2
Conceitos básicos

Para a definição do modelo na seção 4, é necessário o entendimento de alguns conceitos básicos. Nesta seção foram destacados os principais deles, iniciando pelo mais fundamental que é o conceito de ALM e em seguida resumindo o conceito de Programação Estocástica que foi utilizada na definição da proposta de ALM. Na sequência foi detalhado o procedimento de geração de cenários em árvores que é fundamental na definição do modelo proposto nessa dissertação. E ainda nesta seção foi explanado o conceito de CVaR que será utilizado para o estudo da alocação ótima diante dos piores cenários de passivos.

2.1
ALM

A Gestão de Ativos e Passivos (*Asset and Liability Management* – ALM) é um método de gerenciamento simultâneo dos ativos e passivos de uma companhia que é inserido no processo contínuo de tomadas de decisões. A sua importância para uma empresa está diretamente relacionada com o grau de complexidade de valoração dos ativos e passivos, sendo, por exemplo, fundamental para empresas que operam seguros e previdência no Brasil, pois, estas possuem fluxos de caixa de difícil estimação e estão sujeitas a restrições regulamentares complexas.

Um ALM bem feito é peça chave no bom desempenho de uma companhia, estando ele inserido no processo de tomadas de decisões de alto nível da mesma. Por exemplo, a empresa pode definir a entrada ou saída de um nicho de mercado, aumentar ou diminuir preços de produtos e através do ALM verificar os possíveis resultados de cada decisão sobre a rentabilidade total da companhia.

Em companhias que operam planos de previdência (foco desta dissertação) um modelo de ALM bem definido e confiável torna-se ainda mais necessário, tendo em vista que as suas obrigações são de longuíssimos prazos e estão sujeitas a oscilações de diversas variáveis econômicas-financeiras. Isso é mais agravado em mercados emergentes como no Brasil, onde se observa uma alta volatilidade nos mercados financeiros.

Diante disso, diversas técnicas podem ser utilizadas num modelo de ALM. Por exemplo, modelos de definição de carteiras ótimas dado um portfólio fixo ao longo de um horizonte de planejamento. Tal técnica foi e continua sendo muito utilizada, contudo sabendo que os cenários futuros são incertos, modelos dinâmicos de alocação cada vez mais passam a ser utilizados. Entre os modelos dinâmicos, se destacam os modelos de programação estocástica que serão defendidos nesta dissertação. A grande vantagem desta classe de modelo é que a cada estágio determinado na programação, uma nova alocação pode ser definida. Este dinamismo ilustra bem o dia-a-dia de uma companhia que toma decisões diversas em acordo com as realizações dos cenários correntes, que num instante anterior era incerto.

Como fora antecipado na introdução, alguns trabalhos de ALM para fundos de pensão podem ser destacados Kouwenberg (2001), Veiga (2003), Hilli et al. (2007), Valladão (2008).

Como resume Valladão (2008), os modelos de gestão de ativos e passivos para um fundo de pensão são compostos por cinco grandes elementos:

- Modelo de programação estocástica;
- Modelo estocástico para os fatores de risco econômico-financeiros;
- Método de geração de cenários em árvore;
- Modelo financeiro para os ativos;
- Modelo financeiro para os passivos;
- Método de medição e controle do risco.

As etapas detalhadas acima podem ser resumidas e representadas na Figura 2.1 abaixo:

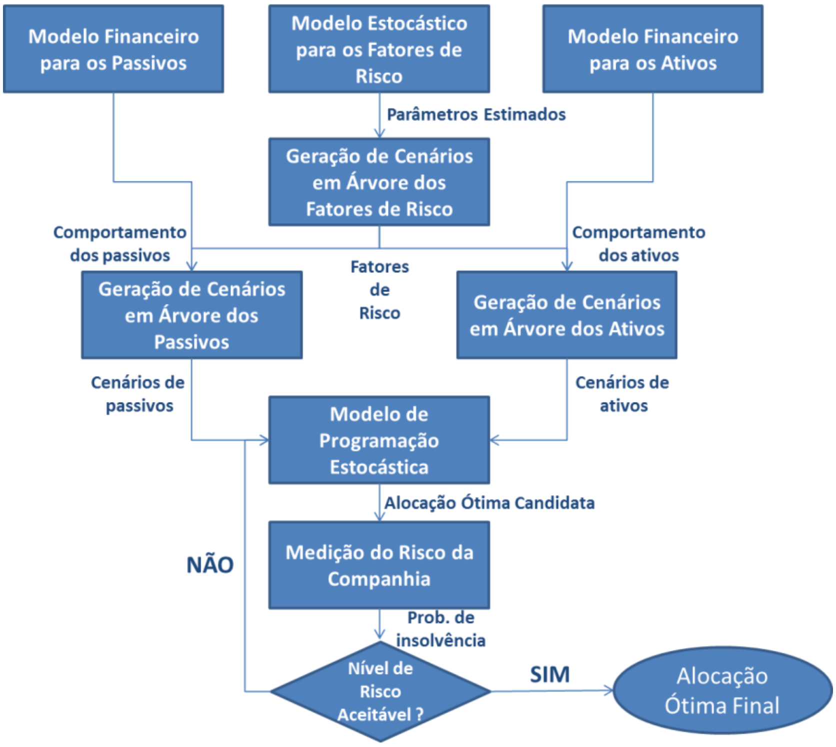

Figura 2.1 – Fluxograma do modelo de ALM (Valladão, 2008 modificado)

A figura sintetiza perfeitamente a construção de um bom modelo de ALM que será apresentado e construído nesta dissertação. Primeiramente são definidos os modelos estocásticos necessários, os quais fornecem os parâmetros estimados para a geração de árvore de cenários para os fatores de risco previamente identificados.

Dados os cenários gerados para os fatores de risco e os modelos financeiros que definem os comportamentos dos ativos e passivos, são geradas as árvores de cenários dos ativos e passivos. Estes cenários simulados são os inputs necessários para o modelo de programação estocástica. O modelo então é definido de acordo com as necessidades e os estudos realizados pela companhia e após disso a alocação ótima candidata é obtida. Com esta alocação, é mensurado o risco de insolvência da companhia, e caso o risco esteja dentro de um limite aceitável esta é definida como a alocação ótima final, caso contrário se ajusta os parâmetros do modelo de programação estocástica para definir uma nova alocação candidata.

2.2
Modelo de programação estocástica (MPE)

Ao estudar os seus riscos, as restrições a qual está imposta e os seus objetivos, uma companhia pode definir um modelo de alocação dinâmica via programação estocástica multiestágio (MPE). Pode-se iniciar a conceituação de um MPE através da definição de uma função objetivo, que pode ser tanto a maximização quanto a minimização de determinado variável chave para a companhia. No contexto de uma empresa que opera planos de previdência abertos, por exemplo, a função objetivo poderia ser a maximização do lucro da empresa ou a minimização dos riscos.

Neste trabalho será utilizada como função objetivo a maximização da utilidade da diferença entre o total de Ativos Livres (AL) e Capital Mínimo Requerido (CMR), como será definido adiante na seção 3. E, para representar adequadamente a aversão a risco da companhia utiliza-se uma função utilidade côncava e linear por partes onde, cenários de perda terão maior impacto que cenários de ganho.

A realidade diante da qual está inserida a companhia é definida no MPE nas restrições da otimização. Para uma seguradora pode-se definir diversas restrições, como por exemplo, restrições regulamentares (limites de alocação em classes de ativos, requerimento mínimo de capital etc.), restrições de balanço, restrições de inventário de ativos, entre outros.

Considerando a estocasticidade dos fatores de riscos que são utilizados no MPE, é uma preocupação central a formulação correta de uma árvore de cenários. Assim, em cada estágio t o modelo tomará decisões e definirá alocações ótimas baseadas nas informações obtidas até t para possíveis cenários s incertos futuros t+1, t+2,.. condicionados a t. Isso é garantido através das restrições de não-antecipatividade, que define que variáveis de decisão num dado estágio devem ser iguais se seus cenários compartilham um mesmo nó na árvore de cenários, como apresentado em Valladão et al. (2014).

Tal estrutura detalhada acima também pode ser considerada como um modelo de recurso. De acordo com esta classe de modelos, uma decisão de primeiro estágio é tomada sob a incerteza dos cenários (valores) futuros dos fatores de risco. Após disso, uma decisão de recurso é efetuada dependendo da realização obtida, e assim sucessivamente.

Quanto maior a árvore de decisão melhor será a representatividade dos possíveis cenários, e consequentemente mais robustos serão os resultados do MPE.

O MPE é definido fazendo uso de variáveis de decisão ou de estado e parâmetros previamente estabelecidos. O conjunto de variáveis de decisão representa a solução ótima do MPE, por exemplo, o total investido em cada classe de ativo no contexto de um MPE para um ALM. Ao passo que as variáveis de estado são apenas consequências das decisões tomadas, por exemplo, o valor do Património Líquido de uma seguradora. Já os parâmetros podem ser segregados em fixos (determinísticos) ou variantes (estocásticos). Sendo o primeiro imutável em todos os cenários e o segundo, como o nome sugere, pode alterar de valor de acordo com os cenários.

Como detalha Valladão (2008), uma formulação básica de um modelo de recurso de dois estágios pode ser resumida por:

$$\begin{array}{ll} Minimizar & c'x + E[f(x,\xi)] \\ Sujeito\ a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Onde

$f(x,\xi)$ é a função do segundo estágio definida por:

$$\begin{array}{ll} f(x,\xi) = \text{minimizar} & d'y(\xi) \\ s.a & W(\xi)y(\xi) = \theta(\xi) - T(\xi)x \\ & y(\xi) \geq 0 \end{array}$$

x é o vetor com as decisões de primeiro estágio

ξ são os fatores de riscos

A é uma matriz de coeficientes determinísticos

T e W são as matrizes de coeficientes estocásticos

$y(\xi)$ é o vetor com as decisões de recurso

Para o caso de fatores de risco com distribuição de probabilidade discreta, problema de programação linear estocástica acima pode ser representado pelo problema de programação linear conhecido como determinístico equivalente. A formulação equivalente seria:

$$
\begin{array}{ll}
Minimizar & c'x + \sum_{s=1}^{S} p_s . d' . y_s \\
 & A.x = b \\
Sujeito\ a & T_s . x + W_s . y_s = r_s \\
 & x, y_s \geq 0
\end{array}
$$

Onde:

s são os cenários, tais que, $s \in \{1 \dots S\}$

S é o número de cenários

r_s é uma realização de θ no cenário s

p_s é a probabilidade de θ ser igual a r_s, ou seja, $p_s = P(\theta = r_s)$

Embora a representação acima defina especificamente o programa linear equivalente a um MPE de dois estágios, o mesmo pode ser generalizado para um MPE multiestágio, onde os valores dos fatores de risco ξ são conhecidos a cada novo estágio t e, desta forma, haverá para cada estágio um vetor de decisões $y_t(\xi)$.

2.3 Árvore de cenários

É uma situação comum ao observar relatórios financeiros, estratégias de empresas e até mesmo pessoais, se deparar com a necessidade de se definir cenários futuros possíveis para processos estocásticos que impactam as tomadas de decisão. Por exemplo, um investidor estrangeiro num país de moeda diferente da sua deve definir num determinado momento o quanto de hedge cambial precisa efetuar para que possa garantir a estabilidade da empresa, tal decisão será efetuada sob incerteza diante de possíveis cenários futuros de evolução do câmbio.

Em todas as situações de tomada de decisão sob incerteza é possível para o gestor utilizar um modelo de programação estocástica que define a alocação ótima sob incerteza de acordo com uma função objetivo definida, e para isso os cenários devem ser bem definidos.

A geração de cenários em árvores se distingue bastante de uma simulação simples de Monte Carlo que utiliza cenários independentes. Em uma árvore, os cenários são determinados a partir de uma estrutura de nós, sendo que a previsão em um próximo estágio sempre está condicionado ao resultado de um nó antecessor. Visualmente, observa-se na Figura 2.2 abaixo a diferença básica entre esses dois métodos:

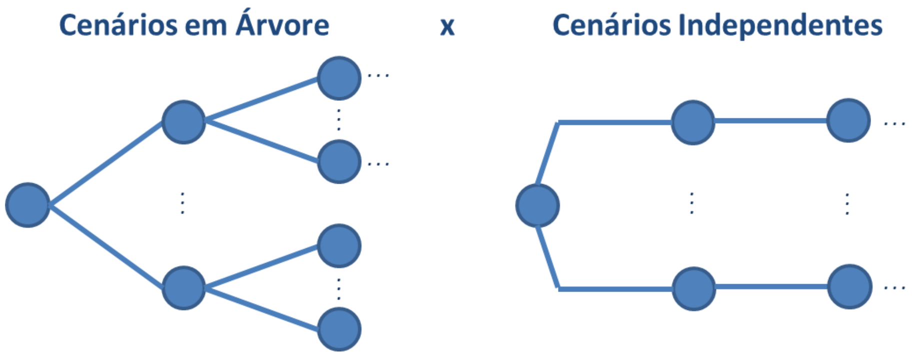

Figura 2.2 – Cenários em árvore x independentes

Existem inúmeros métodos de geração de cenários em árvore e em todos existe uma preocupação central que é, ao utilizar os modelos estatísticos de geração de cenários, garantir que as propriedades estatísticas (média, variância, assimetria, curtose, entre outras) sejam respeitadas para que os cenários possam ser coerentes. Na literatura existem diversas publicações onde se destacam os trabalhos de Kouwenberg (2001) e Gülpinar et al. (2004). O primeiro autor apresenta a técnica ARS (do inglês Adjusted Random Sampling) que consiste num método de MM (do inglês Moment Matching) que visa ajustar os três primeiros momentos dos valores simulados na árvore para os fatores de risco. Já o segundo autor apresenta três métodos de geração de árvore: um baseado em simulação, outro utilizando otimização e mais um utilizando um método hibrido de otimização com simulação.

Na seção 5.1.4 será definida a árvore de cenários dos fatores de riscos e será utilizado o método de ARS. Contudo, também se destaca da literatura outra classe de métodos que são os que buscam minimizar a distância entre a distribuição teórica e a simulada. Nesta linha de pesquisa se destaca o trabalho de Pflug & Pichler (2012) e Heitsch & Römisch (2009) ambos desenvolvem técnicas buscando minimizar a distância entre a distribuição teórica e a simulada. Este trabalha com método suportado em heurísticas baseadas em teorias de geração de árvores em um conjunto inicial de cenários que são ajustados a partir de técnicas recursivas. Já aquele trabalha o conceito de distribuições aninhadas, que abrangem em um aspecto matemático os valores de cenário, bem como a estrutura de informação em que as decisões têm de ser feitas.

Genericamente define-se uma árvore básica através da sua estrutura de nós que compõem os cenários que são definidos dentro de um horizonte de tempo. Cada nó é definido através de uma distribuição de probabilidade discreta ou a partir de um processo de discretização de uma distribuição de probabilidade contínua.

Como bem resume Valladão (2008), para gerar uma árvore, cenários são criados, onde cada um é representado por um conjunto de nós interligados consecutivamente. Logo, a árvore é composta por cenários $S = \{s_0, \dots s_N\}$ e um total de T estágios, onde s $\in$ S são as possíveis realizações de todos os fatores de risco que ocorrem com probabilidade p_s e N é o número de cenários definidos no conjunto S. Na Figura 2.3 abaixo foi representada uma árvore genérica de decisão com 3 estágios:

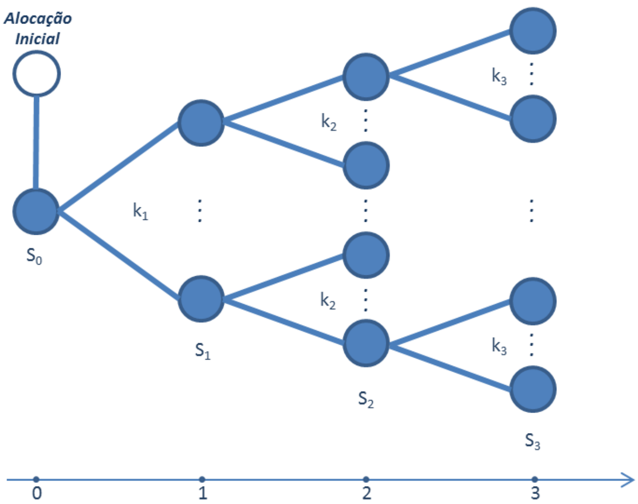

Figura 2.3 – Exemplo de árvore de cenários

Na árvore acima, em cada novo estágio t foram definidas k_i realizações equiprováveis no estágio posterior para um cenário s_i. Desta forma, haverá, ao longo do horizonte T, um total de $k_1.k_2.k_3$ cenários.

Como destacado acima, existem inúmeros métodos de geração de cenários em árvore. Esta dissertação não tem como objetivo estudar tais métodos e por esse motivo, por simplicidade, será utilizado aquele apresentado por Kouwenberg

(2001). O autor utiliza um modelo VAR para a previsão dos fatores de risco e utiliza um método de *Ajusted Random Sampling (*ARS*)* para geração randômica dos cenários.

2.4
Cálculo do passivo ajustado pelo risco

Como será apresentado na seção 5.3, na geração de cenários em árvore para passivos, serão definidos diversos cenários para os pagamentos de benefícios. Diante disso, para a definição de uma alocação ótima de investimentos que forneça maior proteção para a empresa serão utilizados os valores esperados dos benefícios a pagar e também valores pessimistas, definidos por cenários onde as rendas a pagar excedem os valores esperados. Para tal, deverá ser utilizada uma medida de risco para a definição destes montantes.

Neste campo de conhecimento, surge a famosa medida de Value at Risk (VaR) definido em Riskmetrics (1996) e Jorion (1998). No contexto aqui proposto, tal medida pode fornecer o maior valor do benefício a pagar dada a distribuição de benefícios e um intervalo de confiança. Para isso, ele é definido como um quantil da distribuição probabilística dos benefícios (rendas) a pagar.

Conceitualmente, dado um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$, o VaR será definido como o maior valor de m tal que a probabilidade do passivo L ser maior que m é no máximo $(1-\alpha)$. Formalmente:

$$VaR_{\alpha}(L) = \inf\{m \in \mathbb{R}: P(L \leq m) \geq \alpha\}. \qquad (2.1)$$

Graficamente:

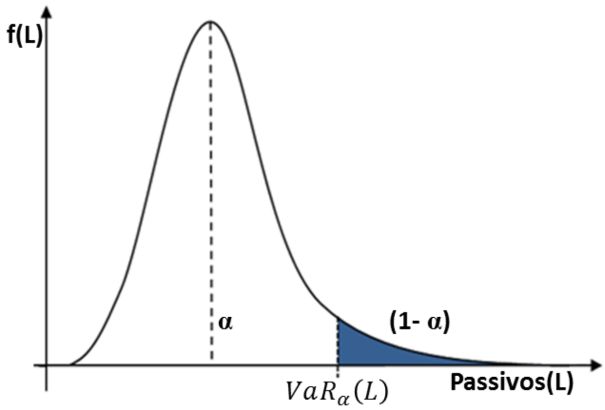

Figura 2.4 – Conceituação de VaR

Embora o VaR tenha alcançado grande sucesso por conseguir em um único valor sintetizar o valor exposto ao risco de uma variável de estudo, ele possui algumas características inadequadas para uma medida de risco. A principal é que ele não mensura o valor dos resultados gerados no caso de um cenário não desejável ocorrer. Isso ocorre, pois ao definir o VaR como um quantil da distribuição de perdas, tal medida de risco é insensível para todos os valores que sejam superiores ao VaR, logo pouco importa se tivemos pequenas ou grandes perdas além do nível de risco tolerado.

Ou seja, caso haja cenários de benefícios a pagar muito superiores, o VaR terá a mesma sensibilidade caso esses valores fossem somente pouco maiores. Neste caso, o gestor pode, a depender da distribuição da variável de estudo, estar incorrendo em riscos de magnitudes não identificadas.

Tendo em vista tal lacuna na mensuração adequada do risco através do VaR, novas medidas de riscos foram apresentadas, entre as quais se destaca o CVaR.. Formalmente, no contexto deste trabalho, dado um nível de confiança $\alpha \in (0{,}1)$, definimos

$$CVaR_\alpha(L) = \int_\alpha^1 VaR_h(L)dh$$
$$CVaR_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) + \frac{\mathbb{E}\left[\left(L - VaR_\alpha(L)\right)^+\right]}{1-\alpha} \quad (2.2)$$

Vale recordar ainda que para distribuições continuas o CVaR é equivalente ao Tail VaR (TVaR) e ao Expected Shortfall (ES) e definido por:

$$CVaR_\alpha(L) = \mathbb{E}\big(L|L > VaR_\alpha(L)\big). \quad (2.3)$$

Ou seja, simplificadamente, o CVaR é a média dos $(1-\alpha)\%$ valores superiores. Graficamente:

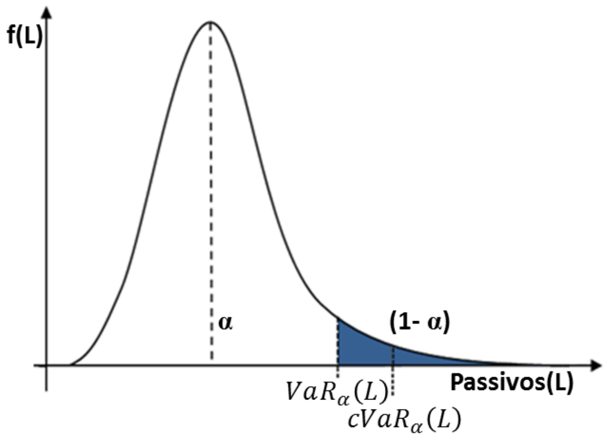

Figura 2.5 – Conceituação de CVaR

Além da preocupação destacada acima, frisa-se que o CVaR possui todas as propriedades requeridas para ser considerada uma medida de risco coerente: monotonicidade, homogeneidade, subaditividade, entre outras, segundo Artzner (1999).

Destaca-se que o VaR, por exemplo, não possui a propriedade de subaditividade e considerando que os diferentes passivos podem ser estruturados como uma carteira de pagamentos, tal propriedade é desejável. Todavia, entende-se como o principal fator para se utilizar o CVaR neste trabalho, o fato dele ser uma medida mais conservadora, tendo em vista que ele capta o impacto das perdas mais extremas enquanto o VaR não consegue captá-las.