam-se para cada número de amortecedores, n_a , escolhido, os valores das freqüências naturais, massa, rigidez e constante de amortecimento de cada um deles. A relação entre as massas utilizada foi $\mu = 0.05$.

A Figura (3.28) apresenta a amplitude da resposta harmônica para o sistema sem controle e com a utilização de um sistema AMSM com $n_a = 3$.

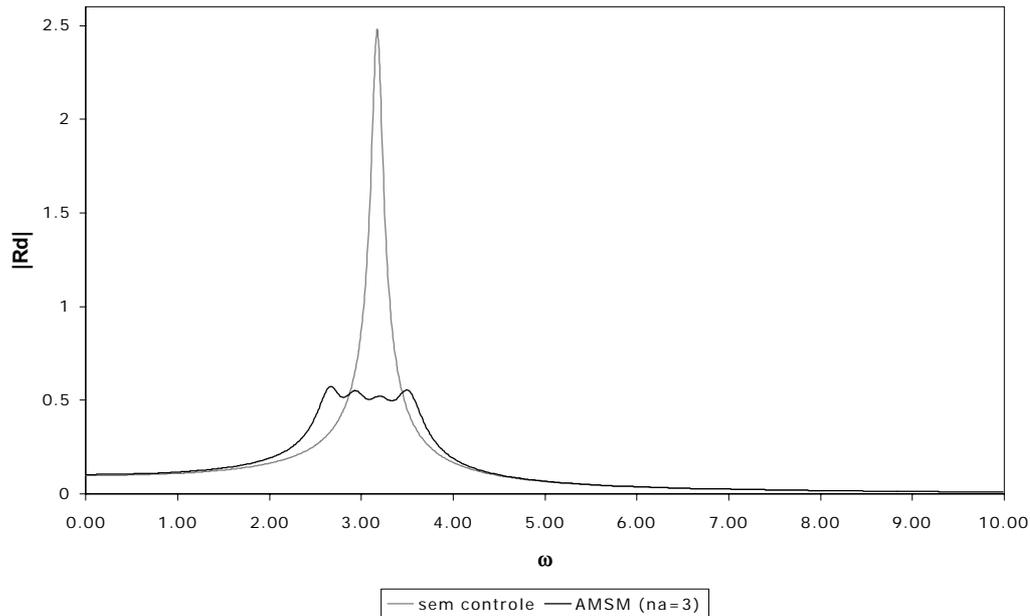


Figura 3.28 - Resposta em frequência sem controle e com AMSM ($n_a = 3$)

Verifica-se que a utilização do AMSM reduz em, aproximadamente, setenta e cinco por cento a amplitude máxima da resposta. Além disto, observa-se que existe um patamar em torno da frequência natural, mostrando ser a resposta praticamente insensível a pequenos erros de parâmetros ou variação da frequência de excitação nesta região. A Figura (3.29) mostra as respostas em frequência no caso de $n_a = 2$ e $n_a = 3$, verifica-se que o aumento do número de massas reduz a magnitude dos picos da curva. Em seguida, na Figura (3.30) são mostradas as respostas para AMSM utilizando um número crescente de amortecedores ($n_a=3$; $n_a=4$; $n_a=5$; $n_a=7$ e $n_a=11$). O número de amortecedores, neste caso, apesar de apresentar uma pequena redução na magnitude dos picos, não tem uma influência significativa na redução da amplitude da resposta. Isso pode não se verificar em outros casos, conforme pode ser observado na Figura (3.31) que mostra a resposta em frequência de uma outra estrutura, apresentada por Yamaguchi & Harnpornchai (1993).

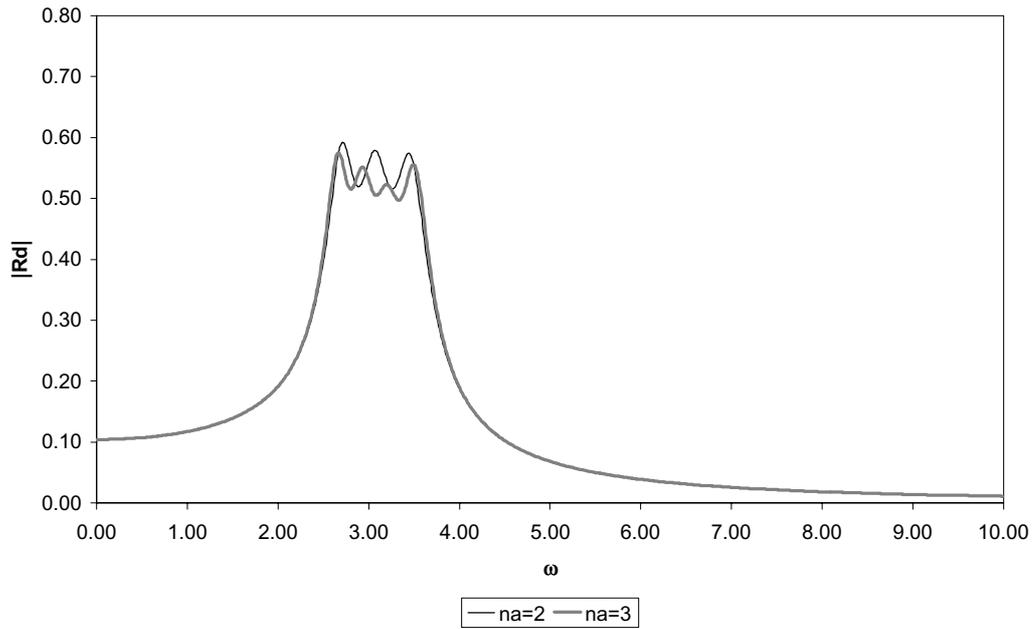


Figura 3.29 - Resposta em frequência com AMSM ($n_a = 2$; $n_a = 3$)

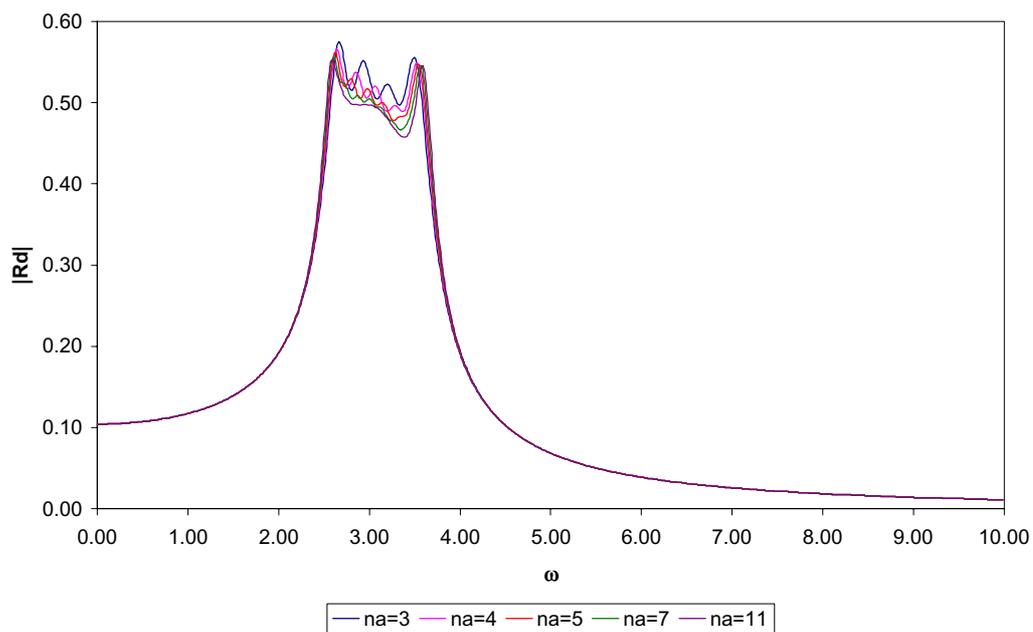


Figura 3.30 - Resposta em frequência com AMSM ($n_a = 3$; $n_a = 4$; $n_a = 5$; $n_a = 7$ e $n_a = 11$)

Verificada a influência do número de massas no desempenho do AMSM, seria bastante interessante considerar o efeito da interligação entre as massas para um número de amortecedores maior, realizando um estudo de otimização semelhante ao realizado no item 3.4.

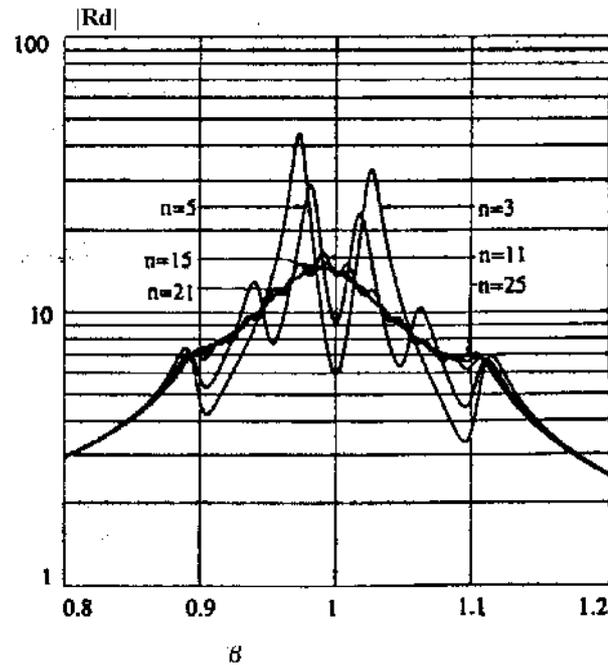


Figura 3.31 - Resposta em frequência com AMSM (Yamaguchi & Harnpornchai, 1993)

3.7 Resposta da estrutura com AMSM sujeita a carregamentos com perturbações aleatórias

Estruturas reais estão constantemente sujeitas a perturbações aleatórias tanto durante a fase de construção quanto durante a sua vida útil. Por isso, ao carregamento externo teórico adiciona-se uma certa parcela de ruído que é não-determinística. O modelo matemático nunca expressa de forma exata o sistema real. Nesta seção serão introduzidas numericamente perturbações aleatórias na força externa, para se estudar como uma força com características aleatórias afeta o sistema de controle passivo que é tradicionalmente projetado considerando-se um carregamento harmônico.

3.7.1 Força Não-determinística

Admite-se que o carregamento aplicado sobre a estrutura é composto por uma parcela harmônica determinística somada a uma parcela aleatória na forma

$$F_i(t) = F \cos(\Omega t) + G(t; F, \Omega) \quad (3.29)$$

onde a parcela aleatória $G(t; F, \Omega)$ depende dos parâmetros da parcela determinística.

Segundo Santee (1999) admitem-se algumas hipóteses sobre G para simulação numérica da parcela aleatória tais como:

- Uma força que varia aleatoriamente no tempo é matematicamente um processo estocástico. Um *processo estocástico* é uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidades depende de um parâmetro. Se o parâmetro é contínuo, o processo é dito contínuo. No caso aqui estudado, o parâmetro é o tempo. Se as estatísticas (média e variância) do processo forem independentes do tempo, o processo é dito *estacionário*.
- Um *Processo Ergódico* é um processo em que as estatísticas da variável aleatória $G(t; F, \Omega)$ são iguais às estatísticas de uma única amostra do processo aleatório tomada ao longo do tempo. Um processo ergódico é sempre estacionário, porém um processo estacionário pode não ser ergódico. No presente trabalho, supõe-se que a parcela aleatória $G(t; F, \Omega)$ é um processo ergódico e, conseqüentemente, estacionário.

Outra hipótese sobre a parcela aleatória G é que ela possui sempre valor esperado zero, isto é:

$$E[G(t; F, \Omega)] = 0 \quad (3.30)$$

A abordagem utilizada na descrição dos processos estocásticos é preferencialmente realizada no domínio da freqüência. A hipótese no domínio da freqüência sobre a parcela aleatória G , é que essa possui uma função densidade espectral

$$\Phi_{GG}(\omega) = \frac{\sigma_{GG}^2}{2\omega_l} \text{ para } \Omega - \frac{\omega_l}{2} < \omega < \Omega + \frac{\omega_l}{2} \quad (3.31)$$

onde σ_{GG}^2 é a variância da amplitude da parcela aleatória, e ω_l é a largura da faixa de freqüências que compõe a parcela aleatória.

A Figura (3.32) mostra o gráfico da função de densidade espectral da parcela aleatória. Adicionalmente, estabelece-se que o desvio padrão da amplitude da parcela aleatória é proporcional à amplitude da parcela determinística, assim

$$\sigma_{GG} = aF \quad (3.32)$$

onde a é o valor da proporção. É importante destacar neste ponto que a parcela aleatória depende da freqüência e da amplitude da parcela determinística.

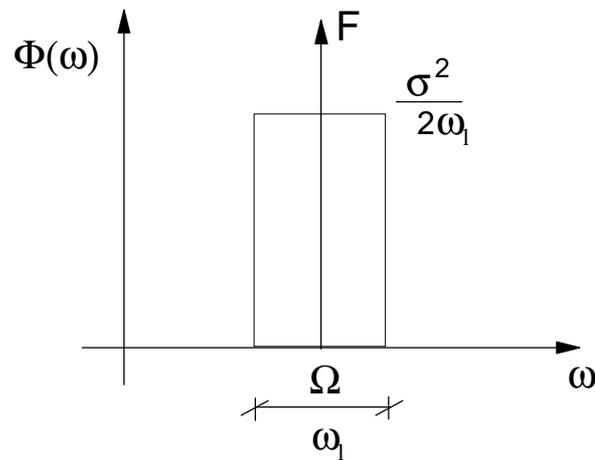


Figura 3.32 - Gráfico da função de densidade espectral da parcela aleatória

Fisicamente a parcela aleatória é um ruído que aumenta de intensidade com o aumento da intensidade da força aplicada. Outro ponto que deve ser destacado é que a parcela aleatória depende de dois parâmetros que devem ser prescritos, a saber: a proporção a do desvio padrão para com a amplitude da parcela determinística F , e a largura de banda ω_1 em torno da freqüência aplicada Ω .

3.7.2 Simulação de um processo estocástico ergódico de banda limitada, com valor esperado zero e função densidade espectral especificada

A seguir apresenta-se a fundamentação teórica e metodologia usada para geração de amostras da parcela aleatória da força no domínio do tempo, a partir de sua especificação no domínio da freqüência dada pela função densidade espectral.

A idéia do algoritmo para a geração de uma amostra do processo estocástico $G(t)$ parte da expressão da variância do processo em termos da função de densidade espectral

$$\sigma_{GG}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{GG}(\omega) d\omega \quad (3.33)$$

Supondo que o processo é ergódico, a variância também pode ser calculada no domínio do tempo por

$$\sigma_{GG}^2 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g^2(t) dt \cong \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g^2(t) dt \quad (3.34)$$

onde T_0 é o tempo total de duração da força e $g(t)$ é uma amostra do processo estocástico $G(t)$.

Tendo em vista as relações (3.33) e (3.34), pode-se igualar a expressão da variância calculada das duas diferentes formas para se obter uma relação entre a função no tempo $g(t)$ e a função de densidade espectral

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g^2(t) dt \cong \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{GG}(\omega) d\omega \quad (3.35)$$

Discretizando o lado esquerdo da equação no tempo e o lado direito na frequência, tem-se

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g^2(m\Delta t) \cong 2 \sum_{k=1}^{N/2} \Phi_{GG}(k\omega_0) \omega_0 \quad (3.36)$$

onde $\Delta t = T_0/N$ e $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_0$

O Teorema de Parseval (Pneumont, 1994), que relaciona a amplitude de um processo estocástico no tempo com a amplitude do processo no domínio da frequência, afirma que

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g^2(m\Delta t) \cong \sum_{k=0}^{N-1} |C_g(k\Delta\omega)|^2 \quad (3.37)$$

onde $C_g(\omega)$ é o coeficiente da transformada discreta de Fourier (TDF) da amostra do processo $g(t)$. Substituindo-se (3.37) no lado direito da expressão (3.36) e lembrando que para $g(t)$ ser real é necessário que $C_g(N/2+i) = C_g^*(N/2-i)$, a expressão (3.36) pode ser reescrita como

$$2 \sum_{k=1}^{N/2} |C_g(k\omega_0)|^2 \cong 2 \sum_{k=1}^{N/2} \Phi_{GG}(k\omega_0) \omega_0 \quad (3.38)$$

Uma das maneiras que a expressão acima pode ser verdadeira é se

$$|C_g(k\omega_0)| = \sqrt{\Phi_{GG}(k\omega_0) \omega_0}, \quad k = 1, \dots, N/2 \quad (3.39)$$

Essa expressão permite que se determine o valor do módulo dos coeficientes C_g de uma amostra da Transformada Discreta de Fourier do processo estocástico $G(t)$ de tal sorte que ele tenha a função de densidade espectral especificada. Finalmente, a expressão geral para a determinação de cada coeficiente da TDF de $g(t)$ é:

$$C_g(k\omega_0) = |C_g(k\omega_0)| \cos(\theta_k) + i |C_g(k\omega_0)| \sin(\theta_k) \quad (3.40)$$

onde os ângulos de fase θ_k são variáveis aleatórias com distribuição constante entre 0 e 2π . Amostras das variáveis aleatórias dos ângulos de fase podem ser obtidas usando-se um gerador de números aleatórios.

A expressão (3.40) é a base da metodologia para a geração de uma amostra da força aleatória. Para o uso dessa expressão parte-se dos seguintes dados iniciais:

- T_0 A duração do processo aleatório.
- N O número de pontos analisados no processo.
- $\Phi_{GG}(\omega)$ A função densidade espectral especificada

A seguir é apresentado o algoritmo cujo resultado final é o conjunto de N valores da amplitude de uma amostra $g(t)$ espaçadas entre si de $\Delta t = T_0/N$.

{Calcular a primeira metade dos coeficientes}

1. Para k de 1 até $N/2$ fazer:

$$|C_g(k\omega_0)| = \sqrt{\Phi_{GG}(k\omega_0)\omega_0}$$

2. Usando um gerador de números aleatórios gerar uma amostra da variável aleatória θ_k .

3. Calcular os coeficientes da TDF pela expressão (B.8)

4. Fazer: $C_g(0) = 0 + i0$

{Calcular a Segunda metade dos coeficientes:}

5. Para k de 1 até $N/2-1$ fazer:

$$C_g(N/2 + k) = C_g^*(N/2 - k)$$

{Calcular o processo no tempo}

6. Fazer a Transformada Discreta de Fourier Inversa para a obtenção dos pontos $g(m\Delta t)$.

{Interpolar}

7. Interpolar os pontos obtidos caso se deseje um valor fora dos pontos obtidos no processo do domínio do tempo.

Partindo da função de densidade espectral especificada na equação (3.31) apresentam-se a seguir, nas Figuras (3.33) a (3.37), algumas amostras da parcela aleatória e da força aleatória no tempo para os seguintes casos:

- (a) $\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.5$ e $a = 0.3$
- (b) $\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.5$ e $a = 0.1$
- (c) $\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 0.3$
- (d) $\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 0.1$
- (e) $\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 1.0$

Na geração das amostras toma-se a intensidade máxima da parcela determinística como $F = 1.0$ kN.

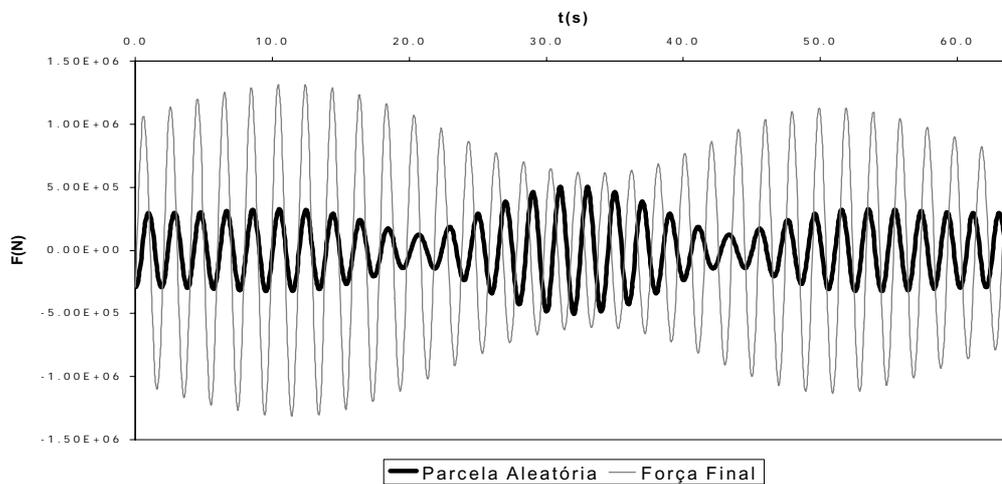


Figura 3.33 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.5$ e $a = 0.3$)

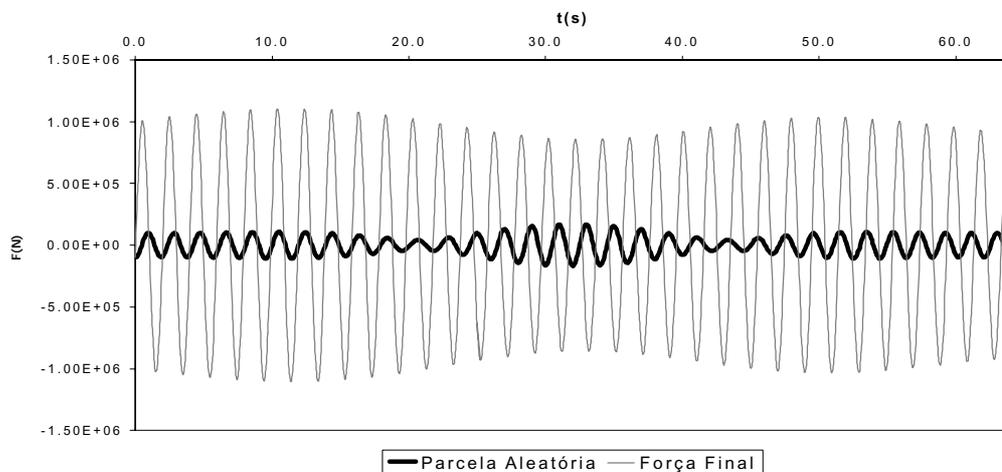


Figura 3.34 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.5$ e $a = 0.1$)

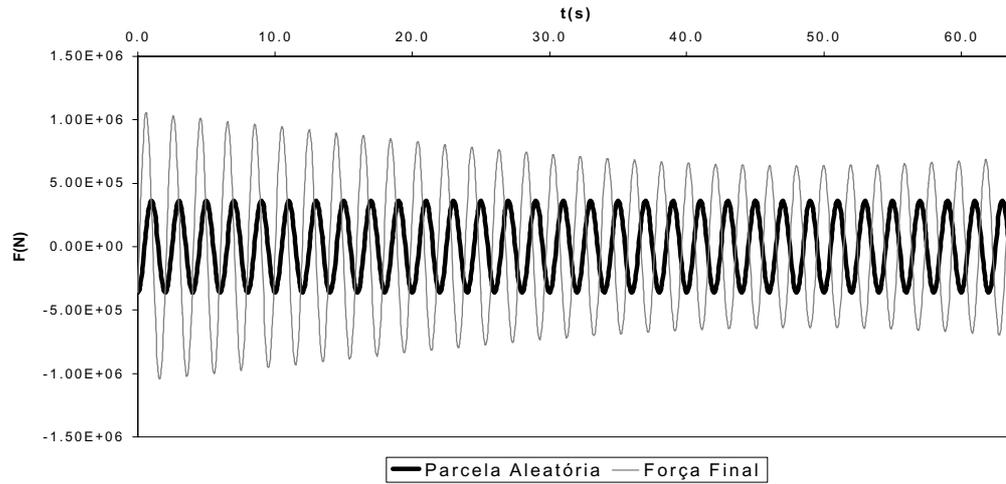


Figura 3.35 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 0.3$)

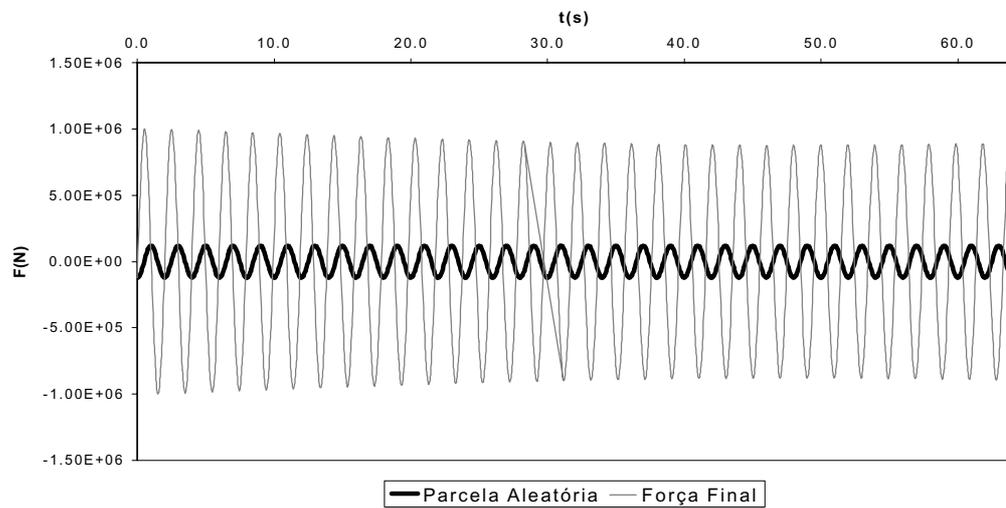


Figura 3.36 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 0.1$)

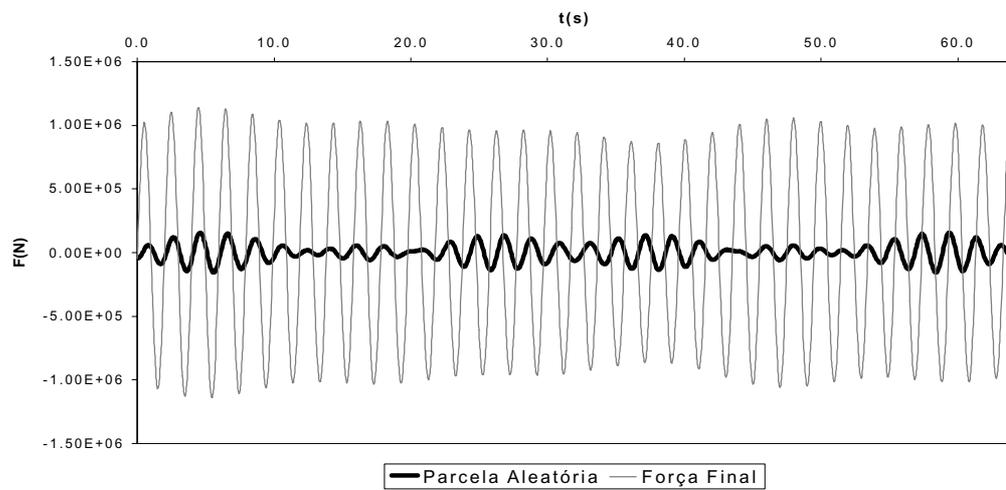


Figura 3.37 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 3.174$, $\omega_l = 0.1$ e $a = 1.0$)

3.7.3 Resultados Numéricos

As Figuras (3.38) a (3.41) mostram as evoluções no tempo dos deslocamentos da massa principal da estrutura analisada anteriormente no item 3.4, submetida à força com parcela aleatória do caso (a) comparado aos da massa submetida a força puramente determinística para as quatro configurações ótimas de AMSM estudadas ($\mu = 0.1$) no item 3.4. Verifica-se que a ação da força aleatória aumenta a amplitude da resposta permanente em determinado momento para todas as configurações.

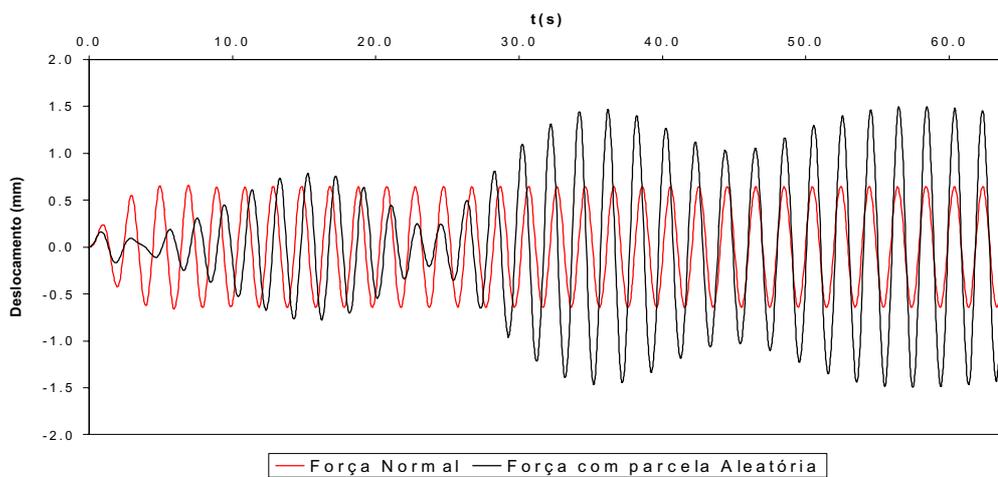


Figura 3.38 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 01 (F. Aleat.)

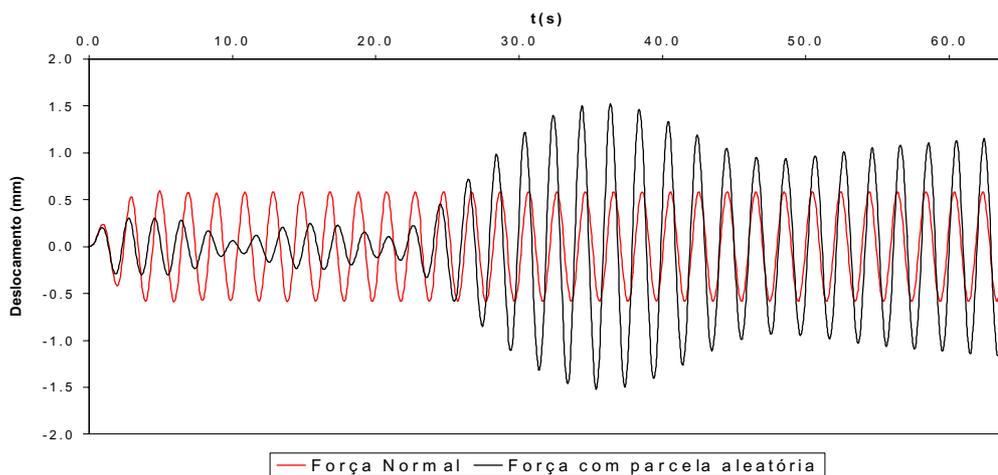


Figura 3.39 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 02 (F. Aleat.)

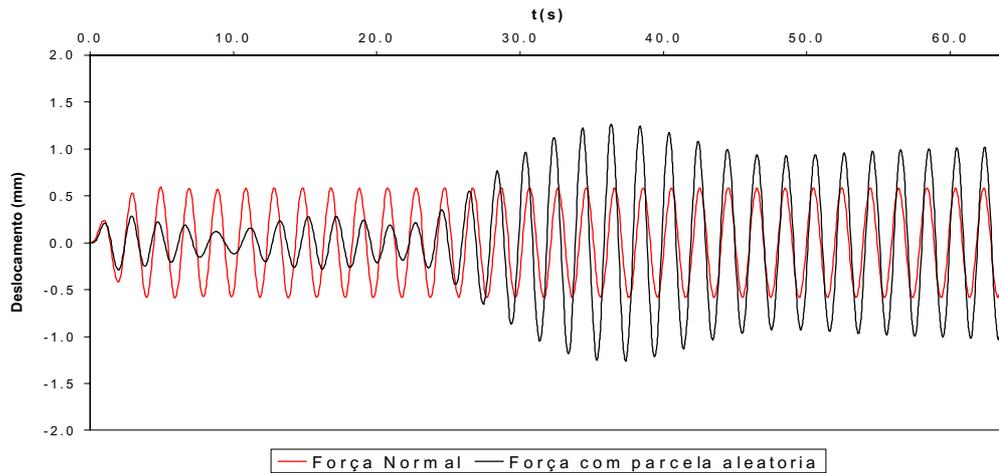


Figura 3.40 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 03 (F. Aleat.)

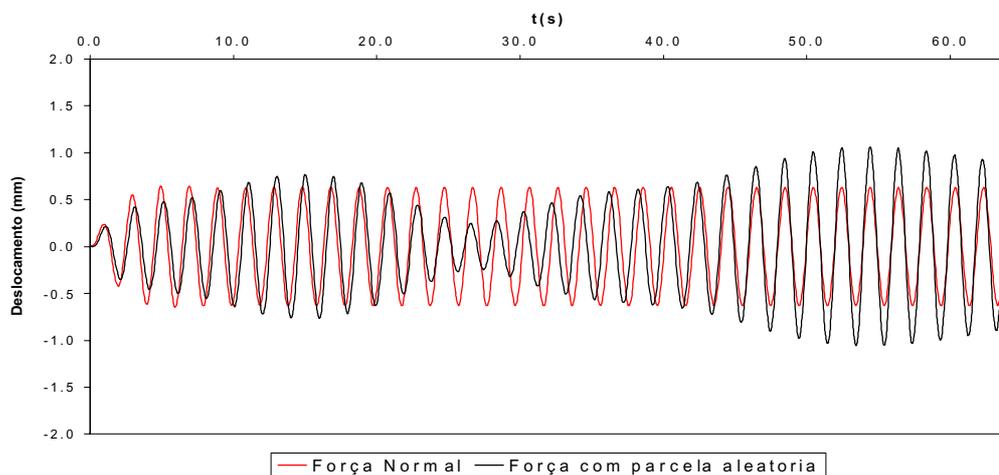


Figura 3.41 Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 04 (F. Aleat.)

As Tabelas (3.19) e (3.20) apresentam os deslocamentos máximos e *rms*, respectivamente, obtidos para cada configuração de AMSM e também com um único AMS para cada um dos casos de carregamento aleatório estudados, além da força puramente determinística.

	d (mm) F Determ.	d (mm) caso (a)	d (mm) caso (b)	d (mm) caso (c)	d (mm) caso (d)	d (mm) caso (e)
Conf. 1	0.660	1.496	0.922	1.542	0.909	1.084
Conf. 2.	0.569	1.522	0.838	1.422	0.863	0.869
Conf. 3	0.594	1.266	0.756	1.248	0.801	0.839
Conf. 4	0.649	1.059	0.773	0.883	0.680	0.863
AMS	0.637	1.047	0.750	0.850	0.645	0.845

Tabela 3.19 - Deslocamento máximo da massa principal

	d (mm) F Determ.	d (mm) caso (a)	d (mm) caso (b)	d (mm) caso (c)	d (mm) caso (d)	d (mm) caso (e)
Conf. 1	0.431	0.368	0.324	0.398	0.272	0.370
Conf. 2	0.392	0.159	0.268	0.545	0.370	0.303
Conf. 3	0.391	0.158	0.295	0.412	0.340	0.325
Conf. 4	0.369	0.429	0.406	0.123	0.311	0.423
AMS	0.408	0.436	0.398	0.117	0.293	0.415

Tabela 3.20 - Deslocamento rms da massa principal

Primeiramente verificou-se que a consideração de forças aleatórias levou a deslocamentos máximos superiores em todos os casos. No caso (a) de força aleatória, o AMSM levou a deslocamentos máximos superiores ao obtido com um único AMS, mas as configurações 2 e 3 de AMSM produziram deslocamentos rms inferiores aos demais. O mesmo se verificou para o caso (b) de força aleatória. No caso (c) novamente um único AMS gerou o menor deslocamento máximo, o mesmo ocorrendo para o caso dos deslocamentos rms . As mesmas conclusões do caso (c) valem para o caso (d) de carregamento. Já no caso (e) de força aleatória, a configuração 3 produz o menor deslocamento máximo enquanto que a configuração 2, o menor deslocamento rms .

Observando-se a curva de resposta em frequência de um único AMS comparada às demais configurações, apresentada na Figura (3.42), pode-se observar que para a frequência Ω considerada, equivalente a $\beta = 1.0$, a utilização de um único AMS é equivalente às configurações 2 e 3 e mais eficiente que as demais. Portanto realizou-se a análise anterior para uma frequência mais desfavorável ao AMS visando verificar as vantagens da utilização do AMSM no caso de forças com parcela aleatória.

A Tabela (3.21) apresenta os deslocamentos máximos e rms da massa principal para uma força puramente determinística com frequência $\Omega = 2.685$ rad/s ($\beta = 0.846$), verificando-se, ao analisar os resultados, uma maior eficiência das configurações 2 e 3.

	$d_{\text{máx}}$ (mm)	d_{rms} (mm)
Config. 01	0.665	0.427
Config. 02	0.592	0.391
Config. 03	0.591	0.391
Config. 04	0.651	0.420
AMS	0.681	0.868

Tabela 3.21 - Deslocamentos máximos e rms da massa principal

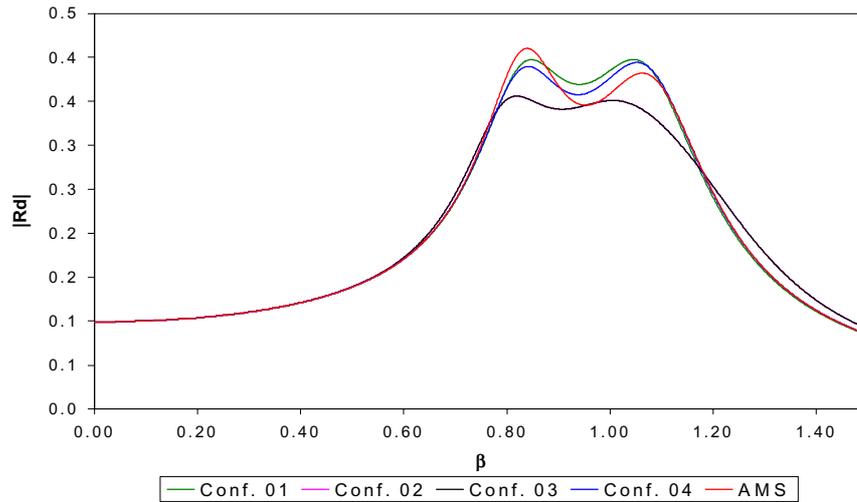


Figura 3.42 - Curvas de resposta em frequência (AMS comparado com AMSM)

Aplicando-se sobre a estrutura uma força aleatória de frequência $\Omega = 2.685$ rad/s e parâmetros $a = 0.3$ e $\omega_f = 0.5$ apresentada na Figura (3.43) obteve-se os deslocamentos máximos e *rms* apresentados na Tabela (3.22)

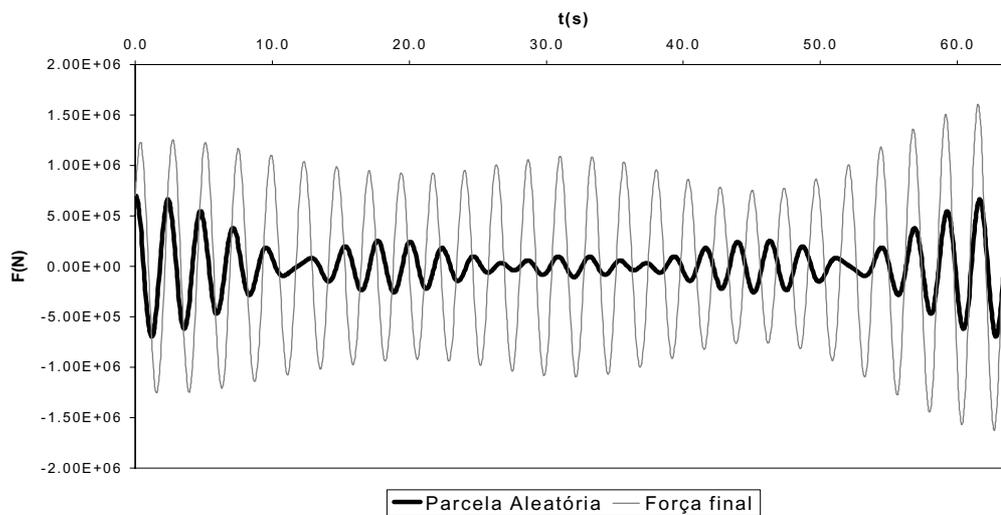


Figura 3.43 - Amostra da força aleatória ($\Omega = 2.685$ rad/s, $a = 0.3$ e $\omega_f = 0.5$)

	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	d_{rms} (mm)
Config. 01	2.332	1.084
Config. 02	2.187	1.018
Config. 03	2.229	1.038
Config. 04	1.707	0.843
AMS	1.728	0.868

Tabela 3.22 - Deslocamentos máximos e *rms* da massa principal ($\Omega = 2.685$ rad/s; $a = 0.3$ e $\omega_f = 0.5$)

Verifica-se, também neste caso, que a parcela aleatória reduz a eficiência do uso do AMSM, sendo que a configuração 4 foi a mais eficiente com resultados bastante próximos dos obtidos utilizando-se um único AMS. Isto se confirma observando a evolução no tempo do deslocamento da massa principal resultante da força aleatória comparada à força determinística apresentadas para cada configuração nas Figuras (3.44) a (3.47).

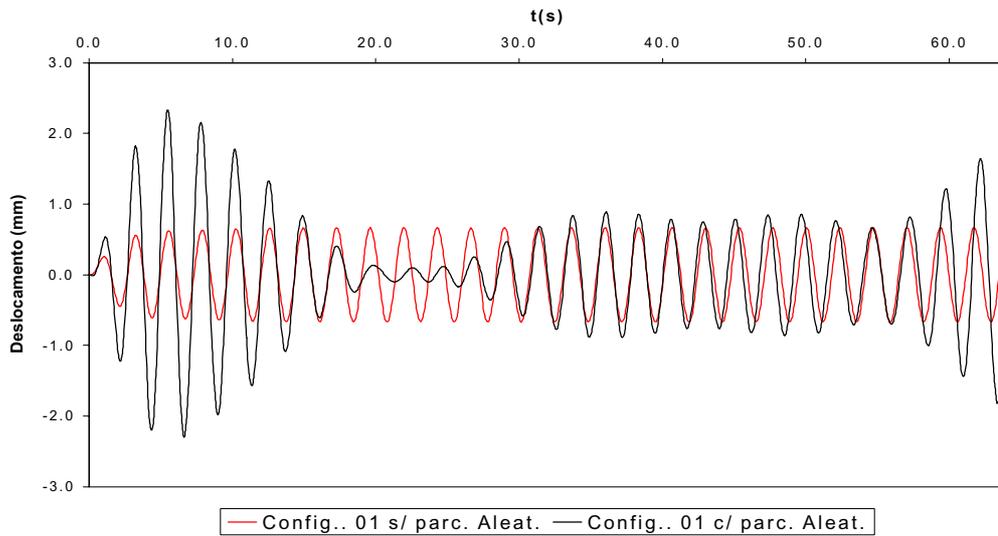


Figura 3.44 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 01 (F. Aleat. x F. Determ.)

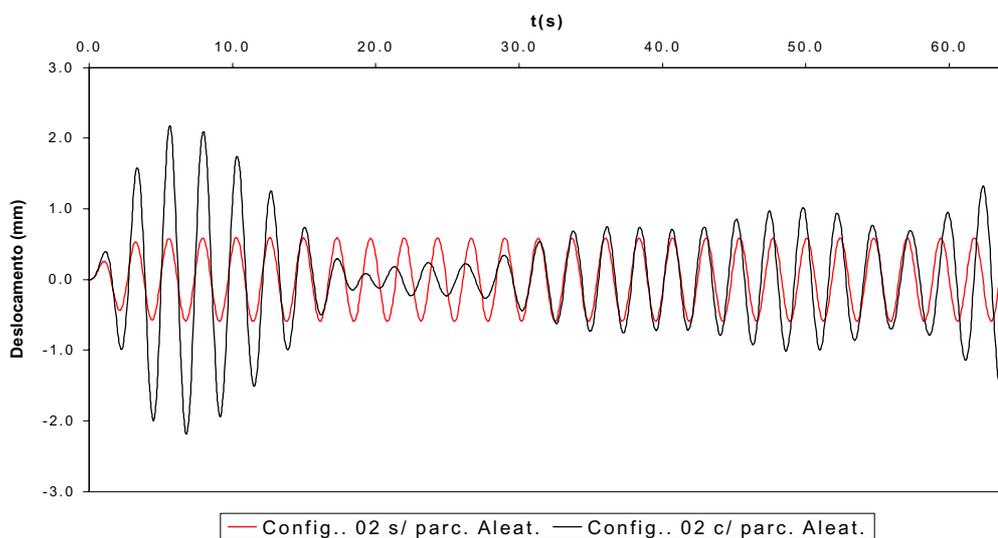


Figura 3.45 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 02 (F. Aleat. x F. Determ.)

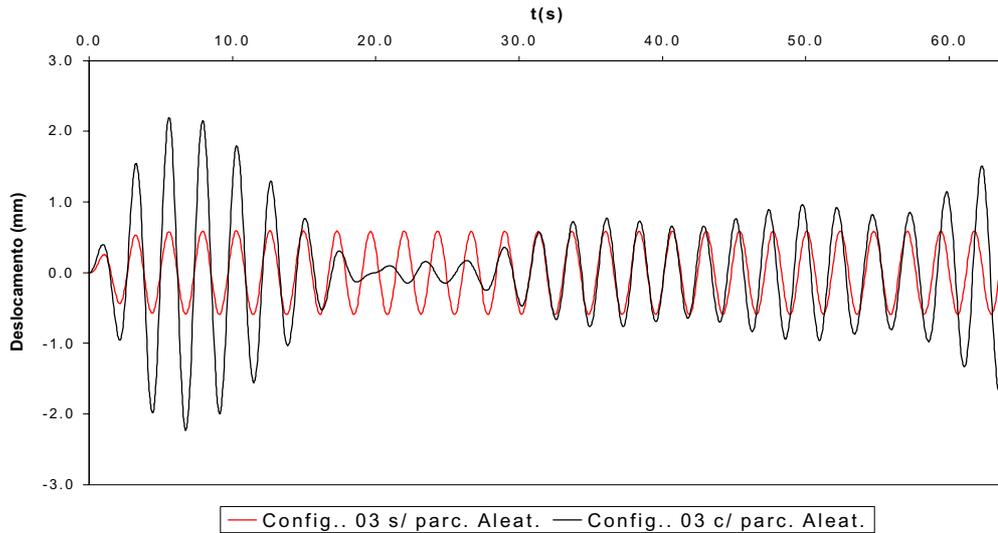


Figura 3.46 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 03
(F. Aleat. x F. Determ.)

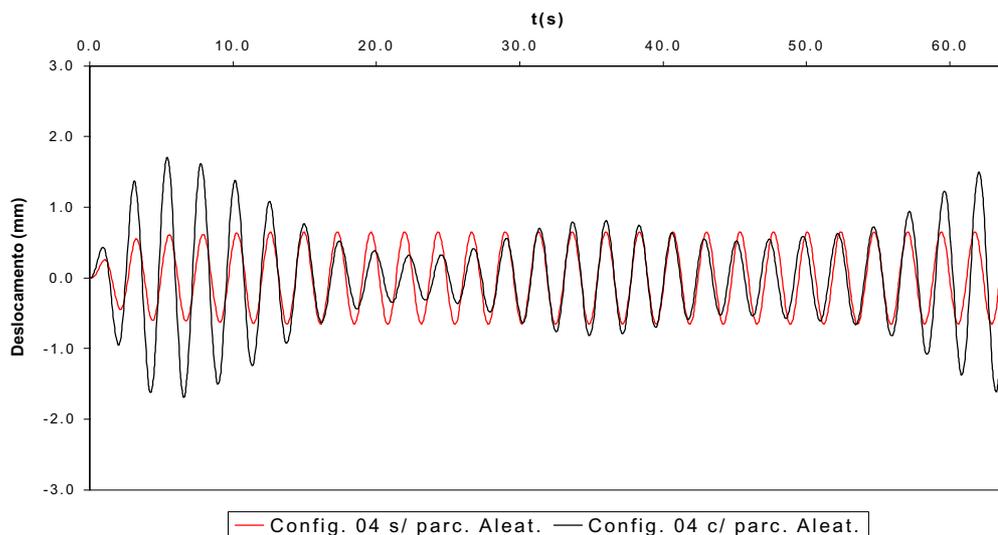


Figura 3.47 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 04
(F. Aleat. x F. Determ.)

As Figuras (3.48) a (3.51) apresentam a comparação do deslocamento da massa principal de cada uma das configurações de AMSM com a de um único AMS. Verifica-se que a configuração 4 conduz a resultados equivalentes enquanto que as demais configurações produzem resultados ligeiramente superiores. Pode-se portanto concluir que a utilização do AMSM não tem maiores vantagens em relação ao AMS neste caso.

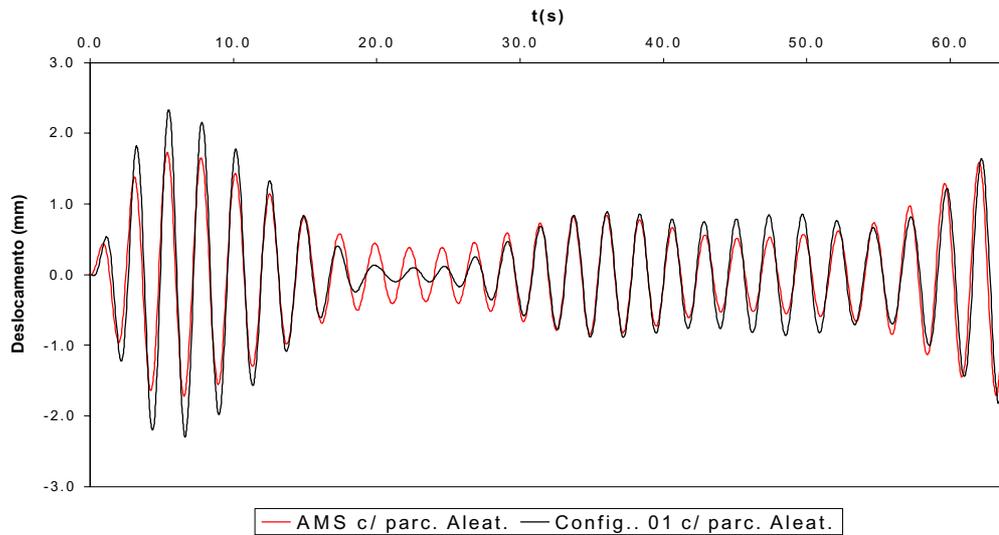


Figura 3.48 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 01 (AMS x AMSM)

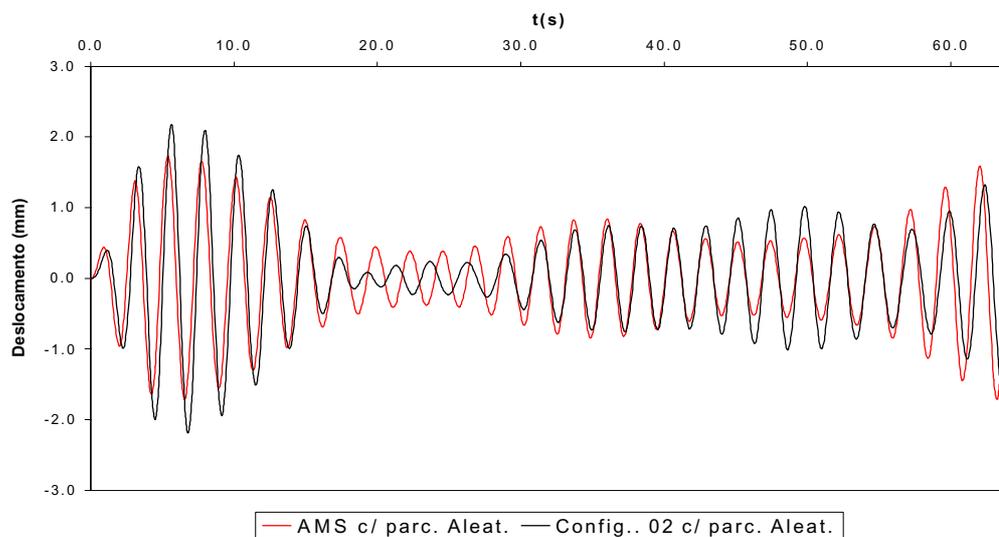


Figura 3.49 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 02 (AMS x AMSM)

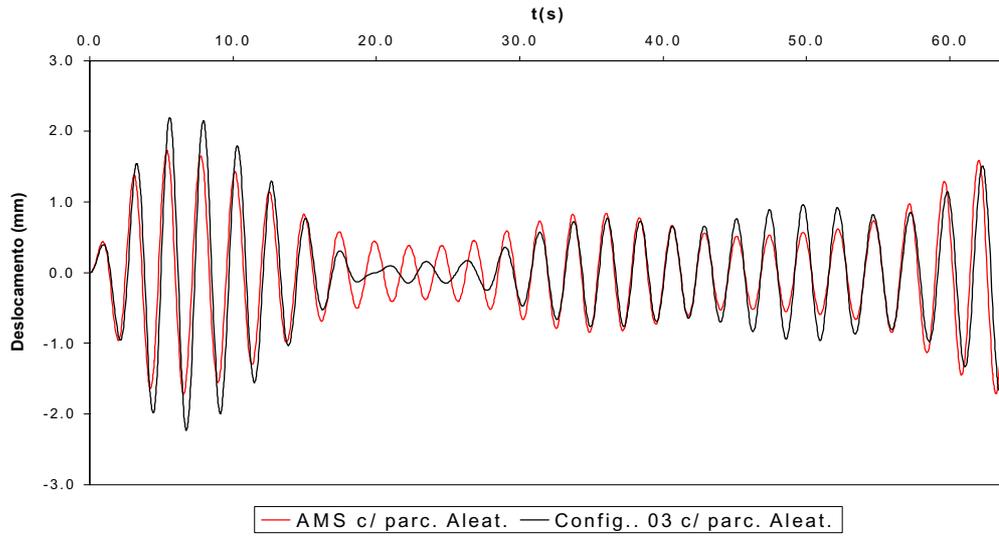


Figura 3.50 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 03 (AMS x AMSM)

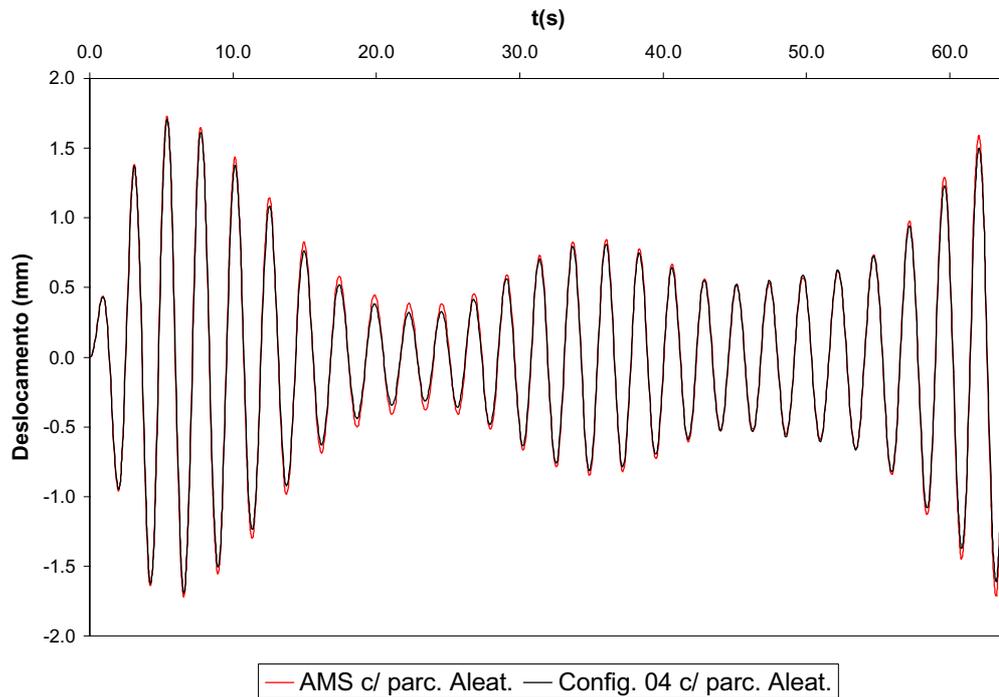


Figura 3.51 - Evolução no tempo do deslocamento da massa principal –Conf. 04 (AMS x AMSM)

4 Controle Ativo

Como foi visto anteriormente, no Capítulo 1, o controle ativo consiste na aplicação de forças à estrutura através de atuadores alimentados por fontes de energia externa. A magnitude dessas forças é calculada em tempo real por um computador utilizando um dos vários algoritmos de controle ativo, sendo função da resposta da estrutura medida através de sensores também em tempo real (Soong, 1990; Adeli & Saleh, 1999). Neste capítulo são apresentados conceitos básicos, considerações de ordem prática, além da descrição dos algoritmos de controle ativo (lineares e não-lineares) utilizados no presente trabalho. Em cada caso, apresenta-se uma aplicação numérica, onde verifica-se não só a implementação dos algoritmos, como o efeito do controle ativo no comportamento dinâmico da estrutura.

4.1 Conceitos básicos

Na teoria de controle o sistema dinâmico é conhecido como planta, a excitação como entrada e a resposta como saída. Em geral, representa-se a relação entre entrada e saída esquematicamente através de um diagrama de blocos. A Figura (4.1) apresenta o exemplo de um diagrama de um sistema não-controlado.

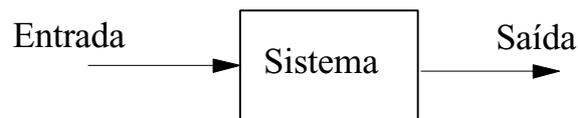


Figura 4.1 – Sistema não controlado

Em um sistema controlado tem-se por objetivo alterar a saída de maneira satisfatória. Para tanto a saída desejada age como entrada para um controlador, e a saída do controlador age como entrada para o sistema. Esse tipo de controle, conhecido como controle de malha aberta, é ilustrado no diagrama da Figura (4.2).

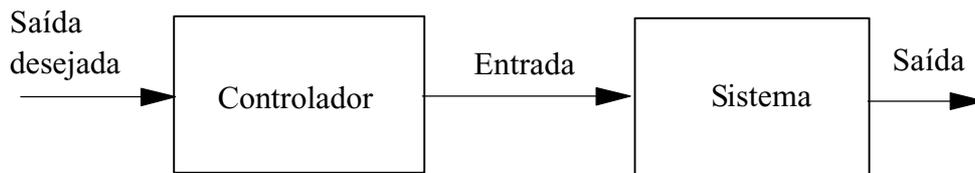


Figura 4.2 - Controle de malha aberta

O controle de malha aberta, apesar de ser o mais simples, possui a desvantagem de que a entrada do controlador é previamente programada, não podendo ser corrigida em decorrência de algum fato inesperado. Uma alternativa é o controle de realimentação ou malha fechada, onde a saída é medida por sensores e retorna ao ponto de entrada, alterada ou não, realimentando o sistema, como é apresentado na Figura (4.3).

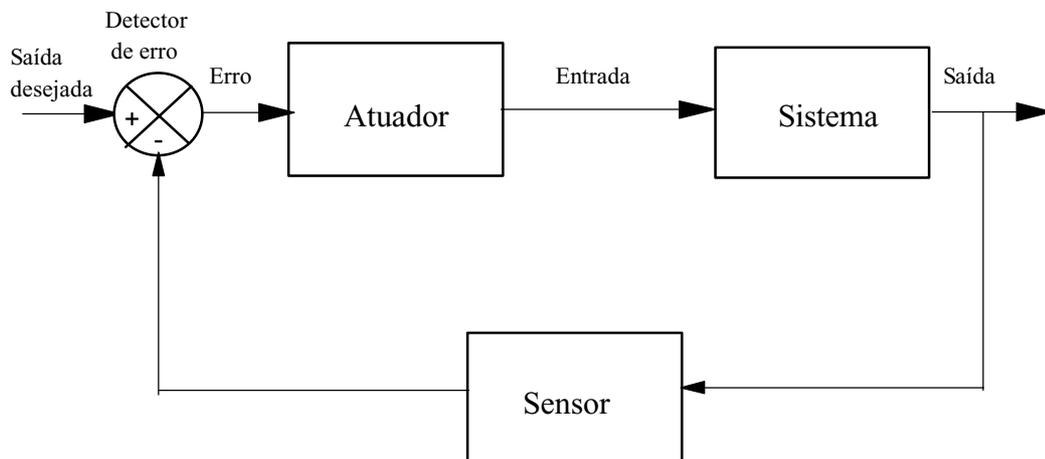


Figura 4.3 - Controle de malha fechada

A teoria de controle de sistemas lineares pode ser dividida em duas categorias: análise no domínio da frequência, ou métodos clássicos de controle; análise no espaço de estados, ou métodos de controle moderno. Muitos dos métodos clássicos dependem de que o número de graus de liberdade da estrutura sob controle seja pequeno. Enquanto a teoria de controle convencional é baseada na relação entre entrada e saída ou função de transferência, a teoria de controle moderno se baseia na descrição das equações do sistema em termos de n equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser combinadas em uma equação diferencial matricial de primeira ordem.

Os sistemas estruturais são sistemas multivariáveis, onde se está usualmente interessado em controlar diversas variáveis simultaneamente através

de vários elementos de atuação e transdução. A abordagem de espaços de estados é a mais adequada para este tipo de problema.

4.1.1 Equações de estado

As equações de movimento de um sistema estrutural de n graus de liberdade com controle ativo, na forma matricial, são dadas por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (4.1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes de ordem $n \times n$ de massa, amortecimento e rigidez; $\mathbf{y}(t)$ é o vetor $n \times 1$ de deslocamentos; $\mathbf{f}(t)$ é o vetor $r \times 1$ das forças externas aplicadas; e $\mathbf{u}(t)$ é o vetor $m \times 1$ das forças de controle. As matrizes \mathbf{D} ($n \times m$) e \mathbf{E} ($n \times r$) definem a localização das forças de controle e da excitação, respectivamente.

Em geral, na formulação e solução de problemas de controle, utiliza-se a representação das equações de movimento do sistema na forma de equações de estado

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (4.2)$$

onde

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

é o vetor de estado de ordem $2n$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

é a matriz de estado do sistema ($2n \times 2n$), e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

são as matrizes $2n \times m$ e $2n \times r$ que fornecem a posição dos controladores e das forças externas no espaço de estado.

4.1.2 Estabilidade

Um aspecto de fundamental importância a ser considerado no projeto de sistemas de controle é a sua estabilidade. A estabilidade de um sistema controlado está relacionada ao fato da saída do mesmo não crescer indefinidamente devido a

uma entrada, condição inicial ou perturbação indesejada. Existem na literatura diversas definições para estabilidade (Brogan, 1991), entre elas uma das mais utilizadas é a de Lyapunov (Inman, 1989).

Pode-se também caracterizar a estabilidade de um sistema através de seus autovalores. É de fácil demonstração que um dado sistema linear será estável se, e somente se, não possuir autovalor com parte real positiva. E ainda, o sistema será assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores tiverem partes reais negativas (ver, por exemplo, Inman, 1989).

4.1.3 Controlabilidade e observabilidade

Controlabilidade e observabilidade são propriedades relevantes no estudo de sistemas de controle. O conceito de controlabilidade está intimamente relacionado à existência de uma lei de controle factível. De forma semelhante, o conceito de observabilidade é relacionado à existência de um algoritmo factível na estimativa das variáveis de estado medidas.

Um sistema de malha fechada é dito completamente controlável se cada variável de estado pode ser afetada de forma a atingir um determinado valor, depois de determinado intervalo de tempo finito sob um controle $u(t)$. Se uma variável não pode ser afetada, o sistema é dito não-controlável.

A controlabilidade de um dado sistema é verificada através do cálculo do posto de determinada matriz N ($2n \times 2nm$), definida por

$$N = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{2n-1}B] \quad (4.6)$$

denominada matriz de controlabilidade do par $[A, B]$.

O par de matrizes $[A, B]$ é dito controlável se o posto de N , for $2n$ (Ogata, 1993).

Um conceito similar à controlabilidade é a idéia de que cada variável de estado tem algum efeito na saída do sistema (resposta). Isso é chamado observabilidade. Um sistema é observável se, examinando a resposta do sistema, informações sobre cada variável do sistema podem ser determinadas.

O sistema é completamente observável se e somente se a matriz O ($2n \times 2np$) definida por

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{LA} \\ \vdots \\ \mathbf{LA}^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

tenha posto $2n$. \mathbf{O} é chamada matriz de observabilidade e \mathbf{L} é a matriz da localização dos sensores que medem a resposta ou saída do sistema (Ogata, 1993).

Um estudo mais aprofundado sobre os conceitos de controlabilidade e observabilidade e sua importância no controle de sistemas dinâmicos pode ser encontrado, por exemplo, em Brogan (1991), Junkins & Kim (1993) e Ogata (1993).

4.2 Considerações práticas

Para validação dos resultados obtidos através da implementação numérica dos algoritmos de controle é de essencial importância estudos de caráter experimental. Alguns dos principais programas experimentais já realizados e suas principais conclusões podem ser encontrados, por exemplo, em Chung *et al* 1989; Chung *et al* 1988; Yang *et al* 1996; Loh *et al* 1999; Battaini *et al* in press; Dyke *et al* 1996; Reinhorn *et al* 1993 e Chong 1990.

Uma das importantes constatações feitas através destes programas experimentais, realizados em laboratórios com equipamento de alto nível, é de que o desempenho real do sistema de controle fica sempre aquém do previsto teoricamente. Existem considerações de ordem prática que precisam ser levadas em conta na hora do projeto de controle para que seu desempenho não seja prejudicado.

No projeto de sistema de controle, para minimizar o atraso devido ao cálculo das forças de controle em tempo real, procura-se usar o modelo mais simples possível para descrever o sistema controlado. O fato de se descrever a estrutura, que se trata de um sistema contínuo com parâmetros distribuídos, como um modelo bastante simplificado a ser utilizado no projeto do sistema de controle, pode originar alguns problemas. Segundo Inman (1989) é possível que as forças de controle excitem modos desprezados e surjam perturbações nas medidas dos sensores causadas por estes modos, fenômenos conhecidos como *spillover* de controle e observação, podendo causar queda do desempenho do sistema e, até mesmo, instabilidade. A fim de que estes erros não comprometam a eficiência do

controle, é necessário que o sistema seja suficientemente robusto para não ser afetado por estes problemas.

Outra consideração importante na modelagem da estrutura é o efeito da interação controle-estrutura. Dyke *et al* (1995) mostram que, ao se levar em conta a interação controle-estrutura e a dinâmica do atuador, eleva-se substancialmente a performance e a robustez do sistema de controle. Entretanto, estudos mais profundos são necessários.

Muitos algoritmos de controle necessitam do conhecimento completo do vetor de estado, são os chamados algoritmos de realimentação de estado. Porém, por razões de ordem econômica, devido ao grande número de graus de liberdade das estruturas civis, um número tão grande de sensores para realização dessas medidas torna-se inviável. Uma alternativa a este tipo de limitação é o controle de realimentação de saída que necessita apenas da medida de alguns graus de liberdade (Chung *et al* 1993; Lin *et al* 1996 e Chang & Yang 1994). O mesmo raciocínio se aplica ao número de atuadores.

Um controle eficiente e de menor custo pode ser obtido com a otimização do número e posição de sensores e atuadores (Brown *et al.* 1999).

O efeito de retardo pode se tornar crítico na performance de um sistema de controle. Os computadores digitais podem causar um retardo significativo na realimentação do sistema devido ao tempo necessário para digitalizar os sinais analógicos, realizar os cálculos do controle e converter o sinal digital novamente em um sinal analógico. Esta defasagem na aplicação das forças de controle, em relação ao instante em que deveriam atuar, pode diminuir a eficiência ou até mesmo tornar ineficaz e desestabilizar o sistema (Soong, 1990). Vários estudos foram realizados na tentativa de compensar essa defasagem, como, por exemplo, Chung *et al* (1988, 1989 e 1995) e Lin (1996).

O sistema de controle é bastante sensível a incertezas nos parâmetros estruturais. Essas incertezas são comuns já que determinadas características da estrutura, como rigidez e amortecimento, nem sempre podem ser determinadas precisamente. Esta sensibilidade está diretamente ligada ao algoritmo de controle, número e localização de sensores e atuadores, carregamento e mecanismos de controle. Esse problema se torna crítico quando da ocorrência de comportamento não-linear devido a cargas elevadas e grandes deslocamentos, o que faz os parâmetros estruturais variarem com o tempo. Segundo Riley *et al* (1998), se os

parâmetros estruturais são propriamente identificados e possíveis não-linearidades são levadas em conta, os erros serão mínimos e toleráveis na maior parte dos casos.

Outra consideração importante na implementação do controle ativo em tempo real é a natureza discreta do tempo na utilização de determinado algoritmo. Algoritmos de controle contínuos no tempo somente podem ser executados em tempo discreto já que um computador digital é utilizado para processamento de dados *on-line*. As respostas medidas pelos sensores são digitalizadas e as forças de controle são aplicadas na forma de funções degrau através de conversores analógico-digitais. Sendo assim, não se tratam de funções contínuas, como assumidas nos algoritmos de controle contínuos. Devido a esta peculiaridade, foram desenvolvidos na literatura algoritmos de controle discreto (Soong 1990; Lopez-Almansa & Rodellar 1990). Algumas das vantagens deste tipo de algoritmo são a compensação do retardo de uma forma mais simplificada e a possibilidade da utilização de controle de realimentação de saída, além da facilidade de implementação do controle previsto usando a abordagem de tempo discreto.

A questão da confiabilidade em um sistema de controle ativo ganha uma maior dimensão e complexidade tanto técnica quanto psicológica, já que o sistema é responsável pela segurança da estrutura. Primeiramente, quando o controle somente é usado para proteção contra cargas ambientais de grande magnitude, o sistema não é ativado com freqüência. A eficiência de um sistema que opera em modo *standby* e os problemas de manutenção decorrentes disso são de extrema importância. Além disso, existe a questão dos sistemas ativos dependerem de fontes externas de energia para seu funcionamento. Os sistemas de alimentação dessa energia se tornam vulneráveis no exato momento em que se tornam extremamente necessários, como no caso de um terremoto. Existe ainda a barreira psicológica por parte dos ocupantes em aceitar a idéia de confiar na segurança de um edifício controlado ativamente (Soong 1990).

4.3 Atuadores

Os atuadores são dispositivos que produzem forças ou esforços. São chamados de atuadores lineares, aqueles que podem produzir forças na direção axial. O mecanismo de geração dessa força pode ser hidráulico, elétrico ou eletro-

hidráulico. As forças no atuador podem atingir magnitudes desde alguns Newtons até algumas centenas de milhares Newtons. Atuadores lineares são em geral posicionados nas extremidades dos membros estruturais.

Um atuador elétrico pode ter de 50 a 200 cm de comprimento com diâmetro variando de 10 a 40 cm. O nível de força que podem produzir está na faixa de 1 a 900 kN. Os atuadores eletro-hidráulicos podem ter até 360 cm de comprimento e 120 cm de diâmetro, o nível de força produzido pode ser maior que 2250 kN (Adeli & Saleh, 1999).

Segundo Tzan & Pantelides (1994) a capacidade dos atuadores disponíveis no mercado para uso em um contraventamento ativo é significativa. Podem gerar forças de controle acima de 1000 kN com deslocamento e velocidades compatíveis com os esperados advindos da resposta estrutural de um forte terremoto. Atuadores especialmente fabricados podem alcançar forças de até 20000 kN e atingir deslocamentos de ± 2.0 m e velocidades maiores que 5 m/s para sistemas específicos. Maiores informações podem ser encontradas na página da *web* do fabricante: www.mts.com. Vale ressaltar que atuadores capazes de produzir forças superiores a 1000 kN aumentam muito o seu custo, sendo recomendável utilizar mais de um atuador neste caso.

4.4 Algoritmos

4.4.1 Algoritmo de controle ótimo linear clássico

O problema de controle ótimo linear clássico consiste em encontrar o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ que minimize o índice de performance

$$J = J_1[\mathbf{z}(t_0), \mathbf{z}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} J_2(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) dt \quad (4.8)$$

sujeito à restrição da equação de estado (4.2).

Para o controle estrutural, o índice utilizado é, em geral, o índice de performance quadrático

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4.9)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz $2n \times 2n$ real, simétrica e positiva semi-definida e \mathbf{R} é uma matriz $m \times m$ real, simétrica e positiva definida. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação, cujas magnitudes são definidas de acordo com a importância

relativa dada às variáveis de estado e às forças de controle no processo de minimização.

Neste problemas deseja-se minimizar o funcional (4.9) sujeito à restrição (4.2). Para isto, escreve-se o Lagrangiano L formado pelas duas equações com um multiplicador de Lagrange variável no tempo $\lambda(t)$

$$L = \int_0^{t_f} \left\{ \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \lambda(t) \left[\mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t) - \dot{\mathbf{z}}(t) \right] \right\} dt \quad (4.10)$$

As condições necessárias que definem o controle ótimo podem ser encontradas fazendo a primeira variação do funcional

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (4.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

onde H é o Hamiltoniano definido como sendo o integrando da equação (4.10).

Calculando-se as derivadas parciais de H em relação à \mathbf{u} e à \mathbf{z} obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - 2\mathbf{Q} \mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.15)$$

O sistema de equações formado pelas equações acima, em conjunto com as equações de estado, fornece a solução ótima para $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ e $\boldsymbol{\lambda}(t)$.

Quando o vetor de controle é regulado pelo vetor de estado no controle de malha fechada, tem-se

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t) \quad (4.16)$$

A matriz $\mathbf{P}(t)$ pode ser determinada substituindo (4.16) nas equações (4.2), (4.14) e (4.15), o que leva a

$$\left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + 2\mathbf{Q} \right] \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{H} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}$$

Quando $f(t)$ é zero, a equação (4.17) se reduz ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + 2\mathbf{Q} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(t_f) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Na teoria de controle ótimo a equação (4.18) é denominada equação de Riccati, enquanto que $\mathbf{P}(t)$ é a matriz de Riccati.

A substituição da equação (4.16) na equação (4.15) mostra que o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ é linear em $\mathbf{z}(t)$. A lei de controle ótimo é

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (4.19)$$

onde $\mathbf{G}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)$ é o ganho. Quando $\mathbf{z}(t)$ é acessível através de medições, $\mathbf{u}(t)$ pode ser obtido através da equação (4.19) e é sabido que o controlador de realimentação determinado desta forma gera um sistema de malha fechada estável.

Vale ressaltar que a matriz de Riccati $\mathbf{P}(t)$, obtida através da equação (4.18), não leva à uma solução ótima, a não ser que a excitação $f(t)$ tenda à zero no intervalo de controle $[0, t_f]$, ou seja um processo estocástico de ruído branco. Nas aplicações estruturais, as análises numéricas mostraram que a matriz de Riccati, $\mathbf{P}(t)$ permanece, em geral, constante ao longo do intervalo de controle, convergindo rapidamente para zero na vizinhança de t_f . Sendo assim, $\mathbf{P}(t)$, na maioria dos casos, pode ser aproximada por uma matriz constante \mathbf{P} e a equação de Riccati (4.18) se reduz à equação matricial

$$\mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + 2\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

O ganho do controle $\mathbf{G}(t)$ é também constante, sendo dado por

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (4.21)$$

O ganho do controle pode ser calculado, a priori, para uma dada estrutura, sendo conhecidas as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} .

Substituindo (4.19) em (4.2), o comportamento da estrutura controlada de forma ótima é descrito por

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}f(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (4.22)$$

Pode-se perceber que o efeito do controle de malha fechada é a modificação da matriz de estado do sistema de A (sistema em malha aberta) para $A+BG$ (sistema em malha fechada).

4.4.2 Algoritmos para solução das equações de Riccati

A equação de Riccati (4.18) é uma equação diferencial matricial não-linear que apresenta dificuldades computacionais em sua solução. É possível, no entanto, utilizar uma transformação matricial a fim de transpor essa dificuldade. Escrevendo $P(t)$ como o produto de duas matrizes, a saber

$$P(t) = E'(t)F'^{-1}(t) \quad (4.23)$$

obtém-se para sua derivada com relação ao tempo

$$\dot{P}(t) = \dot{E}'(t)F'^{-1}(t) + E'(t)\dot{F}'^{-1}(t) \quad (4.24)$$

Para calcular $\dot{F}'^{-1}(t)$, considere-se a igualdade

$$F'^{-1}(t)F'(t) = I \quad (4.25)$$

Derivando-se (4.25) com relação ao tempo, tem-se que

$$\dot{F}'^{-1}(t)F'(t) + F'^{-1}(t)\dot{F}'(t) = 0 \quad (4.26)$$

de onde obtém-se

$$\dot{F}'^{-1}(t) = -F'^{-1}(t)\dot{F}'(t)F'^{-1}(t) \quad (4.27)$$

Sendo assim

$$\dot{P}(t) = \dot{E}'(t)F'^{-1}(t) - E'(t)F'^{-1}(t)\dot{F}'(t)F'^{-1}(t) \quad (4.28)$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.28) em (4.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{E}'(t)F'^{-1}(t) - E'(t)F'^{-1}(t)\dot{F}'(t)F'^{-1}(t) = & -Q(t) - A^T E'(t)F'^{-1}(t) \\ & - E'(t)F'^{-1}(t)A(t) + E'(t)F'^{-1}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)E'(t)F'^{-1}(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

e, multiplicando este resultado por $F'(t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{E}'(t) - E'(t)F'^{-1}(t)\dot{F}'(t) = & -Q(t)F'(t) - A^T E'(t) - \\ & - E'(t)F'^{-1}(t)A(t)F'(t) + E'(t)F'^{-1}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)E'(t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Em seguida, assume-se que $E'(t)$ e $F'(t)$ são tais que

$$\dot{E}'(t) = -Q(t)F'(t) - A^T E'(t) \quad (4.31)$$

$$E'(t)F'^{-1}(t)\dot{F}'(t) = -E'(t)F'^{-1}(t)[B(t)R^{-1}(t)B^T(t)E'(t) - A(t)F'(t)] \quad (4.32)$$

Multiplicando-se, em seguida, (4.32) por $F'(t)E'^{-1}(t)$, obtém-se

$$\dot{F}'(t) = -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)E'(t) + A(t)F'(t) \quad (4.33)$$

As equações (4.31) e (4.33) representam um conjunto de $2n^2$ equações diferenciais lineares que podem ser rearranjadas na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{E}'(t) \\ \dot{F}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T(t) & -Q(t) \\ -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) & A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'(t) \\ F'(t) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Este sistema pode ser integrado inversamente no tempo usando as condições $E'(t_f) = H'$ e $F'(t_f) = I$.

Se o sistema é controlável, $H' = 0$ e A , B , Q e R são constantes. Como foi dito anteriormente, a matriz de Riccati tende a um valor constante com o passar do tempo, $P(t) \rightarrow P$ constante, à medida que $t_f \rightarrow \infty$. Como no caso transiente, quando a matriz de Riccati é dependente do tempo t , pode-se evitar a solução de um sistema não-linear. De fato, o sistema (4.20) pode ser reduzido a um problema algébrico de autovalores de ordem $2n$ conhecido como o Algoritmo de Potter (Meirovitch, 1990).

Para tanto, considera-se a matriz C' definida como

$$C' = BR^{-1}B^T P - A \quad (4.35)$$

e escreve-se o problema de autovalor associado a C' na forma

$$F'^{-1} C F' = J \quad (4.36)$$

onde J é a matriz diagonal dos autovalores associado à C' , e F' é a matriz dos autovetores.

Multiplicando (4.36) por $P F'$ e considerando as equações (4.20) e (4.35), obtém-se

$$P F' F'^{-1} C F' = P C' F' = P B R^{-1} B^T P F' - P A F' = Q F' + A^T P F' = P F' J \quad (4.37)$$

Multiplicando-se a equação (4.36) por F' e considerando a equação (4.33), tem-se

$$C' F' = B R^{-1} B^T P F' - A F' = F' J \quad (4.38)$$

Em seguida, introduz-se a transformação

$$PF' = E' \quad (4.39)$$

com a qual as equações (4.37) e (4.38) podem ser combinadas na forma

$$M' \begin{bmatrix} E' \\ F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E' \\ F' \end{bmatrix} J \quad (4.40)$$

onde

$$M' = \begin{bmatrix} A^T & Q \\ BR^{-1}B^T & -A \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

A equação (4.40) representa um problema de autovalor de ordem $2n$. A matriz M' tem, em geral, $2n$ autovalores e autovetores, mas apenas n deles interessam, como se pode concluir da equação (4.40). Para determinar as soluções a serem retidas considere as equações (4.20) e (4.35), de onde se obtém

$$\begin{aligned} C'^T P + PC' &= -A^T P + PBR^{-1}B^T P + PBR^{-1}B^T P - PA \\ &= Q + PBR^{-1}B^T P \end{aligned} \quad (4.42)$$

Se o lado direito da equação (4.42) é positivo definido, então os autovalores de C' tem partes reais positivas. Mais ainda, se Q e $BR^{-1}B^T$ são matrizes reais positivas semidefinidas e λ é um autovalor de M' , então $-\lambda$ também é um autovalor de M' . Sendo assim, M' tem n autovalores com partes reais positivas. Comparando as equações (4.38) e (4.40), conclui-se que esses são os mesmos autovalores de C' . Então, dos autovalores de M' , deve-se reter os de parte real positiva. As matrizes E' e F' consistem nas metades superiores e inferiores dos autovetores associados com os autovalores de parte real positiva. Finalmente, da equação (4.39), obtém-se a solução permanente da equação de Riccati (4.20), escrevendo-se simplesmente

$$P = E' F'^{-1} \quad (4.43)$$

4.4.3 Algoritmo de controle ótimo instantâneo

O algoritmo de controle ótimo não conduz à uma força de controle verdadeiramente otimizada em certos casos, já que o termo da excitação é ignorado na obtenção da matriz de Riccati $P(t)$. Em um instante de tempo t qualquer, o conhecimento do valor da força de excitação pode ser utilizado para melhorar a eficiência do algoritmo de controle.

Yang *et al* (1987) propuseram um outro tipo de algoritmo de controle ótimo onde a função objetivo a ser minimizada, expressa em termos de funções

quadráticas, é dependente do tempo. Em outras palavras, o índice de performance quadrático é minimizado em cada instante de tempo.

Os algoritmos de controle ótimo instantâneo incluem controle de malha fechada, malha aberta e malha aberta-fechada. A eficiência desses algoritmos é idêntica sob ambientes de controle ideais.

Esse algoritmo é de mais fácil implementação já que a matriz de ganho não requer esforço computacional e independe das características e parâmetros da estrutura. A determinação da matriz de Riccati requer um grande esforço computacional para edifícios altos com um alto número de graus de liberdade. Quando a matriz de Riccati é função das propriedades da estrutura, o sistema de controle é sensível à identificação da estrutura, o que em geral traz algumas incertezas.

Seja índice de performance dependente do tempo $J(t)$, definido por

$$J(t) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) \quad (4.44)$$

As leis de controle ótimo são deduzidas minimizando $J(t)$ em cada instante t para todo $0 \leq t \leq t_f$. O ponto de partida da dedução do algoritmo de controle ótimo instantâneo é considerar a evolução do vetor de estado $\mathbf{z}(t)$ dentro de um pequeno intervalo de tempo Δt . Considere novamente a equação (4.2). Assumindo-se que a matriz do sistema de malha aberta \mathbf{A} possui autovalores distintos, as equações do sistema podem ser desacopladas através da transformação

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad (4.45)$$

onde \mathbf{T} é a matriz modal $2n \times 2n$, cujas colunas são os autovetores de \mathbf{A} .

As equações de estado desacopladas são obtidas substituindo (4.45) em (4.2)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (4.47)$$

é diagonal com os elementos da diagonal iguais aos autovalores complexos λ_j , $j=1,2,\dots,2n$, da matriz \mathbf{A} e

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t)] \quad (4.48)$$

Ao longo de um pequeno intervalo de tempo Δt , o vetor de estado modal $\mathbf{x}(t)$ pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \int_0^{t-\Delta t} \exp[\Lambda(t-\Delta t)] \mathbf{q}(\tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \exp[\Lambda(t-\tau)] \mathbf{q}(\tau) d\tau \\ &\cong \exp(\Lambda\Delta t) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\exp(\Lambda\Delta t) \mathbf{q}(t-\Delta t) + \mathbf{q}(t)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Para o vetor de estado $\mathbf{z}(t)$, as equações (4.45), (4.48) e (4.49) levam a

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T} \mathbf{d}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t)] \quad (4.50)$$

onde

$$\mathbf{d}(t-\Delta t) = \exp(\Lambda\Delta t) \mathbf{T}^{-1} \left\{ \mathbf{z}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t-\Delta t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t-\Delta t)] \right\} \quad (4.51)$$

Na expressão (4.51) $\exp(\Lambda\Delta t)$ é uma matriz diagonal cujo j -ésimo elemento é $\exp(\lambda_j \Delta t)$. O vetor $\mathbf{d}(t-\Delta t)$ contém todas as quantidades dinâmicas no tempo $t-\Delta t$.

Utilizando a equação (4.50) como restrição, a minimização de $J(t)$ dada por (4.44) pode ser realizada de maneira similar a da seção 4.7. Nesse caso o Hamiltoniano é

$$H = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \lambda^T(t) \left\{ \mathbf{z}(t) - \mathbf{T} \mathbf{d}(t-\Delta t) - \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t)] \right\} \quad (4.52)$$

onde $\lambda(t)$ é o multiplicador de Lagrange.

As condições de minimização são

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (4.53)$$

que levam a

$$\begin{aligned} 2\mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \lambda(t) &= 0 \\ 2\mathbf{R} \mathbf{u}(t) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}^T \lambda(t) &= 0 \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{T} \mathbf{d}(t-\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sabe-se que, quando o vetor de controle de malha fechada é regulado pelo vetor de estado

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t) \quad (4.55)$$

a primeira das equações (4.54) leva a

$$\mathbf{P}(t) = -2\mathbf{Q} \quad (4.56)$$

e, usando a segunda equação (4.54), tem-se

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \quad (4.57)$$

O vetor resposta $\mathbf{z}(t)$ é, de acordo com as equações (4.50) e (4.57), dado por

$$\mathbf{z}(t) = \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \right]^{-1} \left[\mathbf{T} \mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \right] \quad (4.58)$$

É interessante comparar a equação (4.57) com a equação (4.19), a lei de controle de malha fechada do controle ótimo clássico. Pode-se notar, neste caso, que o termo $\Delta t \mathbf{Q}$ substitui a matriz de Riccati $\mathbf{P}(t)$. Verifica-se que este é um projeto de controle muito mais simples, já que não é necessária a solução da equação de Riccati. Vale ressaltar que a escolha da matriz \mathbf{Q} , matriz de ponderação prescrita associada ao índice de performance, requer maior cuidado em sua consideração no contexto do controle ótimo instantâneo.

No caso do controle de malha aberta-fechada onde o vetor de controle é regulado pelo vetor de estado e excitação externa, o multiplicador de Lagrange tem a forma

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (4.59)$$

onde o segundo termo $\mathbf{p}(t)$ representa o controle de malha aberta.

Fazendo as deduções apropriadas Soong (1990) chega à seguinte expressão para o vetor de estado controlado

$$\mathbf{z}(t) = \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^{-1} \left[\mathbf{T} \mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{8} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \right] \quad (4.60)$$

Para o controle de malha aberta, $\lambda(t)$ pode ser simplesmente colocado na forma

$$\lambda(t) = \mathbf{p}(t) \quad (4.61)$$

Por um procedimento similar (Soong, 1990), encontra-se $\mathbf{z}(t)$, sendo este dado por

$$\mathbf{z}(t) = \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{B} \left(\frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \right] \left[\mathbf{T} \mathbf{d}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \right] \quad (4.62)$$

4.5 Exemplo numérico

Considera-se o sistema de dois graus de liberdade da Figura (4.4), cujas propriedades são idênticas ao do sistema estudado anteriormente no Exemplo 2.1. O objetivo deste exemplo é testar os algoritmos de controle ótimo acima apresentados, mostrando claramente o efeito do controle ativo, além de confirmar a importância da escolha adequada das matrizes de ponderação na eficiência do controle ótimo.

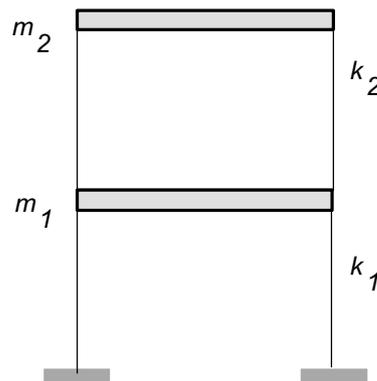


Figura 4.4 - *Shear-frame* de 2 andares

A implementação de controle ativo nessa estrutura foi realizada através da instalação de dois atuadores, um em cada andar. Inicialmente obteve-se a resposta da estrutura sem controle algum, utilizando-se o método de integração numérica de Newmark em 2 casos de carregamento distintos:

- (1) pulso de carga $F(t) = 10^3 \text{ sen } 19.5t$ N, com duração de 0.32 s, aplicado somente no segundo andar;
- (2) pulso de carga $F(t) = 10^3 \text{ sen } 19.5t$ N, com duração de 0.32 s, aplicado nos dois andares.

Os parâmetros do algoritmo de Newmark e o intervalo de tempo utilizados na análise foram respectivamente: $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\Delta t = 0.0016$.

As Tabelas (4.1) e (4.2), a seguir, apresentam os resultados obtidos em cada caso, em termos de resposta máxima e valores *rms* (nos 3 primeiros segundos) para deslocamento, velocidade e aceleração.

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (mm/s)	$a_{m\acute{a}x}$ (mm/s ²)
1	0.350	6.925	154.295
2	0.557	10.488	257.402
Andar	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.158	3.076	61.311
2	0.256	4.950	96.870

Tabela 4.1 - Valores máximos e *rms* da resposta dinâmica sem controle (Caso 1)

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (mm/s)	$a_{m\acute{a}x}$ (mm/s ²)
1	0.565	10.009	227.047
2	0.895	17.387	343.277
Andar	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.255	4.933	96.755
2	0.411	7.967	15.603

Tabela 4.2 - Valores máximos e *rms* da resposta dinâmica sem controle (Caso 2)

Para o cálculo das forças de controle a serem aplicadas pelos atuadores na estrutura foi utilizado, inicialmente, o algoritmo de controle ótimo linear clássico, aproximando-se a matriz de Riccati como uma matriz constante \mathbf{P} e resolvendo as equações pelo método de Potter, como descrito anteriormente no item (4.4.2).

Um dos fatores que influencia na obtenção de bons resultados através desse algoritmo é a escolha das matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} . Inicialmente, para o primeiro caso de carregamento, arbitraram-se as matrizes

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0.0 \\ 0.0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

No entanto não se obteve praticamente nenhuma alteração na resposta. Optou-se então por diminuir a magnitude dos coeficientes da matriz \mathbf{R} . Entre os resultados obtidos utilizando-se valores de $R[i,i] = 10^{-6}$, 10^{-8} e 10^{-10} , obtiveram-se resultados mais satisfatórios para o valor 10^{-10} . A Tabela (4.3) apresenta a resposta máxima e *rms* obtida e as respectivas reduções em relação à resposta sem controle, no primeiro caso de carregamento.

As forças de controle máximas, em cada atuador, obtidas para controlar a resposta foram da ordem de: $F_1 = 227.12$ N e $F_2 = 369.84$ N. Apresentam-se nas

Figuras (4.5) e (4.6), a seguir, a evolução no tempo da aceleração no primeiro andar e do deslocamento no segundo andar, respectivamente.

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (mms)	$a_{m\acute{a}x}$ (mm/s ²)
1	0.153 (56.0%)	2.354 (66.0 %)	65.761 (57.6 %)
2	0.244 (56.0 %)	4.344 (58.6 %)	87.918 (65.8 %)
Andar	d_{rms} (mm)	v_{rms} (mm/s)	a_{rms} (mm/s ²)
1	0.032 (79.3 %)	0.592 (91.4 %)	13.801 (91.0 %)
2	0.055 (90.0%)	0.924 (91.2 %)	18.141 (93.0 %)

Tabela 4.3 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle (Caso 1)

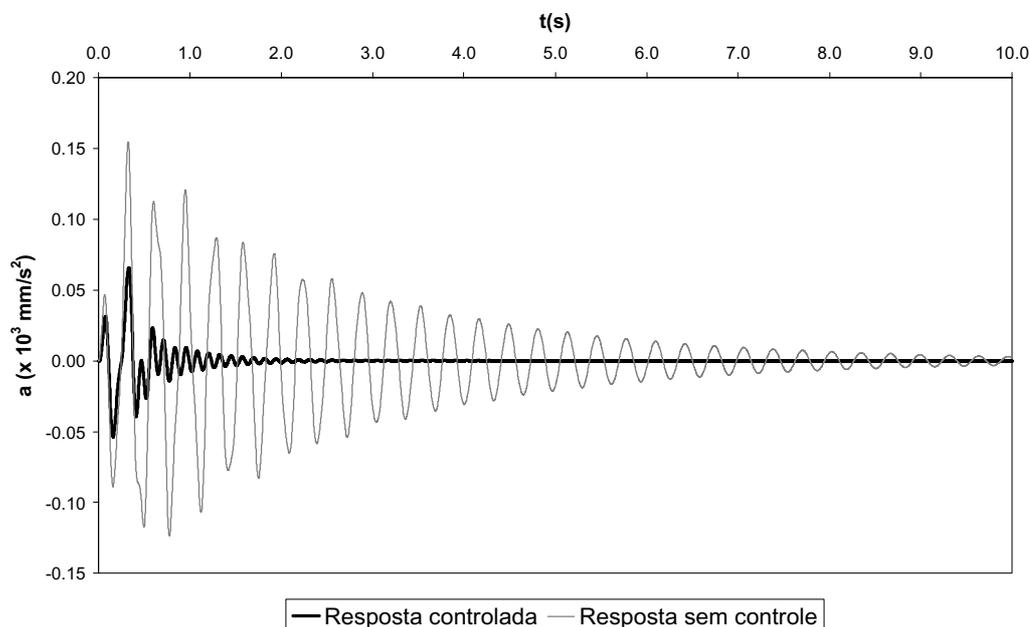


Figura 4.5 - Evolução da aceleração do primeiro andar sem controle e com controle ótimo (Caso 1)

Pode-se concluir, observando os resultados obtidos que o controle ativo tem uma grande influência na resposta da estrutura, diminuindo consideravelmente tanto os valores máximos e *rms* dos deslocamentos, velocidades e acelerações, melhorando desta forma não só a segurança mas o conforto dos ocupantes do edifício. Nota-se também a grande diferença entre as resposta no tempo, mostrando uma redução considerável na duração da resposta transiente.

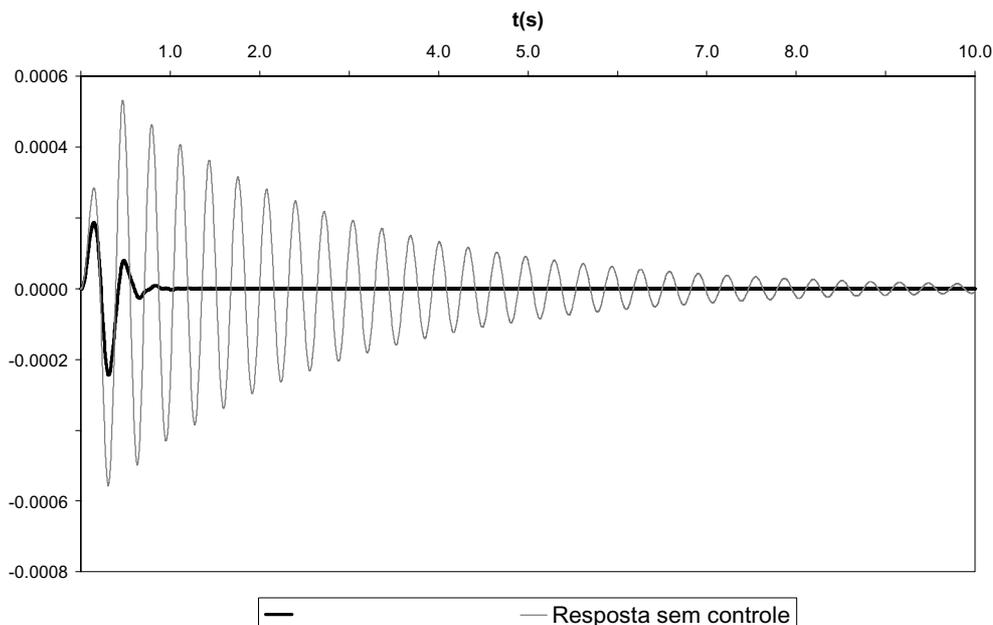


Figura 4.6 - Evolução o deslocamento do segundo andar sem controle e com controle ótimo (Caso 1)

No segundo caso de carregamento, baseando-se nas conclusões do primeiro caso analisado, adotaram-se as matrizes

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0.0 \\ 0.0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

e os resultados mostraram-se satisfatórios como mostra a Tabela (4.4) que apresenta os valores máximos e *rms* e as respectivas reduções em relação à resposta sem controle

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (mm/s)	$a_{m\acute{a}x}$ (mm/s ²)
1	0.247 (56.3 %)	4.383 (56.2 %)	88.756 (60.9 %)
2	0.402 (55.1 %)	6.788 (60.9 %)	152.361 (55.6 %)
Andar	d_{rms} (m)	v_{rms} (m/s)	a_{rms} (m/s ²)
1	0.056 (78.1 %)	0.933 (81.0 %)	18.274 (81.1 %)
2	0.089 (78.4 %)	1.519 (80.9 %)	30.079 (80.7 %)

Tabela 4.4 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle para (Caso 2)

As forças de controle máximas obtidas para controlar a resposta foram da ordem de $F_1 = 389.56$ N e $F_2 = 640.38$ N. A Figura (4.7) apresenta a evolução do deslocamento do segundo andar com e sem controle, observa-se que o controle ativo reduz a amplitude da vibração e a amortece mais rapidamente. A título de ilustração, a Figura (4.8) apresenta a evolução no tempo das forças de controle aplicadas sobre a estrutura através dos dois atuadores.

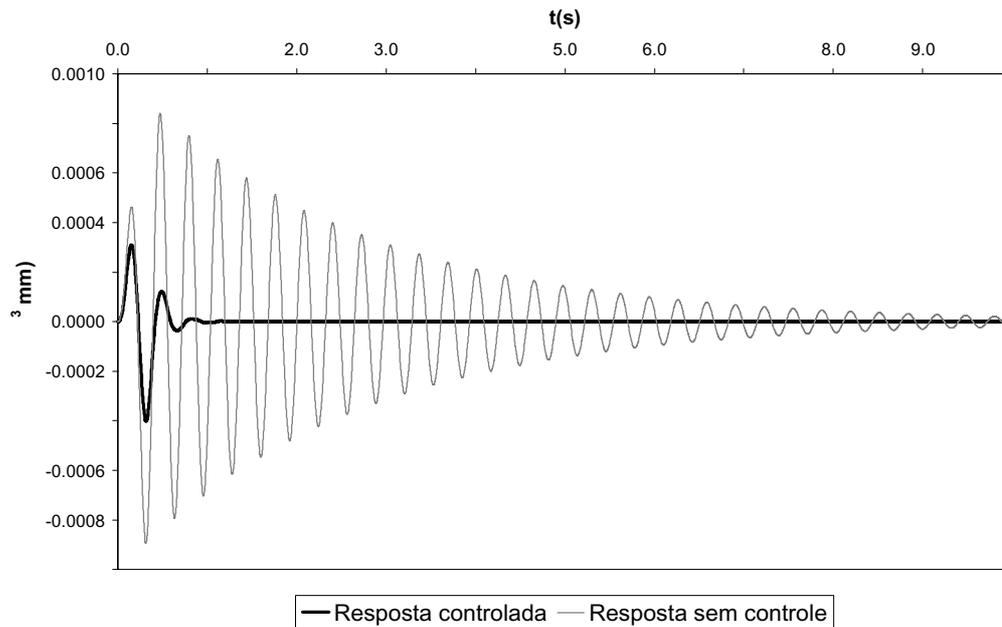


Figura 4.7 - Evolução do deslocamento do segundo andar com e sem controle (Caso 2)

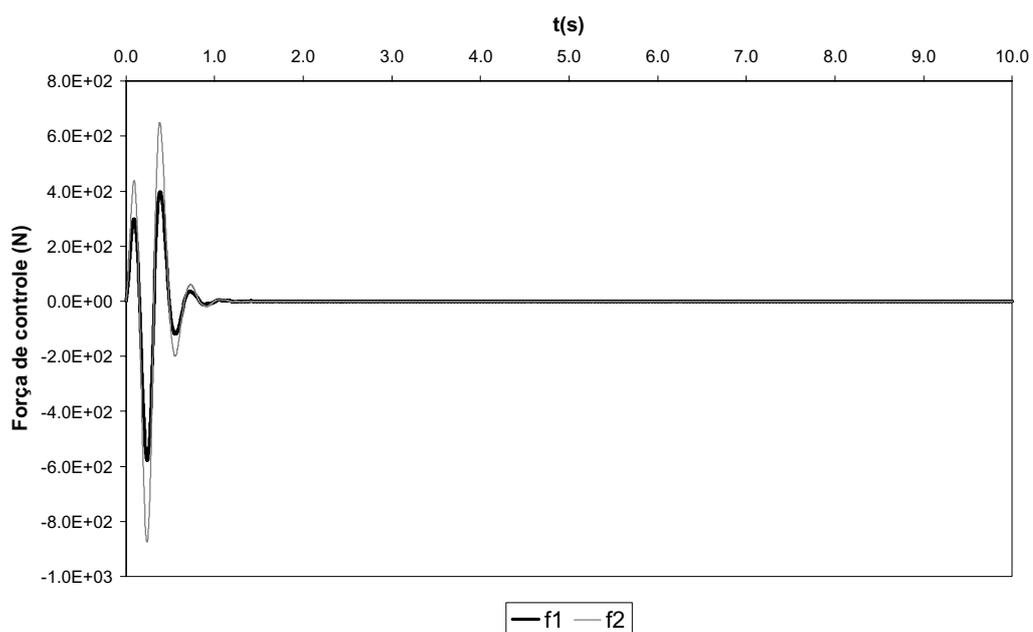


Figura 4.8 - Evolução das forças de controle aplicadas sobre a estrutura (Caso 2)

No caso da utilização do algoritmo de controle ótimo instantâneo, as matrizes de ponderação utilizadas anteriormente não forneceram resultados satisfatórios, nesse caso, praticamente não havendo alteração em relação à resposta sem controle e gerando forças de controle muito baixas. Sendo assim, um novo estudo foi realizado para escolha de outras matrizes de ponderação que se comportassem melhor com a utilização do algoritmo de controle ótimo instantâneo. Os coeficientes da matriz \mathbf{Q} foram arbitrados de modo a dobrar amortecimento e rigidez da estrutura, baseando-se na expressão da força de controle para malha fechada da equação (4.57), sendo as matrizes de ponderação resultantes

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 2.5 \cdot 10^{14} & -1.25 \cdot 10^{14} & 2.12 \cdot 10^{11} & -7.07 \cdot 10^{11} \\ -1.25 \cdot 10^{14} & 1.25 \cdot 10^{14} & -7.07 \cdot 10^{10} & 7.07 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 10^{-2} & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Para o primeiro caso de carregamento, os valores máximos e *rms* da resposta e as respectivas reduções em relação à resposta sem controle são apresentados na Tabela (4.5). As forças de controle máximas obtidas para controlar a resposta foram da ordem de: $F_1 = -1000.19$ N e $F_2 = -33.13$ N.

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ ($\times 10^{-3}$ mm)	$v_{m\acute{a}x}$ ($\times 10^{-3}$ mm/s)
1	0.5014 (99.9%)	16.9143 (99.8%)
2	1.0013 (99.8%)	31.2615 (99.7%)
Andar	d_{rms} ($\times 10^{-3}$ mm)	v_{rms} ($\times 10^{-3}$ mm/s)
1	0.1159 (99.9%)	2.3805 (99.9%)
2	0.2317 (99.9%)	4.6811 (99.9%)

Tabela 4.5 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle dobrando rigidez e amortecimento (Caso 1)

Outra alternativa adotada foi escolher os coeficientes da matriz \mathbf{Q} de forma a alterar somente a magnitude da matriz de amortecimento com as forças de controle ativo. Nesse caso, as matrizes de ponderação resultantes foram as seguintes

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 2.12 \cdot 10^{11} & -7.07 \cdot 10^{11} \\ 1.0 & 1.0 & -7.07 \cdot 10^{10} & 7.07 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot 10^{-2} & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

A Tabela (4.6) apresenta os resultados para esta nova matriz de ponderação. As forças de controle máximas obtidas para controlar a resposta foram da ordem de: $F_1 = 1000.06$ N e $F_2 = 334.77$ N.

As Tabelas (4.7) e (4.8) apresentam os resultados obtidos utilizando matriz Q que dobra a rigidez e o amortecimento e que dobra somente o amortecimento, respectivamente para o segundo caso de carregamento.

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm/s)
1	34.741 (90.1%)	369.901 (94.6%)
2	88.125 (84.1%)	979.600 (90.7%)
Andar	D_{rms} (x 10^{-3} mm)	v_{rms} (x 10^{-3} mm/s)
1	7.650 (95.1%)	101.911 (96.7%)
2	19.741 (92.3%)	280.123 (94.3%)

Tabela 4.6 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle dobrando o amortecimento (Caso 1)

Andar	$d_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm/s)
1	1.001 (99.8%)	31.070 (99.7%)
2	1.502 (99.8%)	48.170 (99.7%)
Andar	d_{rms} (x 10^{-3} mm)	v_{rms} (x 10^{-3} mm/s)
1	0.232 (99.9%)	4.673 (99.9%)
2	0.348 (99.9%)	7.058 (99.9%)

Tabela 4.7 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle dobrando rigidez e amortecimento (Caso 2)

Andar	$u_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm)	$v_{m\acute{a}x}$ (x 10^{-3} mm/s)
1	68.20 (87.8%)	724.80 (92.8 %)
2	122.5 (86.3%)	1346.0 0(92.2 %)
Andar	u_{rms} (x 10^{-3} mm)	v_{rms} (x 10^{-3} mm/s)
1	14.99 (94.1 %)	198.80 (95.9%)
2	27.26 (93.3%)	380.50 (95.2%)

Tabela 4.8 - Valores máximos e *rms* controlados e reduções em relação à resposta sem controle dobrando o amortecimento (Caso 2)

As forças de controle máximas obtidas para controlar a resposta, dobrando rigidez e amortecimento, foram da ordem de: $F_1 = 1002.73$ N e $F_2 = 1002.73$ N. A Figura (4.9) apresenta as evoluções dos deslocamentos do primeiro e segundo andar da estrutura nesse caso.

As forças de controle máximas obtidas para controlar a resposta, dobrando o amortecimento, foram da ordem de: $F_1 = 1159.47$ N e $F_2 = 984.20$ N. A Figura (4.10) apresenta as evoluções dos deslocamentos do primeiro e segundo andar da estrutura nesse caso.

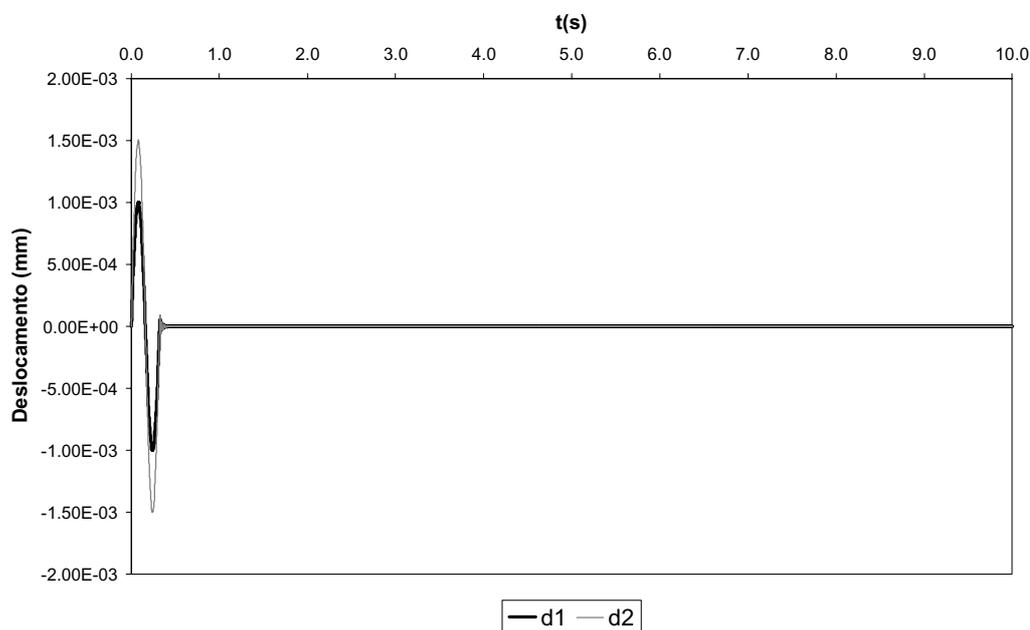


Figura 4.9 - Evoluções dos deslocamentos do primeiro e segundo andar dobrando rigidez e amortecimento (Caso 2)

Observa-se que, para ambos os casos, a melhor escolha é a matriz Q dobrando rigidez e amortecimento, pois com a mesma ordem de grandeza da magnitude da força de controle obtém-se resultados mais satisfatórios.

A título de comparação foram obtidos resultados utilizando essas matrizes Q e R com o algoritmo de controle ótimo clássico, no entanto, esses resultados forneceram em alguns casos forças de controle excessivas e em outros o algoritmo divergiu. Sendo assim, pode-se concluir que a escolha das melhores matrizes de ponderação não independe do algoritmo utilizado.

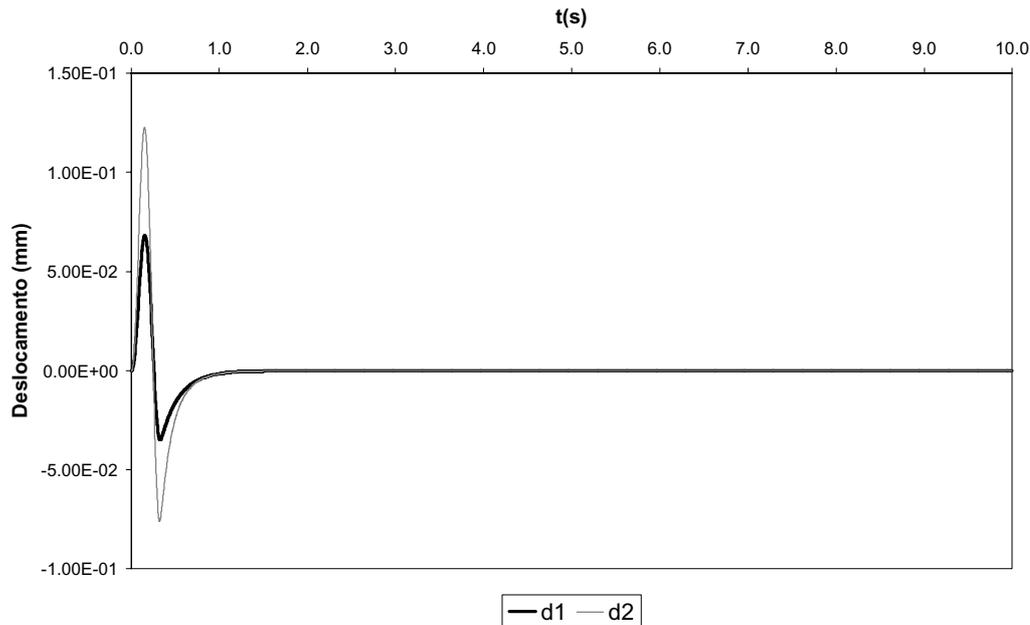


Figura 4.10 - Evoluções dos deslocamentos do primeiro e segundo andar dobrando o amortecimento (Caso 2)

Comparando-se o desempenho dos dois algoritmos de controle utilizados pode-se concluir que apesar do algoritmo de controle ótimo instantâneo ter obtido reduções bem superiores às aquelas obtidas com o algoritmo de controle ótimo clássico, a magnitude das forças de controle, por outro lado, foi muito superior. A performance de ambos os algoritmos pode ser melhorada através de um estudo mais apurado para escolha das matrizes de ponderação.

Apesar de uma das vantagens dos algoritmos de controle ótimo ser a liberdade do projetista na escolha das matrizes Q e R , esta liberdade leva a necessidade de um estudo paramétrico detalhado destas matrizes para que se possa escolher uma lei de controle que leve às reduções desejadas no projeto, sem que, para isso sejam necessárias forças de grande magnitude. Forças de grande magnitude levam a um grande consumo de energia, e precisam de equipamentos suficientemente robustos para gerá-las. Estas forças de controle podem ser minoradas usando-se, por exemplo, controle híbrido.

No Capítulo 6, uma estratégia para definição das matrizes de ponderação, utilizadas no algoritmo de controle ótimo instantâneo, que resulte em um controle que minimize a amplitude da resposta harmônica permanente, é apresentada.

4.6 Controle não-linear

4.6.1 Introdução

Os estudos sobre controle estrutural não-linear tiveram início há alguns anos com os trabalhos de Masri *et al* (1982) e Reinhorn *et al* (1987). A maior parte do que já foi publicado até o momento neste assunto é direcionada à estruturas excitadas por terremotos utilizando sistemas híbridos com isolamento de base (Feng *et al* 1993, Barbat *et al* 1995, Yang *et al* 1995a e 1996), ou com amortecedores ajustáveis, onde o coeficiente de amortecimento pode ser regulado (Loh & Ma 1994, Yang *et al* 1995b). Dentro do que vêm sendo desenvolvidos em termos de algoritmos de controle não-linear podemos citar, por exemplo: controle ótimo instantâneo (Yang *et al* 1988), controle ótimo por pulsos (Masri *et al* 1982), *sliding mode control* (Yang *et al* 1994b) e o método de saturação linear (Mongkol *et al* 1996), além dos trabalhos citados no Capítulo 1.

A investigação do controle da resposta dinâmica de sistemas não-lineares utilizando controle não-linear baseado em uma formulação que utiliza uma expansão indicial das equações de movimento e propõe uma força de controle polinomial foi realizada por Suhardjo *et al* (1992), Spencer Jr. *et al* (1995) e Pinto & Gonçalves (2000).

Tomasula *et al* (1996) aplicou este tipo de controle a sistemas lineares de um grau de liberdade submetidos a excitações sísmicas. No presente trabalho utiliza-se esta formulação para controlar a resposta de sistemas lineares equipados com amortecedores de massa híbridos submetidos a excitações harmônicas.

4.6.2 Controle ótimo não-linear – representação indicial

O problema de controle ótimo não-linear é definido pelas equações (4.9) e (4.2) apresentadas anteriormente para o caso de controle ótimo linear clássico. Neste caso, a lei de controle que define as forças de controle u possui termos não-lineares, como também as equações de estado podem possuir termos não-lineares no caso do sistema analisado possuir não-linearidades físicas ou geométricas.

A solução deste tipo de problema pode ser obtida utilizando-se uma representação indicial introduzida por Buric (1978) e mais tarde modificada por Suhardjo *et al.* (1992), que se baseia em uma notação indicial. Utilizando-se esta formulação, as equações de estado para uma certa classe de sistemas não-lineares podem ser escritas na forma indicial

$$\dot{x}^i = A_j^i x^j + A_{jk}^i x^{jk} + A_{jkl}^i x^{jkl} + \dots + B_j^i u^j \quad (4.63)$$

onde x^i é a i -ésima variável de estado, A_j^i , A_{jk}^i , A_{jkl}^i , ... são coeficientes relativos às propriedades do sistema, u^j é a j -ésima força de controle, B_j^i é o coeficiente que relaciona a j -ésima força de controle com a i -ésima variável de estado. Vale ressaltar que $x^{ij} = x^i x^j$, $x^{ijk} = x^i x^j x^k$, e que índices repetidos implicam em somatório sobre os mesmos.

A força de controle não-linear u^i é definida como

$$u^i = K_j^i x^j + K_{jk}^i x^{jk} + K_{jkl}^i x^{jkl} + \dots \quad (4.64)$$

onde K_j^i , K_{jk}^i , K_{jkl}^i são os ganhos de primeira, segunda, e terceira ordem, respectivamente.

A função de desempenho a ser minimizada pode ser escrita em uma forma geral como

$$J = S_{ij} x^{ij} \Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (Q_{ij} x^{ij} + R_{ij} u^{ij} + Q_{ijk} x^{ijk} + Q_{ijkl} x^{ijkl} + \dots) dt \quad (4.65)$$

onde S_{ij} , Q_{ij} , Q_{ijk} , Q_{ijkl} , ... são tensores positivo semidefinidos de ordem 2, 2, 3, 4, ..., respectivamente, e R_{ij} é um tensor de segunda-ordem positivo semidefinido. Estes tensores atuam como termos de ponderação, já que a escolha de seus elementos se dá em função da importância relativa atribuída ao controle das variáveis de estado e às forças controle.

A função de desempenho ótima pode ser expressa na forma de uma série de Taylor como

$$J^* = V_{ij} x^{ij} + V_{ijk} x^{ijk} + V_{ijkl} x^{ijkl} + \dots \quad (4.66)$$

onde V_{ij} , V_{ijk} , V_{ijkl} , etc. são tensores simétricos com relação aos seus índices.

Para obtenção da força de controle da equação (4.64) que minimiza (4.65) tem-se que resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (Suhardjo *et al.* 1992, Pinto, 1999)

$$\min_u \left[g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} \right] = 0 \quad (4.67)$$

onde

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = Q_{ij} x^{ij} + R_{ij} u^{ij} + Q_{ijk} x^{ijk} + Q_{ijkl} x^{ijkl} + \dots \quad (4.68)$$

e

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = A_j^i x^j + A_{jk}^i x^{jk} + A_{jkl}^i x^{jkl} + \dots + B_j^i u^j \quad (4.69)$$

É necessário para a solução de (4.67) obter-se a derivada da função de desempenho ótimo (4.66), com relação às variáveis de estado x^i

$$\frac{\partial J}{\partial x^i} = 2V_{ij} x^j + 3V_{ijk} x^{jk} + 4V_{ijkl} x^{jkl} + \dots \quad (4.70)$$

Substituindo-se (4.68), (4.69) e (4.70) em (4.67), obtém-se

$$\begin{aligned} \min[& (Q_{ij} x^{ij} + R_{ij} u^{ij} + Q_{ijk} x^{ijk} + Q_{ijkl} x^{ijkl} + \dots) + (2V_{ij} x^j + 3V_{ijk} x^{jk} + \\ & + 4V_{ijkl} x^{jkl} + \dots) \times (A_j^i x^j + A_{jk}^i x^{jk} + A_{jkl}^i x^{jkl} + \dots + B_j^i u^j) + \\ & \left(\dot{V}_{ij} x^j + \dot{V}_{ijk} x^{jk} + \dot{V}_{ijkl} x^{jkl} + \dots \right)] = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Derivando-se (4.71) em relação à força de controle u^i e levando-se em consideração a simetria dos tensores, obtém-se

$$2R_{aj} u^j + (2V_{ij} x^j + 3V_{ijk} x^{jk} + 4V_{ijkl} x^{jkl} + \dots) B_a^i = 0 \quad (4.72)$$

Substituindo-se (4.64) em (4.71) e (4.72), obtém-se o sistema de equações homogêneas

$$\begin{aligned} \min[& R_{ab} (K_i^a x^i + K_{ij}^a x^{ij} + K_{ijk}^a x^{ijk} + \dots) (K_i^b x^i + K_{ij}^b x^{ij} + K_{ijk}^b x^{ijk} + \dots) + \\ & + (2V_{ai} x^i + 3V_{aij} x^{ij} + 4V_{aijk} x^{ijk} + \dots) (A_i^a x^i + A_{ij}^a x^{ij} + A_{ijk}^a x^{ijk} + \dots + \\ & + B_a^b (K_i^a x^i + K_{ij}^a x^{ij} + K_{ijk}^a x^{ijk} + \dots)) + \\ & + Q_{ij} x^{ij} + R_{ij} u^{ij} + Q_{ijk} x^{ijk} + Q_{ijkl} x^{ijkl} + \\ & + \dots + \dot{V}_{ij} x^j + \dot{V}_{ijk} x^{jk} + \dot{V}_{ijkl} x^{jkl} + \dots] = 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} 2R_b^a (K_i^b x^i + K_{ij}^b x^{ij} + K_{ijk}^b x^{ijk} + \dots) + (2V_{bi} x^i + 3V_{bij} x^{ij} + \\ + 4V_{bijk} x^{ijk} + \dots) (B_a^b + C_{ia}^b x^i) = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Antes de prosseguir, deve-se introduzir o operador $\text{sym}[T]$, denominado “simetria”, que, atuando sobre o tensor T, representa a sua forma simétrica com relação aos índices livres, de forma que

$$\text{sym}[T_{ij}] = \frac{1}{2!} (T_{ij} + T_{ji}) \quad (4.75)$$

$$\text{sym}[T_{ijk}] = \frac{1}{3!} (T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{kji}) \quad (4.76)$$

e assim por diante.

Agrupando-se os termos de segundo grau em x em (4.73) e igualando-se seu coeficiente a zero, obtém-se

$$\text{sym} \left[\dot{V}_{ij} + 2V_{ai}A_j^a + K_i^a R_{cb}K_j^b + 2V_{ai}B_b^d K_j^b + Q_{ij} \right] = 0 \quad (4.77)$$

Da mesma forma coletando-se agora em (4.74) os termos de primeiro grau em x e igualando-se seu coeficiente a zero, obtém-se

$$2R_{ab}K_i^a + 2V_{bi}B_a^b = 0 \quad (4.78)$$

que devido ao fato de \mathbf{R} ser inversível, permite escrever a expressão do ganho de controle de realimentação de primeira ordem.

$$K_i^a = -(R^{-1})_{am} V_{bi} B_m^b = 0 \quad (4.79)$$

Substituindo-se (4.79) em (4.77) obtém-se uma equação diferencial não-linear de primeira ordem em termos de V_{ij} , que corresponde a equação de Riccati apresentada em (4.18), agora na notação indicial

$$\text{sym} \left[\dot{V}_{ij} + 2V_{ai}A_j^a - V_{ai}B_b^a (R^{-1})_{cb} V_{dj} B_c^d + Q_{ij} \right] = 0 \quad (4.80)$$

Devido à simetria do tensor V_{ij} , obtém-se um sistema de $(2n)(2n+1)/2$ equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, no lugar de $(2n)^2$ equações, onde n é o número de graus de liberdade do sistema. Como foi visto anteriormente, a equação (4.80) pode ser integrada numericamente, a partir da condição final de contorno $V_{ij}(t_f) = 0$ para determinar V_{ij} . Uma série de algoritmos para solução deste tipo de problema foram desenvolvidos (Junkins & Kim, 1993, Meirovitch, 1990), já que este apresenta em geral dificuldades para ser integrado numericamente.

A fim de obter os ganhos do controle de segunda ordem, procede-se da mesma forma para os termos de uma ordem superior, isto é, de terceiro grau em (4.73) e de segundo grau em (4.74), e de posse dos valores de V_{ij} e K_i^a , calculados anteriormente, obtém-se

$$\text{sym} \left[\dot{V}_{ijk} + 2V_{ai}A_{jk}^a + 3V_{aij}(A_k^a + B_b^a K_k^b) + Q_{ijk} \right] = 0 \quad (4.81)$$

$$\text{sym} [3V_{aij}B_b^a + 2R_{ab}K_{ij}^a] = 0 \quad (4.82)$$

A solução das equações (4.81) e (4.82) fornece o valor dos ganhos de segunda ordem K_{jk}^i .

Da mesma forma e, de posse dos valores já calculados, obtém-se as equações para o controle de terceira ordem

$$\text{sym}[\dot{V}_{ijkl} + 2V_{ai}A_{jkl}^a + 3V_{aij}(A_{kl}^a + B_b^a K_{kl}^b) + 4V_{aijk}(A_l^a + B_b^a K_l^b) + K_{ij}^a R_{ab} K_{kl}^b + Q_{ijkl}] = 0 \quad (4.83)$$

$$\text{sym}[4V_{aijk}B_b^a + 2R_{ab}K_{ijk}^a] = 0 \quad (4.84)$$

Observa-se que estas equações têm um padrão bem definido, podendo-se obter as equações para ordens superiores, se necessário, sem maiores dificuldades. As equações para obtenção dos ganhos de quarta e quinta ordens estão apresentadas em Pinto (1999).

Como foi visto anteriormente, a equação de Riccati pode ser simplificada fazendo-se que \dot{V} seja nulo e no lugar de equações diferenciais tenha-se equações algébricas. Isto porque, na maior parte dos problemas de engenharia civil, t_f é muito maior que o período natural do sistema a ser controlado, sendo assim pode-se admitir que $t_f = \infty$.

Adotando-se esta simplificação, as equações de controle de primeira ordem reduzem-se a um sistema de $n(2n+1)$ equações algébricas não-lineares

$$\text{sym}[2V_{ai}A_j^a - V_{ai}B_b^a (R^{-1})_{cb} V_{dj}B_c^d + Q_{ij}] = 0 \quad (4.85)$$

Um algoritmo para solução deste tipo de sistema, utilizado no presente trabalho, conhecido como método de Potter (Meirovitch, 1990), foi descrito no ítem 4.4.2.

As equações de controle de segunda ordem devido a simetria do tensor V_{ijk} consistem em um sistema de $(2n)(2n+1)(2n+2)/6$ equações algébricas lineares, no lugar de $(2n^3)$, e têm a forma

$$\text{sym}[2V_{ai}A_{jk}^a + 3V_{aij}(A_k^a + B_b^a K_k^b) + Q_{ijk}] = 0 \quad (4.86)$$

As equações de controle de terceira ordem são dadas por

$$\text{sym}[2V_{ai}A_{jkl}^a + 3V_{aij}(A_{kl}^a + B_b^a K_{kl}^b) + 4V_{aijk}(A_l^a + B_b^a K_l^b) + K_{ij}^a R_{ab} K_{kl}^b + Q_{ijkl}] = 0 \quad (4.87)$$

consistindo em um sistema de $(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)/24$ equações algébricas lineares, no lugar de $(2n^4)$, devido a simetria do tensor V_{ijkl} .

As equações para o cálculo dos ganhos respectivos não são modificadas.

4.6.3 Controle ótimo não-linear para sistemas lineares

Segundo Suhardjo *et al* (1996), a formulação apresentada no item anterior pode ser utilizada para determinar um controle ótimo para um sistema linear, desde que se minimize uma função de desempenho quártica na forma

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{Q}_{ij} x^{ij} + \mathcal{Q}_{ijkl} x^{ijkl} + R_{ij} u^{ij}) dt \quad (4.88)$$

Sabendo-se que no caso de sistemas lineares a equação de estado (4.63) reduz-se a (Tomasula *et al.*, 1996)

$$\dot{x}^i = A_j^i x^j + B_j^i u^j \quad (4.89)$$

a equação (4.73) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \min[& R_{ab} (K_i^a x^i + K_{ij}^a x^{ij} + K_{ijk}^a x^{ijk} + \dots)(K_i^b x^i + K_{ij}^b x^{ij} + K_{ijk}^b x^{ijk} + \dots) + \\ & + (2V_{ai} x^i + 3V_{aij} x^{ij} + 4V_{aijk} x^{ijk} + \dots)A_i^a x^i + B_a^b (K_i^a x^i + K_{ij}^a x^{ij} + \\ & + K_{ijk}^a x^{ijk} + \dots) + \mathcal{Q}_{ij} x^{ij} + R_{ij} u^{ij} + \mathcal{Q}_{ijkl} x^{ijkl} + \dots + \\ & + \dot{V}_{ij} x^j + \dot{V}_{ijk} x^{jk} + \dot{V}_{ijkl} x^{jkl} + \dots] = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Os ganhos do controle de primeira ordem são calculados da mesma forma através das equações (4.79) e (4.80), pois eles correspondem aos ganhos do controle ótimo linear clássico. Já os ganhos de segunda ordem são obtidos da mesma forma, que anteriormente, através das equações obtidas agrupando-se os termos de terceiro grau em (4.90) e de segundo grau em (4.74)

$$\text{sym} \left[\dot{V}_{ijk} + 3V_{aij} (A_k^a + B_b^a K_k^b) \right] = 0 \quad (4.91)$$

$$\text{sym} [3V_{aij} B_b^a + 2R_{ab} K_{ij}^a] = 0 \quad (4.92)$$

Da mesma forma e, de posse dos valores já calculados, obtém-se as equações para o controle de terceira ordem

$$\text{sym} [\dot{V}_{ijkl} + 3V_{aij} B_b^a K_{kl}^b + 4V_{aijk} (A_l^a + B_b^a K_l^b) + K_{ij}^a R_{ab} K_{kl}^b + \mathcal{Q}_{ijkl}] = 0 \quad (4.93)$$

$$\text{sym} [4V_{aijk} B_b^a + 2R_{ab} K_{ijk}^a] = 0 \quad (4.94)$$

Adotando-se a simplificação apresentada anteriormente ao fazer com que \dot{V} seja nulo e no lugar de equações diferenciais tenha-se equações algébricas, a equação de controle de segunda ordem (4.91) toma a forma

$$\text{sym} [3V_{aij} (A_k^a + B_b^a K_k^b)] = 0 \quad (4.95)$$

A solução desta equação mostra que os termos do tensor V_{aij} se anulam, sendo assim, e de acordo com a equação (4.92), os valores dos ganhos de segunda ordem K_{ij}^a também são nulos.

A partir disto pode-se escrever as equações do controle de terceira ordem simplificadas

$$\text{sym}[4V_{aijk} (A_l^a + B_b^a K_l^b) + K_{ij}^a R_{ab} K_{kl}^b + Q_{ijkl}] = 0 \quad (4.96)$$

De acordo com Tomasula *et al* (1996) utilizando o índice de performance quártico para controle ótimo de sistemas lineares os ganhos de controle de ordem par se anulam.

4.6.4 Exemplo numérico

Com o objetivo de demonstrar o potencial da utilização do controle ótimo não-linear e testar os algoritmos e programas computacionais desenvolvidos para a implementação do controle não-linear, analisa-se o sistema de um grau de liberdade, equipado com um cabo tensionado, apresentado na Figura (4.11). Esse sistema foi estudado anteriormente por Soong (1990) e Tomasula *et al* (1996). A estrutura é submetida à uma aceleração na base, correspondente à componente norte-sul do terremoto de El Centro, 1940.

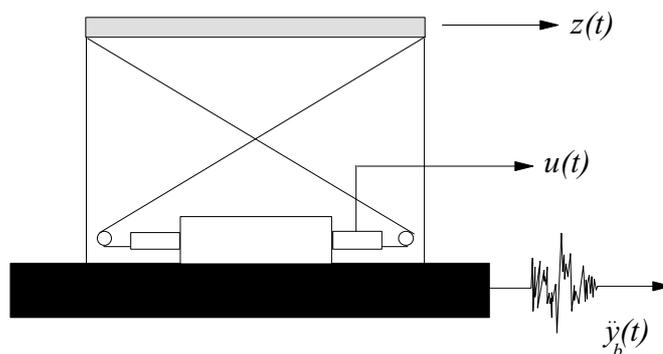


Figura 4.11 - Sistema de um grau de liberdade, equipado com cabo tensionado submetido à aceleração na base do terremoto El Centro 1940

A frequência natural da estrutura é $\omega_0=21.8$ rad/s, a taxa de amortecimento é igual a $\xi = 0.0124$ e a massa do sistema vale $m = 29.2$ N.s²/cm. A equação de movimento do sistema controlado é dada por

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = -\ddot{y}_b(t) - \frac{4k_c \cos\theta}{m} u(t) \quad (4.97)$$

onde k_c é a rigidez do cabo ($k_c=3720.0$ N/cm) e θ o ângulo de inclinação do cabo ($\theta=36^\circ$).

Inicialmente, foi adotada uma lei de controle ótimo linear, utilizando as seguintes matrizes de ponderação

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 400.0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R=21.0$$

A comparação entre a resposta da estrutura controlada e da estrutura sem controle é apresentada na Tabela (4.9) que contém os valores dos deslocamentos máximos e *rms* nos dois casos. Verifica-se uma boa redução tanto no caso da resposta máxima como no caso da resposta *rms*, sendo que a força máxima e *rms* necessárias para tanto, foram respectivamente $F_{\text{máx}} = 60.05$ N e $F_{\text{rms}} = 13.96$ N.

	d_{max} (m)	d_{rms} (m)
s/ controle	1.7454×10^{-2}	5.0885×10^{-3}
Controle Linear	0.7073×10^{-2}	3.8912×10^{-3}

Tabela 4.9 - Comparação da resposta sem controle com o controle linear

Em seguida, aplicando-se uma força de controle não-linear calculada a partir dos seguintes coeficientes de ponderação: $Q_{1111} = Q_{1112} = Q_{1122} = Q_{1222} = 0.0$ e $Q_{2222} = 10^4$ obtiveram-se o deslocamento máximo e *rms* apresentados na Tabela (4.10) que também apresenta a porcentagem de redução deste tipo de controle em relação ao controle linear. A força máxima e *rms* obtidas foram, respectivamente, $F_{\text{máx}} = 7.98$ kN e $F_{\text{rms}} = 12.91$ N

d_{max} (m)	$\Delta(\%)$	d_{rms} (m)	$\Delta(\%)$
0.6351×10^{-2}	10.2	1.07613×10^{-3}	72.34

Tabela 4.10 – Resposta com controle não-linear e redução em relação ao controle linear

Verifica-se que a força máxima exigida pelo controle não-linear neste caso, é consideravelmente superior, no entanto, além da maior redução da resposta máxima, a redução do deslocamento *rms* é bastante satisfatória, requerendo uma força *rms* ligeiramente inferior à necessária no caso linear. Vale ressaltar que, um estudo mais elaborado dos coeficientes de ponderação Q_{ijkl} pode conduzir a resultados ainda mais satisfatórios.