

## 6 Exemplos Numéricos no Domínio da Frequência

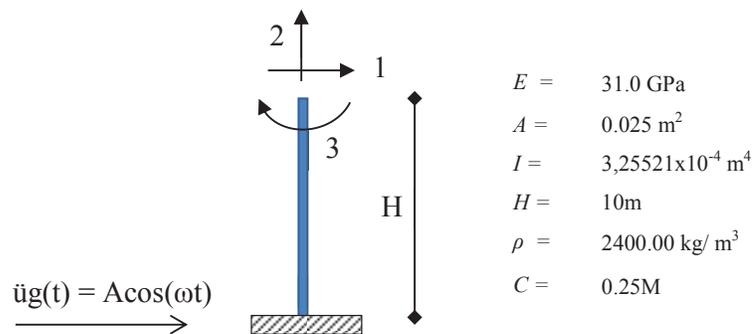
Neste Capítulo são apresentados exemplos numéricos para validar a formulação apresentada no Capítulo 5, assim como estudar a resposta em frequência de alguns sistemas estruturais. Nos exemplos apresentados é considerada apenas a não linearidade geométrica.

### 6.1. Resposta em Frequência: Formulação linear

Nesta seção é analisada a resposta linear em frequência de estruturas reticuladas obtidas com a formulação apresentada no Capítulo 5. Para validar a implementação computacional, a resposta obtida através do método do balanço harmônico é comparada com o resultado obtido através de análises no tempo e soluções analíticas. Para tal, duas estruturas são estudadas, a primeira, um pilar engastado na base e livre no topo, e a segunda, uma torre engasta na base e com uma massa concentrada no topo.

#### 6.1.1. Pilar engastado e livre

Como primeiro exemplo numérico desta seção, é calculada a resposta em frequência de um pilar engastado na base modelado através de um único elemento de barra. O pilar está submetido à ação de uma excitação de base harmônica horizontal, tal como mostrado na Figura 6.1. Esta estrutura é adotada do trabalho apresentado por Paullo *et al.* (2013). As propriedades geométricas e mecânicas também podem ser encontradas na mesma Figura 6.1.



**Figura 6.1 – Pilar engastado e livre, submetido a deslocamento harmônico de base.**

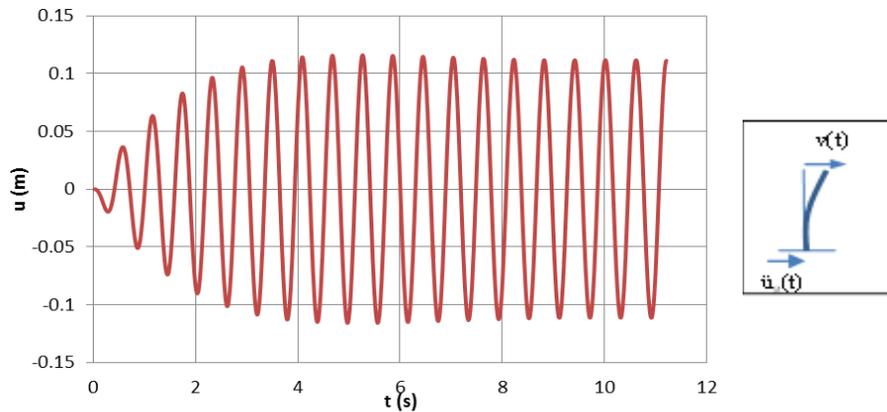
Como se considera apenas com um elemento de barra, a estrutura apresenta apenas a três graus de liberdade. As suas propriedades dinâmicas são apresentadas na Tabela 6.1, determinadas analiticamente a partir do problema de autovalor.

**Tabela 6-1. Frequências e períodos de vibração de pilar engastado e livre**

Número do Modo	Frequência (rad/s)	Período (s)
1	9.163	0.6857
2	90.280	0.0695
3	622.495	0.0101

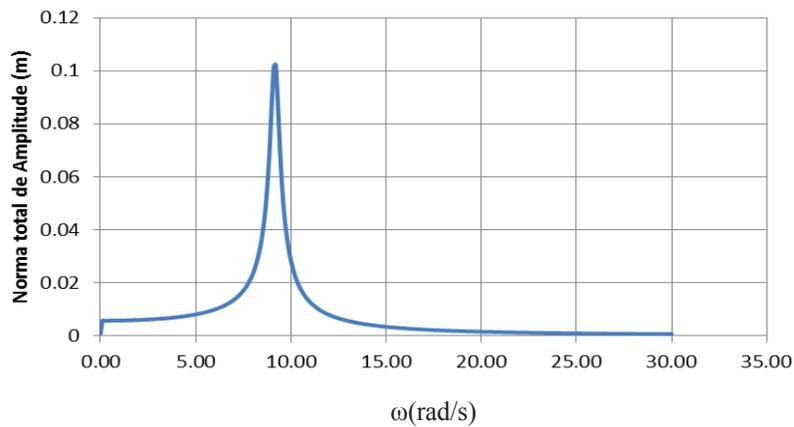
A Figura 6.2 ilustra a resposta no tempo relativa ao deslocamento horizontal no topo do elemento, considerando a estrutura sujeita a uma aceleração de base harmônica com frequência de excitação igual à primeira frequência natural. Pode-se observar que o deslocamento máximo tende para um valor em torno a 0.103 m.

Este valor deve corresponder ao deslocamento máximo da curva de ressonância que relaciona deslocamento máximo vs. frequência.



**Figura 6.2 – Deslocamento horizontal vs. tempo,  $A_g = 0.4g$ ,  $\omega = 9.16 \text{ rad/s}$ .**

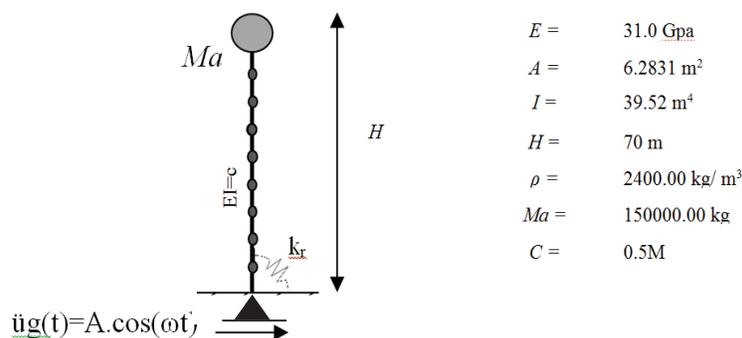
Através do MBH obtém-se a relação entre a norma deslocamento horizontal máximo no extremo livre com a frequência da excitação, como mostra a Figura 6.3. A amplitude máxima localiza-se em torno  $\omega = 9.16 \text{ rad/s}$ , coincidente, como esperado, com a primeira frequência natural do sistema, sendo a norma da amplitude para este valor de frequência igual a 0.104 m. Este valor coincide com o deslocamento máximo obtido pela análise no tempo, validando assim os resultados obtidos através do balanço harmônico.



**Figura 6.3 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo do elemento vs. frequência,  $A_g = 0.4g$ .**

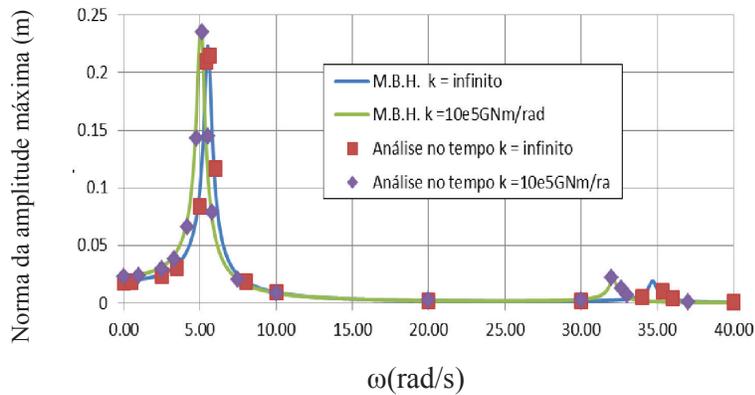
### 6.1.2. Torre com massa concentrada

Como segundo exemplo empregando a formulação linear em frequência, é analisada uma torre com massa concentrada no topo e com flexibilidade linear à rotação na base, submetida a um deslocamento de base horizontal. Esta estrutura foi analisada no trabalho de Paullo *et al.* (2013). A estrutura da torre, mostrada de forma esquemática na Figura 6.4, é modelada com 20 elementos de barra, todos de igual comprimento.



**Figura 6.4 – Torre com massa concentrada no topo e apoio flexível à rotação. Ref. (Paullo *et al.*, 2010).**

Na Figura 6.5 são mostradas as curvas de ressonância relativas ao deslocamento horizontal do topo da torre. Nesta figura são comparados os resultados do deslocamento horizontal máximo na fase permanente, obtidos a partir de análises no tempo, e os resultados obtidos através da formulação linear usando o MBH. Na Figura 6.5 verifica-se que as respostas obtidas através da análise no tempo e do MBH coincidem para os dois casos de flexibilidade rotacional de base aqui considerados, evidenciando que o algoritmo tem capacidade de representar adequadamente a resposta em frequência. Ainda na Figura 6.5, pode ser visto que o MBH permite determinar com maior precisão o valor da amplitude máxima na frequência de ressonância. Outro aspecto que é possível ressaltar é a economia de esforço computacional conseguida com o cálculo direto da curva de ressonância, já que, para uma análise no tempo, é necessária a integração do sistema até atingir a fase permanente para a obtenção de um único ponto da curva de resposta em frequência.



**Figura 6.5 – Norma da amplitude do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência de excitação.**

## 6.2.

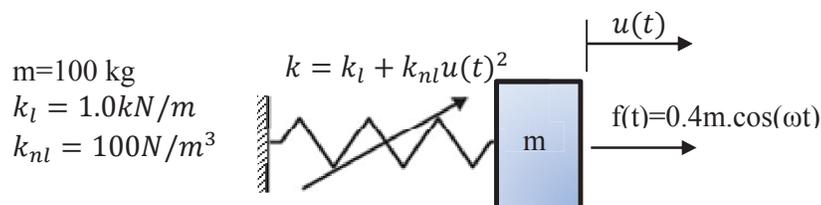
### Resposta em Frequência: Formulação Não Linear

Nesta seção é analisada a resposta do sistema em frequência considerando não linearidade geométrica nas estruturas. É apresentado um primeiro exemplo de um grau de liberdade para a validação da formulação do MBH-Galerkin para o caso não linear. Para isto, é comparada a resposta obtida através do MBH com os resultados obtidos no domínio do tempo. A seguir, são apresentados exemplos para o estudo da influência da não linearidade geométrica em algumas estruturas.

#### 6.2.1.

##### Sistema de um grau de liberdade com rigidez não linear quadrática

É apresentado como um primeiro exemplo ilustrativo, um sistema discreto não amortecido de um único grau de liberdade, mostrado na Figura 6.6, submetido a uma excitação harmônica, o qual tem uma mola com rigidez não linear.



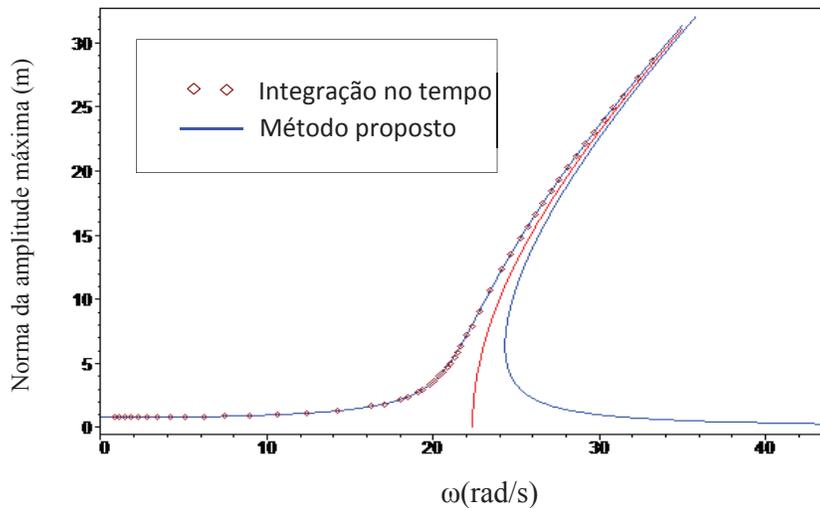
**Figura 6.6 – Sistema de 1 grau de liberdade com rigidez não linear não amortecido.**

Por se tratar de um sistema não amortecido e apenas com não linearidade cúbica, o deslocamento pode ser aproximado apenas por um único harmônico, a saber:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

onde  $A_1$  é a amplitude de vibração e  $\omega$  é a frequência de vibração. Esta simplificação permite estabelecer uma relação direta entre a amplitude de vibração e o deslocamento máximo na fase permanente.

Na Figura 6.7 é mostrada a resposta em frequência do deslocamento na fase permanente calculada através do algoritmo do MBH – Galerkin e a resposta obtida através de análises no tempo. Para a análise no tempo, são consideradas condições iniciais homogêneas. Na Figura 6.7 pode ser observado que há semelhança entre as duas respostas, validando desta forma a implementação do algoritmo do MBH – Galerkin. Pode-se também observar o efeito da não linearidade cúbica positiva, caracterizado pelo ganho de rigidez. Mostra-se também em vermelho a relação não linear frequência-amplitude. Por fim, nota-se que a solução obtida no tempo consegue representar com precisão o ramo ressonante estável. O outro ramo pode ser obtido decrescendo-se a frequência da excitação. Observa-se a existência de um ponto limite (tangente vertical) onde ocorre uma bifurcação sela-nó, que separa o ramo não ressonante estável do ramo ressonante instável. Verifica-se que o algoritmo de continuação consegue ultrapassar o ponto limite e obter a três respostas coexistentes para frequências de excitação superiores à associada ao ponto limite ( $\omega \cong 25$  rad/s). Caso fosse considerado amortecimento, outro ponto limite surgiria limitando a amplitude máxima, como ocorre no caso linear.



**Figura 6.7 – Sistema de 1 grau de liberdade não amortecido com rigidez não linear.**

### 6.2.2.

#### Influência da intensidade da excitação e não linearidade cúbica

Nesta seção é estudada a resposta não linear em frequência do sistema de pilar engastado-livre mostrado na Figura 6.1, considerando agora a formulação não linear geométrica. É estudada a influência do aumento da intensidade da excitação na resposta em frequência do deslocamento horizontal.

Na Figura 6.8 pode ser observado que o efeito da não linearidade geométrica é traduzido em um aumento da rigidez, e, conseqüentemente, no aumento do valor da frequência de ressonância com a amplitude, apresentando um comportamento do tipo “*hardening*” típico de barras esbeltas submetidas predominantemente a esforços de flexão, onde predomina a não linearidade cúbica, que é positiva neste caso. Cabe ressaltar que a não linearidade geométrica deste tipo de estrutura é relativamente baixa, só aparecendo seus efeitos para grandes magnitudes de carregamento. Este ganho de rigidez aumenta com a magnitude da aceleração de base, caracterizando o efeito não linear. Em virtude do amortecimento, verifica-se a presença de dois pontos limites para  $A_g = 5g$  e  $10g$ , e, portanto uma região onde coexistem oscilações de pequena e grande amplitude. A solução permanente é, portanto, função das condições iniciais. A existência de soluções coexistentes pode levar a saltos dinâmicos em um regime transiente, levando a picos de tensões e deformações. Para valores menores da amplitude de excitação a resposta é

praticamente linear. Verifica-se que o algoritmo é capaz de obter a resposta não linear em frequência, ultrapassando os dois pontos limites.

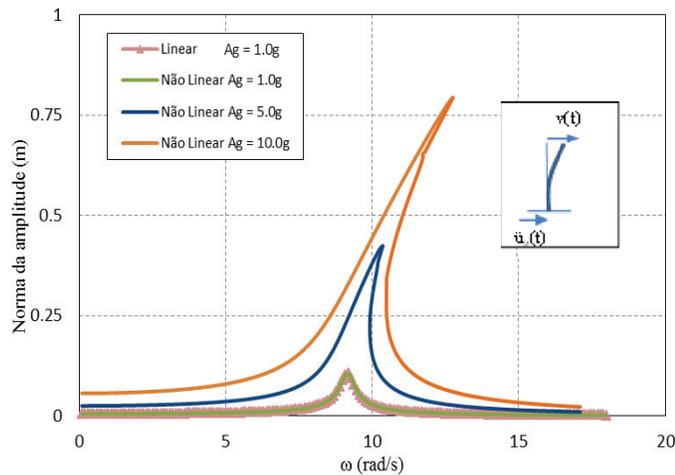


Figura 6.8 – Norma do deslocamento horizontal máximo no topo vs. frequência.

### 6.2.3.

#### Arco bi-engastado: Efeito da não linearidade quadrática

Nesta seção é analisado um arco circular abatido bi-engastado. A estrutura está submetida a uma excitação harmônica vertical com uma magnitude de aceleração igual à aceleração da gravidade  $g$ . A estrutura é modelada com 20 elementos de barra de igual comprimento. As propriedades de seção e material são apresentadas na Figura 6.9.

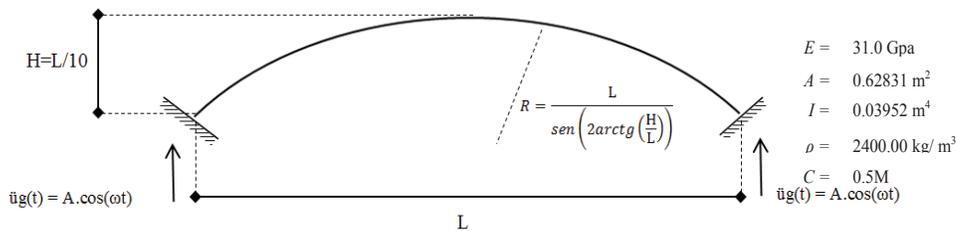
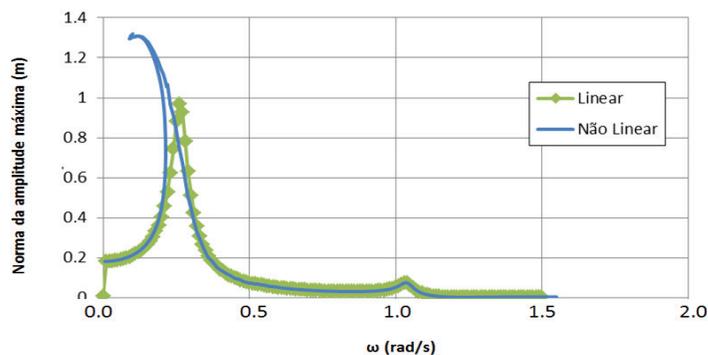


Figura 6.9 – Arco abatido bi-engastado submetido a movimento harmônico vertical.

Na Figura 6.10, pode ser visto que o efeito da não linearidade geométrica se traduz em uma redução do valor da frequência de ressonância, e um aumento do

valor da amplitude de vibração. Esta resposta indica uma perda de rigidez (comportamento *softening*), característica desta classe de estruturas quando solicitada verticalmente. Isto se deve predominantemente aos esforços axiais de compressão que geram um aumento da não linearidade quadrática que, para este caso, é negativa. Nota-se que há uma diferença apreciável entre a solução linear e não linear na primeira região de ressonância, levando a não linearidade a um aumento das amplitudes de vibração.



**Figura 6.10 – Norma da amplitude vertical no meio do vão vs. frequência.  $A=1.0g$ ,  $L=100m$ .**

### 6.3.

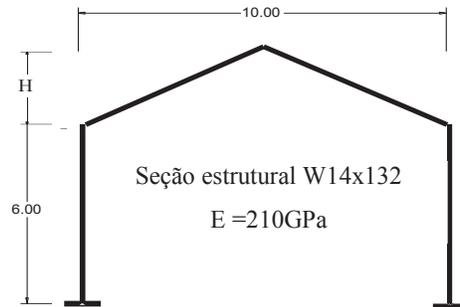
#### Efeito de não linearidade geométrica em estruturas esbeltas

Nesta seção é estudada a influência da não linearidade geométrica na resposta em frequência em estruturas esbeltas quando submetidas a solicitações de base.

##### 6.3.1.

#### Estrutura de galpão com cobertura de duas águas

Nesta seção é estudada uma estrutura de galpão com cobertura de duas águas, modelado com vinte elementos de viga-coluna, sendo cinco elementos de igual comprimento para cada pilar, e 10 elementos de mesmo tamanho para a cobertura. Os apoios são modelados como engastes e é levada em conta a não linearidade geométrica da estrutura. A geometria e propriedades da seção e do material são mostradas na Figura 6.11.



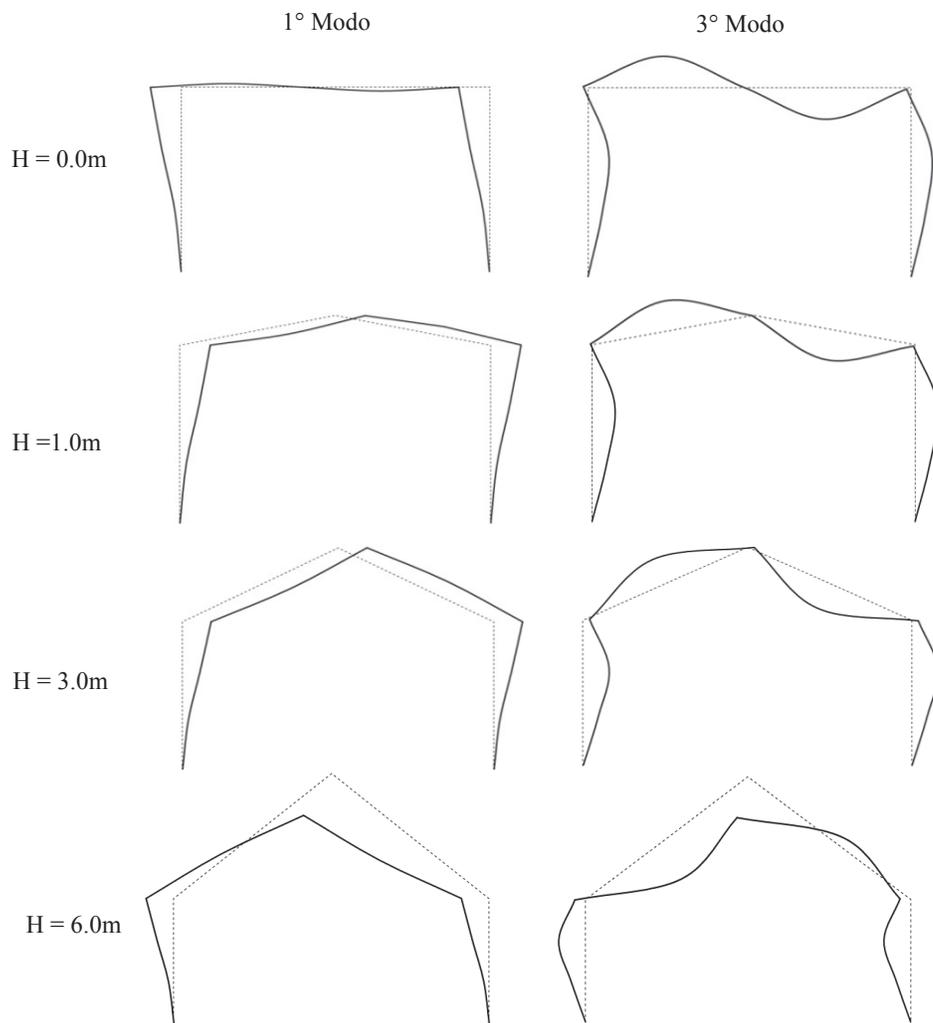
**Figura 6.11 – Geometria de galpão com cobertura a duas águas.**

Na Tabela 6.2 são apresentadas as quatro primeiras frequências naturais de vibração da estrutura considerando quatro valores diferentes da altura  $H$ .

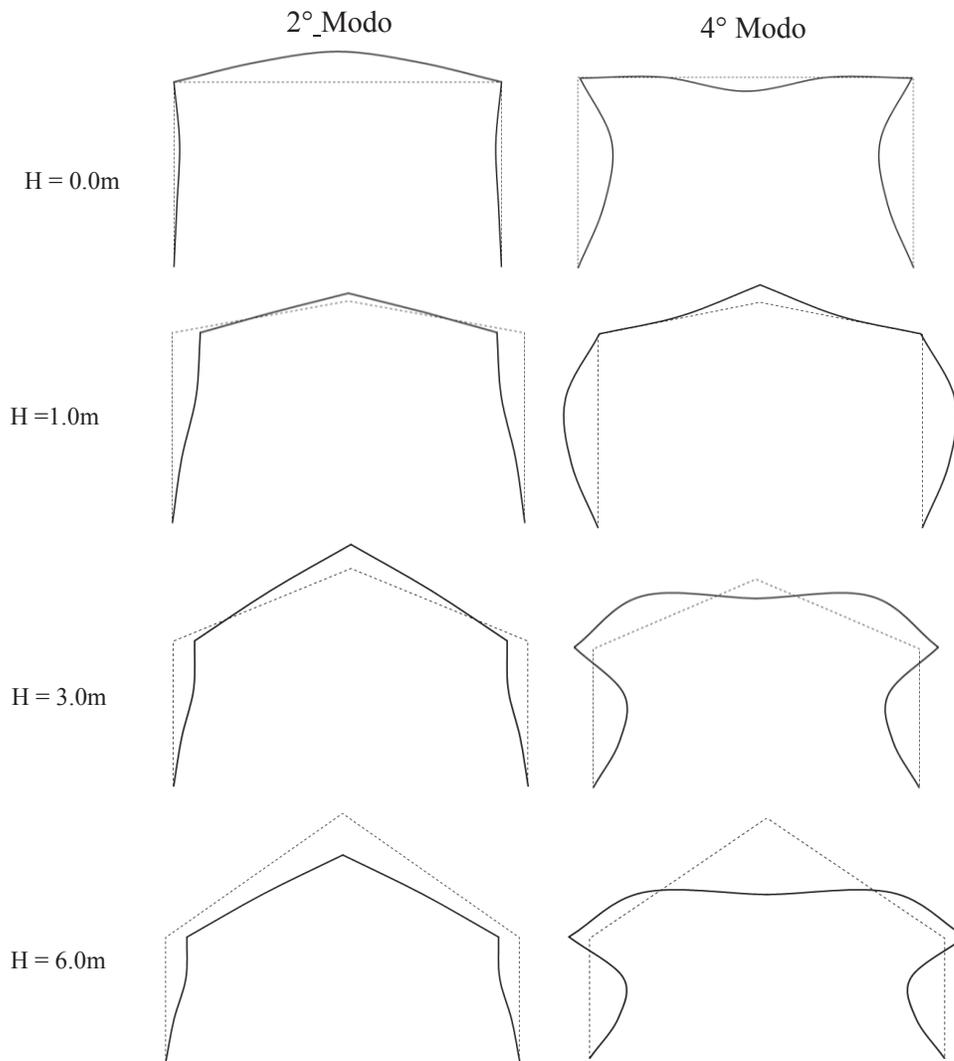
**Tabela 6-2. Primeiras quatro frequências vibração**

Altura da cobertura $H$ (m)	Frequência natural de vibração (rad/s)			
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo
0.0	25.571	57.235	152.200	186.915
1.0	25.004	59.408	146.412	194.570
3.0	22.607	54.810	126.167	184.203
6.0	18.003	42.311	94.185	105.354

Na Figura 6.12 são apresentados o primeiro e terceiro modo de vibração (modos assimétricos) e na Figura 6.13, o segundo e quarto modo de vibração (modos simétricos).



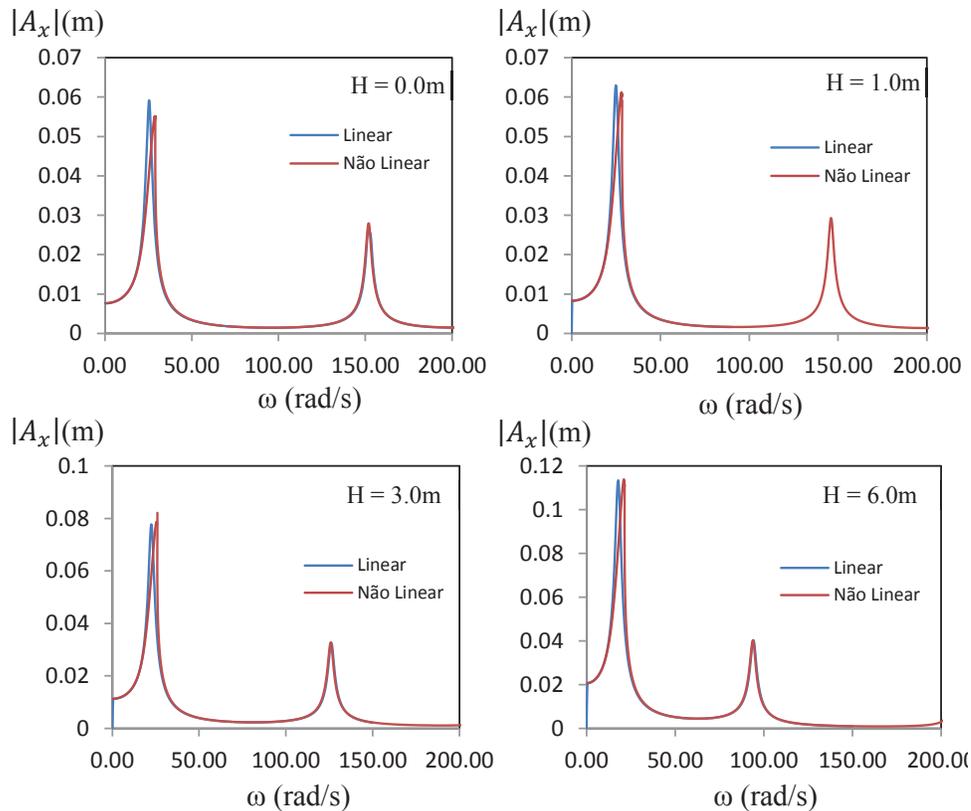
**Figura 6.12 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos assimétricos.**



**Figura 6.13 – Segundo e quarto modo de vibração natural. Modos simétricos.**

#### **6.3.1.1. Resposta para solicitação de base**

Nesta seção é estudada a resposta do galpão quando submetido a uma excitação harmônica horizontal. Ao mesmo tempo é mostrada também a influência da variação da altura da cobertura  $H$  na resposta da estrutura. É considerada uma magnitude de aceleração de base de  $0.8g$ .



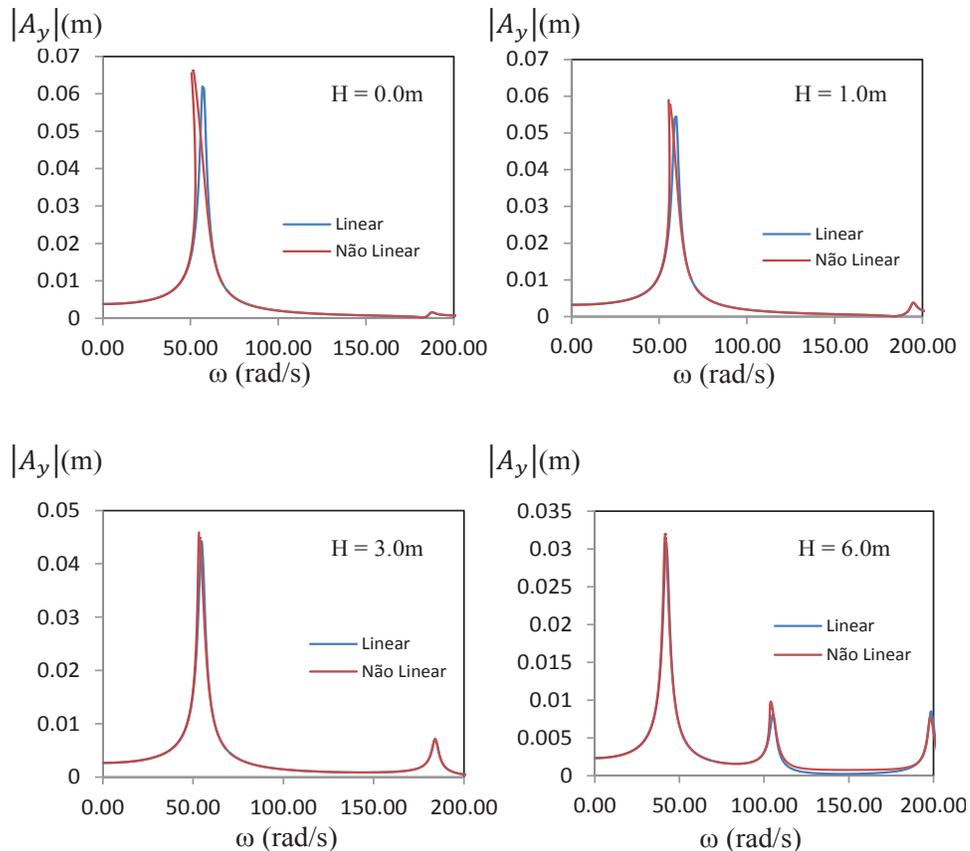
**Figura 6.14 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. frequência de excitação.  $A_{gx} = 0.8g$ .**

Na Figura 6.14 é mostrada a variação da amplitude de vibração horizontal no topo do galpão em função da frequência de excitação. Na faixa de valores de frequência considerados, são excitados apenas o primeiro e terceiro modos, ou seja, apenas os modos não simétricos, como mostra a Figura 6.12. O pórtico apresenta uma não linearidade do tipo *hardening* que afeta apenas o primeiro pico de ressonância. Isto é devido a não linearidade cúbica que é função do deslocamento transversal que é predominante nos modos não simétricos. Fora da vizinhança da primeira frequência de ressonância excitada horizontalmente, as respostas linear e não linear apresentam-se coincidentes, indicando que o efeito da não linearidade geométrica não é substancial para estas faixas de frequência.

### 6.3.1.2. Resposta para solicitação na direção vertical

Nesta seção é estudada a resposta do galpão com cobertura a duas águas quando solicitado na direção vertical. Neste caso, é considerada uma magnitude de aceleração de 0.8g, igual ao caso anterior.

Na Figura 6.15 é mostrada a variação da amplitude de vibração vertical no meio do vão (topo do galpão) em função da frequência de excitação. Na faixa de valores de frequência considerada são excitados apenas o segundo e quarto modo, manifestado em um aumento das amplitudes de vibração na vizinhança da segunda e quarta frequência de vibração natural (modos simétricos - ver Figura 6.13). Neste caso, a não linearidade é do tipo *softening* e leva a um aumento da amplitude máxima de vibração. Isto é devido a não linearidade quadrática que expressa a interação entre deslocamentos axiais e laterais. Note-se também que este efeito decresce com o aumento do valor da altura da cobertura H. Similar à resposta com excitação horizontal, nas regiões afastadas da primeira frequência de ressonância excitada, a resposta linear e não linear apresentam-se coincidentes, indicando pouca influência da não linearidade geométrica.



**Figura 6.15 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. frequência de excitação.  $A_{gy} = 0.8g$ .**

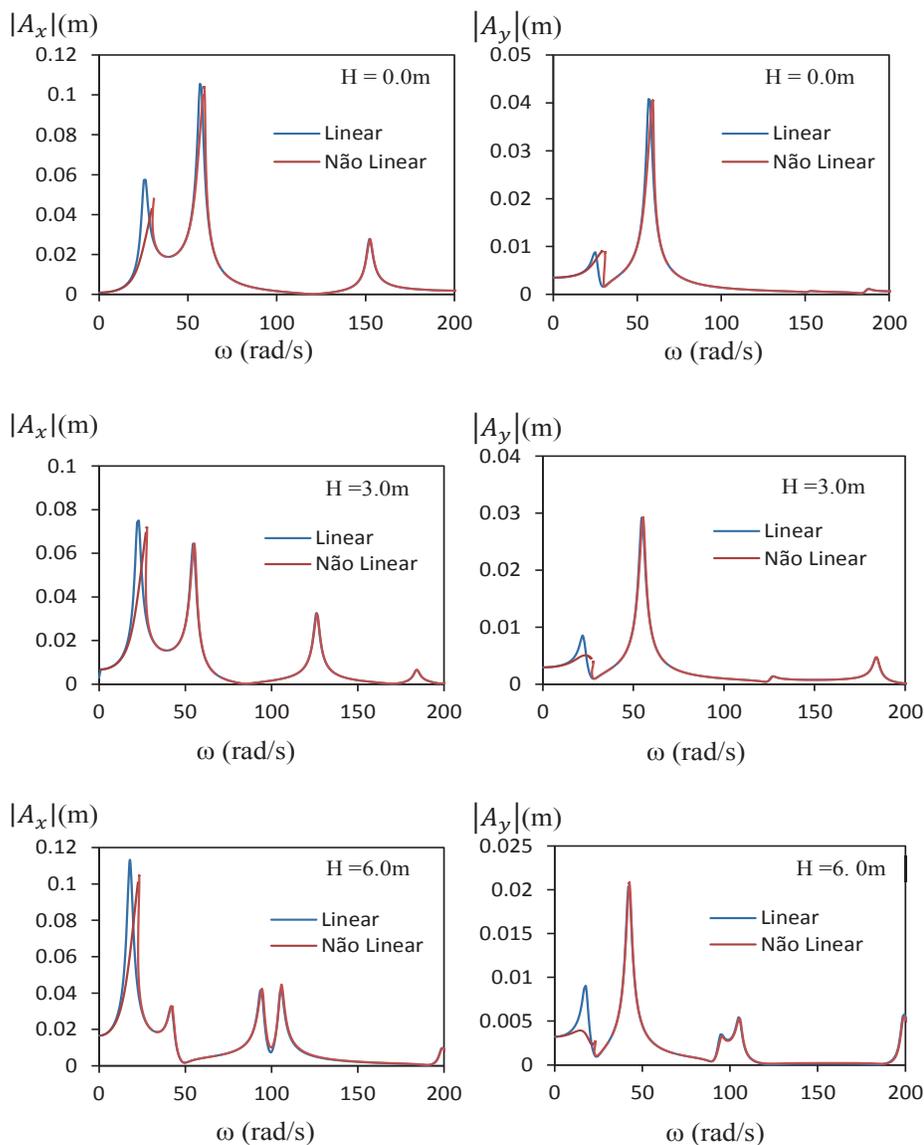
### 6.3.1.3.

#### Resposta para solicitação horizontal e vertical simultânea

Nesta seção é considerado que a excitação com componentes de aceleração vertical e horizontal. A existência destas duas componentes é usual em problemas de excitação sísmica. Algumas normas de análise sísmica para projeto estrutural, tais como a norma de análise sísmico do código de projeto estrutural peruano (MVC-RNE.E-030, 2007), adota uma proporção entre a amplitude de aceleração horizontal e vertical. É considerado que a aceleração vertical tem uma amplitude igual a 0.66 vezes a amplitude da aceleração horizontal. A aceleração horizontal é adotada como 0.8 vezes a aceleração da gravidade.

A Figura 6.16 mostra a resposta em frequência da vibração horizontal e vertical no topo do galpão Neste caso as quatro primeiras frequências naturais são excitadas. Esta combinação de excitações tem um profundo efeito na primeira

região de ressonância, evidenciado pelo efeito de “*hardening*”, para todos os valores H considerados, No caso da segunda frequência de ressonância, o efeito de *hardening*, é visível apenas para o valor de  $H = 0.0\text{m}$  (pórtico plano). Já nas demais zonas as respostas linear e não linear são próximas. Verifica-se um aumento da amplitude de vibração horizontal na região da primeira frequência de ressonância quando o valor de H aumenta. Assim como também que para o caso de  $H = 3.0\text{m}$  e de  $H = 6.0\text{m}$ , há uma notoriedade maior na excitação dos quatro primeiros modos de vibração, se comparado com a resposta para  $H = 0.0\text{m}$ .

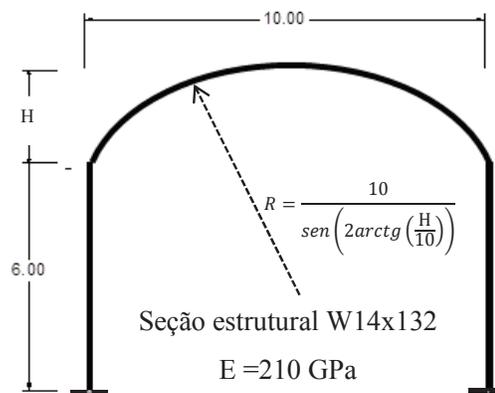


**Figura 6.16 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. frequência de excitação.  $A_{gx} = 0.8g$ ,  $A_{gy} = 0.667A_{gx}$ .**

Verifica-se que o tipo de excitação de base tem grande influência nos picos de ressonância, com diferentes modos sendo excitados em cada caso, e no tipo de não linearidade da estrutura.

### 6.3.2. Estrutura de galpão com cobertura em arco

Nesta seção é analisada uma estrutura de galpão com cobertura em arco circular. A sua geometria é mostrada na Figura 6.17. Pode-se observar que as dimensões dos pilares, largura do vão, e altura da cobertura é similar ao do galpão analisado na seção 6.3.1. A estrutura é modelada com vinte elementos de barra, com consideração de não linearidade geométrica, sendo cinco elementos de igual comprimento em cada pilar, e 10 elementos de mesmo tamanho para a cobertura. Os apoios são modelados como engastes.



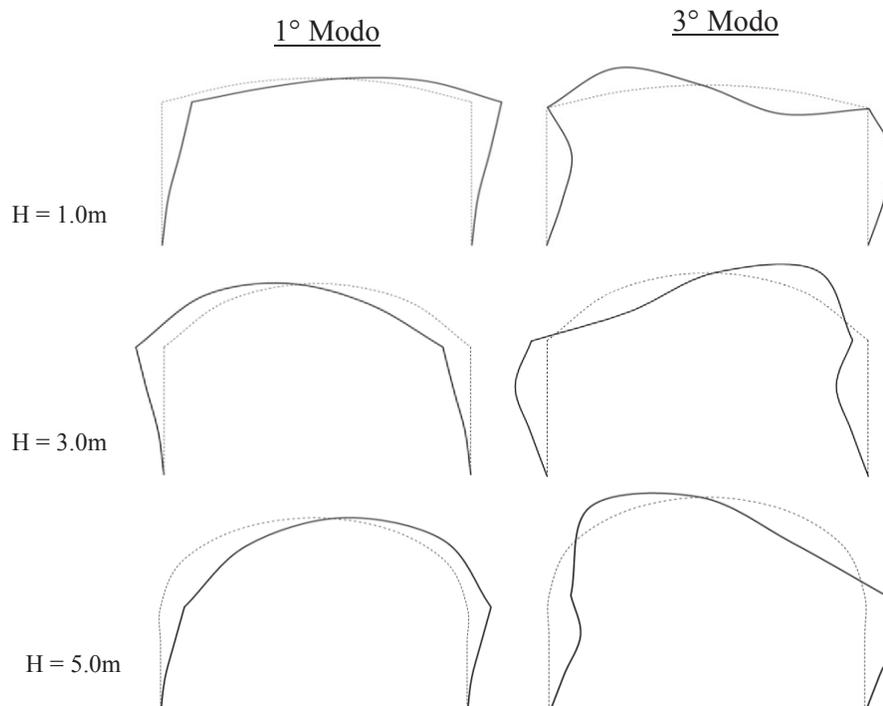
**Figura 6.17– Geometria de galpão com cobertura em arco circular. (dimensões em metros)**

Na Tabela 6.3 são apresentadas as quatro primeiras frequências naturais de vibração da estrutura considerando três valores diferentes de altura de cobertura. Nota-se que as frequências decrescem com o aumento da altura H e que as frequência têm a mesma ordem de grandeza que as frequências do exemplo anterior.

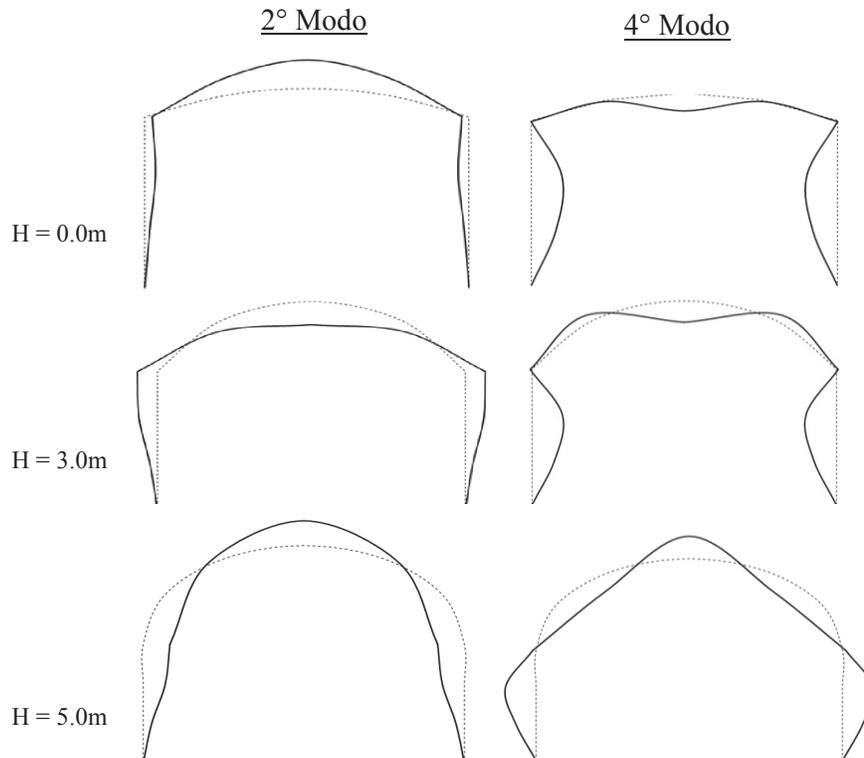
**Tabela 6-3. Primeiras quatro frequências vibração**

Altura da cobertura H (m)	Frequência natural de vibração (rad/s)			
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo
1.0	24.624	60.096	142.727	190.045
3.0	20.666	56.501	114.327	176.371
5.0	15.563	47.401	87.486	134.576

Nas Figuras 6.18 e 6.19 são apresentados o primeiro e terceiro modos de vibração, e o segundo e quarto modos de vibração, respectivamente.



**Figura 6.18 – Primeiro e terceiro modos de vibração natural. Modos não simétricos.**



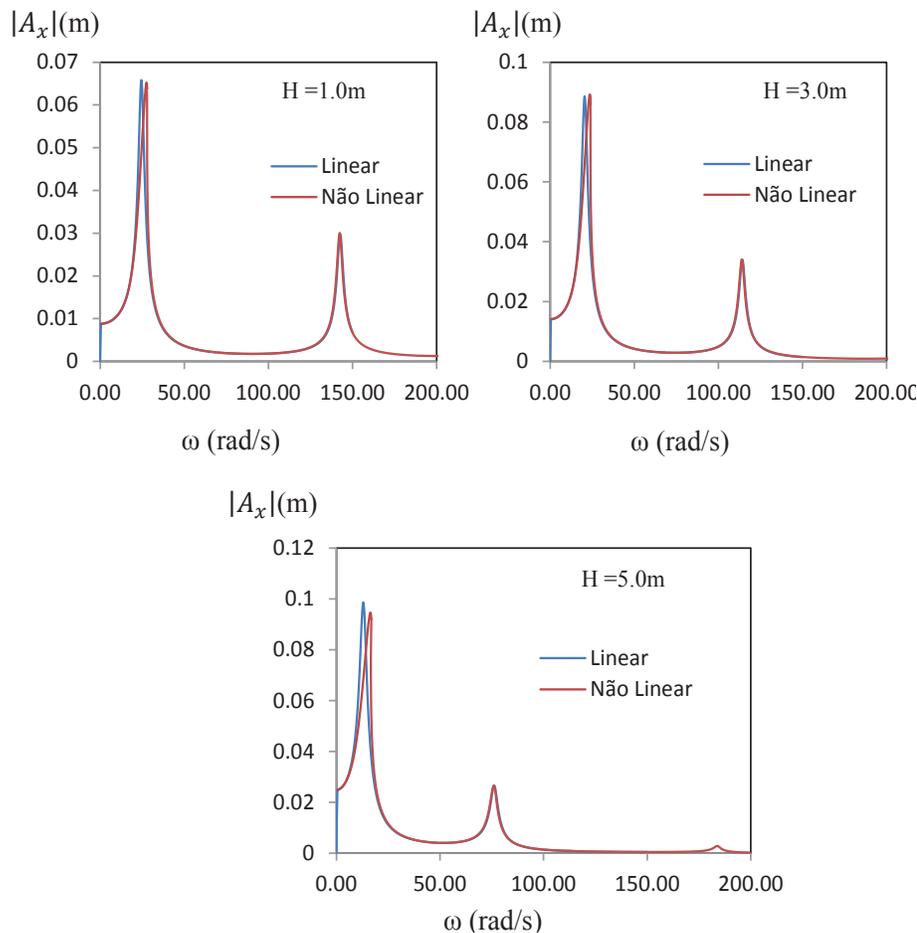
**Figura 6.19 – Segundo e quarto modos de vibração natural. Modos simétricos.**

#### 6.3.2.1.

##### Resposta para solicitação sísmica horizontal

Nesta seção é estudada a resposta do galpão com cobertura em arco excitado por um movimento harmônico horizontal. Ao mesmo tempo é mostrada a influência da variação da altura da cobertura  $H$  na resposta da estrutura. Considera-se que a aceleração de base tem uma amplitude de  $0.8g$ .

A Figura 6.20 mostra a relação entre a norma da amplitude máxima no topo do galpão, considerando três valores de  $H$ . Para todos os valores de  $H$  adotados, são excitadas apenas as frequências ímpares, como no exemplo anterior. Nota-se também que a influência da não linearidade geométrica se manifesta apenas nas proximidades da primeira frequência de ressonância excitada, onde se observa um ganho de rigidez. Nas faixas de frequência afastadas da primeira frequência de ressonância, não é visível o efeito da não linearidade geométrica, em virtude da magnitude da excitação.

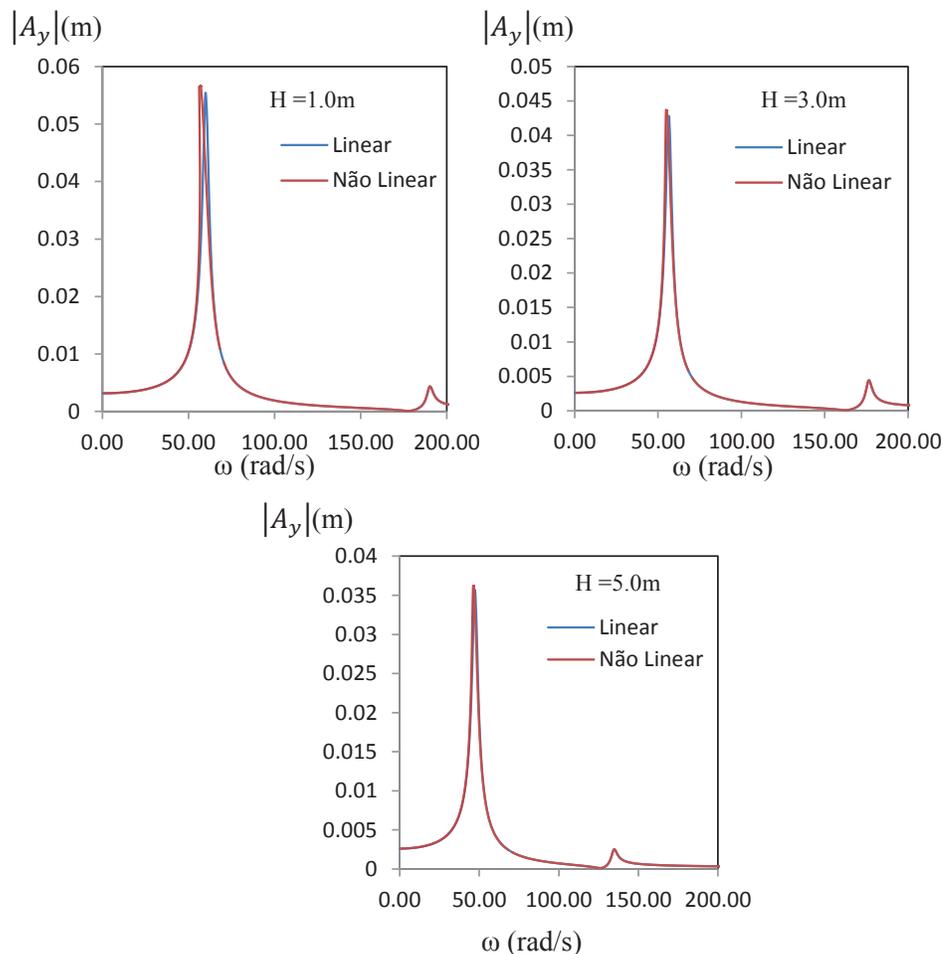


**Figura 6.20 – Amplitude de vibração horizontal no meio do vão vs. Frequência.  $A_{gx} = 0.8g$ .**

### 6.3.2.2. Resposta para solicitação sísmica Vertical

Estuda-se agora a resposta do galpão sob a ação de um movimento de base vertical. Para este caso é considerada uma aceleração de base de  $0.8g$ . A Figura 6.21 mostra a variação da amplitude de vibração vertical no meio do vão do galpão (topo do galpão) com a frequência de excitação. Similarmente ao exemplo anterior, são excitados apenas os modos pares, sendo visíveis picos de ressonância apenas na região da segunda e quarta frequência natural. Também, como no exemplo anterior, nota-se um comportamento não linear com perda de rigidez, porém menor que no galpão com cobertura a duas águas. É observado também um leve aumento da amplitude máxima de vibração em relação à resposta linear. As

regiões afastadas da primeira frequência de ressonância não sofrem mudanças importantes pela consideração da não linearidade geométrica.



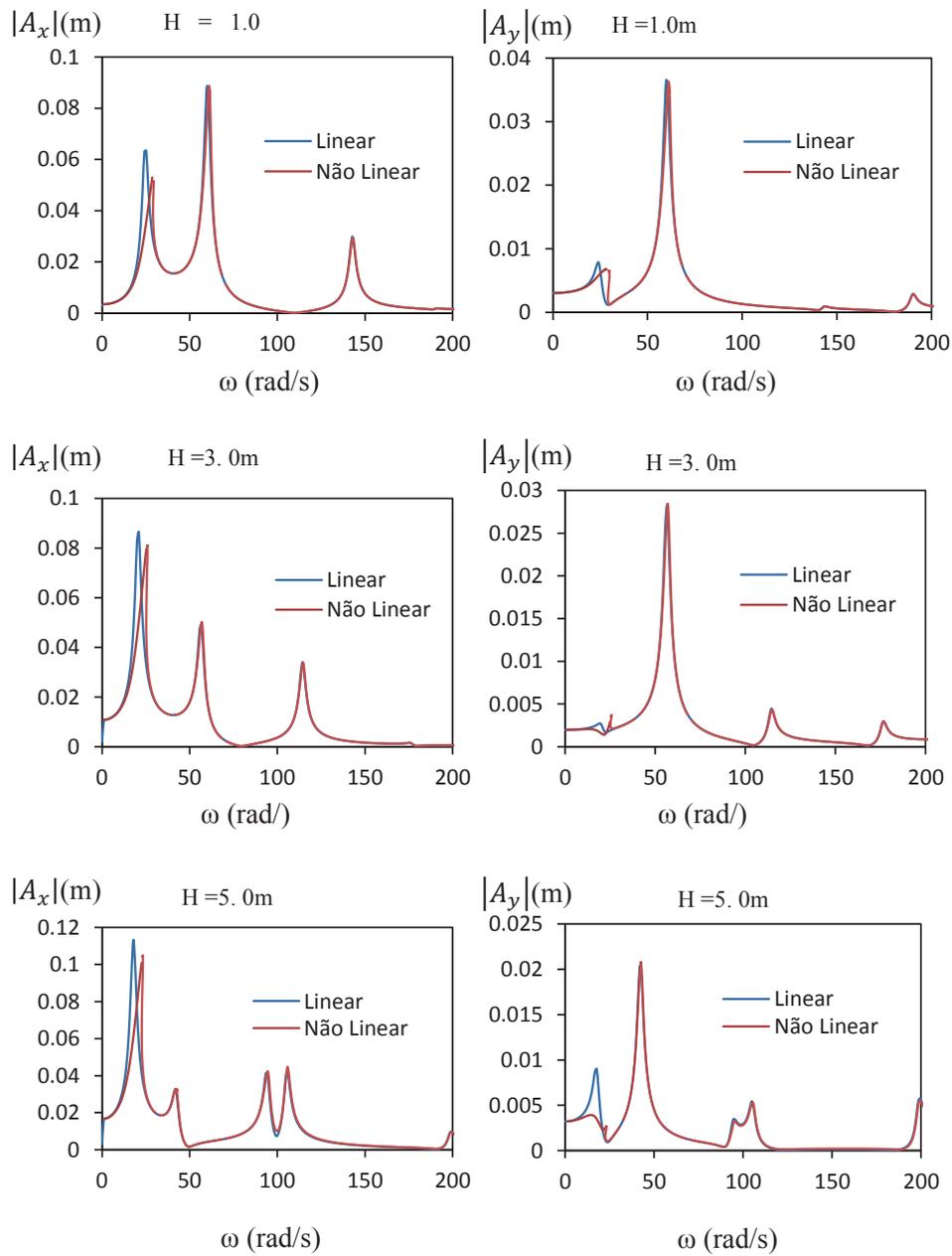
**Figura 6.21 – Amplitude de vibração vertical no meio do vão vs. Frequência.  $A_{gy} = 0.8g$ .**

### 6.3.2.3.

#### Resposta para solicitação sísmica horizontal e vertical simultâneos

Por fim, é considerado que uma excitação de base com componentes de aceleração vertical e horizontal. Como no exemplo anterior, considera-se que a aceleração vertical tem uma magnitude igual 0.667 vezes a amplitude da aceleração horizontal, sendo a aceleração horizontal igual a 0.8g.

A Figura 6.22 mostra as curvas de ressonância para ambas as componentes de vibração. Como no exemplo anterior, nota-se que as quatro primeiras frequências naturais são excitadas. Nota-se também o efeito de “*hardening*”.



**Figura 6.22 – Amplitude de vibração horizontal e vertical no meio do vão vs. Frequência.  $A_{gx} = 0.8g$ ,  $A_{gy} = 0.66A_{gx}$ .**