Departamento de Matemática e NEAM (Núcleo de Estudo e Ação sobre o Menor)

PROJETO MATEMÁTICA
COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

Número 9

Problemas do Primeiro Grau e Outros

Autores:
Gilda de La Rocque Palis
João Bosco Pitombeira
Alcilea Augusto

PUC RIO

Matemática PUC-Rio

NEAM
NÚCLEO DE ESTUDO E AÇÃO SOBRE O MENOR

PROJETO MATEMÁTICA COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU E OUTROS

Gilda de La Rocque Palis

João Bosco Pitombeira

Alcilea Augusto

2017

Resumo: Este trabalho expõe atividades propostas aos professores-alunos, participantes do Projeto Matemática, Comunidade e Universidade, sua resolução e algumas observações. As atividades, em sua maioria, consistem em problemas modelados por equações do 1º grau. São propostas com enunciados, dados numéricos e em contextos que podem ser aplicados a diversos níveis de aprendizagem.

Uma apresentação da Metodologia utilizada nestas atividades e sugestões de leituras sobre este tema, já foi postada nesta série, sob o título de Resolução de Problemas.

Alguns professores-alunos levaram um problema desses às suas turmas e trouxeram ao grupo observações interessantes sobre preconceitos a respeito de soluções de problemas no ambiente escolar.

Palavras chave: Formação continuada de professores que ensinam Matemática no ensino fundamental e médio; problemas modelados por equações do 1º grau; problemas com várias soluções; problemas sem soluções; desafios; soma de Gauss; triângulo de Pascal.

Sumário

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU E UM DESAFIO
PRIMEIRA AULA DE TRÊS

INTRODUÇÃO

Estas atividades foram propostas a uma turma em que havia professores que trabalhavam com alunos que variavam do 2º ano inicial ao 2º ano do atual curso médio.
São problemas modelados por equações do 1º grau, em 2 ou 3 incógnitas, cujos enunciados, contextos e dados numéricos podem ser adaptados aos diferentes níveis de escolaridade.

Problemas do Primeiro Grau e Desafios

ATIVIDADES PROPOSTAS NA REUNIÃO REALIZADA A 22/08/1989

ATIVIDADE 1: Com quantas reguinhas, azuis e/ou rosas, justapostas posso cobrir exatamente a régua branca?
(*Observação: esta atividade era acompanhada de 96 reguinhas azuis de comprimento igual a 3 cm, 48 reguinhas rosas de 5 cm e 6 réguas brancas de 20 cm, todas de mesma largura*.)

ATIVIDADE 2: Um menino recebe NCz$ 130,00[1] para a sua despesa de merenda na escola. Os sanduíches oferecidos custam NCz$ 4,00 cada e o copo de suco NCz$ 3,00.
Quantos sanduíches e copos de suco ele poderá comprar, gastando todo o seu dinheiro e sem pedir nenhum emprestado?

ATIVIDADE 3: Uma esquadrilha de 22 aviões apresenta-se em filas de 3, 4 e 5 aviões. Sabendo-se que todos os aviões devem participar da apresentação, quantas filas de 3 e/ou de 4 e/ou de 5 eles podem formar?

DESAFIO: PARA PENSAR EM CASA

Um senhor deixou de herança para seus 4 filhos um terreno retangular que deveria ser dividido em 4 partes de mesma forma e mesma área.
Logo após sua morte, a prefeitura desapropriou a quarta parte do terreno para construir uma praça, conforme mostra a figura.
Ajude os filhos a dividir o terreno obedecendo ao desejo do pai.

[1] O cruzado novo era a moeda vigente no Brasil àquela época.

PRELEÇÃO SOBRE AS ATIVIDADES DA REUNIÃO DE 29/08/1989

Na reunião de 29/08/1989, fizemos uma preleção na qual lembramos que um problema pode ter, ou não, solução e, se tem solução, pode ter várias.

- Um candidato a solução tem que ser testado. A verificação é importante, pois permite que o aluno exerça controle sobre suas ações.
- Como justificar a afirmativa em Matemática: "Este problema tem exatamente 11 soluções"? Significa que foi feita a verificação de todos os casos, (por exaustão). Ou foi utilizada uma equivalência e exauridos todos os casos. A resposta não pode ser "*Porque não achei outras.*"

Exemplos desse raciocínio já foram encontrados nas resoluções das Atividades propostas na reunião de 22/08/1989. Na resolução da Atividade 2, por exemplo, veremos que, sendo conhecida uma solução, todas as outras podem ser obtidas utilizando a seguinte equivalência: É possível trocar 3 sanduíches por 4 copos de suco, isto é, se x é o número de sanduíches e y o número de copos de suco comprados, à medida que x sobe de 3 em 3, y desce de 4 em 4. Ou seja

$$4x + 3y = 130 \quad \text{se e somente se} \quad 4(x - 3) + 3(y + 4) = 130.$$

Uma tabela é um instrumento bem adaptado à organização do raciocínio ao trabalhar com vários dados e não só para apresentar resultados.

O artigo GLR e JBP (RPM 19) – *Uma Equação Diofantina e Suas Resoluções*, RPM 19, é apresentado aos professores alunos, incluindo o Teorema que afirma que

"A equação Diofantina

$$ax + by = c$$

tem solução (inteira) **se, e somente se**, o máximo divisor de a e b dividir c."

Por exemplo

$$4x + 6y = 35$$

não tem solução inteira, o mdc (4,6) = 2 não divide 35. Com efeito, se x e y são números inteiros, 4x + 6y será um número par não podendo ser 35, que é ímpar.

$$2x + 3y = 12$$

tem solução inteira, pois o mdc (2,3) = 1 divide 12. Essa equação tem uma infinidade de soluções se são considerados números inteiros quaisquer, positivos, negativos e 0.

Na aula anterior, a Atividade 3 pode ser modelada pela equação

$$3x + 4y + 5z = 22.$$

Sendo atribuídos valores a x, obtêm-se equações em y e z. Para x = 5, chega-se à equação

$$4y + 5z = 7.$$

e à conclusão de que não há solução para o problema nesse caso. Essa conclusão parece contrariar o Teorema citado anteriormente, pois mdc (4,5) = 1 que divide o segundo membro. Acontece que, na Atividade 3, não faz sentido solução com números negativos. A equação acima tem uma infinidade de soluções inteiras, mas, se y for um inteiro positivo e z for um inteiro, z tem que ser negativo e vice-versa. Por exemplo, y = 3 e z = - 1 ou y = - 2 e z = 3.

ATIVIDADES PROPOSTAS NA REUNIÃO REALIZADA A 29/08/1989

ATIVIDADE 4:

a) Com 24 palitos, quantos quadrados e/ou hexágonos, com lados iguais a 1 palito, posso formar, usando todos os palitos e de modo que cada palito faça parte de uma só figura?

b) E com 35 palitos?

ATIVIDADE 5: Num jogo de dominó, em cada partida vencida, o jogador ganha 4 pontos e, em cada derrota, perde 3.

Um jogador obteve 25 pontos. Quantas vitórias e derrotas aconteceram?

ATIVIDADE 6: Comprei 40 sanduíches e 50 copos de suco com NCz\$ 130,00. Quais os preços do sanduíche e do copo de suco, sabendo que todos os sanduíches custam a mesma quantia, acima de NCz\$ 1,00 e todos os copos de suco custam a mesma quantia, acima de NCz\$ 0,80?

ATIVIDADE 7: Duas datilógrafas devem bater uma revista de 72 páginas. Uma delas bate 2 páginas por hora e a outra bate 3 páginas por hora. Como devem programar suas horas de trabalho para executarem a tarefa?

ATIVIDADE 8: Encontre todas as triplas (x, y, z) de números inteiros não negativos que satisfaçam à equação

$$x + y + z = 4.$$

DESAFIOS: PARA PENSAR EM CASA

1) Carlos, Eduardo e Guilherme tinham duas ocupações cada um, dentre as seguintes:

motorista, contrabandista, músico, pintor, jardineiro e barbeiro.

Quaisquer dois deles não tinham uma ocupação em comum.

A partir dos fatos abaixo, encontre as duas ocupações de cada um deles.

a) O motorista ofendeu o músico ao rir de seus cabelos.
b) O músico e o jardineiro costumavam pescar com Carlos.
c) O pintor comprou uma garrafa de Gim do contrabandista.
d) O motorista namorava a irmã do pintor.
e) Eduardo devia NCz$ 50,00 ao jardineiro.
f) Guilherme ganhou de Eduardo e do pintor no jogo de cartas.

2) Dois beduínos encontram, no deserto, um jarro de 800 cm^3 cheio d'água. Eles acham também dois jarros vazios de 300 cm^3 e 500 cm^3, respectivamente.

Como dividir igualmente a água entre os dois, usando somente as jarras para medida?

3) a) Cinco moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e pesa menos do que as outras. Usando uma balança de dois pratos, como descobrir a moeda falsa com duas pesagens?

b) Oito moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e pesa mais do que as outras. Usando uma balança como anteriormente, descobrir a moeda falsa com duas pesagens.

c) Dez moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e com peso diferente das outras. Como antes, descobrir a moeda falsa com três pesagens.

PROBLEMAS PROPOSTOS NA REUNIÃO REALIZADA A 05/09/1989

1) Dispomos os números inteiros em um quadro, da forma indicada abaixo. Em qual coluna encontraremos o número 1984? E 10.000? E 3.333.333?

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	...	...

2) Qual o número de diagonais de um polígono de 5 lados? E de 7 lados? E de 10 lados?

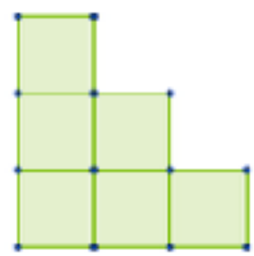
número de lados	3	4	5	7	10
número de diagonais	0	2			

3) Considere somente os vértices de um polígono de 5 lados:

Ligue cada ponto a todos os outros, utilizando segmentos de reta. De quantos segmentos você necessita?

E se você tivesse iniciado com os vértices de um polígono de 6 lados? E de 7 lados? E de 24 lados?

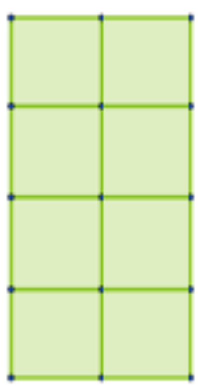
4) Podemos formar uma escada de três degraus com 6 blocos:

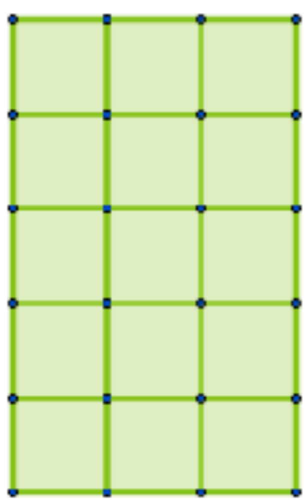


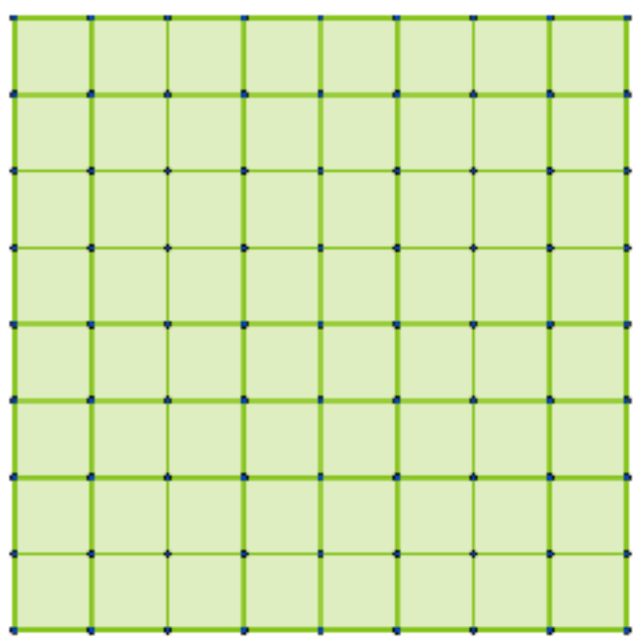
Quantos blocos seriam necessários para formar uma escada, do tipo ao lado, com 4 degraus?

Você pode construir uma escada, como anteriormente, com 28 blocos? E com 34 blocos?

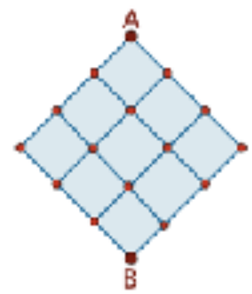
5) Quantos quadrados, superpostos ou não, você vê em cada uma das figuras a seguir?







6) Na figura a seguir, quantos caminhos diferentes você tem para ir de A até B, caminhando só para baixo e sobre os segmentos?



Uma "conta" e várias respostas (para resolver em casa).

1) Para participar de um certo jogo, cada grupo de alunos precisa de 8 cartelas. A professora dispõe de 125 cartelas. Quantos grupos poderão jogar?

2) Tenho NCz$ 125,00[2] para comprar barras de chocolate que custam CNz$ 8,00 cada uma. Quantas barras posso comprar?

3) Um elevador tem capacidade para, no máximo, 8 pessoas. Qual o menor número de viagens necessárias para que sejam transportadas as 125 pessoas de uma fila?

4) 125 litros de água foram distribuídos igualmente em 8 garrafões. Qual a capacidade de cada garrafão se todos eles ficaram cheios?

5) Você vai organizar um jantar para 125 pessoas. Em cada uma das mesas cabem 8 pessoas, mas, com boa vontade, podem sentar-se

[2] A moeda na ocasião era NCZ$, o cruzado novo.

9. Dando preferência a mesas com 8 pessoas, mas admitindo-se também mesas com 9, quantas mesas com 9 pessoas serão precisas, se quiser usar o número mínimo de mesas nestas condições?

6) Tenho NCz$ 125,00 para dividir igualmente entre meus 8 sobrinhos. Quanto vai receber cada um, se eu distribuir o máximo possível? Quanto sobrará?

7) 125 é divisível por 8?

8) Você pode resolver os problemas acima efetuando uma divisão de 125 por 8, mas as respostas podem ser diferentes umas das outras. Enuncie outros problemas em que a operação a ser efetuada na resolução seja essa divisão mas a resposta seja cada uma das seguintes:

15	15,60	15,62	15,625	$15\frac{5}{8}$	Sim.	3	15 h 37 min 30 s	20	5

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NA REUNIÃO REALIZADA A 22/08/1989

Esses são exemplos de problemas, com soluções em números naturais, que podem ser resolvidos por tentativa e erro, por argumentos de divisibilidade ou algebricamente, dependendo do nível de desenvolvimento do estudante e do nível em que sejam propostos.

No que segue, mostraremos a resolução algébrica de cada um deles, com alguns argumentos sobre outros tratamentos.

A solução apresentada pelos grupos dos professores - alunos variou também, desde a resolução em si à preocupação com o modo como seus alunos poderiam pensar na questão.

ATIVIDADE 1: Com quantas reguinhas, azuis e/ou rosas, justapostas posso cobrir exatamente a régua branca?
(*Observação: esta atividade era acompanhada de 96 reguinhas azuis de comprimento igual a 3 cm, 48 reguinhas rosas de 5 cm e 6 réguas brancas de 20 cm, todas de mesma largura*.)

A ideia é que as crianças procurassem cobrir a régua grande com reguinhas menores e fossem anotando os resultados.

Resolvida a questão algebricamente, o professor pode chegar a todas as soluções possíveis, pois só servem as soluções de números naturais. Sendo x o número de reguinhas azuis (de 3 cm) e y o número de reguinhas rosas (de 5 cm), a equação a ser satisfeita por x e y é:

$$3x + 5y = 20.$$

Uma solução que pode ser logo visualizada é a de cobrir a régua branca com 4 reguinhas rosas, o que corresponde à solução $(x, y) = (0,4)$.

Além disso, vemos que não existe solução (x, y) com $y = 0$ pois $3x = 20$ não tem solução inteira. Como y não pode ser negativo, nem maior do que 4 e não é 0, então, examinando os pares (x, y) com $0 < y < 4$, isto é, os pares $(x,1)$, $(x, 2)$ e $(x, 3)$, vemos que, entre estes, somente $(5,1)$ é solução com números naturais de $3x + 5y = 20$.

A resposta é então: Posso cobrir a régua branca com 4 réguas de cor rosa ou com 5 azuis e 1 rosa.

Numa tabela:

x	0	5
y	4	1

ATIVIDADE 2: Um menino recebe NCz$ 130,00[3] para a sua despesa de merenda na escola. Os sanduíches oferecidos custam NCz$ 4,00 cada e o copo de suco NCz$ 3,00.
Quantos sanduíches e copos de suco ele poderá comprar, gastando todo o seu dinheiro e sem pedir nenhum emprestado?

Sendo x o número de sanduíches e y o número de copos de suco, a equação a ser resolvida é:

$$4x + 3y = 130,$$

Neste caso, o 2º membro é maior, o que complica a utilização do ensaio e erro. Também o número de soluções possíveis é maior do que na atividade 1.

Podemos ver que não existe solução com $x = 0$, nem com $y = 0$.

Vamos construir uma tabela que vai nos permitir achar todas as soluções (naturais) dessa equação; construímos uma tabela com colunas

$$x \quad , \quad (130 - 4x) \quad \text{e} \quad y = (130 - 4x) / 3,$$

na qual podemos ver todas as soluções do problema.

As soluções do problema dado, por serem números naturais, são os pares (x, y) em vermelho na tabela a seguir:

---

[3] O cruzado novo era a moeda vigente no Brasil àquela época.

x	(130 - 4x)	y = (130 - 4x) / 3
1	126	42
2	122	40,667
3	118	39,333
4	114	38
5	110	36,667
6	106	35,333
7	102	34
8	98	32,667
9	94	31,333
10	90	30
11	86	28,667
12	82	27,333
13	78	26
14	74	24,667
15	70	23,333
16	66	22
17	62	20,667
18	58	19,333
19	54	18
20	50	16,667
21	46	15,333
22	42	14
23	38	12,667
24	34	11,333

25	30	10
26	26	8,667
27	22	7,333
28	18	6
29	14	4,6667
30	10	3,3333
31	6	2
32	2	0,6667
33	-2	-0,6667

Uma outra maneira de trabalhar essa equação seria usando um argumento de divisibilidade para montar a tabela das soluções naturais. Por exemplo, percebendo que 130 não é divisível por 3 (preço do copo de suco), não dá para comprar só suco, Mas 13 - 4 = 126 é divisível por 3, então é possível comprar 1 sanduíche e usar o resto do dinheiro em suco. Isso dá a primeira solução em vermelho da tabela acima: x = 1 e y = 42 porque

$$126 \div 3 = 42$$

Para encontrar as outras soluções, como 4 x 3 = 12, é possível trocar 3 sanduíches por 4 copos de suco, Então, enquanto os valores de x sobem de 3 em 3, os de y descem de 4 em 4, o que dá as 11 soluções naturais, em vermelho na tabela.

ATIVIDADE 3: Uma esquadrilha de 22 aviões apresenta-se em filas de 3, 4 e 5 aviões. Sabendo-se que todos os aviões devem participar da apresentação, quantas filas de 3 e/ou de 4 e/ou de 5 eles podem formar?

Essa atividade foi bastante atraente para os estudantes mais novos porque eles puderam montar as esquadrilhas com aviõezinhos. Algebricamente, o problema envolve 3 incógnitas, mas os números baixos compensam o acréscimo de uma variável.

A equação a ser estudada é:

$$3x + 4y + 5z = 22,$$

em que x é o número de filas de 3, y o número de filas de 4 e z o número de filas de 5 aviões. Um modo de encontrar as soluções naturais será fixar valores para uma das variáveis e estudar a respectiva equação nas outras duas. Como não dá para fazer muitas filas maiores, vamos considerar valores fixados de z. Vemos que z pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3.

- Quando $z = 3$, $5z = 5 \times 3 = 15$ e a equação em x e y fica

$$3x + 4y = 7$$

e a única solução de naturais é o par $x = 1$ e $y = 1$.

Nesse caso, pode-se formar uma esquadrilha com 1 fila de 3 aviões, 1 fila de 4 aviões e 3 filas de 5 aviões.

- Quando $z = 2$, $5z = 5 \times 2 = 10$ e a equação fica

$$3x + 4y = 12$$

que tem, como soluções naturais os pares $x = 4$, $y = 0$ e $x = 0$ e $y = 3$.

Nesse caso, podem ser formadas duas esquadrilhas: uma com 4 filas de 3 aviões e 2 filas com 5 aviões; a outra com 3 filas de 4 aviões e duas filas com 5 aviões.

- Quando $z = 1$, $5z = 5 \times 1 = 5$ e a equação fica

$$3x + 4y = 17$$

que tem a única solução natural dada pelo par $x = 3$, $y = 2$.

Nesse caso, pode-se formar somente uma esquadrilha com 3 filas de 3 aviões, 2 filas de 4 aviões e 1 fila de 5 aviões.

- Quando $z = 0$, $5z = 5 \times 0 = 0$ e a equação fica

$$3x + 4y = 22$$

que tem, como soluções naturais os pares $x = 2$, $y = 4$ e $x = 6$, $y = 1$.

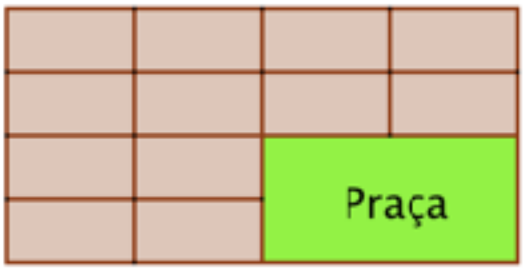
Caso, em que se pode formar uma esquadrilha com 2 filas de 3 aviões e 4 filas de 4 aviões; ou 6 filas de 3 aviões e uma de 4 aviões.

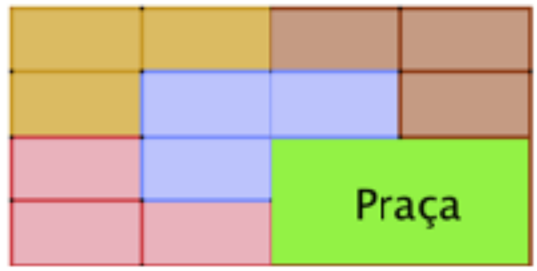
Vale observar que foi por acaso que a cada valor de z tenha correspondido alguma solução natural: solução única para $z = 1$ e $z = 3$ e 2 soluções para os casos em que $z = 0$ ou $z = 2$. Se tivéssemos começado pelos valores de y, haveria duas soluções correspondentes ao valor $y = 1$ e soluções únicas para os valores 0, 2, 3 e 4 de y. Fixando de início os valores de x, não encontraríamos solução natural para $x = 5$ ou $x = 7$ e encontraríamos solução natural única para os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 6 de x.

DESAFIO: para pensar em casa.

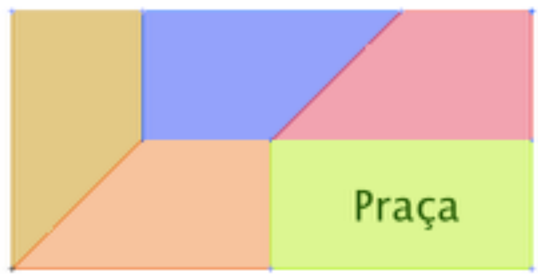
Um senhor deixou de herança para seus 4 filhos um terreno retangular que deveria ser dividido em 4 partes de mesma forma e mesma área.
Logo após sua morte, a prefeitura desapropriou a quarta parte do terreno para construir uma praça, conforme mostra a figura.
Ajude os filhos a dividir o terreno obedecendo ao desejo do pai.

Esse é um desafio do folclore matemático e uma solução consiste em dividir cada um dos 3 retângulos que sobraram em 4 retângulos de mesmas dimensões e tentar agrupá-los de maneira a manter a forma. A resposta fica sendo a seguinte:

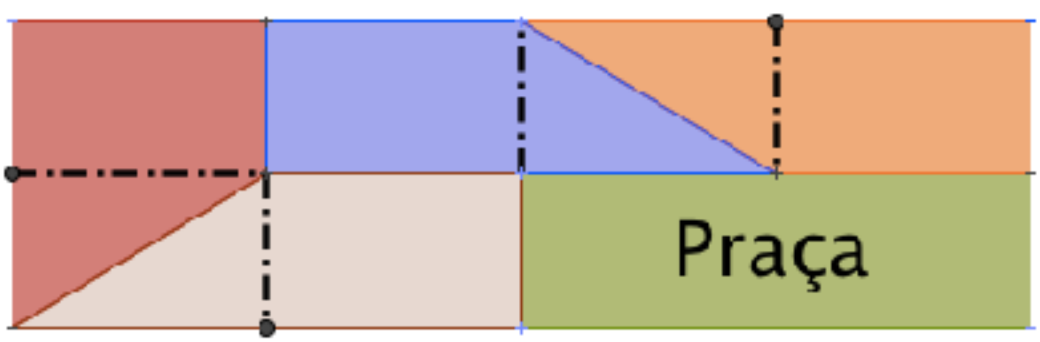




No caso particular, em que uma das dimensões do terreno seja o dobro da outra, há também a solução em que o terreno é dividido em 4 trapézios:



Essa solução vale quando cada trapézio é formado por um quadrado justaposto à metade de outro quadrado de mesmo lado. Daí a relação entre as dimensões do terreno. Noutros casos, um dos trapézios tem a mesma área, mas com bases e altura diferentes das dos demais.



RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NA REUNIÃO REALIZADA A 29/08/1989

ATIVIDADE 4:
a) Com 24 palitos, quantos quadrados e/ou hexágonos, com lados iguais a 1 palito, posso formar, usando todos os palitos e de modo que cada palito faça parte de uma só figura?
b) E com 35 palitos?

Queremos formar x quadrados e/ou y hexágonos de modo que cada palito faça parte de uma só figura.

a) Usando 24 palitos (e não menos), x e y devem satisfazer à equação

$$4x + 6y = 24.$$

Se montarmos só quadrados, podemos montar 6 e se montarmos só hexágonos, podemos montar 4, isto é, os pares (x, y) = (6, 0) e (x, y) = (0, 4) são soluções. Vemos também que o número de quadrados vai de 0 a 6, então, podemos organizar uma tabela para calcular as outras soluções, se houver.

x	y = (24 - 4x) / 6
0	4
1	3,33
2	2,67
3	2
4	1,33
5	0,67
6	0

As soluções são, portanto, $(x, y) = (0, 4)$, $(3, 2)$ e $(6, 0)$.

b) E com 35 palitos? Aqui, lidamos com a equação

$$4x + 6y = 35.$$

Podemos ver que esta equação não tem nenhum par (x, y) de números naturais como solução pois, quaisquer que sejam os números inteiros x e y, o número $4x + 6y$ será sempre um número par e 35 é ímpar.

ATIVIDADE 5: Num jogo de dominó, em cada partida vencida, o jogador ganha 4 pontos e, em cada derrota, perde 3.
Um jogador obteve 25 pontos. Quantas vitórias e derrotas aconteceram?

Seja x o número de partidas vencidas e y o número de partidas perdidas.
Em cada partida vencida o jogador ganha 4 pontos e em cada derrota perde 3 pontos.
Assim, o número de pontos obtidos é 4x e o número de pontos perdidos é 3y. Como o número total de pontos obtidos é 25, temos que

$$4x - 3y = 25.$$

Como 25 não é divisível por 4 nem por 3, um jogador não pode ter perdido nem ter ganho todos os jogos.

Usando uma planilha para examinar alguns dados:

x	y = (4x - 25) / 3
7	1
8	2,333333333
9	3,666666667
10	5
11	6,333333333
12	7,666666667
13	9

14	10,33333333
15	11,66666667
16	13
17	14,33333333
18	15,66666667
19	17
20	18,33333333
21	19,66666667
22	21

Vemos alguns pares de soluções, a saber:

(x, y) = (7, 1)   ,   (10, 5)   ,   (13, 9) , etc.

Podemos perceber que, se acrescentarmos 3 à primeira coordenada e 4 à segunda coordenada de uma solução da equação 4x - 3y = 25, obtemos outra solução dessa equação.

De uma maneira geral, se (x, y) é solução da equação 4x - 3y = 25 então (x+3, y+4) também é uma solução da mesma equação.

Vemos então que a equação em estudo tem uma infinidade de soluções.

Sob outro ângulo, o procedimento poderia ter sido por ensaio e erro, baseado, se possível, em argumentos de divisibilidade. Começando pela observação de que, não sendo 25 divisível nem por 4 nem por 3, não é possível que o jogador tenha só ganho ou só perdido e que o resto da divisão por 4 é 1, conclui-se que, se somarmos 3 a 25 obtemos 28 que é divisível por 4, com quociente igual a 7. Logo, uma possibilidade é que ele tenha ganho 7 partidas e perdido 1.

As demais soluções naturais decorrem da observação já vista acima que, como 3 x 4 = 12, os pontos de 3 partidas ganhas são anulados pelos pontos de 4 partidas vencidas.

As soluções naturais são, portanto, em número infinito e podem ser descritas como na tabela a seguir:

vitórias	7	10	13	16	…	7 + 3n	n = 0, 1, 2, 3, …
derrotas	1	5	9	13		1 + 4n	

É evidente que o problema prático não teria todas essas soluções porque o jogador morreria antes de esgotar o quadro…

Novamente, este é um exemplo em que o tratamento algébrico esclarece melhor a situação, embora a questão possa ser colocada antes que o aluno tenha estudado essas equações.

ATIVIDADE 6: Comprei 40 sanduíches e 50 copos de suco com NCz$ 130,00. Quais os preços do sanduíche e do copo de suco, sabendo que todos os sanduíches custam a mesma quantia, acima de NCz$ 1,00 e todos os copos de suco custam a mesma quantia, acima de NCz$ 0,80?

Esta atividade apresenta algumas dificuldades a mais em relação às anteriores desse mesmo tipo. As soluções podem ter 2 casas decimais e os números são maiores.

Seja x o preço do sanduíche e y o preço do copo de suco,

$$40x + 50y = 130$$

é uma equação que modela esse problema. De acordo com o enunciado, temos que

$$x > 1 \quad e \quad y > 0{,}8.$$

Podemos montar uma tabela com os pares (x, y) que são soluções da equação, com as restrições a x e a y consideradas. Aqui nos restringimos a uma casa decimal para x e a

$$x \geq 1{,}1 \quad e \quad y \geq 0{,}84.$$

x	y = (130 - 40x) / 50
1,1	1,72
1,2	1,64
1,3	1,56
1,4	1,48
1,5	1,4
1,6	1,32
1,7	1,24
1,8	1,16
1,9	1,08
2	1
2,1	0,92
2,2	0,84

Aqui também, pode ser usado um enfoque só com Aritmética. Uma solução simples seria: o sanduíche a 2 cruzados novos e o copo de suco a 1 cruzado novo. Há outras soluções? Outra vez, como 4 x 5 = 20, a cada 5 centavos acrescidos ao preço do sanduíche, será preciso abater 4 centavos do preço do copo de suco. Veja que o preço do sanduíche pode aumentar sem limitação, mas o do copo de suco não pode baixar a 80 centavos. Sendo assim, partindo daquela solução mais simples e fazendo a compensação indicada acima, as soluções possíveis serão

	Preços em cruzados novos												
Sanduí-che	1,05	1,10	1,15	...	1,40	1,45	...	1,95	2,00	2,05	2,10	2,15	2,20
Copo de suco	1,76	1,72	1,68	...	1,48	1,44	...	1,04	1,00	0,96	0,92	0,88	0,84

Observa-se que são 24 as soluções possíveis, dentro das condições estabelecidas na questão, calculadas a partir da primeira encontrada (que foi a única constituída de números inteiros). Na tabela acima, foram destacadas algumas soluções, entre elas a solução de partida, a dos preços extremos e aquelas em que o preço do sanduíche passa a ser mais alto que o preço do suco.

Quanto ao tamanho dos números, há a possibilidade de fazer uma simplificação e considerar o que seria comprar 4 sanduíches e 5 copos de suco com 13 cruzados novos. De fato, a equação

$$40x + 50y = 130$$

pode ser simplificada para

$$4x + 5y = 13.$$

Outra diferença é que as soluções podem ter até 2 casas decimais. Seria uma equação diofantina, como nos casos vistos acima, se o preço fosse considerado em centavos.

ATIVIDADE 7: Duas datilógrafas devem bater uma revista de 72 páginas. Uma delas bate 2 páginas por hora e a outra bate 3 páginas por hora.
Como devem programar suas horas de trabalho para executarem a tarefa?

Novamente, trata-se de um problema que pode ser modelado por uma equação do primeiro grau em 2 incógnitas. Embora o enunciado não estabeleça que o número de horas deve ser inteiro, pela pergunta, pode-se considerar só estas soluções. Será o caso, por exemplo, em que o pagamento seja calculado por hora, sem abatimento se for utilizada só uma parte da hora.

Suponhamos que a datilografa A bata 2 páginas por hora, e a datilografa B bata 3 páginas por hora.

Seja x o número de horas trabalhadas por A e y o número de horas trabalhadas por B para que ambas completem o trabalho de 72 horas. Assim temos que

$$2x + 3y = 72.$$

Podemos ver que 72 é divisível por 2 e por 3, o que significa que o trabalho pode ser feito por uma só das secretárias, ou seja, os pares (x, y) = (0, 24) e (36, 0) são soluções dessa equação. E, como 2 x 3 = 6, 3 horas trabalhadas pela secretária A equivalem a 2 horas trabalhadas pela secretária B. Isso torna possível determinar todas as soluções (naturais) do problema.

x	y = (72 - 2x) / 3
0	24
3	22
6	20
9	18
12	16

15	14
18	12
21	10
24	8
27	6
30	4
33	2
36	0

Dada esta tabela, é possível fazer escolhas dependendo de outras condições. Por exemplo, o menor tempo em que o trabalho pode estar concluído será o de 15 horas. O preço cobrado por hora pelas secretárias também pode ser um fator levado em conta na escolha.

ATIVIDADE 8: Encontre todas as triplas (x, y, z) de números inteiros não negativos que satisfaçam à equação

$$x + y + z = 4.$$

Um modo de pensar nesta questão é considerar a equação

$$y + z = 4 - x,$$

para cada valor possível para x. Veja que os valores possíveis para x (tendo em vista que o problema só se interessa por números naturais) são 0, 1, 2, 3, 4.

Um quadro completo de soluções é, portanto:

Valor de x	Equação em y e z	y	z
0	y + z = 4	0	4
		1	3
		2	2
		3	1
		4	0
1	y + z = 3	0	3
		1	2
		2	1
		3	0
2	y + z = 2	0	2
		1	1
		2	0
3	y + z = 1	0	1
		1	0
4	y + z = 0	0	0

DESAFIOS: para pensar em casa.

1) Carlos, Eduardo e Guilherme tinham duas ocupações cada um, dentre as seguintes: motorista, contrabandista, músico, pintor, jardineiro e barbeiro.
Quaisquer dois deles não tinham uma ocupação em comum.
A partir dos fatos abaixo, encontre as duas ocupações de cada um deles.

a) O motorista ofendeu o músico ao rir de seus cabelos.
b) O músico e o jardineiro costumavam pescar com Carlos.
c) O pintor comprou uma garrafa de Gim do contrabandista.
d) O motorista namorava a irmã do pintor.
e) Eduardo devia NCz$ 50,00 ao jardineiro.
f) Guilherme ganhou de Eduardo e do pintor no jogo de cartas.

Por (f), Carlos é pintor e, por (c), não é contrabandista, por (b), nem músico, nem jardineiro e, por (d), nem motorista.

Então, Carlos é pintor e barbeiro.

Por (e), Eduardo não é jardineiro, então Guilherme é jardineiro.

Guilherme é jardineiro e, como, por (b), não é músico, então será motorista ou contrabandista.

Se Guilherme fosse contrabandista, Eduardo teria que ser motorista e músico, o que é contraditório com (a). Então, Guilherme é jardineiro e motorista e sobrou para Eduardo ser músico e contrabandista.

Logo, a resposta é única:

Carlos é barbeiro e pintor.

Eduardo é músico e contrabandista.

Guilherme é jardineiro e motorista.

2) Dois beduínos encontram, no deserto, um jarro de 800 cm^3 cheio d'água. Eles acham também dois jarros vazios de 300 cm^3 e 500 cm^3, respectivamente.
Como dividir igualmente a água entre os dois, usando somente as jarras para medida?

Há várias possibilidades. Indicamos uma delas a seguir:

Movimentos		**G = jarro de 800 cm^3**		**M = jarro de 500 cm^3**		**P = jarro de 300 cm^3**
Etapa inicial		800		0		0
De G para M e de M para P		300		200		300
De P para G e de M para P		600		0		200
De G para M		100		500		200
De M para P		100		400		300
De P para G		400		400		0

3) a) Cinco moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e pesa menos do que as outras. Usando uma balança de dois pratos, como descobrir a moeda falsa com duas pesagens?

a) Um procedimento será separar 1 moeda e colocar 2 num prato da balança e 2 noutro. Sejam A, B, C, D, E as moedas, vamos trocando os nomes das moedas conforme o resultado da balança.

<table>
<tr><th colspan="4">1ª pesagem</th><th></th><th colspan="4">2ª pesagem</th></tr>
<tr><th colspan="2">Pratos da balança</th><th>Resultado da balança</th><th>Moeda falsa</th><th></th><th colspan="2" rowspan="2">Pratos da balança</th><th rowspan="2">Resultado da balança</th><th rowspan="2">Moeda falsa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">B C</td><td rowspan="2">D E</td><td>Equilíbrio</td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>Prato mais leve: B C</td><td>A moeda falsa é B ou C.</td><td></td><td>B</td><td>C</td><td>Prato mais leve: B</td><td>B</td></tr>
</table>

Para que a resposta seja dada em, no máximo, 2 pesagens foi importante a informação de que a moeda falsa era a mais leve.

b) Oito moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e pesa mais do que as outras.
Usando uma balança como anteriormente, descobrir a moeda falsa com duas pesagens.

Sejam, agora, A_1, A_2, A_3, … , A_7 e A_8 as moedas e vamos usar o mesmo esquema para indicar as pesagens e seus resultados:

<table>
<tr><th colspan="3">1ª pesagem</th><th></th><th colspan="4">2ª pesagem</th></tr>
<tr><th colspan="2">Pratos da balança</th><th>Resultado da balança</th><th></th><th colspan="2">Pratos da balança</th><th>Resultado da balança</th><th>Moeda falsa</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A_3 A_4 A_5</td><td rowspan="3">A_6 A_7 A_8</td><td>Equilíbrio (a falsa está entre A_1 e A_2)</td><td></td><td>A_1</td><td>A_2</td><td>Prato mais pesado: A_1</td><td>A_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prato mais pesado: A_3 A_4 A_5 (a falsa é uma destas)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">A_4</td><td rowspan="2">A_5</td><td>Equilíbrio</td><td>A_3</td></tr>
<tr><td>Prato mais pesado: A_4</td><td>A_4</td></tr>
</table>

Novamente, a informação de que a moeda falsa era a mais pesada foi importante para que a resposta pudesse ser dada com somente 2 pesagens.

c) Dez moedas são aparentemente iguais, mas uma é falsa e com peso diferente das outras. Como antes, descobrir a moeda falsa com três pesagens.

Agora, além de maior número de moedas, não há informação sobre a diferença de peso ser para mais ou para menos. Daí, a necessidade de uma pesagem a mais.

Sejam A_1, A_2, A_3, … , A_9 e A_{10} as moedas e vamos usar o mesmo esquema para indicar as pesagens e seus resultados. Conforme o caso, a informação sobre o maior ou menor peso da falsa é confirmada num ponto diferente que será indicado no esboço.

<table>
<tr><th colspan="3">1ª pesagem</th></tr>
<tr><th colspan="2">Pratos da balança</th><th>Resultado da balança</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A_5 A_6 A_7</td><td rowspan="2">A_8 A_9 A_{10}</td><td>Equilíbrio (a falsa está entre A_1, A_2, A_3 e A_4).</td></tr>
<tr><td>Desequilíbrio (a bola falsa está entre A_5 , A_6 , A_7 , A_8, A_9 e A_{10})</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">2ª pesagem</th></tr>
<tr><th colspan="2">Pratos da balança</th><th>Resultado da balança</th><th>Moeda falsa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A_2 A_3 A_4</td><td rowspan="2">A_5 A_6 A_7</td><td>Equilíbrio</td><td>A_1</td></tr>
<tr><td>Desequilíbrio: (confirma-se o sinal da diferença de peso e a bola falsa está entre A_2 , A_3 e A_4).</td><td rowspan="3">Passar à 3ª pesagem.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_2 A_3 A_4</td><td rowspan="2">A_5 A_6 A_7</td><td>Equilíbrio (confirma-se o sinal da diferença de peso pela 1ª pesagem e a bola falsa está entre A_8, A_9 e A_{10})</td></tr>
<tr><td>Desequilíbrio (confirma-se o sinal da diferença de peso porque já as bolas A_2 , A_3 e A_4 são verdadeiras e a bola falsa está entre A_5 , A_6 e A_7).</td></tr>
</table>

Verifica-se que um caso já foi resolvido com 2 pesagens e, nos outros casos, já se sabe o sinal da diferença de peso da moeda falsa e que ela está entre 3 moedas. Ora, a 3ª pesagem, então se faz entre 2 dessas moedas. Se houver equilíbrio, a moeda falsa é a que não foi para a balança. Se houver desequilíbrio, como se sabe se a moeda falsa é a mais leve ou a mais pesada, fica determinada qual é a falsa. Veja que, no primeiro caso, uma 3ª pesagem completaria a informação sobre a diferença de peso entre a moeda falsa e as demais.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NA REUNIÃO REALIZADA A 05/09/1989.

1) Dispomos os números inteiros em um quadro, da forma indicada abaixo. Em qual coluna encontraremos o número 1984? E 10.000? E 3.333.333?

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	...	...

Observa-se que, da maneira como os números estão dispostos, a 1ª linha de cada coluna dá o resto da divisão por 7 de todos os demais números daquela coluna.

A posição que cada número ocupa no quadro fica bem definida (linha e coluna) por sua divisão, em que a linha é dada pelo quociente inteiro mais 1 (começa do quociente 0) e a coluna pelo resto mais 1 (começa pelo resto 0).

Veja que 18 = 2 x 7 + 4 ocupa a 5ª coluna da 3ª linha.

Sendo assim, para localizar um número natural nesta planilha, basta dividir o número por 7:

1984 = 283 x 7 + 3 ocupa a 4ª coluna da 8ª linha.

10.000 = 1.428 x 7 + 4 ocupa a 5ª coluna da 1.429ª linha.

3.333.333 = 476.190 x 7 + 3 ocupa a 4ª coluna da 476.191ª linha.

Observou-se que, na reunião, todos os participantes usaram o algoritmo da divisão na resolução deste problema.

2) Qual o número de diagonais de um polígono de 5 lados? E de 7 lados? E de 10 lados?

Para responder a esta questão é preciso fazer algumas observações e espera-se que, ao analisar os primeiros casos, o estudante chegue a essas conclusões.

1) Traçados todos os segmentos que unem os vértices de um polígono, de cada vértice saem tantos segmentos quantos forem os vértices desses polígonos menos 1 que é o próprio. Se o polígono é um triângulo, tem 3 vértices, então saem 2 segmentos de cada vértice. Se o polígono é um quadrilátero, tem 4 vértices, então saem 3 segmentos de cada vértice. Se o polígono tem n vértices (ou n lados, é o mesmo), então saem (n - 1) segmentos de cada vértice.

2) Desses (n-1) segmentos, 2 são lados, os demais são diagonais. Logo o número de diagonais que saem de cada vértice de um polígono de n vértices é (n - 3).

3) Se contarmos as diagonais que saem de todos os vértices, é preciso levar em conta que, como cada diagonal une 2 vértices, cada uma delas é contada 2 vezes.

Levando isso em conta, é possível estabelecer que o número de diagonais de um polígono de n lados é igual a

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

O preenchimento da tabela é, então, uma questão de aplicação de fórmula, mas a ideia de propor ao participante os casos mais simples é a de que ele chegue à fórmula.

número de lados	3	4	5	7	10
número de diagonais	0	2	5	14	35

Observa-se que, de acordo com o nível de desenvolvimento e escolaridade do estudante, ele pode não chegar à fórmula, mas poderá explicar com palavras como calcular o caso de 7 lados ou 10 lados sem que seja preciso desenhar e contar.

Na reunião foi discutida a vantagem do uso da linguagem algébrica nas generalizações. A respeito do perigo da generalização a partir do estudo de casos, sem uma verificação, foi citado o artigo da RPM 9: Vale para1, para 2, para 3, ..., Vale sempre?

3) Considere somente os vértices de um polígono de 5 lados:

Ligue cada ponto a todos os outros, utilizando segmentos de reta. De quantos segmentos você necessita?

E se você tivesse iniciado com os vértices de um polígono de 6 lados? E de 7 lados? E de 24 lados?

Novamente, esta proposta pretende que o cursista consiga fazer uma generalização completa, chegando à fórmula, ou só com palavras, de acordo com seu nível de desenvolvimento.

Ele precisa perceber que, ao unir um dos vértices do pentágono aos demais, ele desenhou 4 segmentos e, que se considerar todos os segmentos por todos os vértices, ele vai obter a metade de 5 x 4 porque, em 5 x 4, cada segmento é contado 2 vezes, uma em cada um dos vértices da sua extremidade. Deve chegar a 10 nesse caso. A 15 no caso de 6 lados, a 21 no caso de 7 (até aqui é razoável ainda fazer o desenho e contar, se preciso for). Já o caso de 24 lados, exige que se tenha feito a generalização pois o resultado é 276.

Na resolução do problema 2, já foi visto que o número de diagonais de um polígono de n lados

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

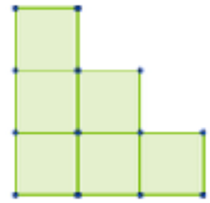
Se forem também considerados os lados desse polígono, o número será então

$$\frac{n(n-3)}{2} + n.$$

Algumas propostas apresentadas pelos participantes eram incorretas, incluindo

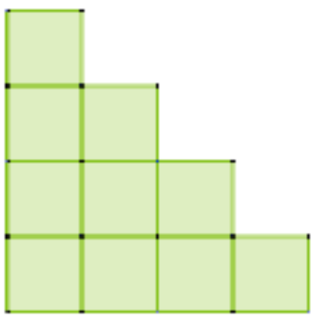
$$\frac{n(n-1)}{2}$$

4) Podemos formar uma escada de três degraus com 6 blocos:



Quantos blocos seriam necessários para formar uma escada, do tipo ao lado, com 4 degraus?

Você pode construir uma escada, como anteriormente, com 28 blocos? E com 34 blocos?



Espera-se que o participante perceba que, para fazer uma escada análoga a esta, com 1 degrau a mais, será preciso começar com 4 blocos abaixo dessa escada:

Ele vai perceber, então, que uma escada com 4 degraus utiliza 4 + 3 + 2 + 1 = 10 blocos.

Para responder à pergunta seguinte, ele pode ir somando números consecutivos a esta soma e ver se chega a 28 ou a 34. Se ele conhecer a soma de Gauss ou já souber calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética, ele pode usar a fórmula dessa soma.

Se ele for somando, vai obter algo parecido com a seguinte tabela:

degraus	blocos	total de blocos
1	1	1
2	2 + 1	3
3	3 + 2 + 1	6
4	4 + 3 + 2 + 1	10
5	5 + 4 + 3 + 2 + 1	15
6	6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	21

7	7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	28
8	8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	36

E conclui-se que, com 28 blocos, constrói-se uma escada de 7 degraus, mas, com 34, não se chegaria à escada de 8 degraus, desse mesmo tipo.

O estudante que conheça a expressão para a soma

$$n + (n\text{-}1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

poderia procurar n tal que

$$n\,(n+1) = 2 \times 28,$$

resolvendo a equação do 2o grau:

$$n^2 + n - 56 = 0,$$

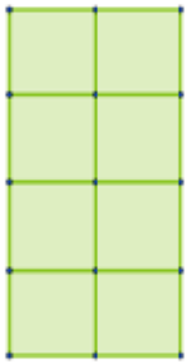
ou buscando os divisores de 56 e encontraria n = 7 (a equação tem também a solução negativa - 8, que não serve ao problema em questão.)

É muito provável que, mesmo um estudante que tenha usado a fórmula para responder à questão de 28 blocos, não repetisse o procedimento para 34 blocos. Partindo da escada de 7 degraus, com 28 blocos, ele acrescentaria 8 blocos e perceberia que usou 28 + 8 = 36 blocos, 2 a mais que 34. Com efeito, a equação correspondente a 8 degraus,

$$n^2 + n - 68 = 0,$$

não tem uma solução inteira positiva.

5) Quantos quadrados, superpostos ou não, você vê em cada uma das figuras a seguir?



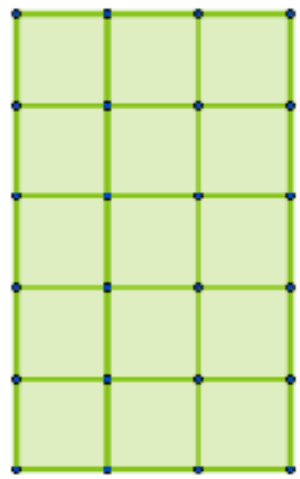
Vamos chamar de 1 a medida do lado de cada quadrado menor.

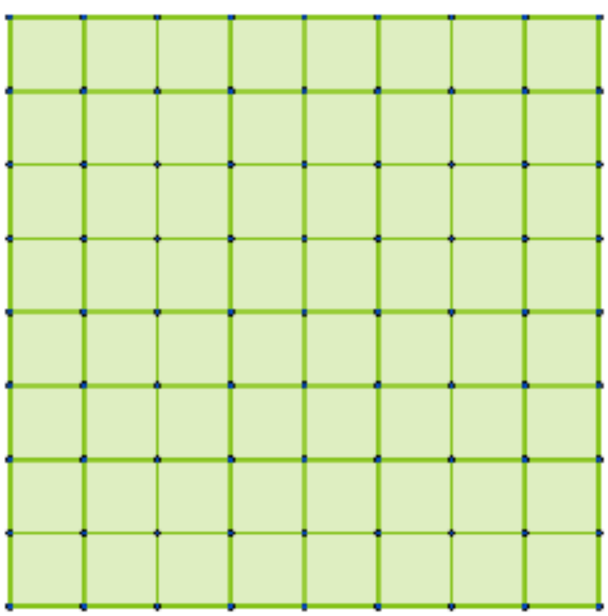
Neste primeiro quadro, há quadrados de lado 1 e de lado 2. São 2 x 4 = 8 quadrados de lado 1 mais 3 quadrados de lado 2.

São, portanto, ao todo, 8 + 3 = 11 quadrados.

No segundo quadro, há quadrados de lado 1, de lado 2 e de lado 3.

São 3 x 5 = 15 quadrados de lado 1. De lado 2, há 2 x 4 = 8 quadrados. Finalmente, de lado 3, há 2 quadrados. Isto dá, ao todo, 15 + 8 + 3 = 26 quadrados.



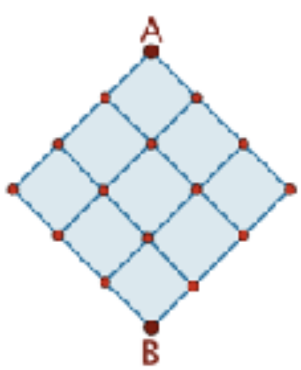


O terceiro quadro é um tabuleiro de xadrez, com 8 x 8 = 64 quadrados de lado 1. Nele, há, portanto, quadrados de lado 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Vamos organizar a contagem desses quadrados numa tabela.

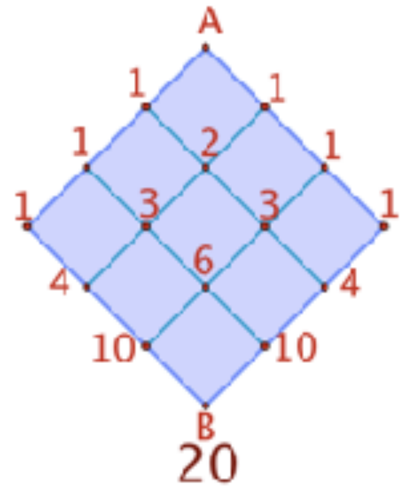
medida do lado dos quadrados	cálculo do número de quadrados	número de quadrados
1	8 x 8	64
2	7 x 7	49
3	6 x 6	38
4	5 x 5	25
5	4 x 4	16
6	3 x 3	9
7	2 x 2	4
8	1	1
	Total de quadrados:	**204**

Essa tabela sugere a pergunta: No caso de tabuleiros quadrados, como o de xadrez, o número de quadrados é uma soma de quadrados de números inteiros? Um artigo interessante sobre essa generalização, de autoria de Beth Belfort, é encontrado na RPM. E mais, prova-se, geometricamente ou algebricamente, que a soma dos quadrados dos números de 1 a n é uma função cúbica de n.

6) Na figura a seguir, quantos caminhos diferentes você tem para ir de A até B, caminhando só para baixo e sobre os segmentos?



Um modo de contar o número de caminhos é atribuir a cada vértice da figura um índice igual ao número de caminhos que chegam a ele, a partir de A. E um modo simples de obter esse número é começar pelos vértices do primeiro nível abaixo de A. Como os caminhos admissíveis são aqueles que descem sempre sobre segmentos, o índice de 1 vértice será a soma dos índices dos vértices do nível imediatamente acima dele, ligados a ele por algum segmento. Na figura a seguir, estão contados esses índices, calculados de A para B, de nível em nível.



Daí, o número de caminhos de A a B, nas condições do problema, é 20.

Resolução dos Problemas propostos para resolução em casa:

Uma "conta" e várias respostas.

A resolução dos problemas abaixo podem começar por alguma divisão de 125 por 8. Vamos, então, apresentar esses cálculos e, a cada caso, faremos a escolha da resposta. As diferentes divisões correspondem ao quociente inteiro ou com casas decimais.

1	2	5	8
	8		1 5
	4	5	
	4	0	
		5	

1	2	5				8
	8					15,625
	4	5				
	4	0				
		5	0			
		4	8			
			2	0		
			1	6		
				4	0	
				4	0	
				0	0	

1) Para participar de um certo jogo, cada grupo de alunos precisa de 8 cartelas. A professora dispõe de 125 cartelas. Quantos grupos poderão jogar?

Como cada grupo precisa de 8 cartelas, poderão jogar 15 grupos, pois as 5 cartelas que sobram não são suficientes para formar um novo grupo.

2) Tenho NCz$ 125,00[4] para comprar barras de chocolate que custam CNz$ 8,00 cada uma. Quantas barras posso comprar?

Também serão 15 as barras de chocolate que poderei comprar.

3) Um elevador tem capacidade para, no máximo, 8 pessoas. Qual o menor número de viagens necessárias para que sejam transportadas as 125 pessoas de uma fila?

[4] A moeda na ocasião era NCZ$, o cruzado novo.

Se o elevador fizer as viagens lotado, depois de 15 viagens ainda sobrarão 5 pessoas que precisam subir. Logo, a resposta aqui é que serão necessárias, no mínimo, 16 viagens.

4) 125 litros de água foram distribuídos igualmente em 8 garrafões. Qual a capacidade de cada garrafão se todos eles ficaram cheios?

Como toda a água foi distribuída igualmente e encheu os garrafões, a capacidade de cada um deve ser de 15,625 L, isto é, de 15 litros e 625 mL.

5) Você vai organizar um jantar para 125 pessoas. Em cada uma das mesas cabem 8 pessoas, mas, com boa vontade, podem sentar-se 9. Dando preferência a mesas com 8 pessoas, mas admitindo-se também mesas com 9, quantas mesas com 9 pessoas serão precisas, se quiser usar o número mínimo de mesas nestas condições?

Na divisão de 125 por 8, você obtém um quociente inteiro igual a 15, com resto 5. Logo, poderá montar 15 mesas com 8 pessoas e acrescentar 1 pessoa das 5 restantes a uma mesa já com 8. Serão, portanto, 5 as mesas com 9 pessoas.

6) Tenho NCz$ 125,00 para dividir igualmente entre meus 8 sobrinhos. Quanto vai receber cada um, se eu distribuir o máximo possível? Quanto sobrará?

A divisão de 125 por 8 até a 2a casa decimal (correspondente a centavos, que é a menor moeda) tem quociente igual a 15,62 e resto 4. Esse resto é também em centavos. Logo, poderei dar NCz$ 15,62 a cada sobrinho e ficarei ainda com NCz$ 0,04 de troco.

7) 125 é divisível por 8?

Não, porque a divisão de 125 por 8 com quociente inteiro (divisão euclidiana), deixa resto diferente de 0.

8) Você pode resolver os problemas acima efetuando uma divisão de 125 por 8, mas as respostas podem ser diferentes umas das outras. Enuncie outros problemas em que a operação a ser efetuada na resolução seja essa divisão mas a resposta seja cada uma das seguintes:

15	**15,60**	**15,62**	**15,625**	$15\frac{5}{8}$	**Sim.**	**3**	**15 h 37 min 30 s**	**20**	**5**

Vamos dar um exemplo e algumas delas já apareceram nos problemas acima. Não temos registro das respostas dos professores-alunos daquela ocasião, pois os trabalhos de casa eram analisados e devolvidos aos autores.

Resposta	
15	Problemas 1 e 2 da lista. Outro exemplo: Qual o maior inteiro contido em $\frac{125}{8}$?
15,60	Seu Januário abriu seu cofre, onde havia 125 reais em algumas moedas de 1 real e muitas de 10 centavos. Ele quer distribuir essas moedas igualmente entre seus 8 netos. Quanto vai dar a cada neto se distribuir o máximo possível?
15,62	Problema 6 da lista. Outro exemplo: Seu Januário conseguiu trocar algumas moedas de 10 centavos em moedas de 1 centavo a fim de distribuir um pouco mais aos seus netos. Deu o máximo que podia. Quanto coube a cada neto?

15,625	Problema 4 da lista. Outro exemplo: Você dividiu 125 metros de fio elétrico em 8 partes de mesmo comprimento. Quanto mede, em metros, cada uma dessas partes? Outro exemplo: Qual a solução da equação $8x = 125$?
$15\frac{5}{8}$	Escreva a fração $\frac{125}{8}$ em forma de número misto.
Sim.	A receita de um doce pede 8 ovos para cada porção. Com 125 ovos, posso fazer mais que uma dúzia dessas porções?
3	Qual o menor número positivo que devo acrescentar a 125 para chegar a um múltiplo de 8?
15 h 37 min 30 s	O vídeo de um curso completo tem 125 horas e vai ser dividido em 8 módulos de mesma duração. Qual será a duração de cada módulo?
20	Se seu Januário só tivesse os 125 reais em moedas de 1 real e de 10 centavos. Ao dividir igualmente entre seus 8 netos essa quantia, dando o máximo possível a cada um, quantos centavos sobrariam?

5	Problema 5 da lista. Outro exemplo: 125 pessoas desejam fazer uma excursão. A agência promotora dispõe de veículos para 8 passageiros e só faz viagens com lotação completa. Quantas dessas pessoas não poderão participar dessa excursão?

Observações da equipe

Os objetivos das atividades propostas incluíam a abordagem dos problemas de forma sistemática e organizada; a designação dos dados do enunciado e obtenção de uma equação que os associe; tentar casos especiais; tentar obter relações internas entre dados; exemplificar problemas com mais de uma solução; se uma solução é descoberta (por tentativa), como é possível achar outras soluções; como saber se já encontrou todas as soluções; perceber que uma tabela é um recurso para lidar com diversos dados numéricos e não somente um recurso para apresentação de resultados.

Uma informação importante sobre a reação de alunos ao trabalhar com estas atividades foi trazida pelos professores-alunos que propuseram problemas desse tipo a suas turmas. As atividades foram propostas, para serem resolvidas em grupos, em níveis apropriados à série escolar, sem qualquer preparação prévia ou sugestão. A experiência foi realizada em turmas da 2ª série primária ao 2º ano do atual ensino médio. Houve uma diferença entre a atitude dos estudantes das séries iniciais e os das séries posteriores. Um fato ocorrido em geral foi que os estudantes da 2ª e 3ª séries primárias encontravam uma solução e, quando viam outros grupos chegando a outros resultados, começavam a procurar todos os resultados

possíveis. Os estudantes das demais séries consideravam a tarefa cumprida quando achavam uma solução. Alguns, quando percebiam outras respostas de outros grupos ficavam curiosos por saber qual seria a certa e qual a errada. Aguardavam, para isso, o veredicto do professor!
Esse fato, por ter sido constatado em todas as escolas, originou uma discussão no grupo: Como a escola cerceia a espontaneidade do estudante? Quando se estabelece o preconceito de que um problema de Matemática tem uma e uma só solução?

Outro fato destacado na proposta destes problemas, foi que a resolução algébrica dá segurança ao professor quanto à existência e ao número de soluções possíveis. É uma situação em que o ensino de Álgebra se mostra importante para o professor dos anos iniciais. Com efeito, ainda que as equações em foco não façam parte daquilo que ele ensina, é uma ferramenta poderosa da qual ele pode lançar mão.

Atividade 1 de 22/08/1989

Foi disponibilizado material concreto para que fosse possível visualizar o problema e trabalhar nos anos iniciais, sem recorrer ao conhecimento de Álgebra.

Os coeficientes da equação modeladora $3x + 5y = 20$ foram escolhidos de propósito para se ter mais de uma solução, duas, e para se ter uma solução somente com reguinhas azuis, correspondendo à solução (0, 4) com $x = 0$.
A fim de mostrar como a escolha dos números escolhidos pode interferir na resolução do problema, uma outra situação foi colocada com réguas brancas de 35 cm, reguinhas rosas de 5 cm e reguinhas azuis de 2 cm.

Desta feita, os coeficientes da equação modeladora $5x + 2y = 35$, onde x é o número de reguinhas rosas e y o número de reguinhas azuis, foram escolhidos de propósito para se ter mais soluções, embora não muitas, e, ainda, para se ter também uma solução somente com um tipo de reguinha, 7 reguinhas rosas, a solução (7, 0).

Esse problema tem quatro soluções:

$$(x, y) = (7, 0)\ ,\ (5, 5)\ ,\ (3, 10) \text{ e } (1, 15).$$

Havia 4 grupos de professores-alunos trabalhando nessa atividade.

- Um deles verificou que 17 azuis não era uma resposta; que 15 azuis e 1 rosa também não era. Pensaram na equivalência "5 azuis correspondem a 2 rosas". A partir daí, acharam 2 respostas corretas.
- Um outro grupo percebeu a equivalência mencionada acima e chegou a 3 respostas certas e 2 erradas.
- Os outros dois grupos acharam as 4 respostas corretas usando a equivalência mencionada acima.

As perguntas "Será que tenho todas as respostas? Como posso verificar?" não foram naturais. A equipe teve que intervir.

Nenhum dos grupos fez uso de uma tabela para organizar os dados ou chegar às respostas.

Atividade 2 de 22/08/1989

Os valores dos coeficientes da equação $4x + 3y = 130$, que modela o problema dessa atividade, foram escolhidos para se ter um número maior de soluções do que na atividade anterior, e não ter soluções com $x = 0$ ou com $y = 0$.

Aqui somente um dos grupos percebeu que $4x + 3y = 130$ se e somente $4(x + 3) + 3(y - 4) = 130$ e organizou uma tabela achando todas as soluções. Outros grupos perceberam a equivalência acima mas não se organizaram de tal forma a encontrar todas as soluções.

Atividade 3 de 22/08/1989

Essa atividade tinha por objetivo trabalhar com mais variáveis, no caso 3. A equação a estudar era $3x + 4y + 5z = 22$.

Somente um grupo encontrou todas as respostas; o trabalho com 3 variáveis foi considerado bem mais difícil.

Por se tratar de aviões, houve professores que levaram aviõezinhos para que seus alunos dos anos iniciais formassem as diversas esquadrilhas.

Atividade 8 de 29/08/1989

Esta atividade proposta com o enunciado:

"*Encontre todas as triplas* (x, y, z) *de números inteiros não negativos que satisfaçam à equação*

$$x + y + z = 4."$$

foi adaptada de uma questão do Vestibular de 1981 (CESGRANRIO), com o enunciado:

"*No plano de equação*

$$x + y + z = 4,$$

o número de pontos com coordenadas inteiras não negativas é: 24, 15, 12, 10 *ou* 8?"

Pelo que foi visto, a resposta, neste caso, seria 15.

Para professores do ensino médio, vale a pena também explorar essa Atividade com o enunciado:

De quantas maneiras o número 4 *pode ser decomposto em* 3 *parcelas de números naturais*?

Ora, esse número pode ser calculado também como uma aplicação da Análise Combinatória. Basta que se olhe para o caso de

"3 parcelas não negativas com soma 4"

como sendo uma

"separação de 4 unidades em 3 blocos, vazios, ou não"

Essa separação pode ser escrita numa fila formada por 4 unidades separadas nos 3 blocos. Cada separação entre os blocos pode ser feita por um sinal &.

São precisos 2 sinais & para separar uma fila em 3 blocos.

Por exemplo,

solução	configuração
(x, y ,z) = (1, 2, 1)	I & I I & I
(x, y, z) = (0, 4, 0)	& I I I I &

Ora, dados 2 sinais &, 4 unidades e considerando como configurações diferentes duas configurações em que haja troca de lugar entre 2 sinais distintos, o número de configurações possíveis é o número de permutações de 4 + 2 = 6 elementos, em que 4 são iguais entre si e 2 são iguais entre si. Esse número pode ser calculado como:

$$\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}=15$$

A vantagem de olhar desta forma esse problema é que torna possível o cálculo do número de soluções naturais (inteiras não negativas) de uma equação do tipo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = N$$

quaisquer que sejam os números inteiros e positivos k e N.

Por argumentos análogos aos que estão expostos acima, esse número é igual a

$$\frac{(N+k-1)!}{N!\ (k-1)!}.$$

Problema 3 de 05/09/1989,

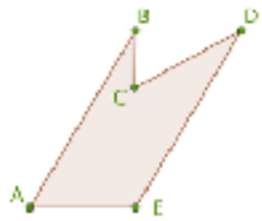
3) Considere somente os vértices de um polígono de 5 lados:

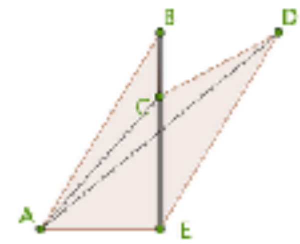
Ligue cada ponto a todos os outros, utilizando segmentos de reta. De quantos segmentos você necessita?

E se você tivesse iniciado com os vértices de um polígono de 6 lados? E de 7 lados? E de 24 lados?

Nesse problema, convém que o professor esteja alerta para o caso dos polígonos não convexos, em que esse problema pode apresentar situações esdrúxulas, como, por exemplo

3 vértices alinhados. Nesse caso, alguns segmentos estão contidos em outros. Lembrando que uma definição de polígono convexo é aquele em que um segmento que una dois pontos quaisquer do polígono (fronteira e interior), esteja todo contido no polígono. O não convexo será, portanto, aquele que apresente um segmento unindo 2 pontos do polígono (fronteira e interior) que "saia" do polígono, isto é, tenha pontos no exterior do polígono.

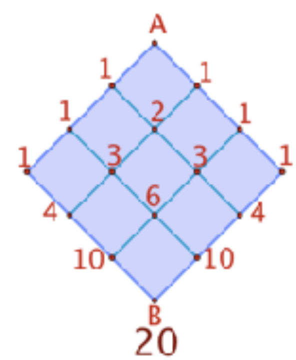




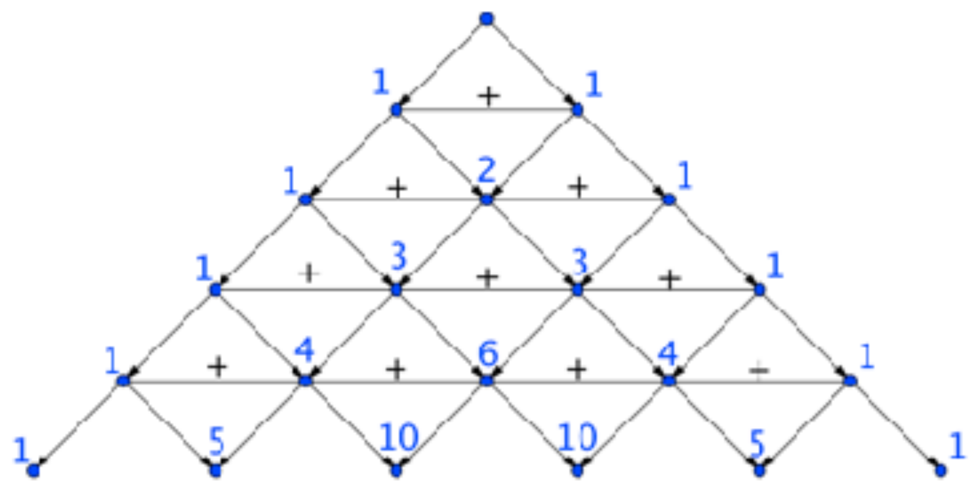
Problema 6 de 05/09/1989

Para os professores do Ensino Médio, vale a pena estudar uma generalização desse problema.

6) Na figura a seguir, quantos caminhos diferentes você tem para ir de A até B, caminhando só para baixo e sobre os segmentos?



O fato de que o índice de 1 vértice é a soma dos índices dos vértices do nível imediatamente acima dele, faz lembrar uma outra configuração em que os números são calculados dessa forma. Trata-se do [Triângulo de Pascal] e esses são os índices dos vértices que contam os caminhos numa configuração análoga à metade superior do esboço desse problema. Vejamos um exemplo, com 6 níveis:



Os números que aparecem em cada nível são exatamente os termos do Triângulo de Pascal e respondem também à questão da contagem dos caminhos, sempre descendo sobre segmentos, do nível mais alto até cada um dos outros pontos. Essa configuração pode ser prolongada indefinidamente para níveis inferiores, sempre aumentando um vértice a cada nível, assim como o Triângulo de Pascal.

FIM.