

Adriano Domeny dos Santos

**Dinâmica de uma coluna rotativa esbelta sujeita
à ação de *stick-slip* em duas regiões distintas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Hans Ingo Weber
Co-orientador: Prof. Romulo Reis Aguiar

Rio de Janeiro
Agosto de 2015

Adriano Domeny dos Santos

**Dinâmica de uma coluna rotativa esbelta sujeita
à ação de *stick-slip* em duas regiões distintas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hans Ingo Weber

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. Romulo Reis Aguiar

Co-orientador

Brazil Research & Geoengineering Center - Schlumberger Ltd

Prof. Ivan Fabio Mota de Menezes

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

UNICAMP

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 21 de agosto de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Adriano Domeny dos Santos

Graduado em Engenharia Mecânica e de Armamento pelo Instituto Militar de Engenharia.

Ficha Catalográfica

Santos, Adriano Domeny

Dinâmica de uma coluna rotativa esbelta sujeita à ação de *stick-slip* em duas regiões distintas / Adriano Domeny dos Santos; orientador: Hans Ingo Weber; co-orientador: Romulo Reis Aguiar. — Rio de Janeiro PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2015.

v., 72 f: il. (color); 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. dinâmica de perfuração. 3. vibração torcional. 4. *stick-slip*. 5. bancada de testes. 6. otimização. I. Weber, Hans Ingo. II. Aguiar, Romulo Reis. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

À minha família, meu bem na terra mais precioso...

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo amor e carinho, pela formação que me deu e pela presença constante. Aos meus amigos do Centro Cultural e Universitário de Botafogo, pelo apoio, pela paciência. Ao professor Hans, para mim uma escola. Ao Romulo, pelas dicas, e por aquela sexta-feira em que ficou até mais tarde comigo no Laboratório. Pequenos detalhes revelam a grandeza das pessoas. Aos meus colegas e amigos do Laboratório de Vibrações, pelo apoio, pelas trocas de figurinha tão valiosas. Aprendi muito com vocês. Ao grande Wagner, do Laboratório de Vibrações. Confesso que sem sua ajuda não teria ido muito longe. Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente me apoiaram, de um modo particular ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Santos, Adriano Domeny; Weber, Hans Ingo; Aguiar, Romulo Reis. **Dinâmica de uma coluna rotativa esbelta sujeita à ação de *stick-slip* em duas regiões distintas**. Rio de Janeiro, 2015. 72p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta um estudo do comportamento dinâmico de uma bancada de testes representativa do sistema real de perfuração, composta por um motor CC acoplado a um sistema físico torcional, sujeita a fontes de atrito que induzem um regime de *stick-slip* no sistema em duas regiões distintas. O estudo incluiu a identificação de parâmetros da bancada de testes por meio de uma série de ensaios experimentais; e a caracterização do atrito, por meio do levantamento experimental da curva do coeficiente de atrito, em função da velocidade angular dos rotores principais. O intuito inicial foi a obtenção de um modelo numérico que fosse o mais simples possível e que representasse bem a bancada de testes. Uma vez obtido o modelo numérico, prosseguiu-se com uma série de simulações que permitissem uma caracterização indireta do regime de atrito ao qual estivessem submetidos os rotores principais, partindo-se apenas de medições de parâmetros no motor. Esse estudo é de grande relevância para a compreensão qualitativa da dinâmica do sistema real de perfuração, uma vez que ainda hoje não há técnicas totalmente confiáveis para caracterização do comportamento da coluna no fundo do poço a partir de dados da superfície somente.

Palavras-chave

dinâmica de perfuração ; vibração torcional ; *stick-slip* ; bancada de testes ; otimização .

Abstract

Santos, Adriano Domeny; Weber, Hans Ingo (Advisor); Aguiar, Romulo Reis (Co-Advisor). **Dynamics of a slender rotating column subject to the stick-slip action in two distinct regions**. Rio de Janeiro, 2015. 72p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This paper presents a study of the dynamic behavior of a representative test bench of a real rotary drilling system, comprising a DC motor coupled to a very flexible torsional system subjected to sources of friction which can induce self-excitation into two distinct regions of the system. The study includes the identification of parameter settings from the test bench by means of a series of experimental tests and characterization of friction, by obtaining the experimental curve of the friction coefficient as a function of the angular speed of the main rotor. The initial aim was to obtain a numerical model as simple as possible, capable of representing the test bench. Once obtained the numerical model, a series of numerical simulations were done, which allow an indirect characterization of the friction condition to which main rotors were subjected, starting only with the parameters measured at the drive. This study is of great importance for a qualitative understanding of the dynamics of the real drilling system, since today there is no fully reliable techniques to characterize the behavior of the column in the deep from surface data only.

Keywords

dynamic drill-string ; torsional vibration ; stick-slip phenomenon ; experimental bench ; optimization .

Sumário

Sumário das notações	12
1 Introdução	14
1.1 Sistemas de Perfuração	14
1.2 Revisão Bibliográfica	18
1.3 Bancada de Testes	19
1.4 Objetivo da Dissertação	20
2 Modelo Matemático	23
2.1 Equação da dinâmica do sistema acoplado	23
2.2 Otimização dos parâmetros concentrados	29
3 Ensaios Experimentais	35
3.1 Modelo de Atrito	35
3.2 Validação do modelo numérico da bancada de testes	43
3.3 Validação das duas primeiras frequências naturais do sistema torcional	50
3.4 Caracterização indireta do regime de atrito	51
4 Conclusão	56
5 Referências Bibliográficas	58
A Anexo 1	60
A.1 Dedução da equação característica e das autofunções para o sistema torcional	60
B Anexo 2	68
B.1 Bancada de testes	68

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Sonda de perfuração (Ritto, 2010).	15
Figura 1.2 - Estabilizadores da coluna de perfuração (Diamond-Enhanced Insert Stabilizer).	16
Figura 1.3 - Tipos de vibração ((Arcieri, 2013)).	17
Figura 1.4 - Configuração helicoidal de flabagem da coluna (Pogorelov et al., 2012).	19
Figura 1.5 - Bancada de Testes. Tendo o eixo como referência, da esquerda para a direita: motor, rotor J_2 , rotor J_1 .	20
Figura 2.1 - Bancada de testes. Tendo o eixo como referência, da esquerda para a direita: motor, rotor J_2 , rotor J_1 .	23
Figura 2.2 - Modelo do motor CC.	23
Figura 2.3 - Sistema torcional: (a) Modelo contínuo; (b) Modelo com parâmetros concentrados	24
Figura 2.4 - Modelo do Sistema Torcional.	30
Figura 2.5 - Modos de vibração para: (a) o modelo contínuo; (b) o modelo otimizado	34
Figura 3.1 - Bancada de testes em (Mihajlovic et al., 2004).	35
Figura 3.2 - Modelos de atrito para (a) o sistema planetário na saída do motor; (b) o atrito de fricção do sistema de freio sobre o rotor da extremidade inferior.	36
Figura 3.3 - <i>Stick-slip</i> em junta de revolução de braço robótico para baixas velocidades de rotação ((Garcia et al., 2002)).	37
Figura 3.4 - Dispositivo de freio sobre os rotores.	37
Figura 3.5 - Aferição do desvio do rotor em relação à base do mancal de suporte.	39
Figura 3.6 - (a) Frequência Angular do Rotor no tempo; (b) Aceleração Angular no tempo; (c) Força Normal no tempo; (d) Coeficiente de Atrito por Velocidade Angular.	40
Figura 3.7 - Experimento para obtenção do coeficiente de atrito estático.	41
Figura 3.8 - Curvas experimentais do coeficiente de atrito μ em função da velocidade angular Ω do rotor.	42
Figura 3.9 - Curvas estimadas para o coeficiente de atrito μ em função da velocidade angular Ω do rotor.	44
Figura 3.10 - (a) Gráfico da tensão de entrada V versus velocidade angular $\dot{\theta}_1$ do sistema físico no regime permanente; (b) Gráfico ampliado na região pontilhada.	46
Figura 3.11 - Gráficos de $\dot{\theta}_1$ no tempo para (a) $V = 1.0V$; (b) $V = 2.0V$; (c) $V = 3.0V$; (d) $V = 4.0V$ e (e) $V = 5.0V$.	47
Figura 3.12 - Gráficos para $V = 1.0V$: (a) $\dot{\theta}_1$ no tempo; (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo; (c) Torque de reação no motor (T_m) no tempo.	48
Figura 3.13 - Gráficos para $V = 5.0V$: (a) $\dot{\theta}_1$ no tempo; (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo; (c) Torque de reação no motor (T_m) no tempo.	49
Figura 3.14 - Modelo do Sistema Torcional.	51

Figura 3.15 - Modelo do Sistema Torcional.	51
Figura 3.16 - Gráficos para $V = 1.0V$, $F_{N_1} = 50N$ e $F_{N_2} = 0N$: (a) $\dot{\theta}_{N_1+1}$ no tempo (rotor J_2); (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo (rotor J_1).	52
Figura 3.17 - Gráficos para $V = 1.0V$, $F_{N_1} = 0N$ e $F_{N_2} = 50N$: (a) $\dot{\theta}_{N_1+1}$ no tempo (rotor J_2); (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo (rotor J_1).	53
Figura 3.18 - Gráfico da velocidade angular $\dot{\theta}_1$ do sistema físico para diferentes regimes de atrito.	54
Figura 3.19 - Gráfico do torque de reação T_m no motor para diferentes regimes de atrito.	55
Figura A.1 - Modelo do Sistema Torcional.	60
Figura B.1 - Bancada de testes vista de frente (Andrade, 2013).	68
Figura B.2 - Motor CC (Andrade, 2013).	69
Figura B.3 - Sistema de freio, instrumentado com uma célula de carga.	69
Figura B.4 - Sistema de aferição do torque de reação (Andrade, 2013).	70
Figura B.5 - Placa de aquisição de dados (Andrade, 2013).	70
Figura B.6 - Ambiente <i>Lab View</i> para observação dos sinais adquiridos.	71
Figura B.7 - Sensores utilizados na bancada de testes: (a) <i>Encoder</i> ; (b) Sensor de força piezoelétrico; (c) Célula de carga ((Andrade, 2013), adaptado).	71
Figura B.8 - Disposição dos sensores ao longo da bancada de testes.	72

Lista de Tabelas

Tabela 1.1 - Parâmetros da Bancada de Testes.	20
Tabela 2.1 - Parâmetros do motor.	24
Tabela 2.2 - Principais Variáveis Adimensionalizadas.	28
Tabela 2.3 - Frequências naturais do sistema torcional.	31
Tabela 2.4 - Frequências Naturais Otimizadas para Diferentes Números de Graus de Liberdade N_m .	32
Tabela 3.1 - Coeficientes de Atrito Estático.	41
Tabela 3.2 - Coeficientes de Amortecimento.	46
Tabela 3.3 - Regimes de atrito.	52

Sumário das notações

BHA	<i>bottom hole assembly</i>
WOB	<i>weight on bit</i>
l	comprimento do eixo metálico $[m]$
l_1	distância entre o segundo rotor e a saída da caixa de redução $[m]$
J_1	momento de inércia do rotor da extremidade $[kgm^2]$
J_2	momento de inércia do rotor intermediário $[kgm^2]$
J_m	momento de inércia do rotor interno do motor $[kgm^2]$
ρ	densidade volumétrica do aço $[kg/m^3]$
G	coeficiente de cisalhamento do aço $[Pa]$
d	diâmetro do eixo metálico $[m]$
J	momento polar de inércia da seção transversal do eixo metálico $[m^4]$
N_m	número de graus de liberdade do sistema torcional no modelo de parâmetros concentrados
L	indutância de armadura $[H]$
R_m	resistência de armadura $[\Omega]$
C_m	coeficiente de amortecimento interno do motor $[kgm^2/s]$
n_R	redução no sistema planetário
K_t	constante de torque $[Nm/A]$
K_e	constante de tensão $[Vs/rad]$
I_i	i —ésimo momento de inércia no modelo de parâmetros concentrados $[kgm^2]$
x_i	posição do i —ésimo momento de inércia no modelo de parâmetros concentrados $[m]$
x	posição ao longo do eixo metálico $[m]$
k_i	rigidez torcional entre os rotores com momentos de inércia I_i e I_{i+1} $[Nm/rad]$
c_i	coeficiente de amortecimento entre os rotores com momentos de inércia I_i e I_{i+1}
K	energia cinética generalizada total do sistema eletromecânico $[J]$
U	energia potencial total do sistema eletromecânico $[J]$
θ_i	i —ésimo grau de liberdade do sistema torcional $[rad]$
q	carga elétrica $[C]$
i_A	corrente de armadura do motor $[A]$
η_i	força generalizada da equação de Ritz

T_{b_1}	torque de atrito seco no mancal de apoio do rotor J_1 [Nm]
T_{b_2}	torque de atrito seco no mancal de apoio do rotor J_2 [Nm]
T_{b_3}	torque de atrito seco no mancal do motor J_1 [Nm]
T_{s_1}	torque de atrito seco induzido no rotor J_1 [Nm]
T_{s_2}	torque de atrito seco induzido no rotor J_2 [Nm]
C	matriz de amortecimento nao adimensionalizada [kgm^2/s]
K	matriz de rigidez não adimensionalizada [Nm/rad]
I	matriz de inércia [kgm^2]
α	parâmetro da equação de movimento - Eq. (2-19)
β	parâmetro da equação de movimento - Eq. (2-19)
σ	parâmetro da equação de movimento - Eq. (2-19)
$T_{atr_{1,2,3}}$	torque de atrito total sobre o sistema torcional [Nm]
$I_{D_j}^N$	j —ésima coluna da matriz identidade de ordem N
T	escala de tempo s
y^*	grandeza generica adimensionalizada
c_p	velocidade de propagação da onda torcional no eixo [m/s]
γ_j	j —ésimo momento de inércia adimensional
λ_j	frequência natural adimensional obtida analiticamente a partir da equação da onda
Ψ_{obj}	função objetivo
δ	amplitude de oscilação no deslocamento do pino de atrito induzido [m]
$N(\theta)$	força normal induzida no contato do pino de atrito com a face do rotor [N]
N_0	Força normal nominal de pré-carga [N]
N_s	amplitude de oscilação da força normal [N]
φ	defasagem entre o deslocamento angular do rotor e a força normal [rad]
R	distância entre o ponto de aplicação da força normal e o eixo de rotação do rotor [m]
f_{aq}	frequência de aquisição de dados [Hz]
ω_0	parâmetro do modelo de atrito [rad/s]
ω_0	parâmetro do modelo de atrito [rad/s]
λ	parâmetro do modelo de atrito
Ψ_1	função de atrito para velocidade angular crescente
Ψ_2	função de atrito para velocidade angular decrescente
T_m	torque de reação no motor [Nm]

1

Introdução

1.1

Sistemas de Perfuração

O processo de perfuração de um poço de petróleo consiste na abertura de um furo em terreno rochoso através da retirada de cascalho por meio de uma broca, até que o reservatório seja alcançado. Para que o processo se desenvolva, é necessário um dispositivo de transporte de energia rotativa da superfície, onde se encontra a fonte de energia - o motor - até o suporte da broca, fazendo-o girar; e de um dispositivo que transporte o cascalho retirado do fundo do poço até a superfície. Para tal fim, a indústria petrolífera conta com uma técnica, denominada perfuração rotativa, que consiste de um sistema mecânico e de um sistema hidráulico combinados para o transporte de energia e cascalho, conforme ilustrado na Fig. 1.1.

O sistema mecânico é constituído por uma coluna cilíndrica oca, chamada coluna de perfuração, projetada para atuar em regime de tensão; pelo BHA - bottom hole assembly - que é um cilindro oco mais robusto, projetado para suportar carregamentos de compressão; e pela broca. A extremidade superior da coluna encontra-se acoplada a uma mesa rotativa na superfície, a qual alimenta o sistema com energia rotativa. Em sua extremidade inferior, a coluna de perfuração está fixa ao BHA, que por sua vez comporta a broca (ver Fig. 1.1). O principal papel do BHA é gerar o peso sobre a broca durante a retirada de cascalho e garantir que a coluna permaneça atuando em regime de tração. Existe também um sistema de içamento na superfície que atua movimentando a coluna de perfuração na direção vertical. Tanto o sistema de içamento quanto a coluna encontram-se sustentados pela torre de perfuração.

O sistema hidráulico, por sua vez, é constituído por uma bomba, que se encontra na torre de perfuração, pelo fluido de perfuração e por canais de transporte do fluido. A bomba garante o fluxo do fluido de perfuração inicialmente pelo interior da coluna num movimento descendente, no sentido superfície-broca, e posteriormente pela fresta anular entre a coluna de perfuração e a parede do furo, num movimento ascendente. O fluido possui propriedades específicas, como alta viscosidade e comportamento não-Newtoniano, de modo que possa desempenhar melhor suas funções no sistema. O fluido de um modo geral atua no arrefecimento e lubrificação da broca durante o processo de

perfuração, no transporte do cascalho retirado pela broca até a superfície, e pela estabilidade do movimento da coluna, amortecendo efeitos mecânicos das diversas perturbações geradas sobre a coluna na sua interação com a rocha. O comportamento não-Newtoniano confere ao fluido uma consistência gelatinosa e por isso é necessário, pois o processo de perfuração é interrompido diversas vezes para acoplamento de um novo *drill pipe* (unidade de cilindros metálicos que compõem a coluna de perfuração), e durante esse período o cascalho deve permanecer suspenso no fluido de perfuração. Ao chegar à superfície, a lama de perfuração é sujeita a um processo de purificação, no qual o cascalho é retirado, juntamente com outros elementos, de modo que o fluido esteja em condições de retornar à broca pelo interior da coluna, fechando o seu ciclo.

1. Crown block
2. Traveling block and hook
3. Drawwork
4. Swivel
5. Hose
6. Tube
7. Mud pump
8. Kelly
9. Rotary drive
10. Rotary table
11. Drill pipe
12. Tool joint
13. Stabilizers
14. Drill collar
15. Bit
16. Casing
17. Blowout preventer
18. Derrick

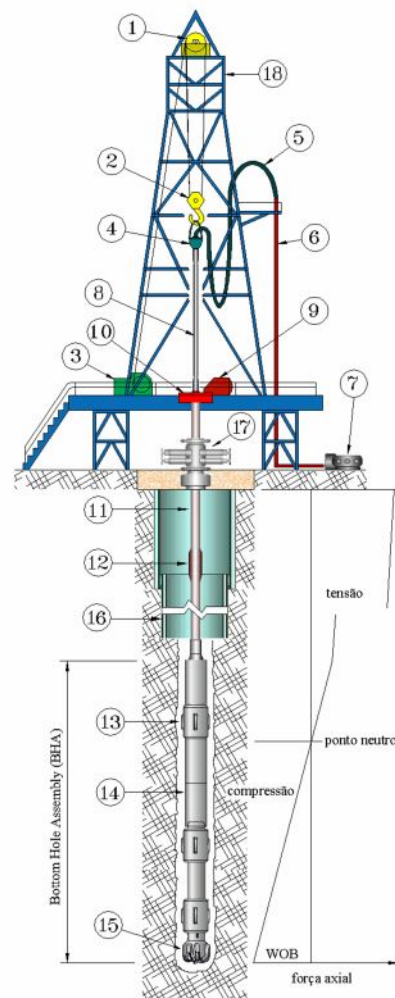


Figura 1.1: Sonda de perfuração (Ritto, 2010).

Junto ao BHA existem estruturas fixas chamadas estabilizadores, cuja função é centralizar a coluna de perfuração, afastar a coluna da parede do furo e manter o calibre do poço. São compostos de aletas que tocam a parede

do furo sem obstruírem a passagem do fluido de perfuração (ver a Fig. 1.2). Constituem juntamente com a interação broca-rocha uma das principais fontes de atrito sobre a coluna de perfuração em poços verticais.

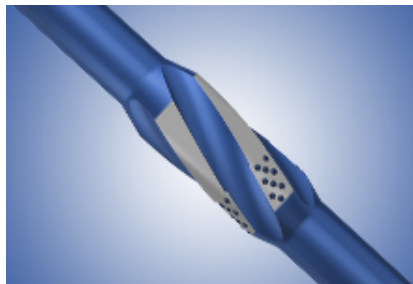


Figura 1.2: Estabilizadores da coluna de perfuração (Diamond-Enhanced Insert Stabilizer).

De um modo geral, são três os parâmetros de controle do processo de perfuração que estão disponíveis ao operador: o peso sobre a broca (WOB), a velocidade de rotação da coluna de perfuração, e a vazão do fluido de perfuração. Na prática o peso real sobre a broca não é medido diretamente, e por isso é estimado como a diferença entre o peso total da coluna de perfuração livre e a carga de tração no gancho onde está apoiada a coluna em sua extremidade superior, quando a mesma se encontra apoiada no fundo do poço. Na realidade há uma certa variabilidade no valor real de WOB, por conta do contato de elementos da coluna na parede do furo e do regime de vibração axial ao qual a broca está sujeita. Por sua vez, a velocidade de rotação da broca é estimada pela velocidade de rotação imposta pela mesa rotativa, mas também em geral pode sofrer uma grande variabilidade devido à alta flexibilidade torcional da coluna de perfuração.

Alguns parâmetros são adotados como indicadores da eficiência da perfuração. O principal deles é a taxa de penetração da coluna na rocha (ROP - rate of penetration), que em geral oscila entre 1 e 50m/h ((Franca, 2004)). Um outro parâmetro mais secundário seria a variação da pressão na linha do fluido de perfuração, o que em geral indica alguma anomalia no processo, uma vez que normalmente a pressão permanece relativamente constante durante a perfuração. Por fim, a granulometria do cascalho recolhido na purificação da lama de perfuração, caso apresente grande variabilidade, constitui um bom indicador quanto à existência de alguma disfunção de perfuração durante o processo ((Franca, 2004)).

Um outro fenômeno de grande importância na perfuração devido ao prejuízo que acarreta é a vibração da coluna, cujos efeitos costumam ser mais significativos na região próxima à broca.

Há diversos regimes de vibração do sistema, mas todos eles se resumem a uma combinação de três tipos de vibração bem distintas: a vibração lateral (*whirl*), a vibração torcional (*stick-slip*) e a vibração axial (*bit bounce*), como pode ser observado na Fig. 1.3. Constituem a principal causa da perda de eficiência no processo de perfuração, acelerando o desgaste da broca e a falha por fadiga de componentes da coluna. Quando as vibrações são severas, ou seja, no caso de excitação de alguma frequência natural do sistema, surgem disfunções que podem conduzir a uma falha prematura do equipamento. O desacoplamento dos três tipos de vibração citados é assumido em determinados modelos a título de hipótese simplificadora, pois na realidade cada um deles pode induzir os outros dois.

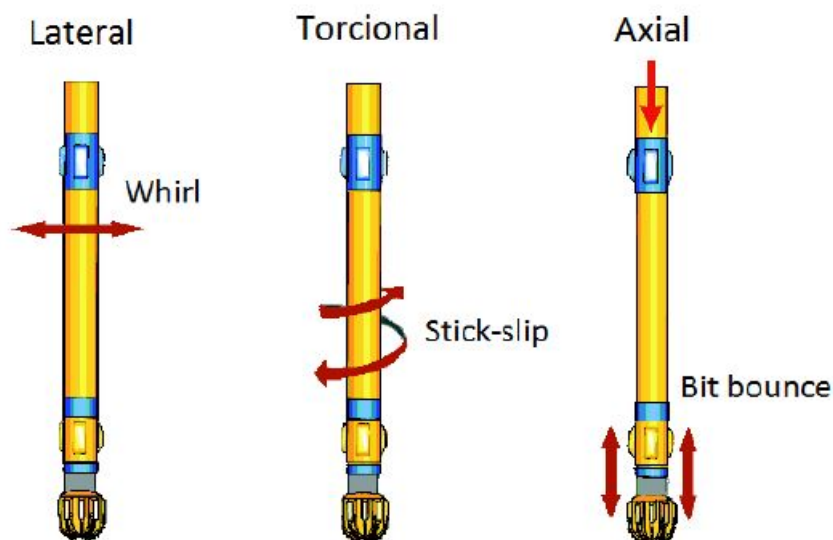


Figura 1.3: Tipos de vibração ((Arcieri, 2013)).

Em particular, as vibrações axiais são geradas pelas excitações induzidas na interação entre a broca e a formação rochosa, e por isso estão muito relacionadas ao tipo de broca utilizada e às propriedades da rocha. Quando a frequência de excitação corresponder a uma frequência axial natural da coluna e o amortecimento for baixo, a broca pode perder literalmente o contato com a rocha, disfunção conhecida como “o quicar da broca” (*bit bounce*), o que reduz consideravelmente a taxa de penetração ROP. Em alguns casos a flutuação axial da coluna pode induzir vibrações laterais, fenômeno conhecido como ressonância paramétrica ((Franca, 2004)).

As vibrações torcionais, por sua vez, são geradas quando o torque resistivo na interação broca-rocha contrapõe-se consideravelmente aos efeitos de tração da coluna, tornando nula a velocidade angular da broca. Enquanto isso a mesa rotativa continua girando, provocando o acúmulo de energia de torção

na coluna e consequente aumento do torque de reação sobre o motor e sobre a broca. Quando este torque acumulado atinge um valor suficiente para vencer o torque resistivo, o BHA é acelerado a velocidades angulares que podem atingir até três vezes o valor da rotação da mesa rotativa. Essa alternância entre acúmulo de torque e rompimento do torque resistivo é um fenômeno conhecido como *stick-slip*.

Do ponto de vista da fadiga, as vibrações laterais são consideradas como as mais destrutivas, pois geram tensões cíclicas de alta frequência no BHA. São geradas pelo movimento lateral do BHA no fundo do poço, e é minimizada pela atuação dos estabilizadores. Em contrapartida, o contato dos estabilizadores com a parede do furo, associado às vibrações laterais, podem gerar um movimento de precessão da órbita formada pelo centro do BHA, tanto no mesmo sentido de rotação da mesa rotativa (*forward whirl*), quanto no sentido contrário (*backward whirl*).

Muitas técnicas têm sido implementadas na indústria no intuito de se minimizar esses efeitos vibratórios. Uma das linhas de pesquisa nesse sentido tem sido a implementação de estratégias de controle, com a atuação realizada pela mesa rotativa sobre a coluna, o que exige uma compreensão cada vez mais apurada da dinâmica do sistema.

1.2

Revisão Bibliográfica

As primeiras pesquisas envolvendo carregamento dinâmico sobre colunas de perfuração ocorreram em 1960, quando foram realizadas medições na superfície que indicavam o aparecimento de vibrações tanto torcionais quanto axiais (Finnie e Bayley, 1960). Em 1968 foi demonstrada a ocorrência da perda de contato da broca com a formação rochosa durante o processo de perfuração, decorrente da vibração axial da estrutura de fundo. A esse fenômeno foi dado o nome de “*bit bounce*” ((Deily et al., 1968)). Em 1987 pode-se verificar que as vibrações do tipo *stick-slip* constituíam a principal causa das flutuações da rotação da broca, em relação à mesa rotativa (Deily et al., 1968).

Por sua vez, as vibrações laterais de fundo inicialmente não foram consideradas relevantes, uma vez que dificilmente eram detectadas, a não ser para poços de pouca profundidade, pois acabavam sendo amortecidas ao longo da coluna. Somente nos anos 80 surgiram os primeiros dados com medições de fundo que evidenciavam esse tipo de vibração na parte inferior da coluna ou no BHA (Close et al., 1988).

Estudos teóricos apoiando-se em modelos unidimensionais da equação da onda foram realizados em grande parte nos trabalhos que tratavam da dinâmica

torcional e axial da coluna (Bakenov et al., 2003). Em alguns trabalhos, o carregamento axial foi abordado considerando uma parcela de carga estática capaz de induzir a flambagem do BHA, que somando-se à interação da coluna com a parede circular resultava numa configuração helicoidal de flambagem da coluna (Pogorelov et al., 2012) (ver Fig. 1.4).

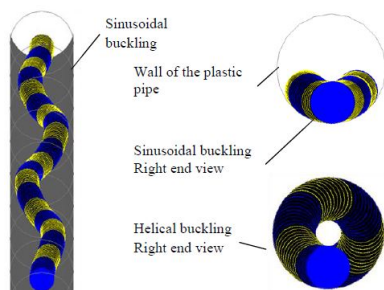


Figura 1.4: Configuração helicoidal de flambagem da coluna (Pogorelov et al., 2012).

Em geral as vibrações que acontecem no fundo do poço são de grande complexidade e, por isso, em muitos trabalhos teóricos procurou-se tratar os diferentes tipos de vibração individualmente (Yigit e Christoforou, 1998). Seguindo essa linha, em (Andrade, 2013) foram realizados estudos de vibração torcional numa bancada de testes, na qual procurou se eliminar os efeitos do acoplamento mecânico entre as vibrações laterais e torcionais restringindo os movimentos laterais dos rotores da bancada por meio de mancais.

1.3 Bancada de Testes

O sistema de perfuração pode ser estudado de maneira mais simplificada, abordando-se apenas um tipo de vibração como principal foco de investigação.

O presente trabalho se propôs a estudar o comportamento dinâmico torcional de uma bancada, constituída basicamente por um pêndulo duplo torcional acoplado a um motor CC. O pêndulo duplo consiste de um eixo metálico extremamente esbelto no qual encontram-se fixos dois rotores metálicos maciços, um na extremidade do eixo e o outro num ponto intermediário, estando a outra extremidade do eixo fixa à saída de um sistema planetário de redução, cuja entrada por sua vez encontra-se acoplada ao rotor do motor (ver Fig. 1.5).

O eixo metálico encontra-se apoiado em mancais de rolamento, em regiões do eixo próximas aos pontos de fixação dos rotores. A utilização dos mancais se deu com o intuito de se isolar o movimento torcional o máximo possível do movimento lateral do eixo, minimizando-se assim os efeitos do acoplamento entre os dois tipos de vibração.

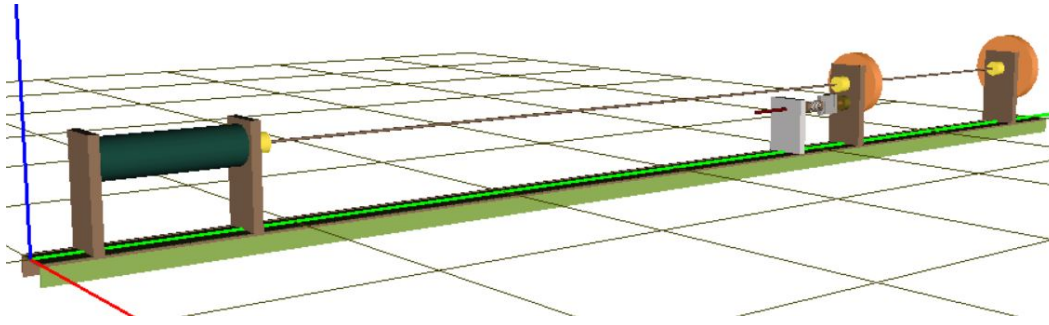


Figura 1.5: Bancada de Testes. Tendo o eixo como referência, da esquerda para a direita: motor, rotor J_2 , rotor J_1 .

Como se pode notar da Fig. 1.5, a bancada de testes foi construída para atuar na posição horizontal, apesar de em geral as colunas de perfuração serem utilizadas na posição vertical. Essa configuração da bancada se justifica não apenas pela maior facilidade de manuseio, mas principalmente porque os fenômenos torcionais que estão sendo estudados sofrem muito pouca influência da orientação da bancada, uma vez que os efeitos do acoplamento mecânico entre os três tipos de vibração foram praticamente anulados com o uso dos mancais de apoio do eixo metálico, e também porque nenhum tipo de carregamento axial foi induzido sobre o eixo.

Na Tab. 1.1 foram enumerados os principais parâmetros da bancada de testes utilizada.

Tabela 1.1: Parâmetros da Bancada de Testes.

Parâmetro	Símbolo	Valor numérico
Comprimento do eixo metálico (m)	l	2.430
Distância entre o segundo rotor e a saída da caixa de redução (m)	l_1	1.742
Momento de inércia do rotor 1 ($kg * m^2$)	J_1	0.0276
Momento de inércia do rotor 2 ($kg * m^2$)	J_2	0.0153
Densidade do aço (kg/m^3)	ρ	7850
Coefficiente de cisalhamento do aço (GPa)	G	78.9
Diâmetro do eixo (mm)	d	3

1.4

Objetivo da Dissertação

Durante o processo de perfuração, a principal causa da flutuação da velocidade angular da coluna no fundo do poço é a interação da broca com a formação rochosa.

Uma segunda fonte de atrito relevante na dinâmica torcional é o contato dos estabilizadores com a parede do furo, como havia sido citado na Seção 1.1. Essa interação acontece de forma intermitente, de modo que hora pode provocar uma resistência de maior intensidade ao movimento do BHA, hora

de menor intensidade. Essa atuação dos estabilizadores na dinâmica torcional é algo que deve ser levado em consideração na escolha da melhor estratégia de controle da velocidade de rotação das estruturas de fundo.

Por outro lado, uma dificuldade inicial que surge é como o operador seria capaz de identificar a existência de uma segunda fonte de atrito relevante no sistema, uma vez que não seja possível obter uma medição direta de parâmetros de fundo.

O presente trabalho se propõe a apresentar para a bancada de testes descrita na Seção 1.3, formas de caracterização de diferentes regimes de atrito impostos ao sistema mecânico, constituído pelos rotores e pelo eixo metálico, a partir unicamente de parâmetros medidos diretamente no motor CC, tais como a velocidade angular na saída da caixa de redução e o torque de reação do sistema mecânico sobre o motor.

Essa caracterização indireta de regimes de atrito, mesmo validada apenas para a bancada de testes, pode constituir uma ferramenta de grande utilidade para o desenvolvimento de técnicas de apoio à decisão na escolha da melhor estratégia de controle da velocidade de rotação de fundo no sistema real, considerando-se a mesa rotativa como o principal atuador do sistema.

1.4.1

Organização dos Capítulos

A presente dissertação é composta por quatro capítulos, sendo esse primeiro dedicado a uma breve introdução, na qual foi descrito o sistema real que constitui as sondas de perfuração, abordando-se seus principais componentes, bem como os principais problemas mecânicos que traz consigo, como é o caso dos diferentes tipos de vibração, provenientes em sua maior parte das interações de fundo do sistema rotativo. No Cap. 1 foi também descrito o sistema simplificado constituído pela bancada de testes, que por sua vez corresponde ao foco das investigações realizadas no presente trabalho.

O Cap. 2 se concentra na descrição do modelo matemático da bancada de testes, atendo-se ao método de geração das equações de movimento do sistema eletromecânico acoplado constituído por um motor CC e um pêndulo duplo torcional, baseando-se na obtenção da expressão do Lagrangeano do sistema e na utilização do método de Ritz ((Hodges e Pierce, 2008)). É dedicado também um espaço para a descrição da metodologia de otimização adotada na obtenção dos parâmetros do modelo, partindo-se dos parâmetros reais da bancada, obtidos através de ensaios experimentais, e os métodos de otimização utilizados.

O Cap. 3 é dedicado a descrever os ensaios experimentais realizados

para a identificação de parâmetros da bancada que alimentariam o modelo numérico, e levantamentos das curvas experimentais de atrito nos rotores em função da velocidade angular de rotação dos mesmos. Na terceira parte foram feitos alguns experimentos mais simples com a bancada, sem a aplicação de atrito induzido, para fins de validação do modelo numérico.

Por fim, na quarta parte do Cap. 3, são descritos todos os ensaios experimentais realizados para os diferentes regimes de atrito aos quais foram submetidos os rotores do sistema mecânico. São apresentadas também as curvas de saída de torque de reação e velocidade angular no tempo, obtidas a partir do motor, tanto numericamente quanto experimentalmente, tendo sido analisadas na expectativa de que fossem constatados padrões de reconhecimento dos diferentes regimes de atrito aplicados.

No Cap. 4 são elencadas resumidamente as principais conclusões do trabalho, e enumeradas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2

Modelo Matemático

2.1

Equação da dinâmica do sistema acoplado

A bancada de testes foi modelada considerando o acoplamento eletromecânico entre o motor CC e o pêndulo duplo torcional. A Figura (2.1) ilustra o esquema geral da bancada.

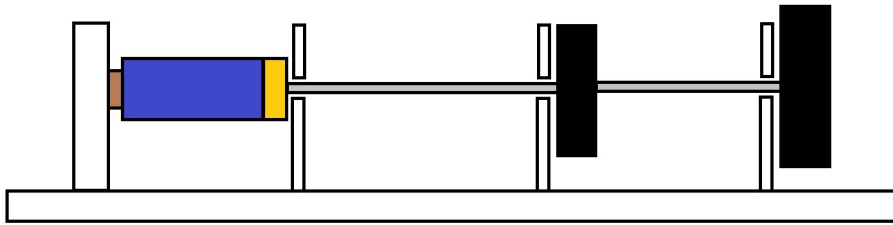


Figura 2.1: Bancada de testes. Tendo o eixo como referência, da esquerda para a direita: motor, rotor J_2 , rotor J_1 .

O motor CC foi modelado como uma fonte de tensão ligada em série com um resistor, um indutor e uma saída de torque (ver Fig. 2.2). O motor utilizado na bancada também possui um redutor mecânico ligado à saída de torque.

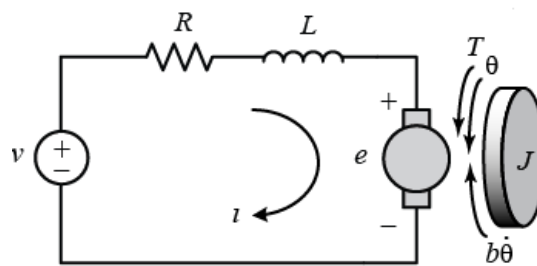


Figura 2.2: Modelo do motor CC.

A Tabela. 2.1 apresenta uma lista com os parâmetros do motor e seus respectivos valores.

O pêndulo duplo torcional, constituído pelos dois rotores maciços e pelo eixo metálico, foi fixado à saída da caixa de redução que está conectada ao motor. O pêndulo duplo, juntamente com o rotor interno do motor, o qual

Tabela 2.1: Parâmetros do motor.

Parâmetros	Descrição	Valor	Unidade
J_m	Inércia do rotor do motor	4.698×10^{-4}	$kg * m^{2(2)}$
L	Indutância de armadura	8.437×10^{-4}	$H^{(2)}$
R_m	Resistência de armadura	0.33	$\Omega^{(1)}$
C_m	Coefficiente de amortecimento	1.784×10^{-4}	$kg * m^2/s^{(2)}$
n_R	Redução	8	-
K_t	Constante de torque	0.0923	(Nm/A)
K_e	Constante de tensão	0.0766	$(V/(rad/s))$

⁽¹⁾ DC Motor manual: ENGEL GNM 5480 – G6.1

⁽²⁾ (Andrade, 2013)

se encontra integrado ao eixo do pêndulo por meio da caixa de redução, constituem o sistema torcional completo.

O sistema torcional foi representado dinamicamente por um conjunto de parâmetros concentrados, tendo entre seus elementos constituintes as inércias I_i , situadas respectivamente nas posições x_i , para $i = 1, 2, \dots, N_m$, sendo N_m o número de graus de liberdade do sistema de torção, de modo que $x_1 = 0$ e $x_{N_m} = l$. O parâmetro l corresponde ao comprimento total do eixo metálico. Nesse mesmo modelo, as inércias estão conectadas entre si por meio de molas torcionais de constante $k_i = \frac{GJ}{x_{i+1} - x_i}$, e também por amortecedores de torque de atrito proporcional à velocidade angular relativa entre duas inércias consecutivas, com coeficientes de amortecimento c_i . Para o sistema torcional, $I_1 = n_R^2 J_m$, $I_{N_1+1} = J_2$ e $I_{N_m} = J_1$, onde J_m é a inércia do rotor interno do motor, n_R é a redução, J_2 é a inércia do rotor intermediário, localizado na posição $x_{N_1+1} = l_1$, e J_1 é a inércia do rotor da extremidade. O índice $N_1 = \lfloor \frac{l_1}{l} (N_m - 1) \rfloor$ foi calculado de modo que os parâmetros de inércia fossem distribuídos inicialmente de maneira uniforme entre os rotores principais. A Figura (2.3) ilustra o modelo do sistema torcional em parâmetros concentrados.

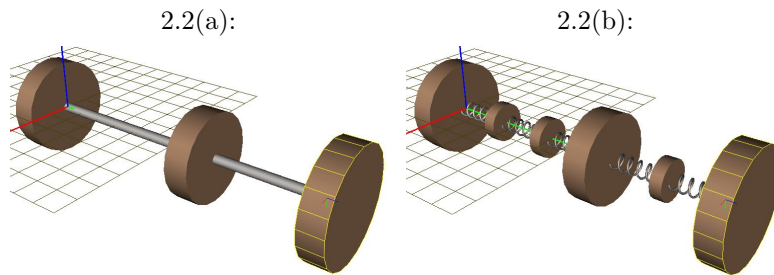


Figura 2.3: Sistema torcional: (a) Modelo contínuo; (b) Modelo com parâmetros concentrados

As equações da dinâmica do sistema acoplado foram geradas a partir da equação de Ritz, considerando $L_{op} = K - U$ o Lagrangiano do sistema

acoplado, e $\mathbf{z} = [\theta \ q]^T$, o vetor de coordenadas generalizadas, sendo $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]^T$ o vetor de posições angulares dos parâmetros concentrados de inércia e q a carga elétrica no motor.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{op}}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial L_{op}}{\partial z_i} = \eta_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, N_m + 1 \quad (2-1)$$

As expressões da energia cinética generalizada K e da energia potencial total U para o sistema acoplado estão explicitadas em Eq. (2-2) e Eq. (2-3), respectivamente.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m} I_j \dot{\theta}_j^2 + \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \quad (2-2)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m-1} k_j (\theta_{j+1} - \theta_j)^2 \quad (2-3)$$

As forças generalizadas atuantes no sistema foram os torques de amortecimento $\eta_{D_1}, \eta_{D_2}, \dots, \eta_{D_{N_m}}$ aplicados sobre as inércias I_1, I_2, \dots, I_{N_m} , respectivamente; o torque η_{motor_1} de acoplamento dos sistemas mecânico e elétrico, aplicado sobre o rotor I_1 , conforme Eq. (2-7); e a tensão elétrica total η_q sobre a carga q , conforme Eq. (2-8).

$$\eta_{D_1} = -c_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (2-4)$$

$$\eta_{D_i} = c_{i-1}\dot{\theta}_{i-1} - (c_{i-1} + c_i)\dot{\theta}_i + c_i\dot{\theta}_{i+1}; \quad i = 2, \dots, N_m - 1 \quad (2-5)$$

$$\eta_{D_{N_m}} = -c_{N_m-1}(\dot{\theta}_{N_m} - \dot{\theta}_{N_m-1}) \quad (2-6)$$

$$\eta_{motor} = n_R(k_t \dot{q} - n_R C_m \dot{\theta}_1) \quad (2-7)$$

$$\eta_q = v_A - R_m \dot{q} - k_e \dot{\theta}_1 \quad (2-8)$$

Foram também considerados os torques de atrito $\eta_{b_1} = -T_{b_3}(\dot{\theta}_1)$, $\eta_{b_{N_1+1}} = -T_{b_2}(\dot{\theta}_{N_1+1})$ e $\eta_{b_{N_m}} = -T_{b_1}(\dot{\theta}_{N_m})$ dos mancais sobre os rotores I_1 ,

I_{N_1+1} e I_{N_m} , respectivamente; e os torques de atrito $\eta_{s_{N_1+1}} = -T_{s_2}(\dot{\theta}_{N_1+1})$ e $\eta_{s_{N_m}} = -T_{s_1}(\dot{\theta}_{N_m})$ gerados pelo contato dos pinos metálicos de freio sobre os rotores I_{N_1+1} e I_{N_m} . Todas as curvas de torque de atrito foram obtidas experimentalmente em função da velocidade angular do respectivo rotor. A obtenção dessas curvas é descrita na Seção 3.

Substituindo-se a expressão do Lagrangiano e detalhando as forças generalizadas em Eq. (2-1), obteve-se as equações de movimento do sistema (ver de Eq. (2-9) a Eq. (2-13)).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \eta_{motor} + \eta_{D_1} + \eta_{b_1} \quad (2-9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = \eta_{D_i}; \quad i = 2, \dots, N_m - 1; \quad i \neq N_1 + 1 \quad (2-10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_{N_1+1}} + \frac{\partial U}{\partial \theta_{N_1+1}} = \eta_{D_{N_1+1}} + \eta_{b_{N_1+1}} + \eta_{s_{N_1+1}} \quad (2-11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_N} + \frac{\partial U}{\partial \theta_{N_m}} = \eta_{D_N} + \eta_{b_{N_m}} + \eta_{s_{N_m}} \quad (2-12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = \eta_q \quad (2-13)$$

Substituindo Eq. (2-2), Eq. (2-3), Eq. (2-4), Eq. (2-5), Eq. (2-6), Eq. (2-7) e Eq. (2-8) nas expressões de Eq. (2-9) a Eq. (2-13), obteve-se as expressões de Eq. (2-14) a Eq. (2-18).

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 = \\ = n_R k_t \dot{q} - n_R^2 C_m \dot{\theta}_1 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - T_{b_3}(\dot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} I_i \ddot{\theta}_i - k_{i-1} \theta_{i-1} + (k_{i-1} + k_i) \theta_i - k_i \theta_{i+1} = \\ = c_{i-1} \dot{\theta}_{i-1} - (c_{i-1} + c_i) \dot{\theta}_i + c_i \dot{\theta}_{i+1}, \\ i = 2, \dots, N_m - 1; \quad i \neq N_1 + 1 \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned} I_{N_1+1} \ddot{\theta}_{N_1+1} - k_{N_1} \theta_{i-1} + (k_{N_1} + k_{N_1+1}) \theta_{N_1+1} - k_{N_1+1} \theta_{N_1+2} = \\ = c_{N_1} \dot{\theta}_{N_1} - (c_{N_1} + c_{N_1+1}) \dot{\theta}_{N_1+1} + c_{N_1+1} \dot{\theta}_{N_1+2} + \\ - T_{b_2}(\dot{\theta}_{N_1+1}) - T_{s_2}(\dot{\theta}_{N_1+1}) \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$\begin{aligned} I_{N_m} \ddot{\theta}_{N_m} - k_{N_m-1} \theta_{N_m-1} + k_{N_m-1} \theta_{N_m} = \\ = -c_{N_m-1} (\dot{\theta}_{N_m} - \dot{\theta}_{N_m-1}) - T_{b_1}(\dot{\theta}_{N_m}) - T_{s_1}(\dot{\theta}_{N_m}) \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$L\ddot{q} = v_A - R_m\dot{q} - n_R k_e \dot{\theta}_1 \quad (2-18)$$

Nota-se que Eq. (2-18) corresponde à equação do circuito do motor CC, cujo modelo foi ilustrado na Fig. 2.2. As equações Eq. (2-14) a Eq. (2-18) podem ser escritas numa forma mais compacta, conforme Eq. (2-19).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}} & \alpha \\ \beta & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\sigma}{R_m} \end{bmatrix} v_A \end{aligned} \quad (2-19)$$

Os termos $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}$ e $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{C}$ de Eq. (2-19) correspondem respectivamente às matrizes de rigidez e amortecimento do sistema torcional, sendo \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{K} as matrizes apresentadas em Eq. (2-20), Eq. (2-21) e Eq. (2-22).

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{N_m} \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (c_1 + n_R^2 C_m) & -c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) & -c_2 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N_m-1} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2 + k_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{N_m-1} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

Os termos $\alpha = \begin{bmatrix} -n_R k_t / L & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\beta = \begin{bmatrix} n_R k_e / L & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ são grandezas de acoplamento do sistema eletromecânico e $\sigma = R_m / L$ um dos coeficientes da equação do motor. O termo $\mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}}$ corresponde ao torque de

atrito total atuante sobre o sistema torcional (ver Eq. (2-23)).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{atr1,2,3}} = & T_{s_2}(\dot{\theta}_{N_1+1})\mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{s_1}(\dot{\theta}_{N_m})\mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + \\ & + T_{b_3}(\dot{\theta}_1)\mathbf{I}_{\mathbf{D}_1}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b_2}(\dot{\theta}_{N_1+1})\mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b_1}(\dot{\theta}_{N_m})\mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} \end{aligned} \quad (2-23)$$

Na Eq. (2-23) o termo $\mathbf{I}_{\mathbf{D}_j}^{(\mathbf{N}_m+1)}$ corresponde à j -ésima coluna da matriz identidade de ordem $N_m + 1$.

Uma vez formulada a equação da dinâmica do sistema acoplado, partiu-se numa segunda etapa para a adimensionalização da equação, com o intuito de se obter os parâmetros que governam o comportamento dinâmico do sistema.

As principais grandezas adimensionalizadas foram a posição ao longo do eixo metálico, o tempo, a tensão de entrada no motor e a carga elétrica. A Tab. (2.2) apresenta uma lista com as principais grandezas do sistema e as suas correspondentes adimensionais.

Tabela 2.2: Principais Variáveis Adimensionalizadas.

Descrição	Variável	Adimensional	Escala
Posição ao longo do eixo metálico	x	x^*	$x = x^*l$
Tempo	t	t^*	$t = t^*T$
Tensão de entrada no motor	v_A	v_A^*	$v_A = v_A^*2\pi k_e$
Corrente de armadura do motor	$i_A = \dot{q}$	i_A^*	$i_A = i_A^* \frac{2\pi K_e}{R_m}$
Carga elétrica	q	q^*	$q = q^*T \frac{2\pi K_e}{R_m}$

A escala de tempo foi definida como a razão entre o comprimento do eixo e a velocidade de propagação de uma perturbação no mesmo eixo, ou seja, $T = l/c_p$, sendo $c_p = \sqrt{G/\rho}$, G o módulo de cisalhamento do aço e ρ a sua densidade volumétrica.

A escala de tensão foi definida como a força contra eletromotriz no motor para uma frequência de rotação do eixo do motor de $1Hz$. Naturalmente a escala da corrente i_A foi definida como a razão entre a escala da tensão e a resistência de enrolamento de armadura R_m do motor, e a escala da carga elétrica q como o produto da escala da corrente com a escala de tempo.

Substituindo as expressões da quarta coluna da Tab. (2.2) na equação da dinâmica do sistema (ver Eq. (2-19)), chegou-se à formulação apresentada na Eq. (2-24).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^* \\ \ddot{q}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^* & \alpha^* \\ \beta^* & \sigma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^* \\ \dot{q}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q^* \end{bmatrix} + \\ + \left(\frac{T^2}{\rho J l} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{atr1,2,3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma^* \end{bmatrix} v_A^* \end{aligned} \quad (2-24)$$

O símbolo $\mathbf{\Gamma}$ em Eq. 2-24 corresponde à matriz diagonal de inércia adimensional, tal que $\Gamma_{ii} = \gamma_i = \frac{I_i}{\rho J l}$.

Como o torque $\mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}}$ é função da velocidade angular dos rotores, a expressão 2-23 foi modificada de modo que na nova formulação o torque de atrito estivesse em função das velocidades angulares adimensionalizadas (ver Eq. 2-25).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}} = & T_{s_2} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_1+1}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{s_1} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_m}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + \\ & + T_{b_3} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_1^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_1}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b_2} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_1+1}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b_1} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_m}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} \end{aligned} \quad (2-25)$$

Na Eq. 2-24, $\alpha^* = \left[-\frac{n_R k_t T}{\rho J l \gamma_1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T$, $\beta^* = \left[\frac{n_R R}{2\pi L} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]$ e $\sigma^* = \frac{RT}{L}$. As matrizes de amortecimento $\bar{\mathbf{C}}^*$ e rigidez $\bar{\mathbf{K}}^*$ adimensionalizadas são dadas por:

$$\bar{\mathbf{C}}^* = \begin{bmatrix} \frac{T}{\rho J l} (c_1 + n_R^2 C_m) \frac{1}{\gamma_1} & -\frac{T}{\rho J l} c_1 \frac{1}{\gamma_1} & \dots & 0 \\ -\frac{T}{\rho J l} c_1 \frac{1}{\gamma_2} & \frac{T}{\rho J l} (c_1 + c_2) \frac{1}{\gamma_2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{T}{\rho J l} c_2 \frac{1}{\gamma_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{T}{\rho J l} c_{N-1} \frac{1}{\gamma_N} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_2^* - x_1^*)} \frac{1}{\gamma_1} & -\frac{1}{(x_2^* - x_1^*)} \frac{1}{\gamma_1} & \dots & 0 \\ -\frac{1}{(x_2^* - x_1^*)} \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{(x_2^* - x_1^*)} \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{(x_3^* - x_2^*)} \frac{1}{\gamma_2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(x_3^* - x_2^*)} \frac{1}{\gamma_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(x_N^* - x_{N-1}^*)} \frac{1}{\gamma_N} \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

Nas Equações 2-26 e 2-27, $\gamma_j = \frac{I_j}{\rho J l}$ corresponde aos parâmetros concentrados de inércia adimensionalizados, sendo J o momento polar de inércia da seção transversal do eixo metálico.

2.2

Otimização dos parâmetros concentrados

Uma vez obtida a equação da dinâmica do sistema acoplado, o próximo passo foi a determinação das matrizes $\bar{\mathbf{K}}^*$ e $\bar{\mathbf{C}}^*$ que melhor representassem o sistema torcional real. Para tanto, inicialmente as frequências naturais do sistema e os seus modos de vibração foram calculados analiticamente, a partir da equação da onda torcional para o eixo metálico, e das suas condições de

contorno. Por meio de uma otimização dos parâmetros concentrados, a matriz de rigidez $\bar{\mathbf{K}}^*$ foi obtida de modo que o modelo de parâmetros concentrados resgatasse as N_m primeiras frequências naturais analíticas.

Por sua vez, a matriz de amortecimento $\bar{\mathbf{C}}^*$ foi obtida através de um ajuste direto de acerto ou erro, de modo que o modelo em parâmetros concentrados do sistema torcional tivesse uma curva de resposta dinâmica mais próxima possível da curva de resposta experimental da bancada de testes, sujeita a uma mesma solicitação, conforme será explicitado no Cap. 3.

2.2.1

Modelo analítico para o sistema torcional

A equação da onda torcional explicitada em Eq. 2-28 para o eixo metálico, juntamente com as condições de contorno listadas, foram obtidas partindo-se da hipótese de que os rotores se comportariam como inércias concentradas, fixas uma na extremidades do eixo e outra num ponto intermediário.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 (i) \quad GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= I_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=0} \\
 (ii) \quad -GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l_1^-} + GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l_1^+} &= I_{N_1+1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1} \\
 (iii) \quad \theta(x=l_1^-, t) &= \theta(x=l_1^+, t) \\
 (iv) \quad -GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} &= I_{N_m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l}
 \end{aligned} \tag{2-28}$$

A Figura (A.1) ilustra as hipóteses consideradas.



Figura 2.4: Modelo do Sistema Torcional.

Na Eq. (2-29) são apresentadas a equação da onda e as condições de contorno na forma adimensionalizada, sendo $\bar{x}_1^* = \frac{l_1}{l}$ e $\gamma_i = \frac{I_i}{\rho J l}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} \\
 (i) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} &= \gamma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=0} \\
 (ii) \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^*-} + \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^+} &= \gamma_{N_1+1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^*} \\
 (iii) \quad \theta(x^*=\bar{x}_1^{*-}, t^*) &= \theta(x^*=\bar{x}_1^{*+}, t^*) \\
 (iv) \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} &= \gamma_{N_m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=1}
 \end{aligned} \tag{2-29}$$

Partindo-se de Eq. (2-29) chegou-se à Eq. (2-30), cujas raízes $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ correspondem às frequências naturais analíticas do sistema torcional. Da Eq. (2-29) também se deduz que o sistema possui um modo de corpo rígido, $\phi_1(x^*) = k$ sendo k uma constante, o qual está associado à frequência natural $\lambda_1 = 0$. Chegou-se também à Eq. (2-31), que corresponde aos modos de vibração associados às frequências naturais $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, respectivamente.

$$\begin{aligned} & \cos(\lambda \bar{x}_1^*) \left(-1 - \frac{\gamma_{N_1+1}}{\gamma_1} + \frac{1}{\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*)} \right) + \\ & + \sin(\lambda \bar{x}_1^*) \left(-\frac{1}{\lambda \gamma_1} + \lambda \gamma_{N_1+1} - \frac{\beta(\lambda)}{\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-30)$$

$$\phi_j(x^*) = \begin{cases} \sin(\lambda_j x^*) - \frac{1}{\lambda_j \gamma_1} \cos(\lambda_j x^*) & , 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \frac{1}{\sigma(\lambda_j, \bar{x}_1^*)} [\sin(\lambda_j x^*) + \beta(\lambda_j) \cos(\lambda_j x^*)] & , \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \quad (2-31)$$

As funções $\beta(\lambda)$ e $\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*)$ que surgiram nas Eqs. (2-30) e (2-31) foram explicitadas em Eq. (2-32) e Eq. (2-33), respectivamente.

$$\beta(\lambda) = \frac{\cos(\lambda) - \lambda \gamma_N \sin(\lambda)}{\sin(\lambda) + \lambda \gamma_N \cos(\lambda)} \quad (2-32)$$

$$\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*) = \frac{\sin(\lambda \bar{x}_1^*) + \beta(\lambda) \cos(\lambda \bar{x}_1^*)}{\sin(\lambda \bar{x}_1^*) - \frac{1}{\lambda \gamma_1} \cos(\lambda \bar{x}_1^*)} \quad (2-33)$$

A dedução de Eq. (2-30) e Eq. (2-31) é apresentada no Anexo A.

Na Tabela (2.3) foram enumeradas as oito primeiras frequências naturais do sistema.

Tabela 2.3: Frequências naturais do sistema torcional.

i	2	3	4	5	6	7	8
λ_i	0.0032	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	13.1509	17.5345
$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi T} \text{ (Hz)}$	0.7	1.7	910.5	1821.0	2303.0	2731.5	3642.0

Vale ressaltar que as frequências enumeradas na Tab. 2.3 correspondem a frequências naturais não amortecidas do sistema torcional. Uma validação experimental dessas frequências foi realizada de forma indireta no Cap. 3, por meio de uma contraposição entre gráficos de saída obtidos experimental e numericamente, uma vez que as frequências naturais medidas na bancada de testes são frequências amortecidas pelas fontes de atrito e demais formas de dissipação de energia presentes no sistema.

2.2.2

Obtenção da matriz de rigidez $\overline{\mathbf{K}}^*$ para o modelo de parâmetros concentrados

A matriz de rigidez $\overline{\mathbf{K}}^*$ foi obtida por meio de uma otimização de parâmetros concentrados do sistema torcional de modo que as frequências naturais calculadas tanto para o modelo contínuo quanto para o modelo de parâmetros concentrados fossem o mais próximas possível.

A função objetivo a ser otimizada foi definida conforme Eq. (2-34), sendo λ_i as frequências naturais analíticas, e λ_{pc_i} as frequências naturais obtidas a partir do modelo de parâmetros concentrados.

$$\Psi_{obj}(x_2^*, \dots, x_{N_1}^*, x_{N_1+2}^*, \dots, x_{N-1}^*, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_1}, \gamma_{N_1+2}, \dots, \gamma_{N_m-1}) = \left(\sum_{j=1}^{N_m} \left(\lambda_j^2 - \lambda_{pc_j}^2 \right)^2 \right)^{1/4} \quad (2-34)$$

É importante notar em Eq. (2-34) que as variáveis referentes à posição e à inércia dos rotores principais foram mantidas fixas na otimização, de modo que $x_1^* = 0$, $x_{N_1+1}^* = \overline{x}_1^*$, $x_{N_m}^* = 1$, $\gamma_1 = \frac{n_R^2 J_m}{\rho J l}$, $\gamma_{N_1+1} = \frac{J_2}{\rho J l}$ e $\gamma_{N_m} = \frac{J_1}{\rho J l}$.

Os valores iniciais para as variáveis de otimização foram tais que $x_i^* = (i-1)\frac{\overline{x}_1^*}{N_1}$, para $i = 2, \dots, N_1$, e para $i = N_1 + 2, \dots, N_m - 1$, $x_i^* = (i - N_1 - 1)\frac{1 - \overline{x}_1^*}{N_m - (N_1 + 1)}$, e $\gamma_j = \frac{\rho J (x_j - x_{j-1})}{\rho J l} = x_j^* - x_{j-1}^*$, para $j = 2, 3, \dots, N_1, N_1 + 2, \dots, N_m - 1$. As variáveis foram escolhidas de modo que inicialmente as inércias auxiliares estivessem dispostas uniformemente ao longo do eixo metálico, entre os rotores principais.

A Tabela 2.4 mostra o resultado da otimização para diferentes números de graus de liberdade N_m , onde n_{conv} corresponde ao número total de iterações.

Tabela 2.4: Frequências Naturais Otimizadas para Diferentes Números de Graus de Liberdade N_m .

λ_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	$\Psi_{obj_{min}}$	n_{conv}
$N_m = 3$	0	0.0033	0.0083	—	—	—	—	—	—	$1.2 * 10^{-5}$	1
$N_m = 4$	0	0.0033	0.0083	4.3836	—	—	—	—	—	$1.0 * 10^{-5}$	282
$N_m = 5$	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	—	—	—	—	$1.0 * 10^{-5}$	465
$N_m = 6$	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	—	—	—	$9.8 * 10^{-6}$	701
$N_m = 7$	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	13.1509	—	—	$9.8 * 10^{-6}$	1098
$N_m = 8$	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	13.1509	17.5345	—	$3.3 * 10^{-4}$	2001
$N_m = 9$	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	13.1509	17.5345	21.9181	$9.7 * 10^{-6}$	2400
λ_{exact_i}	0	0.0033	0.0083	4.3836	8.7672	11.0880	13.1509	17.5345	21.9181	—	—

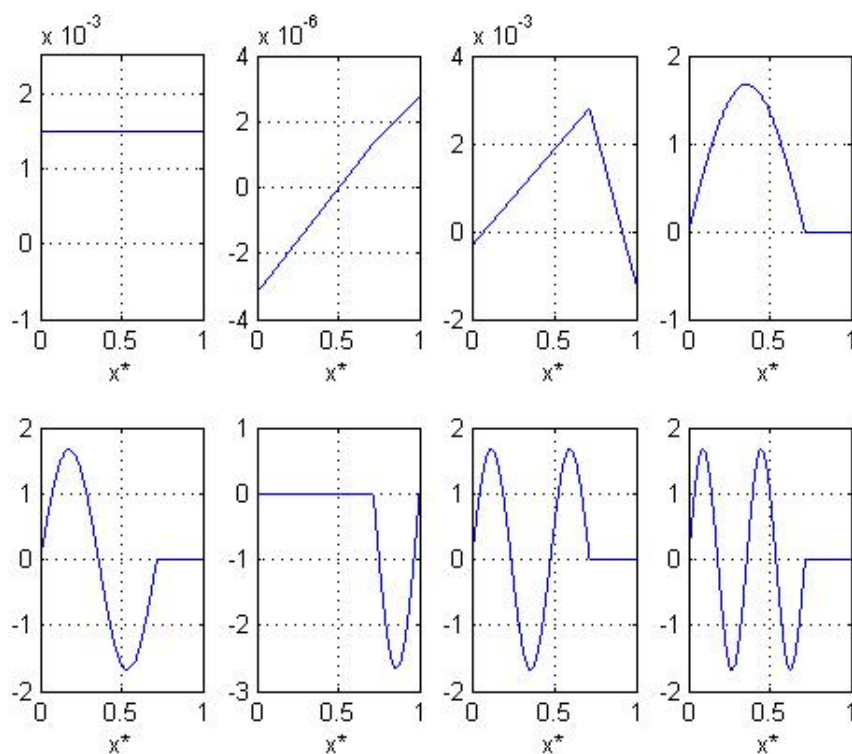
A otimização foi implementada em ambiente Matlab, tendo como base o método Nelder-Mead cuja principal idéia consiste na busca por uma solução ótima com base no *simplex* ((Nelder e Mead, 1965)).

A Figura (2.5) apresenta para fins de comparação os primeiros oito modos de vibração para o modelo contínuo obtidos analiticamente, e os modos

obtidos do modelo com parâmetros concentrados após a otimização. Como pode ser verificado, a ordem entre as frequências naturais e os modos de vibração associados para o sistema de parâmetros concentrados otimizados foi preservada, em relação ao sistema contínuo.

Notou-se a partir do sétimo modo de vibração uma diminuição da similaridade entre os resultados apresentados pelo modelo analítico e pelo modelo de parâmetros concentrados otimizados. Por isso todas as simulações numéricas com saídas apresentadas no Cap. 3 foram realizadas considerando apenas os seis primeiros modos de vibração, ou seja, $N_m = 6$.

2.4(a):



2.4(b):

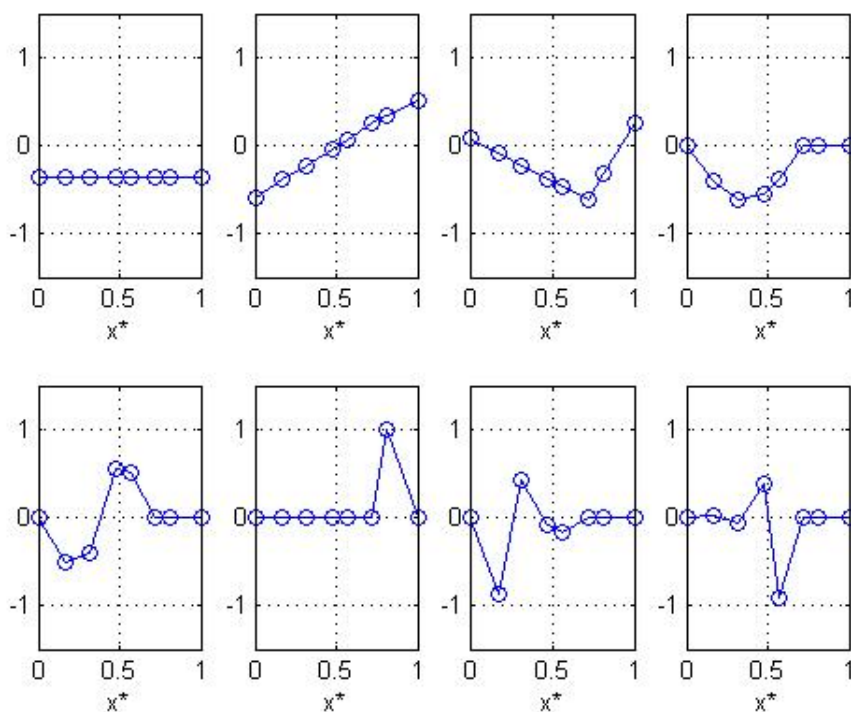


Figura 2.5: Modos de vibração para: (a) o modelo contínuo; (b) o modelo otimizado

3

Ensaio Experimentais

3.1

Modelo de Atrito

Tendo como base as equações de movimento e atrito, respectivamente Eq. 3-1 e Eq. 3-2, nota-se que a única não linearidade do modelo numérico é a função de torque de atrito $\mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}}$. E para que o modelo adotado representasse bem o comportamento dinâmico da bancada, foi necessário um estudo para a obtenção do modelo de atrito mais adequado.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}^* \\ \ddot{q}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^* & \alpha^* \\ \beta^* & \sigma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^* \\ \dot{q}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q^* \end{bmatrix} + \left(\frac{T^2}{\rho J l} \right) \mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma^* \end{bmatrix} v_A^* \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{atr}_{1,2,3}} = & T_{s2} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_1+1}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{s1} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_m}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + \\ & + T_{b3} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_1^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_1}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b2} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_1+1}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_1+1}}^{(\mathbf{N}_m+1)} + T_{b1} \left(\frac{1}{T} \dot{\theta}_{N_m}^* \right) \mathbf{I}_{\mathbf{D}_{N_m}}^{(\mathbf{N}_m+1)} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Em (Mihajlovic et al., 2004) foram sugeridos dois modelos de atrito diferentes, um para o sistema planetário na saída do motor e outro para o freio sobre o rotor da extremidade inferior (ver Fig. 3.1). A bancada de testes utilizada foi similar à do presente trabalho.

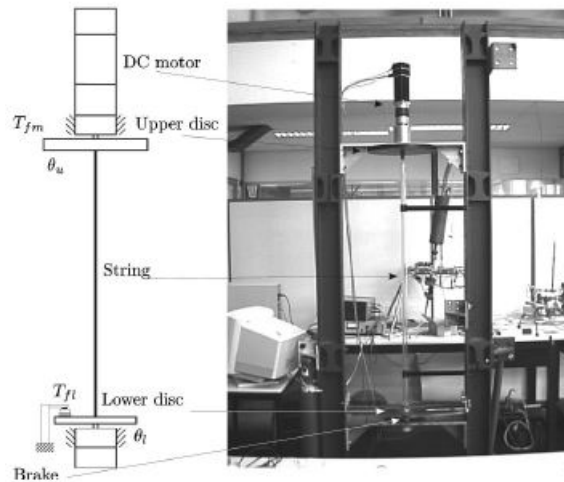


Figura 3.1: Bancada de testes em (Mihajlovic et al., 2004).

As curvas de atrito sugeridas estão ilustradas na Fig. 3.2.

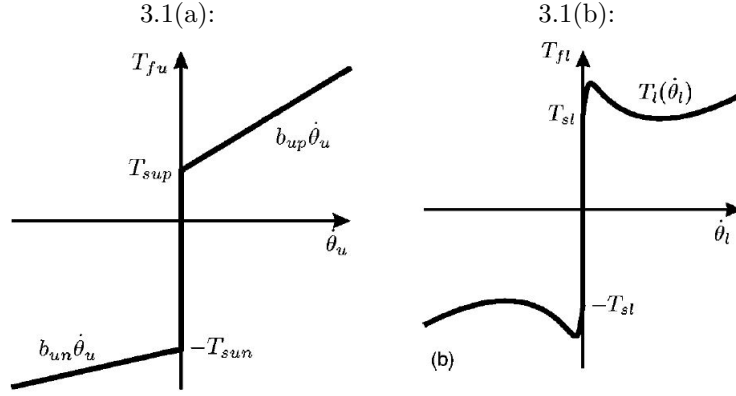


Figura 3.2: Modelos de atrito para (a) o sistema planetário na saída do motor; (b) o atrito de fricção do sistema de freio sobre o rotor da extremidade inferior.

Os modelos sugeridos apresentam torque de atrito crescente para velocidades de rotação suficientemente elevadas uma vez que o atrito viscoso prevalece nesses regimes.

Em (Garcia et al., 2002) ao ter sido estudado o torque de atrito em juntas de revolução em braços robóticos a baixas velocidades de rotação, foi identificada a necessidade de se incluir no modelo uma componente de atrito fortemente dependente da velocidade angular (*meshing friction*), além das componentes referentes ao atrito estático, ao efeito de Stribeck, ao atrito de Coulomb e ao atrito viscoso ((Salcedo, 2010)). Isto se deu por conta da observação de mudanças bruscas do torque de atrito aferido em função da posição angular da junta em baixas velocidades de rotação, devidos ao efeito de *stick-slip* (ver Fig.3.3) e a assimetrias na junta.

A Eq. 3-3 mostra a expressão final do torque de atrito obtida com a velocidade angular:

$$\tau_f(\dot{\theta}) = \left\{ \tau_C + (\tau_E - \tau_C) \exp\left(\frac{-|\dot{\theta}|}{v_s}\right) + B|\dot{\theta}| \right\} \text{sign}(\dot{\theta}) + \left\{ A_1 \sin(\omega_1 \theta + \varphi_1) + \sum_{k=2}^3 A_k \exp(-b_k \dot{\theta}) \sin(\omega_k \theta + \varphi_k) \right\} \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (3-3)$$

No presente trabalho, optou-se por trabalhar com o atrito seco entre metais (aço e alumínio), não sendo portanto utilizado nenhum tipo de lubrificação, o que elimina o componente viscoso do modelo de atrito. Optou-se por esse tipo de atrito pela facilidade de implementação na bancada, pela sua relativa robustez diante do efeito de outros agentes, como é o caso da variação de temperatura com o atrito, mas principalmente, porque atendia ao efeito desejado de indução de *stick-slip* nos dois rotores.

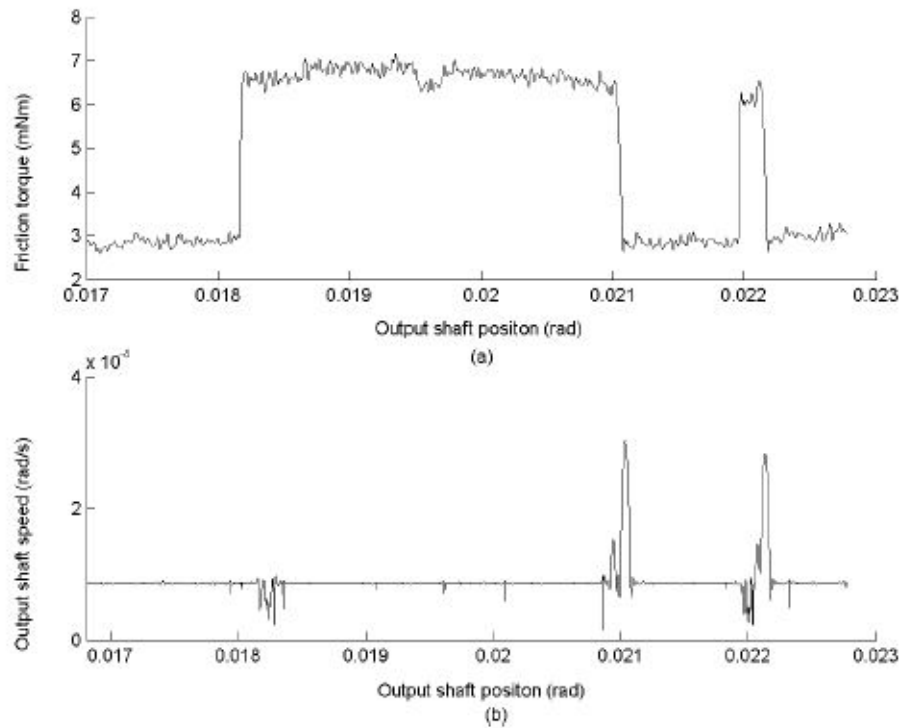


Figura 3.3: *Stick-slip* em junta de revolução de braço robótico para baixas velocidades de rotação ((Garcia et al., 2002)).

Para cada rotor foi construído um sistema de freio, constituído basicamente por um pino metálico que foi posto em contato direto com uma das faces planas do rotor, gerando-se assim o atrito seco. O dispositivo encontra-se ilustrado na Fig. 3.4.

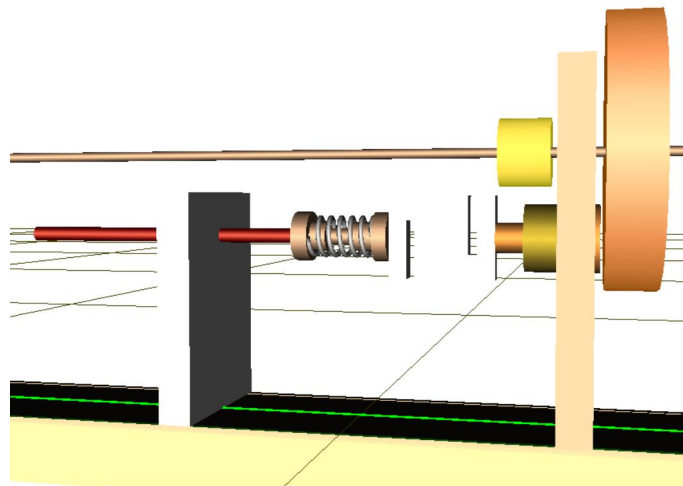


Figura 3.4: Dispositivo de freio sobre os rotores.

O pino metálico foi acoplado a uma célula de carga, que por sua vez encontra-se engastada num dispositivo com mola de elevada rigidez. O dispositivo com mola, juntamente com a célula de carga e o pino metálico foram

montados de forma que pudessem se mover na direção do eixo do pino pela ação de um fuso, o qual foi apoiado numa placa com furo rosqueado. A utilidade da célula de carga está na possibilidade de se monitorar a intensidade da força normal sobre o rotor, durante o processo de fricção, mas principalmente no levantamento da curva de atrito experimental.

Acoplado ao eixo do rotor encontra-se um *encoder* de 10 bits, com a finalidade de aferição da posição angular do rotor. Com os dados do *encoder*, foi feita uma estimativa da velocidade e aceleração angulares do rotor, considerando o valor do tempo de aquisição de dados.

Curva Experimental do Coeficiente de Atrito

Para o levantamento da curva do coeficiente de atrito em função da velocidade angular do rotor, $\mu = \phi(\Omega)$, foi utilizado o aparato ilustrado na Fig. 3.4, desacomplando-se o rotor do eixo de torção, de modo que o único torque de possível atuação no rotor fosse o torque de atrito seco.

A Eq. 3-4 corresponde à equação de movimento do rotor nessa situação, sendo Ω a velocidade angular do rotor, J_i o momento de inércia do rotor, N a força normal do pino metálico sobre a face plana do rotor, e R a distância entre o ponto de aplicação da força normal e o eixo de rotação:

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{J_i} \mathbf{T}_{\text{atr}} = -\frac{1}{J_i} \mu(\Omega) N R \quad (3-4)$$

A partir de Eq. 3-4, chegou-se a uma expressão para o coeficiente de atrito μ , conforme Eq. 3-5:

$$\mu(\Omega) = -\frac{J_i}{R} \frac{\dot{\Omega}}{N} \quad (3-5)$$

Os valores de J_i e R são fixos e facilmente obtidos. A curva de $\dot{\Omega}$ no tempo pode ser obtida por estimativa a partir dos dados de posição angular adquiridos com o *encoder* e do tempo de aquisição de dados, e a curva de N no tempo pode ser obtida pela aquisição da célula de carga acoplado ao pino metálico.

Por meio de um relógio comparador, foi possível constatar uma leve inclinação do rotor em relação à base do mancal, o que faz com que a célula de carga esteja submetida a uma carga de compressão oscilante, entorno do valor de precarga do pino sobre o rotor (ver Fig. 3.5).

Por conta disso, a força normal foi modelada conforme Eq. 3-6, sendo θ

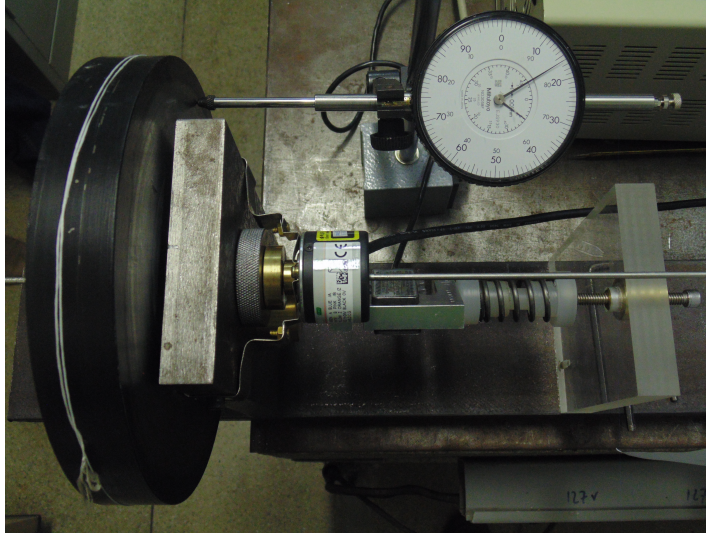


Figura 3.5: Aferição do desvio do rotor em relação à base do mancal de suporte.

a posição angular do rotor, N_0 o valor da precarga, $N_s = K \frac{\delta}{2}$ a amplitude de oscilação da força normal, com K sendo a rigidez da mola acoplada à célula de carga, δ a amplitude de deslocamento do pino metálico devido à leve inclinação do rotor, e φ uma defasagem entre o deslocamento angular e a compressão da célula de carga.

$$N(\theta) = N_0 + N_s \sin(\theta + \varphi) \quad (3-6)$$

O ensaio experimental para levantamento da curva $\mu = \phi(\Omega)$ consistiu em submeter o rotor a um torque de atrito pela compressão do pino, partindo-se de uma velocidade angular inicial até o repouso. A partir das curvas no tempo de $\Omega = \Omega(t)$ e $\mu(t) = -\frac{J_i}{R} \frac{\dot{\Omega}(t)}{N[\theta(t)]}$, obtidas para diferentes valores de precarga, foi possível obter um perfil médio da curva $\mu = \phi(\Omega)$.

Em todos os ensaios experimentais realizados para o levantamento da curva experimental de atrito por velocidade angular, as principais dificuldades encontradas foram a existência de uma força normal oscilante por conta do leve desalinhamento do rotor ($\delta = 0.16mm$), uma vez que a célula de carga possui grande sensibilidade; e o limite mínimo da variação de frequência de rotação que era possível adquirir, calculada conforme Eq. 3-7, sendo que 2^{10} é a resolução do *encoder* utilizado para aferição da velocidade angular.

$$\Delta f_{min} = \frac{f_{aq}}{2^{10}} \quad (3-7)$$

A faixa de velocidade mais crítica para a caracterização da curva de atrito

é a mais próxima de zero, uma vez que é onde ocorre a transição entre o atrito estático e o dinâmico, e onde se observa uma variação brusca da velocidade angular, conforme pode ser verificado na Fig. 3.6, exigindo-se uma grande quantidade de pontos adquiridos. Para isso não basta aumentar a frequência de aquisição, mas também é necessário um *encoder* com maior resolução, tendo em vista a Eq. 3-7. Dentro dessas limitações, optou-se por se traçar uma curva média de atrito dinâmico a partir das curvas obtidas em ensaios experimentais, considerando-se diferentes valores de pré-carga.

A Fig. 3.6 apresenta uma sequência de gráficos obtidos experimentalmente num dos ensaios para levantamento da curva do coeficiente de atrito por velocidade angular, para uma pré-carga $N_0 = 20.5N$.

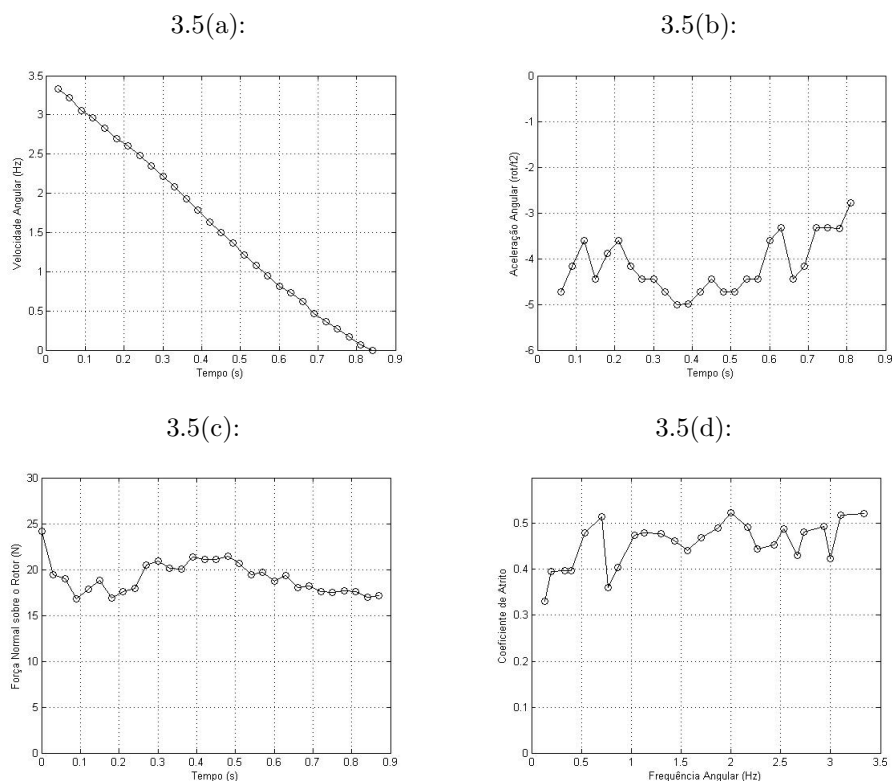


Figura 3.6: (a) Frequência Angular do Rotor no tempo; (b) Aceleração Angular no tempo; (c) Força Normal no tempo; (d) Coeficiente de Atrito por Velocidade Angular.

Um segundo ensaio experimental consistiu em se aferir o coeficiente de atrito estático por meio de um experimento mais simples, envolvendo um dinamômetro preso por um barbante à face lateral do rotor, conforme ilustrado na Fig. 3.7.

A Tab.3.1 apresenta os resultados obtidos, sendo F a força tangencial para a qual o rotor estava na iminência de movimento, $D_d = 190mm$ o diâmetro do rotor e $R = 50mm$ a distância de aplicação da força normal.

Tabela 3.1: Coeficientes de Atrito Estático.

$N(N)$	$\bar{F}(N)$	$\mu_{est} = \frac{D_d}{2} \frac{F}{NR} (*)$
10.5	2.8	0.50
14.0	3.6	0.49
17.0	4.5	0.50

O dinamômetro foi tracionado até que o rotor saísse do repouso. Nesse instante era aferido o valor da força indicada no dinamômetro. O experimento foi realizado para diferentes valores de carga N aplicada.

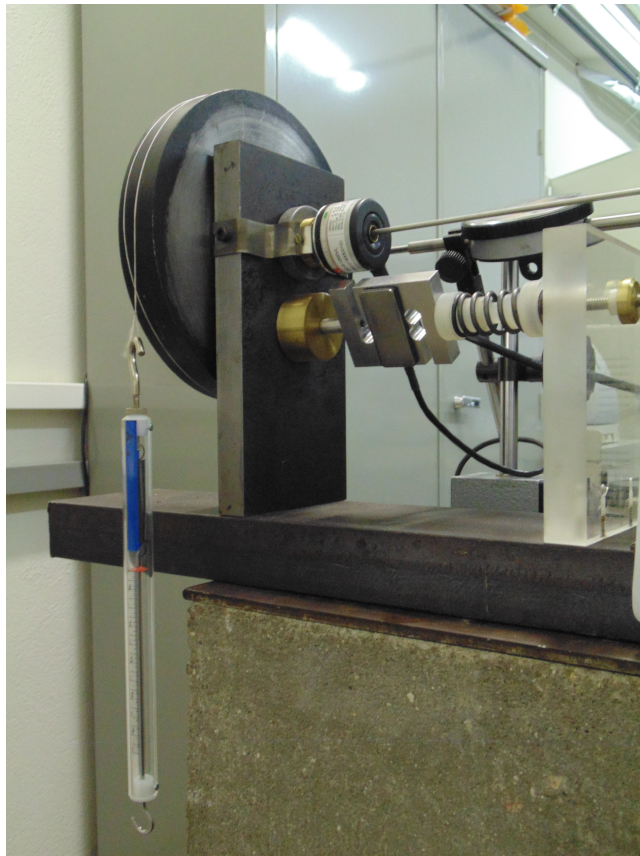


Figura 3.7: Experimento para obtenção do coeficiente de atrito estático.

Os mesmos gráficos da Fig. 3.6 foram obtidos para os valores de precarga $N_0 = 26.1N$, $N_0 = 20.5N$, $N_0 = 17.9N$ e $N_0 = 12.6N$, e as curvas de $\mu = \mu(\Omega)$ juntamente com a curva estimada no experimento com o dinamômetro foram plotadas num só gráfico, apresentado na Fig. 3.8.

Com base na Fig. 3.8 pode-se observar um fenômeno de histerese na variação do coeficiente de atrito com a velocidade angular para baixas velocidades. Comportamento similar já havia sido observado em outros trabalhos, como em (Santos, 2005), no qual foi analisado o deslocamento de um corpo em movimento alternativo sobre uma superfície fixa, sujeito ao atrito seco de contato.

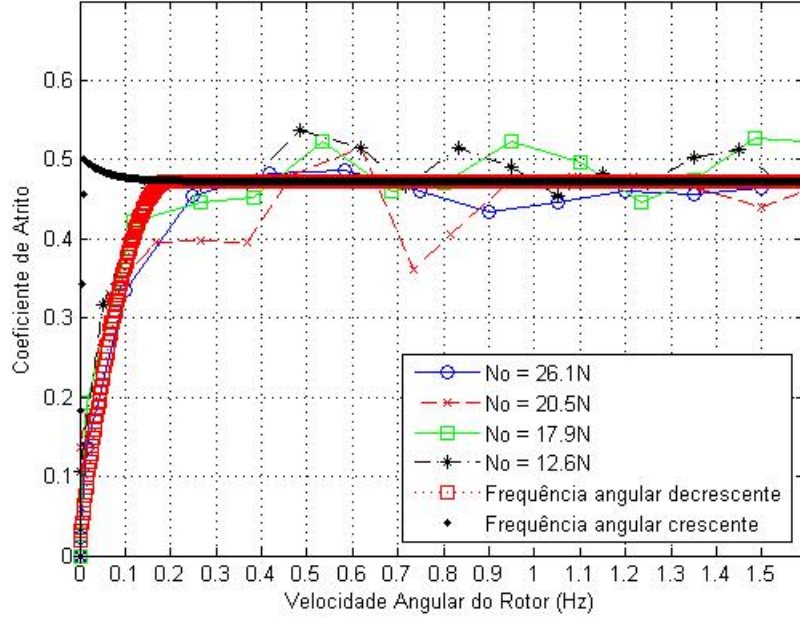


Figura 3.8: Curvas experimentais do coeficiente de atrito μ em função da velocidade angular Ω do rotor.

A função de atrito teórica utilizada para se estimar a curva de atrito para frequências angulares crescentes é apresentada na Eq. 3-8, sendo Ψ_1 , explicitada na Eq. 3-9, uma função com entradas e saídas adimensionais, $\omega_0 = 0.01\text{Hz}$ uma frequência de ajuste numérico, $\lambda = 0.95$ e $\alpha = 0.2$ parâmetros do modelo.

$$\mu(\omega) = \frac{\mu_0}{\lambda} \Psi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0}, \lambda, \alpha \right) \quad (3-8)$$

$$\Psi_1(\eta, \lambda, \alpha) = \begin{cases} -\lambda + (\lambda - B)e^{\alpha\eta} & , x \leq -\eta_1 \\ -\frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta & , -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_1 \\ \lambda + (B - \lambda)e^{-\alpha\eta} & , \eta_1 \leq \eta \end{cases} \quad (3-9)$$

O termo η_1 é um parâmetro calculado como o limite da sequência η_n explicitada na Eq. (3-10), e B um quarto parâmetro calculado por meio da Eq. (3-11).

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = \eta_n - \frac{\eta_n^3 + \frac{3}{\alpha}\eta_n^2 - 3\eta_n + (2\lambda - \frac{3}{\alpha})}{3\eta_n^2 + \frac{6}{\alpha}\eta_n - 3} \\ \eta_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3-10)$$

$$B = \lambda + \frac{3}{2\alpha}(\eta_1^2 - 1)e^{\alpha_1\eta_1} \quad (3-11)$$

A função de atrito teórica utilizada para se estimar a curva de atrito para frequências angulares decrescentes, resultado de um ajuste polinomial para uma faixa de frequências angulares próximas de zero, é tal que

$$\mu(\omega) = 2\pi \frac{I}{R} \Psi_2(\omega) \quad (3-12)$$

sendo Ψ_2 a função apresentada na Eq. 3-13:

$$\Psi_2(\omega) = \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\omega_0}{2\pi} - \alpha_3 \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2 & , \omega \leq -\omega_0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\omega}{2\pi} - \alpha_3 \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 & , -\omega_0 \leq \omega < 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\omega}{2\pi} + \alpha_3 \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 & , 0 \leq \omega < \omega_0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\omega_0}{2\pi} + \alpha_3 \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2 & , \omega_0 \leq \omega \end{cases} \quad (3-13)$$

Na Eq. 3-13, $\omega_0 = -2\pi \frac{\alpha_2}{2\alpha_3}$ é o valor de ω para o qual a função de ajuste polinomial $\varphi(\omega) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\omega}{2\pi} + \alpha_3 \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2$ tem derivada nula, sendo $\alpha_1 = 0.0071$, $\alpha_2 = 3.8000$ e $\alpha_3 = -16.3948$.

As duas funções de atrito foram ilustradas na Fig. 3.9.

3.2

Validação do modelo numérico da bancada de testes

Para a validação do modelo foi feita uma série de ensaios experimentais, e os resultados foram comparados com as curvas obtidas com o modelo numérico considerando as mesmas entradas.

As variáveis de entrada para cada ensaio experimental foram basicamente a tensão v_A sobre o motor e os parâmetros relacionados ao atrito induzido sobre os rotores J_1 e J_2 , mais especificamente o valor nominal das forças normais F_{N_1} e F_{N_2} dos pinos metálicos sobre os rotores. As saídas escolhidas foram a velocidade angular $\dot{\theta}_{N_m}$ do rotor J_1 , a velocidade angular $\dot{\theta}_1$ na saída da caixa de redução, e o torque de reação T_m sobre o motor. Essas duas últimas saídas são de maior interesse, uma vez que a principal motivação do presente trabalho é a caracterização indireta do regime de atrito sob o qual os rotores principais estejam submetidos, partindo-se apenas de medições realizadas no motor.

Os ensaios experimentais escolhidos para a validação do modelo consistiram na aplicação das tensões de entrada $v_A = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ e $5.0V$, para $F_{N_1} = 0N$ e $F_{N_2} = 0N$ e aquisição das curvas experimentais de $\dot{\theta}_{N_m}$, $\dot{\theta}_1$ e T_m no tempo.

Dos parâmetros do motor, enumerados na Tab. 2.1, K_t e K_e precisaram ser ajustados a partir das curvas de saída levantadas nos ensaios da bancada completa. Da mesma forma os coeficientes de amortecimento c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5

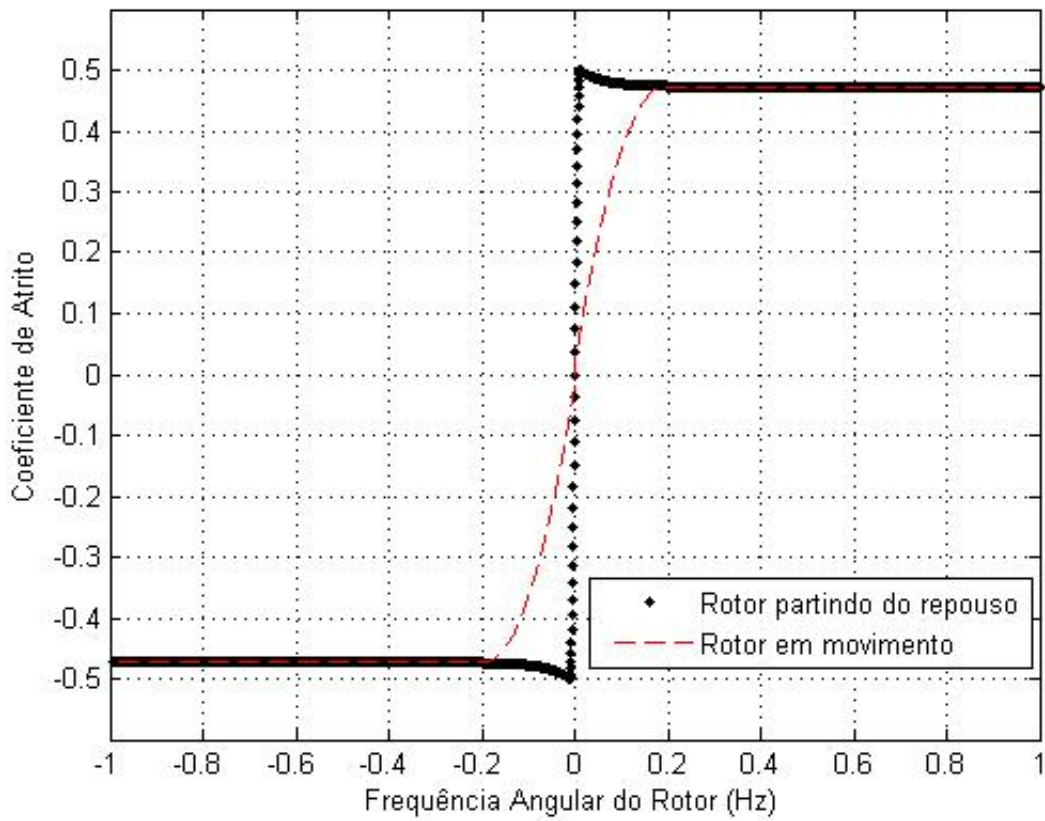


Figura 3.9: Curvas estimadas para o coeficiente de atrito μ em função da velocidade angular Ω do rotor.

do modelo de parâmetros concentrados foram obtidos também por meio de um ajuste das curvas de saída teóricas e experimentais.

Alguns parâmetros foram determinados através de ensaios experimentais que não envolviam toda a bancada de testes, como foi o caso dos parâmetros relacionados ao modelo de atrito, conforme apresentado na Sec. 3.1.

Relação entre a velocidade de saída da caixa de redução $\dot{\theta}_1$ e a tensão de entrada no motor v_A

Para dar prosseguimento ao processo de validação do modelo, foram deduzidas algumas relações envolvendo as variáveis $\dot{\theta}_1$ e v_A , e os parâmetros K_t e K_e a serem ajustados.

Partindo-se das equações de movimento deduzidas na Sec. 2.1 tem-se:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 = \\ = n_R k_t \dot{q} - n_R^2 C_m \dot{\theta}_1 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - T_{b3}(\dot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$L \frac{di_A}{dt} = v_A - R_m i_A - n_R k_e \dot{\theta}_1 \quad (3-15)$$

No regime permanente, $\frac{di_A}{dt} = 0$, $\ddot{\theta}_1 = 0$ e $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \approx 0$, e após algumas manipulações algébricas, Eq. 3-14 e Eq. 3-15 resultam em:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{K_t}{n_R C_m} i_A - \frac{1}{n_R^2 C_m} (k_1(\theta_1 - \theta_2) + T_{b_3}) \quad (3-16)$$

$$i_A = \frac{v_A}{R_m} - \frac{n_R K_e}{R_m} \dot{\theta}_1 \quad (3-17)$$

Substituindo Eq. 3-17 em Eq. 3-16, e considerando que $\frac{R_m C_m}{K_t K_e} \sim 10^{-6}$ obtém-se:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\frac{1}{n_R K_e}}{\frac{R_m C_m}{K_t K_e} + 1} (v_A - v_0) = \frac{1}{n_R K_e} (v_A - v_0) \quad (3-18)$$

Na Eq. 3-18, v_0 é a tensão mínima para que o motor seja capaz de vencer o atrito total atuante na bancada. A Eq. 3-19 apresenta a expressão de v_0 , sendo $T_{atr_{1,2}}$ o torque total de atrito sobre os rotores J_1 e J_2 , e T_{atr_3} o torque de atrito percebido na saída da caixa de redução.

$$v_0 = \frac{R_m}{n_R K_t} (k_1(\theta_1 - \theta_2) + T_{b_3}) = \frac{R_m}{n_R K_t} (T_{atr_{1,2}} + T_{atr_3}) \quad (3-19)$$

É possível concluir pela Eq. 3-18 que a curva $v_A \times \dot{\theta}_1$ esperada é uma reta com declividade $\frac{1}{n_R K_e}$ para $v_A > v_0$ e constante e igual a zero para $v_A < v_0$, e que quanto maior o valor de K_t , menor a tensão mínima v_0 e maior a velocidade angular nominal $\dot{\theta}_1$ alcançada pelos rotores em regime.

Outra expressão teórica importante é a do torque de reação T_m no motor, que está explicitado na Eq. 3-20:

$$T_m = n_R K_t i_A - T_{b_3}(\dot{\theta}_1) - n_R^2 C_m \dot{\theta}_1, \quad (3-20)$$

onde T_{b_3} corresponde ao atrito seco e C_m o coeficiente de amortecimento, ambos internos ao motor.

Uma primeira série de ensaios consistiu em submeter o motor a cinco tensões de entrada diferentes, $V = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ e $5.0V$, estando os rotores sujeitos apenas ao atrito dos mancais. Para todos os ensaios, inicialmente a

tensão do motor era nula, sendo em seguida aplicada uma tensão $V > 0$. Após o sistema ter atingido o regime permanente, desligava-se a fonte de tensão, voltando a tensão de entrada a ser nula. A Fig. 3.11 apresenta os gráficos de $\dot{\theta}_1$ para os experimentos realizados.

A partir da Fig. 3.10 foi possível estimar o valor de K_e , considerando a declividade da curva $V \times \dot{\theta}_1$, obtida a partir dos gráficos da Fig. 3.11.

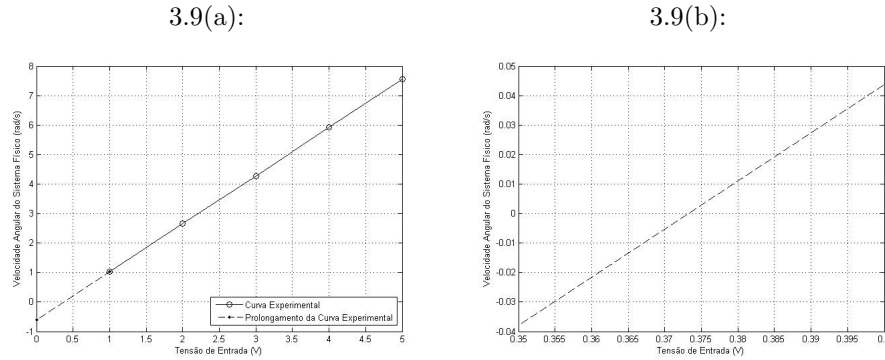


Figura 3.10: (a) Gráfico da tensão de entrada V *versus* velocidade angular $\dot{\theta}_1$ do sistema físico no regime permanente; (b) Gráfico ampliado na região pontilhada.

Por meio de uma ajuste linear do gráfico da Fig. 3.10, obteve-se $\frac{1}{n_R K_e} = 1.63$, ou seja, $K_e = 7.66 \times 10^{-2} V/(rad/s)$.

Partindo-se da Fig. 3.10 na região pontilhada, pode-se inferir o valor de $v_0 = 0.37V$, e por meio da Eq. 3-19 estimou-se o valor de K_t , conforme Eq. 3-21.

$$K_t = \frac{R_m}{n_R v_0} (T_{atr_{1,2}} + T_{atr_3}) \approx \frac{0.33}{8 \times 0.37} (0.83) = 9.23 \times 10^{-2} Nm/A \quad (3-21)$$

Os valores dos coeficientes de amortecimento c_i para o modelo de parâmetros concentrados também foram obtidos por meio de um ajuste do tipo acerto-erro de curvas teóricas e experimentais. Os valores finais foram:

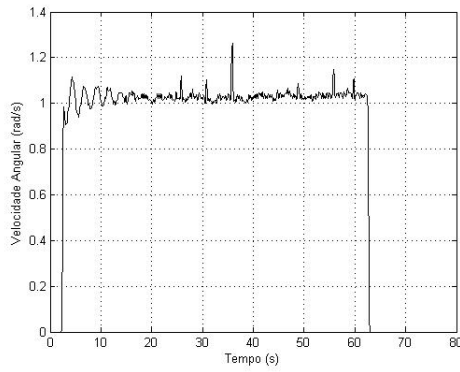
Tabela 3.2: Coeficientes de Amortecimento.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

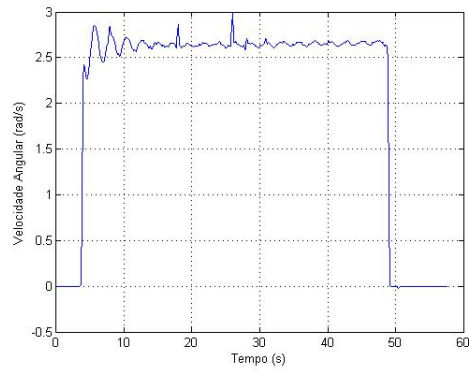
Alguns gráficos com curvas teóricas contrapostas a curvas experimentais para $V = 1.0V$ e $V = 5.0V$ podem ser verificados nas Figs. 3.12 e 3.13.

Tanto na Fig. 3.12 quanto na Fig. 3.13 notou-se, através de uma simples contagem de picos numa faixa de tempo de 10s, que durante o período de acomodação a frequência natural predominante foi a primeira ($f_1 = 0.7Hz$)

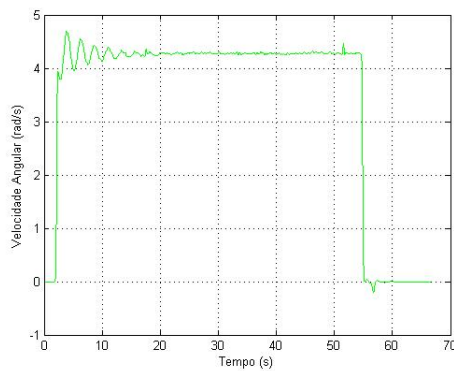
3.10(a):



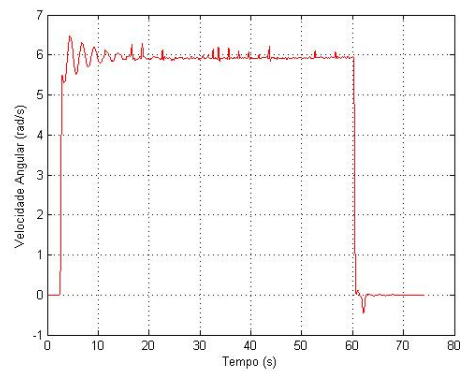
3.10(b):



3.10(c):



3.10(d):



3.10(e):

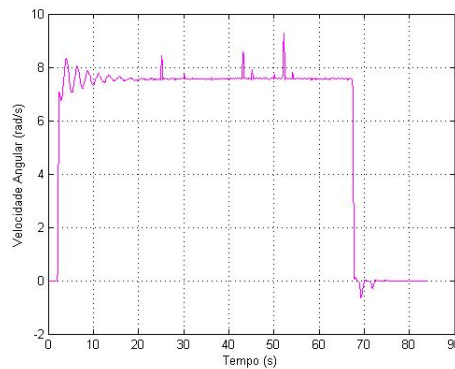
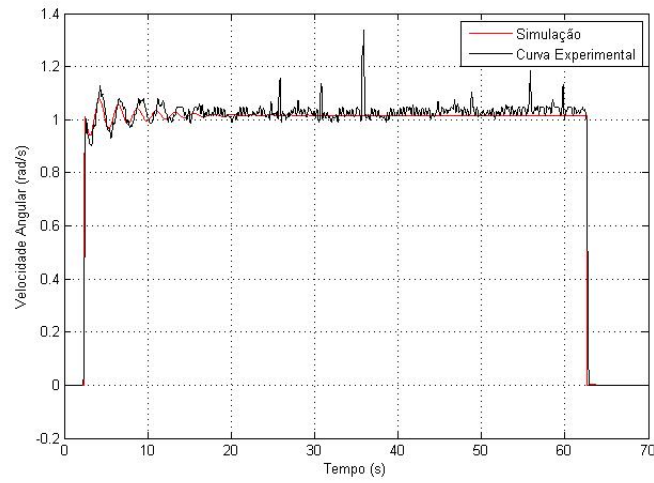


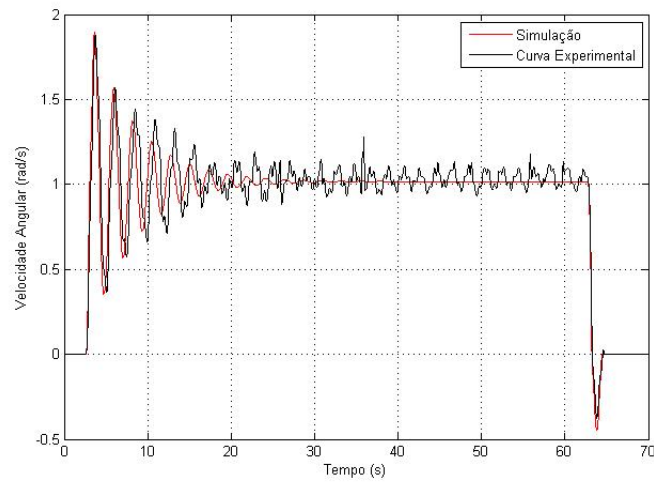
Figura 3.11: Gráficos de $\dot{\theta}_1$ no tempo para (a) $V = 1.0V$; (b) $V = 2.0V$; (c) $V = 3.0V$; (d) $V = 4.0V$ e (e) $V = 5.0V$.

enquanto que ao longo do regime permanente, a segunda frequência natural ($f_2 = 1.7Hz$) foi a que prevaleceu. As curvas simuladas apresentaram tempo de acomodação bastante próximos, apesar da pequena defasagem presente entre as curvas simuladas e experimentais. Esse fenômeno é bastante comum quando se trabalha com sistemas não lineares e se adota no modelo uma aproximação linear na representação de elementos do sistema, ou seja, no início do movimento as curvas estão ajustadas mas com o desenvolvimento

3.11(a):



3.11(b):



3.11(c):

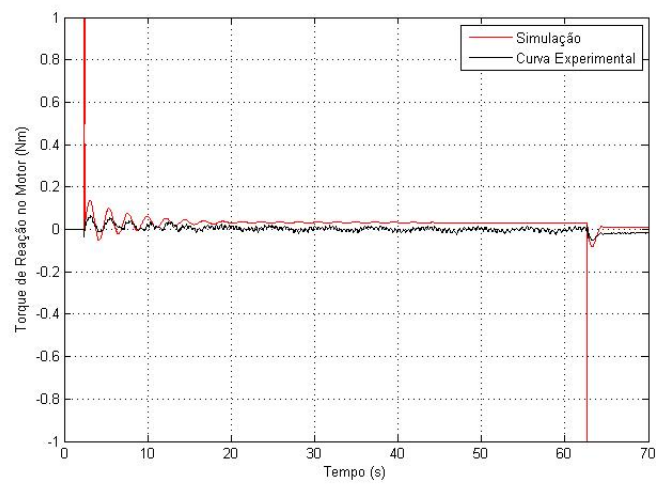
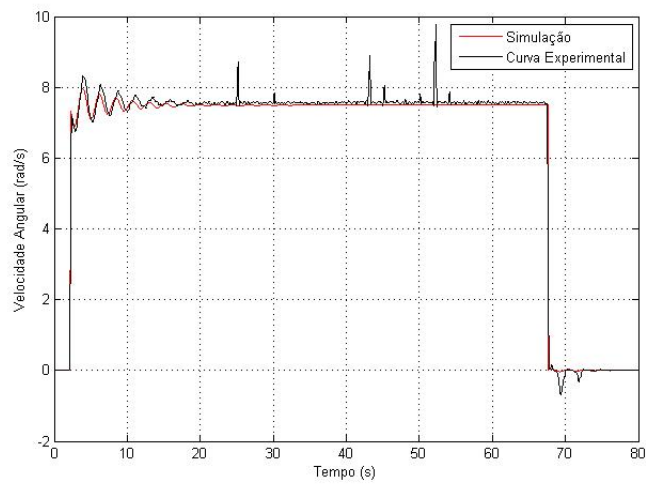
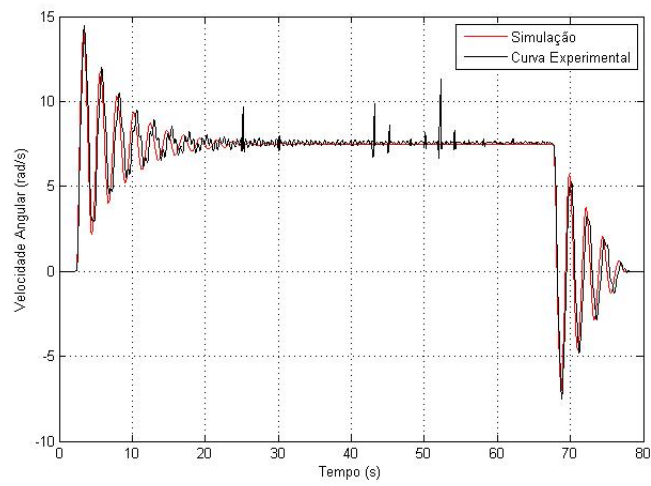


Figura 3.12: Gráficos para $V = 1.0V$: (a) $\dot{\theta}_1$ no tempo; (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo; (c) Torque de reação no motor (T_m) no tempo.

3.12(a):



3.12(b):



3.12(c):

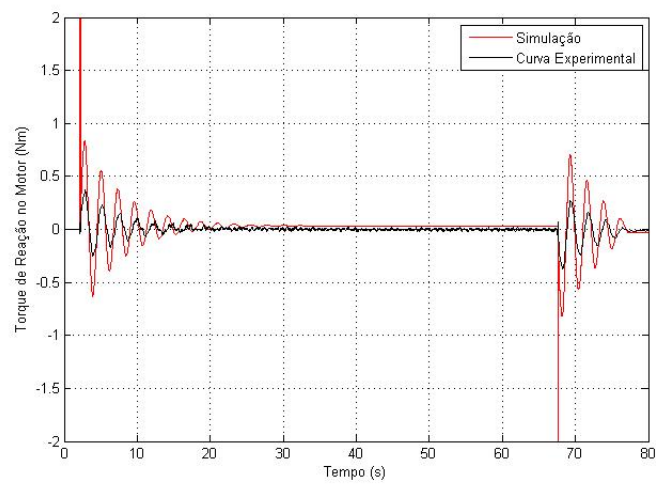


Figura 3.13: Gráficos para $V = 5.0V$: (a) $\dot{\theta}_1$ no tempo; (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo; (c) Torque de reação no motor (T_m) no tempo.

do movimento a defasagem vai se tornando mais pronunciada.

Outra observação importante foi o amortecimento da segunda frequência natural no regime permanente, apresentado pela curva simulada, o que não ocorreu nas curvas experimentais. Tal efeito diminuiria caso se reduzisse o valor dos coeficientes de amortecimento c_i , mas em contrapartida o tempo de acomodação do sistema na curva simulada aumentaria, a ponto de ser bem superior ao apresentado pela curva experimental. Como o principal interesse do presente trabalho foi a caracterização indireta do regime de atrito nos rotores principais, mais especificamente no regime de *stick-slip*, considerou-se mais relevante preservar no sistema simulado um comportamento similar ao experimental em regimes em que prevalecessem frequências mais baixas, ou seja, no entorno da primeira frequência natural.

Nos gráficos do torque de reação no motor, notou-se de um modo geral uma maior amplitude de oscilação nas curvas simuladas em relação às curvas experimentais, e também a existência de um torque residual (ver Fig. 3.12) levemente superior nas curvas simuladas. Por outro lado notou-se uma semelhança qualitativa entre curvas simuladas e experimentais correspondentes, o que já seria suficiente para a caracterização indireta pretendida do regime de atrito.

3.3

Validação das duas primeiras frequências naturais do sistema torcional

Como havia sido exposto na Sec. 2.2, as frequências naturais de 0.7Hz e 1.7Hz calculadas analiticamente, a partir da equação da onda torcional e condições de contorno, são frequências não amortecidas, enquanto que as frequências obtidas experimentalmente são consequência também das fontes de atrito e demais formas de dissipação de energia presentes na bancada.

A Fig. 3.14 mostra o espectro de frequência das curvas de velocidade angular do rotor J_1 obtidas tanto por meio de simulação numérica quanto experimentalmente, para um ensaio simples que consistiu em submeter o motor a uma tensão de entrada de 4V por alguns segundos.

A Fig. 3.15 mostra as curvas de velocidade angular no tempo.

Como se pode notar na Fig. 3.14, as frequências de pico tanto na curva simulada quanto na curva experimental estão bem próximas e correspondem a valores no entorno de 0.5Hz e 1.6Hz. Esses valores são inferiores respectivamente às frequências 0.7Hz e 1.7Hz, o que está de acordo com o fato de as primeiras serem frequências amortecidas.

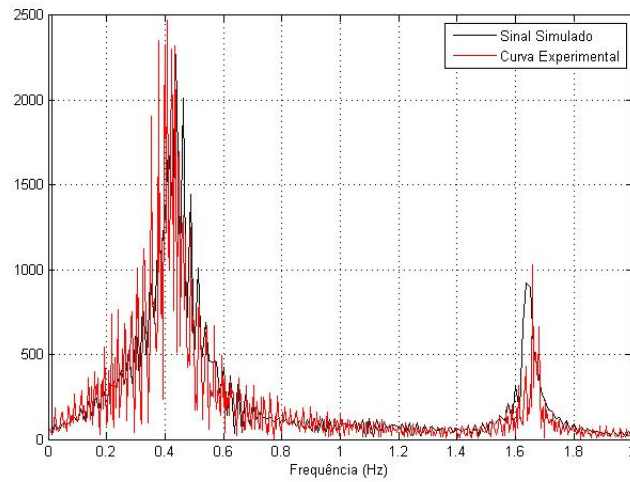


Figura 3.14: Modelo do Sistema Torcional.

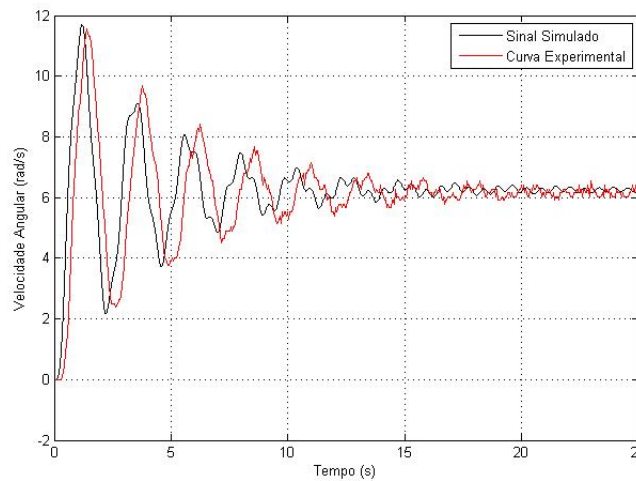


Figura 3.15: Modelo do Sistema Torcional.

3.4

Caracterização indireta do regime de atrito

Uma vez validado o modelo numérico, prosseguiu-se com o estudo da caracterização indireta do regime de atrito ao qual os rotores principais estivessem submetidos.

Inicialmente foi realizada uma sequência de ensaios experimentais, para uma tensão de entrada $V = 1.0V$, variando-se o valor das forças normais F_{N_1} e F_{N_2} sobre os rotores J_1 e J_2 , respectivamente (ver Tab. 3.3).

Notou-se que uma força normal de intensidade de 50N - aplicada em apenas um rotor, permanecendo o outro livre de atrito induzido - já era suficiente para induzir o regime de *stick-slip* em ambos os rotores principais. Tendo isso em vista, os ensaios foram realizados de modo que inicialmente

Tabela 3.3: Regimes de atrito.

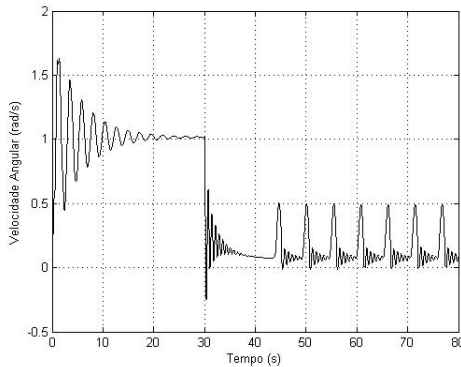
Ensaio	F_{N_1} (N)	F_{N_2} (N)
1	50	0
2	40	10
3	30	20
4	20	30
5	10	40
6	0	50

$F_{N_1} = 50\text{N}$ e $F_{N_2} = 0\text{N}$, sendo as forças variadas gradativamente até que $F_{N_1} = 0\text{N}$ e $F_{N_2} = 50\text{N}$. O objetivo dessa metodologia foi observar a evolução dos gráficos de torque de reação T_m e da velocidade angular $\dot{\theta}_1$ no tempo a medida que o atrito sobre J_1 era reduzido e o atrito sobre J_2 aumentado.

Os gráficos das velocidades angulares dos rotores J_2 e J_1 , respectivamente $\dot{\theta}_{N_1+1}$ e $\dot{\theta}_{N_m}$ ao longo do tempo, em dois regimes de *stick-slip* diferentes, estão ilustrados em Fig. 3.16 e Fig. 3.17, gerados por diferentes aplicações de F_{N_1} e F_{N_2} .

Nota-se que na Fig. 3.16 o rotor J_1 encontra-se em regime de *stick-slip* estando J_2 livre de atrito induzido, enquanto que na Fig. 3.17 é o rotor J_2 que se encontra em *stick-slip*.

3.15(a):



3.15(b):

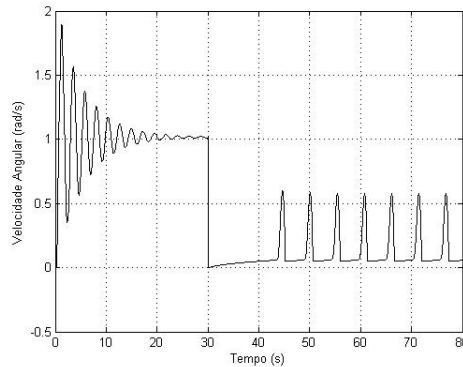


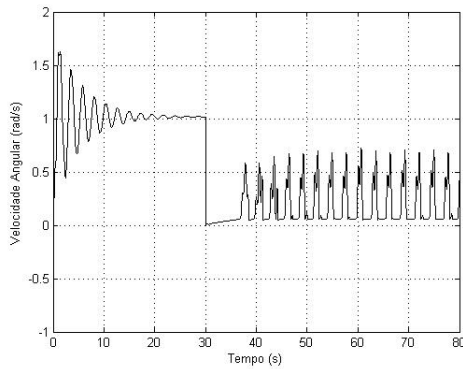
Figura 3.16: Gráficos para $V = 1.0\text{V}$, $F_{N_1} = 50\text{N}$ e $F_{N_2} = 0\text{N}$: (a) $\dot{\theta}_{N_1+1}$ no tempo (rotor J_2); (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo (rotor J_1).

Os gráficos de $\dot{\theta}_1$ e T_m para alguns dos regimes descritos na Tab. 3.3 estão ilustrados nas Figs. 3.18 e 3.19.

Partindo-se das curvas de velocidade angular na Fig. 3.18, notou-se uma redução da velocidade a medida que o atrito no rotor J_1 vai aumentando e o atrito no rotor J_2 vai sendo reduzido na mesma proporção.

Notou-se também que a frequência de oscilação da velocidade angular em regime de *stick-slip* vai crescendo a medida que o atrito aumenta no rotor

3.16(a):



3.16(b):

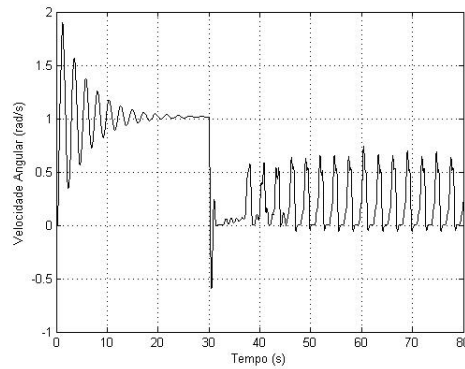


Figura 3.17: Gráficos para $V = 1.0V$, $F_{N_1} = 0N$ e $F_{N_2} = 50N$: (a) $\dot{\theta}_{N_1+1}$ no tempo (rotor J_2); (b) $\dot{\theta}_{N_m}$ no tempo (rotor J_1).

J_2 e diminui em J_1 . Esse é um resultado bastante relevante, pois significa que a frequência de oscilação em regime de auto-excitação do sistema pode ser uma grandeza utilizada para estimar a posição de uma eventual fonte de atrito intenso no sistema real. Nesse sentido, o acompanhamento em tempo real do espectro de frequência do sinal medido em sensores ligados ao motor, seja esse sinal a própria velocidade angular do eixo do motor, seja o próprio torque de reação sobre o motor, pode dizer muito a respeito da posição de uma fonte de atrito mais intenso sobre a coluna de perfuração, principalmente se esta fonte gerar um regime de auto-excitação.

A frequência de auto-excitação é uma grandeza que depende não somente do sistema eletromecânico, mas também da interação entre os corpos em contato, e no caso específico de colunas de perfuração, também da posição do ponto ou da região ao longo da coluna onde a interação for mais intensa.

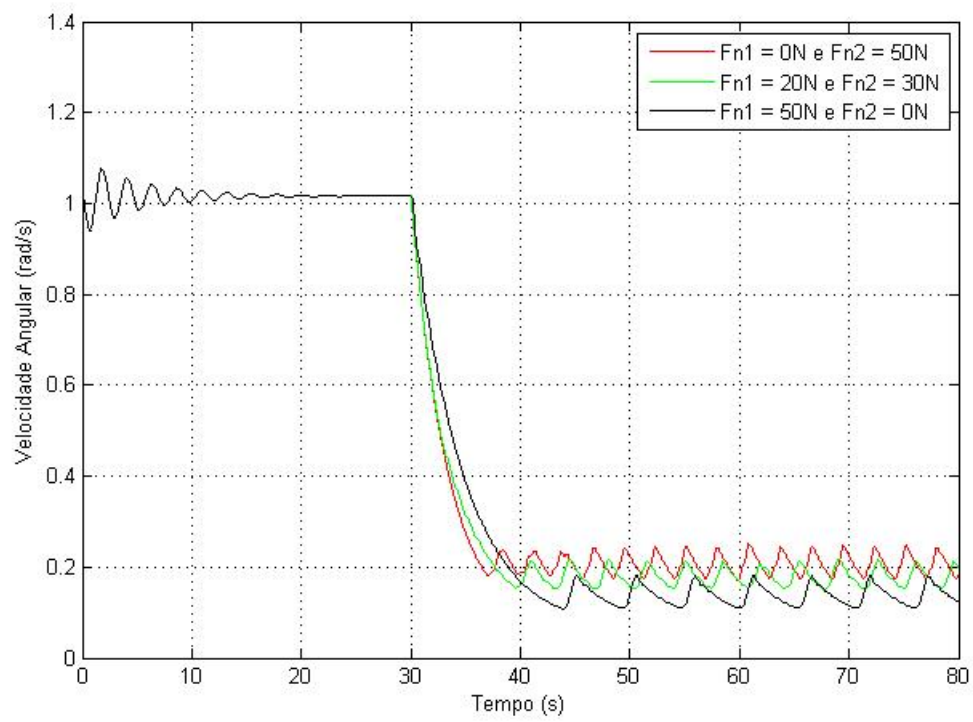


Figura 3.18: Gráfico da velocidade angular $\dot{\theta}_1$ do sistema físico para diferentes regimes de atrito.

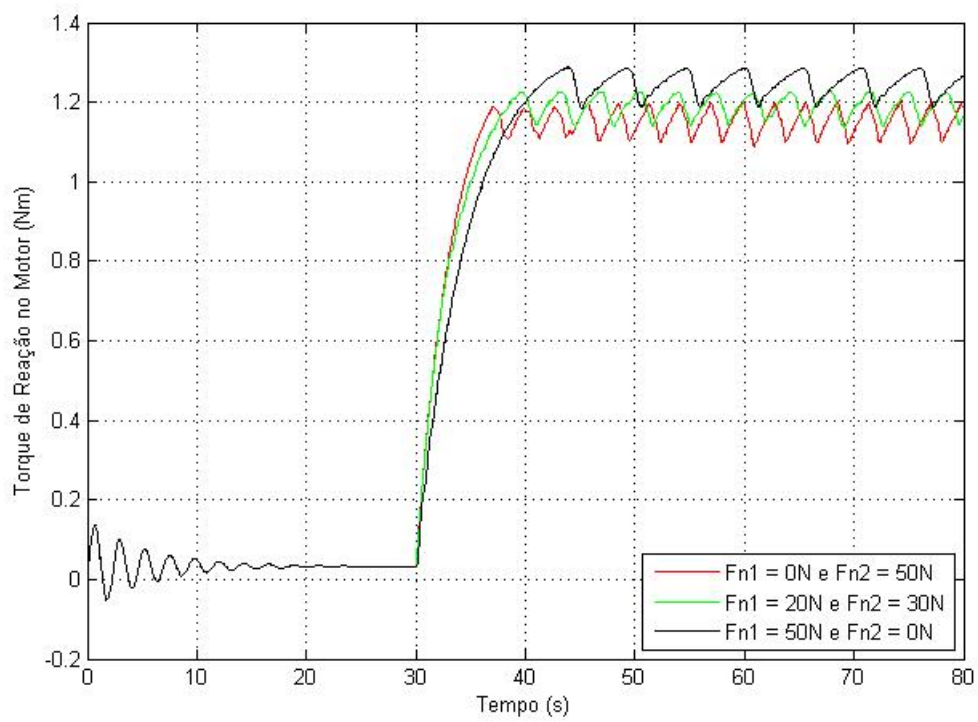


Figura 3.19: Gráfico do torque de reação T_m no motor para diferentes regimes de atrito.

4

Conclusão

O presente trabalho consistiu no estudo da dinâmica de uma coluna rotativa esbelta, sujeita à ação de *stick-slip* em duas regiões distintas. Foi proposto um modelo teórico da coluna baseado no método de parâmetros concentrados, e o modelo foi validado por meio de uma bancada de testes.

Os parâmetros concentrados foram otimizados, sendo estes os elementos de inércia e rigidez do modelo. A otimização foi realizada de modo que as frequências do modelo de parâmetros concentrados fossem mais próximas possível das frequências naturais do sistema físico, calculadas analiticamente. Essas frequências analíticas foram validadas experimentalmente com base apenas nas primeiras duas frequências naturais de torção, as únicas que foi possível obter com os instrumentos de aquisição de dados disponíveis, cujos respectivos valores são 0.7Hz e 1.7Hz. Os parâmetros relacionados ao amortecimento foram estimados a partir de um ajuste tipo acerto e erro de curvas teóricas a curvas experimentais no tempo, obtidas através de alguns ensaios.

Tal metodologia se mostrou bastante promissora, uma vez que se chegou com sucesso a um modelo teórico simples e bem representativo do sistema real.

Um resultado interessante foi a curva, obtida experimentalmente, do coeficiente de atrito em função da velocidade angular, no contato entre duas superfícies metálicas, uma sendo do pino de alumínio acoplada a uma célula de carga, e a outra a face lateral do rotor de ferro. Como já havia sido notado em trabalhos similares, como por exemplo em (Santos, 2005), constatou-se a existência de um comportamento de histerese no atrito entre esses componentes da bancada, o que tornou ainda mais complexa a implementação numérica do atrito, a não ser que se admitisse por hipótese uma curva de atrito média entre as duas curvas limites no modelo com histerese.

Um outro resultado foi o comportamento dinâmico do sistema, obtido através do modelo numérico já validado, considerando o sistema submetido a diferentes regimes de atrito induzido para uma dada tensão de entrada no motor. Ficou evidente a partir dos gráficos teóricos, no tempo, da velocidade angular na saída do sistema planetário e do torque de reação no motor, que a medida que a fonte principal de atrito se afastava da fonte de movimento, no caso o motor, maior era o impacto nos parâmetros medidos no motor, ou seja, maior era a redução da velocidade angular do sistema em regime permanente

assim como maior era também a intensidade do torque de reação percebido no motor. Constatou-se também que, uma vez atingido o regime de auto-excitação de atrito, quanto mais afastado estivesse a fonte principal de atrito da fonte de movimento, no caso o motor, menor era a frequência de auto-excitação, o que torna esse parâmetro algo relevante na caracterização indireta do regime de atrito, uma vez que possivelmente a frequência de auto-excitação no atrito venha a ser um bom indicador para se estimar a posição de aplicação da fonte de atrito de maior intensidade, ao longo de uma coluna real de perfuração.

Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros sugere-se: (a) o aprimoramento do modelo dinâmico da bancada, especificamente no melhoramento do modelo de atrito a partir de curvas experimentais mais apuradas; (b) levantamento, para a bancada de testes, de uma curva experimental e teórica das frequências de auto-excitação induzidas pelo regime de atrito, em função da posição de aplicação da principal fonte de atrito ao longo do eixo metálico. Tal curva permitiria uma compreensão qualitativa da relação entre os dois parâmetros.

5

Referências Bibliográficas

ANDRADE, B. C. C. **Numerical and experimental analysis of nonlinear torsional dynamics of a drilling system**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013. (document), 1.2, 2.1, B.1, B.2, B.4, B.5, B.7

ARCIERI, M. A. S. **Controle de vibrações mecânicas tipo *stick-slip* em colunas de perfuração**. Universidade Federal de Sergipe: Dissertação de Mestrado, 2013. (document), 1.3

BAKENOV, D. et al. Enhanced drilling performance through controlled drillstring vibrations. In: **AADE 2003 National Technology Conference, NTCE-21**. Houston, Texas: [s.n.], 2003. 1.2

CLOSE, D. A.; OWENS, S. C.; MACPHERSON. Measurements of bha vibration using mwd. In: **Proc. IADC/SPE - Drilling Conference**. [S.l.: s.n.], 1988. 1.2

DEILY, F. H. et al. Downhole measurements of drill string forces and motions. **Journal of Eng. for Ind. Trans. ASME**, p. 217–225, 1968. 1.2

DIAMOND-ENHANCED Insert Stabilizer. http://www.slb.com/services/drilling/tools_services/reamers_stabilizers/diamond_enhanced_stabilizer.aspx. Accessed: 2015-08-16. (document), 1.2

FINNIE, I.; BAYLEY, J. J. An experimental study of drill-string vibration. **Journal of Eng. for Ind. Trans. ASME - Serie B**, v. 82, p. 129–135, 1960. 1.2

FRANCA, L. F. P. **Perfuração Percussiva-Rotativa Auto-Excitada em Rochas Duras**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, 2004. 1.1, 1.1

GARCIA, E.; SANTOS, P. B.; WIT, C. C. Velocity dependence in the cyclic friction arising with gears. **The International Journal of Robotics Research**, v. 21, p. 761–771, 2002. (document), 3.1, 3.3

HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. 2nd. ed. Georgia: Cambridge University Press, 2008. 1.4.1

MIHAJLOVIC, N. et al. Analysis of friction-induced limit cycling in an experimental drill-string system. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 126, p. 709–720, 2004. (document), 3.1, 3.1

NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. **Computer Journal**, p. 308–313, 1965. 2.2.2

POGORELOV, D. et al. A multibody system approach to drill string dynamics modeling. In: **Proceedings of the ASME 2012 11th Biennial Conference On Engineering Systems Design And Analysis - ESDA2012**. Nantes, France: [s.n.], 2012. (document), 1.2, 1.4

RITTO, T. G. **Numerical analysis of the nonlinear dynamics of a drill-string with uncertainty modeling**. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est, Paris, France, 2010. (document), 1.1

SALCEDO, C. M. **Modelo de controlador com compensação de zona morta para uma base móvel de robôs**. Universidade Federal da Bahia: Dissertação de Mestrado, 2010. 3.1

SANTOS, M. B. **Identificação da Força de Atrito Através de Análise de Sinais Não Lineares em Ensaios Tribológicos**. Universidade Federal de Uberlândia: Tese de Doutorado, 2005. 3.1, 4

YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P. Coupled and bending vibration of drillstrings subject to impact with friction. **Journal of Sound and Vibration**, v. 215, p. 167–188, 1998. 1.2

A

Anexo 1

A.1

Dedução da equação característica e das autofunções para o sistema torcional

Considere o sistema torcional ilustrado na Fig. (A.1) e a Eq. A-1 de propagação da onda torcional ao longo do eixo metálico, juntamente com suas condições de contorno.



Figura A.1: Modelo do Sistema Torcional.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} \\
 (i) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} &= \gamma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=0} \\
 (ii) \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^-} + \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^+} &= \gamma_{N_1+1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=\bar{x}_1^*} \\
 (iii) \quad \theta(x^* = \bar{x}_1^{*-}, t^*) &= \theta(x^* = \bar{x}_1^{*+}, t^*) \\
 (iv) \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} &= \gamma_{N_m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \Big|_{x^*=1}
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

Os rotores foram modelados como momentos de inércia concentrados. A expressão $I_1 = n_R^2 J_m$ corresponde à inércia de saída do sistema planetário, com posição $x = 0$, sendo J_m o momento de inércia do rotor interno ao motor e n_R a redução do sistema planetário. Por sua vez a expressão $I_{N_1+1} = J_2$ corresponde ao momento de inércia do rotor intermediário, o qual se encontra na posição $x = l_1$, ou melhor, $x^* = \bar{x}_1^* = \frac{l_1}{l}$, na forma adimensionalizada. E por fim a expressão $I_{N_m} = J_1$ corresponde ao momento de inércia do rotor da extremidade, o qual se encontra na posição $x = l$, ou melhor, $x^* = 1$.

O termo $\gamma_i = \frac{I_i}{\rho J l}$ corresponde ao i -ésimo momento de inércia adimensionalizado no modelo de parâmetros concentrados, sendo ρ a densidade do aço, J o momento polar de inércia da seção transversal do eixo metálico e l o

comprimento do eixo. O produto $\rho J l$ corresponde ao momento de inércia do eixo metálico em relação ao seu eixo longitudinal.

O sistema torcional encontra-se apoiado por meio de mancais que restringem o movimento de translação em qualquer direção, bem como o movimento de rotação, a não ser entorno do seu eixo longitudinal, do que se pode inferir que o sistema possui um modo de corpo rígido de rotação.

Por separação de variáveis, seja $\theta(x^*, t^*) = \Xi(x^*)\Gamma(t^*)$. Substituindo essa expressão na equação da onda Eq. A-1, obtém-se Eq. A-2.

$$\Xi(x^*)\ddot{\Gamma}(t^*) = \Xi''(x^*)\Gamma(t^*) \quad (\text{A-2})$$

Isolando-se em Eq. A-2 as variáveis t^* e x^* obtém-se Eq. A-3.

$$\frac{\Xi''(x^*)}{\Xi(x^*)} = \frac{\ddot{\Gamma}(t^*)}{\Gamma(t^*)} = \begin{cases} \lambda^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

No primeiro caso, a Eq. A-3 implica em Eq. A-4.

$$\begin{cases} \Xi_1(x^*) = A_1 e^{\lambda x^*} + B_1 e^{-\lambda x^*} \\ \Gamma_1(t^*) = C_1 e^{\lambda t^*} + D_1 e^{-\lambda t^*} \end{cases} \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{cases} \Xi_2(x^*) = A_2 e^{\lambda x^*} + B_2 e^{-\lambda x^*} \\ \Gamma_2(t^*) = C_2 e^{\lambda t^*} + D_2 e^{-\lambda t^*} \end{cases} \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1$$

Substituindo-se Eq. A-4 na condição de contorno (i) de Eq. A-1, chega-se à Eq. A-5.

$$(1 - \lambda\gamma_1)A_1 - (1 + \lambda\gamma_1)B_1 = 0 \quad (\text{A-5})$$

Substituindo-se Eq. A-4 na condição de contorno (iv) de Eq. A-1, chega-se à Eq. A-6.

$$e^\lambda(1 + \lambda\gamma_{N_m})A_2 - e^{-\lambda}(-1 + \lambda\gamma_{N_m})B_2 = 0 \quad (\text{A-6})$$

Da condição de contorno (iii), conclui-se que $\Xi_1(\bar{x}_1^*)\Gamma_1(t^*) = \Xi_2(\bar{x}_1^*)\Gamma_2(t^*)$, chegando-se à Eq. A-7, sendo $\sigma(\bar{x}_1^*) \neq 0$ uma constante.

$$\frac{\Gamma_1(t^*)}{\Gamma_2(t^*)} = \frac{\Xi_2(\bar{x}_1^*)}{\Xi_1(\bar{x}_1^*)} = \sigma(\bar{x}_1^*) \quad (\text{A-7})$$

Substituindo Eq. A-4 em Eq. A-7 apenas para a variável x^* , chega-se à Eq. A-8.

$$-\sigma e^{\lambda \bar{x}_1^*} A_1 - \sigma e^{-\lambda \bar{x}_1^*} B_1 + e^{\lambda \bar{x}_1^*} A_2 + e^{\lambda \bar{x}_1^*} B_2 = 0 \quad (\text{A-8})$$

Substituindo-se $\theta(x^*, t^*) = \Xi(x^*)\Gamma(t^*)$ na condição de contorno (ii) de Eq. A-1, chega-se à Eq. A-9.

$$\begin{aligned} -\Xi'_1(x^* = \bar{x}_1^*)\Gamma_1(t^*) + \Xi'_2(x^* = \bar{x}_1^*)\Gamma_2(t^*) &= \gamma_{N_1+1}\Xi(x^* = \bar{x}_1^*)\ddot{\Gamma}_1(t^*) \\ &= \gamma_{N_1+1}\Xi(x^* = \bar{x}_1^*)\lambda^2\Gamma_1(t^*) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

Substituindo-se $\Gamma_1(t^*) = \sigma\Gamma_2(t^*)$ (Eq. A-7) em Eq. A-9, chega-se à Eq. A-10.

$$\left(-\sigma\Xi'_1(x^* = \bar{x}_1^*) + \Xi'_2(x^* = \bar{x}_1^*) - \sigma\gamma_{N_1+1}\lambda^2\Xi(x^* = \bar{x}_1^*)\right)\Gamma_2(t^*) = 0 \quad (\text{A-10})$$

Se $\Gamma_2 = 0$, então $\Gamma_1 = \sigma\Gamma_2 = 0$ e recai-se numa solução trivial para $\theta(x^*, t^*)$. Supondo então $\Gamma_2 \neq 0$, chega-se à Eq. A-11.

$$-\sigma\Xi'_1(x^* = \bar{x}_1^*) + \Xi'_2(x^* = \bar{x}_1^*) - \sigma\gamma_{N_1+1}\lambda^2\Xi(x^* = \bar{x}_1^*) = 0 \quad (\text{A-11})$$

Substituindo Eq. A-4 em Eq. A-11, chega-se à Eq. A-12.

$$-\sigma e^{\lambda \bar{x}_1^*}(1 + \lambda\gamma_2)A_1 + \sigma e^{-\lambda \bar{x}_1^*}(1 - \lambda\gamma_2)B_1 + e^{\lambda \bar{x}_1^*}A_2 - e^{-\lambda \bar{x}_1^*}B_2 = 0 \quad (\text{A-12})$$

Reescrevendo-se Eq. A-5, Eq. A-6, Eq. A-8 e Eq. A-12 numa forma matricial $RY = 0$, chega-se à Eq. A-13.

$$\begin{bmatrix} (1 - \lambda\gamma_1) & -(1 + \lambda\gamma_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda(1 + \lambda\gamma_{N_m})} & e^{-\lambda(-1 + \lambda\gamma_{N_m})} \\ -\sigma e^{\lambda} & -\sigma e^{-\lambda} & e^{\lambda} & e^{-\lambda} \\ -\sigma e^{\lambda \bar{x}_1^*}(1 + \lambda\gamma_{N_1+1}) & \sigma e^{-\lambda \bar{x}_1^*}(1 - \lambda\gamma_{N_1+1}) & e^{\lambda} & -e^{-\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

Uma vez resolvido o sistema de equações em Eq. A-13, a solução da equação da onda para esse primeiro caso é descrita conforme Eq. A-15.

$$\begin{aligned}
 \theta(x^*, t^*) &= \begin{cases} \Gamma_1(t^*)\Xi_1(x^*) & , \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \Gamma_2(t^*)\Xi_2(x^*) & , \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \sigma\Gamma_2(t^*)\Xi_1(x^*) & , \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \Gamma_2(t^*)\Xi_2(x^*) & , \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \\
 &= \Gamma_2(t^*) \begin{cases} \sigma\Xi_1(x^*) & , \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \Xi_2(x^*) & , \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \\
 &= (C_2e^{\lambda t^*} + D_2e^{-\lambda t^*}) \begin{cases} \sigma(A_1e^{\lambda x^*} + B_1e^{-\lambda x^*}) & , \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ (A_2e^{\lambda x^*} + B_2e^{-\lambda x^*}) & , \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A-14}$$

Caso $\det(R) = 0$, então Eq. A-13 possui apenas a solução trivial, e $\theta(x^*, t^*) \equiv 0$.

Caso $\det(R) \neq 0$, existiria pelo menos uma solução não-trivial para Eq. A-13. Isso significa que $\theta(x^*, t^*)$ poderia variar com o tempo, independente da condição inicial, o que seria um absurdo pois se inicialmente o eixo se encontrar em repouso, se não houver torques atuando no sistema torcional, ele permaneceria em repouso. Disso se conclui, a partir de Eq. A-15, que $C_2 = 0$ e $D_2 = 0$, o que recai novamente na solução $\theta(x^*, t^*) \equiv 0$.

Conclui-se então que não há solução não-trivial para esse caso.

Para o segundo caso de Eq. A-3, ou seja,

$$\frac{\Xi''(x^*)}{\Xi(x^*)} = \frac{\ddot{\Gamma}(t^*)}{\Gamma(t^*)} = 0$$

obtem-se as soluções na forma apresentada em Eq. A-15.

$$\begin{cases} \Xi_1(x^*) = A_1 + B_1x^* \\ \Gamma_1(t^*) = C_1 + D_1t^* & \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \Xi_2(x^*) = A_2 + B_2x^* \\ \Gamma_2(t^*) = C_2 + D_2t^* & \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \tag{A-15}$$

Da condição de contorno (i) da equação da onda,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} &= \gamma_1 \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right|_{x^*=0} \Rightarrow \Xi_1'(x^* = 0)\Gamma_1(t^*) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \Xi_1'(x^* = 0) = 0 \text{ (solução não trivial)}
 \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-16.

$$\Xi_1(x^*) = A_1 \tag{A-16}$$

Da condição de contorno (*iv*) da equação da onda,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} &= \gamma_{N_m} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x^*=1} \Rightarrow -\Xi'_2(x^* = 1) \Gamma_2(t^*) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Xi'_2(x^* = 1) = 0 \text{ (solução não trivial)} \Rightarrow \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-17.

$$\Xi_2(x^*) = A_2 \quad (\text{A-17})$$

Da condição de contorno (*iii*) da equação da onda,

$$\begin{aligned} \theta(x_1^-, t) = \theta(x_1^+, t) &\Rightarrow \Xi_1(x = x_1) \Gamma_1(t) \Xi_2(x = x_1) \Gamma_2(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma_2(t)} = \frac{\Xi_2(x = x_1)}{\Xi_1(x = x_1)} = \frac{A_2}{A_1} \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-18.

$$\Gamma_1(t) = \frac{A_2}{A_1} \Gamma_2(t) \text{ e } \Xi_2(x = x_1) = \frac{A_2}{A_1} \Xi_1(x = x_1) \quad (\text{A-18})$$

Da condição de contorno (*ii*) da equação da onda,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1^-} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1^+} &= \gamma_{N_1+1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{x=x_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Xi'_1(x = x_1) \Gamma_1(t) + \Xi'_2(x = x_1) \Gamma_2(t) = 0 \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-19, o que não acrescenta mais nenhuma condição.

$$\Xi'_2(x = x_1) = \frac{A_2}{A_1} \Xi'_1(x = x_1) \Rightarrow 0 = \frac{A_2}{A_1} 0 \quad (\text{A-19})$$

A Eq. A-20 apresenta por fim uma solução para a equação da onda.

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \begin{cases} \Gamma_1(t^*) \Xi_1(x^*) & , \text{ para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1 \\ \Gamma_2(t^*) \Xi_2(x^*) & , \text{ para } \bar{x}_1 \leq x^* \leq 1 \end{cases} \\ \theta(x, t) &= \begin{cases} \sigma \Gamma_2(t) \Xi_1(x) & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ \Gamma_2(t) \Xi_2(x) & , \text{ para } x_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\theta(x, t) = \Gamma_2(t^*) \begin{cases} \frac{A_2}{A_1} A_1 & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ A_2 & , \text{ para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta(x, t) = \Gamma_2(t) A_2 = \phi(t) \quad (\text{A-20})$$

Conclui-se que para a frequência $\lambda_1 = 0$ obtém-se o modo de corpo rígido $\theta_1(x, t) = \phi(t)$.

Para o terceiro e último caso de Eq. A-3, ou seja,

$$\frac{\Xi''(x^*)}{\Xi(x^*)} = \frac{\ddot{\Gamma}(t^*)}{\Gamma(t^*)} = -\lambda^2$$

com $\lambda \neq 0$, obtém-se as soluções na forma apresentada em Eq. A-21.

$$\begin{cases} \Xi_1(x) = A_1 \sin(\lambda x) + B_1 \cos(\lambda x) \\ \Gamma_1(t) = C_1 \sin(\lambda t) + D_1 \cos(\lambda t) & \text{para } 0 \leq x^* \leq \bar{x}_1^* \\ \Xi_2(x) = A_2 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x) \\ \Gamma_2(t) = C_2 \sin(\lambda t) + D_2 \cos(\lambda t) & \text{para } \bar{x}_1^* \leq x^* \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A-21})$$

Da condição de contorno (i) da equação da onda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \gamma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Xi_1'(x=0) \Gamma_1(t) &= \gamma_1 \Xi_1(x=0) \ddot{\Gamma}_1(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Xi_1'(x=0) \Gamma_1(t) &= -\gamma_1 \Xi_1(x=0) \lambda^2 \Gamma_1(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\Xi_1'(x=0) + \gamma_1 \Xi_1(x=0) \lambda^2 \right) \Gamma_1(t) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1 \lambda \cos(\lambda 0) - B_1 \lambda \sin(\lambda 0) + \gamma_1 \lambda^2 (A_1 \sin(\lambda 0) + B_1 \cos(\lambda 0)) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1 &= -\gamma_1 \lambda B_1 \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-22.

$$\Xi_1(x) = A_1 \left(\sin(\lambda x) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x) \right) \quad (\text{A-22})$$

Da mesma forma, da condição de contorno (iv) da equação da onda, chega-se à Eq. A-23.

$$\Xi_2(x) = A_2 (\sin(\lambda x) + \beta(\lambda) \cos(\lambda x)) \quad (\text{A-23})$$

sendo que

$$\beta(\lambda) = \frac{\cos(\lambda) - \gamma_{N_m} \lambda \sin(\lambda)}{\sin(\lambda) + \gamma_{N_m} \lambda \cos(\lambda)}$$

Da condição de contorno (iii) da equação da onda,

$$\begin{aligned} \theta(x_1^-, t) = \theta(x_1^+, t) &\Rightarrow \Xi_1(x = x_1) \Gamma_1(t) = \Xi_2(x = x_1) \Gamma_2(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma_2(t)} = \frac{\Xi_2(x = x_1)}{\Xi_1(x = x_1)} = \sigma(x_1, \lambda) \frac{A_2}{A_1} \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-24.

$$\sigma(x_1, \lambda) = \frac{\sin(\lambda x) + \beta(\lambda) \cos(\lambda x)}{\sin(\lambda x) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x)} \quad (\text{A-24})$$

Da condição de contorno (ii) da equação da onda,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1^-} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1^+} &= \gamma_{N_1+1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Xi_1'(x = x_1) \Gamma_1(t) + \Xi_2'(x = x_1) \Gamma_2(t) = \gamma_{N_1+1} \Xi_1(x = x_1) \ddot{\Gamma}_1(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Xi_1'(x = x_1) \Gamma_1(t) + \Xi_2'(x = x_1) \Gamma_2(t) = -\gamma_{N_1+1} \Xi_1(x = x_1) \lambda^2 \Gamma_1(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Xi_1'(x = x_1) + \Xi_2'(x = x_1) \frac{\Gamma_2(t)}{\Gamma_1(t)} = -\gamma_{N_1+1} \Xi_1(x = x_1) \lambda^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\Xi_1'(x = x_1) + \Xi_2'(x = x_1) \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} \frac{A_1}{A_2} = -\gamma_{N_1+1} \Xi_2(x = x_1) \lambda^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -A_1 \lambda \left(\cos(\lambda x_1) + \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \sin(\lambda x_1) \right) + A_2 \lambda (\cos(\lambda x_1) - \beta(\lambda) \sin(\lambda x_1)) \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} \frac{A_1}{A_2} = \\ &= -\gamma_{N_1+1} A_1 \left(\sin(\lambda x_1) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x_1) \right) \lambda^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow - \left(\cos(\lambda x_1) + \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \sin(\lambda x_1) \right) + (\cos(\lambda x_1) - \beta(\lambda) \sin(\lambda x_1)) \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} = \\ &= -\gamma_{N_1+1} \lambda \left(\sin(\lambda x_1) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x_1) \right) \end{aligned}$$

chega-se à Eq. A-25, como se queria demonstrar.

$$\begin{aligned} \cos(\lambda \bar{x}_1^*) \left(-1 - \frac{\gamma_{N_1+1}}{\gamma_1} + \frac{1}{\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*)} \right) + \\ + \sin(\lambda \bar{x}_1^*) \left(-\frac{1}{\lambda \gamma_1} + \lambda \gamma_{N_1+1} - \frac{\beta(\lambda)}{\sigma(\lambda, \bar{x}_1^*)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

A Eq. A-25 possui como raízes as frequências naturais $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ adimen-

sionais do sistema torcional.

As autofunções ϕ_i apresentadas em Eq. A-27, associadas às frequências λ_i são obtidas a partir de Eq. A-26, de modo que $\theta_i(x, t) = \Gamma_i(t)\phi_i(x)$ com $i = 2, 3, \dots$ são soluções da equação da onda Eq. A-1.

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \Gamma_1(t)\Xi_1(x) & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ \Gamma_2(t)\Xi_2(x) & , \text{ para } x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \Gamma_1(t)\Xi_1(x) & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} \frac{A_1}{A_2} \Gamma_1(t)\Xi_1(x) & , \text{ para } x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \Gamma_1(t)A_1 \left(\sin(\lambda x) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x) \right) & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} \frac{A_1}{A_2} \Gamma_1(t)A_2 (\sin(\lambda x) + \beta(\lambda) \cos(\lambda x)) & , \text{ para } x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta(x, t) = \Gamma(t) \begin{cases} \sin(\lambda x) - \frac{1}{\gamma_1 \lambda} \cos(\lambda x) & , \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{1}{\sigma(x_1, \lambda)} (\sin(\lambda x) + \beta(\lambda) \cos(\lambda x)) & , \text{ para } x_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A-26})$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \sin(\lambda_i x) - \frac{1}{\lambda_i \gamma_1} \cos(\lambda_i x) & , 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{1}{\sigma(\lambda_i, x_1)} [\sin(\lambda_i x) + \beta(\lambda_i) \cos(\lambda_i x)] & , x_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A-27})$$

B

Anexo 2

B.1

Bancada de testes

No presente trabalho a bancada de testes consistiu de um aparato horizontal composto por um motor CC *ENGELGNM5480 – G6.1* da série *E*, uma caixa de engrenagens planetárias com relação de redução de 8 : 1 acoplada ao motor CC, um eixo metálico extremamente esbelto fixo à saída do sistema planetário, e dois rotores maciço, fixos ao eixo metálico em pontos diferentes: um na extremidade oposta ao motor, e outro num ponto intermediário.

A Fig. B.1 apresenta uma foto da bancada de testes.

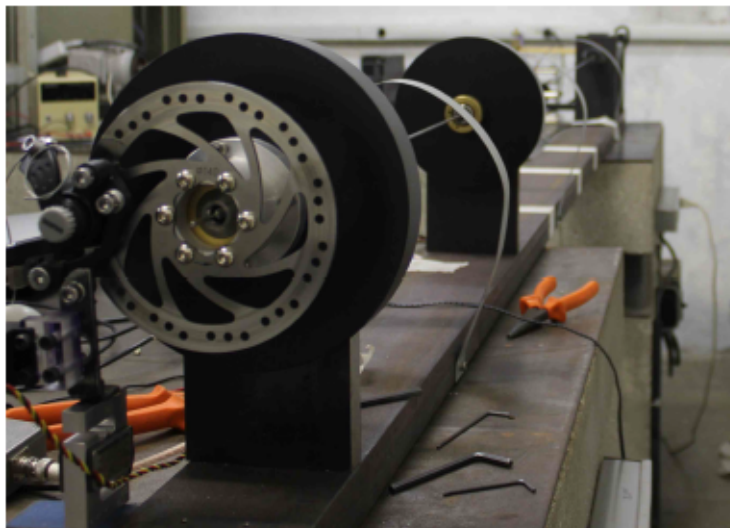


Figura B.1: Bancada de testes vista de frente (Andrade, 2013).

A Fig. B.2 mostra o motor CC, juntamente com a caixa de engrenagens planetárias aparafusada ao motor.

Acoplado a cada rotor existe um sistema de freio, instrumentado com uma célula de carga, o qual encontra-se descrito mais detalhadamente no Cap.3. A função da célula de carga é aferir o valor real, no tempo, da força normal sobre a superfície lateral do rotor, durante a indução de atrito. A Fig. B.3 apresenta o sistema de freio utilizado.

Além das células de carga nos sistemas de freio para medição da força normal, foram colocados *encoders* em cada rotor e na saída do sistema

planetário, para aferição das respectivas posições angulares e estimativa da velocidade angular desses componentes.

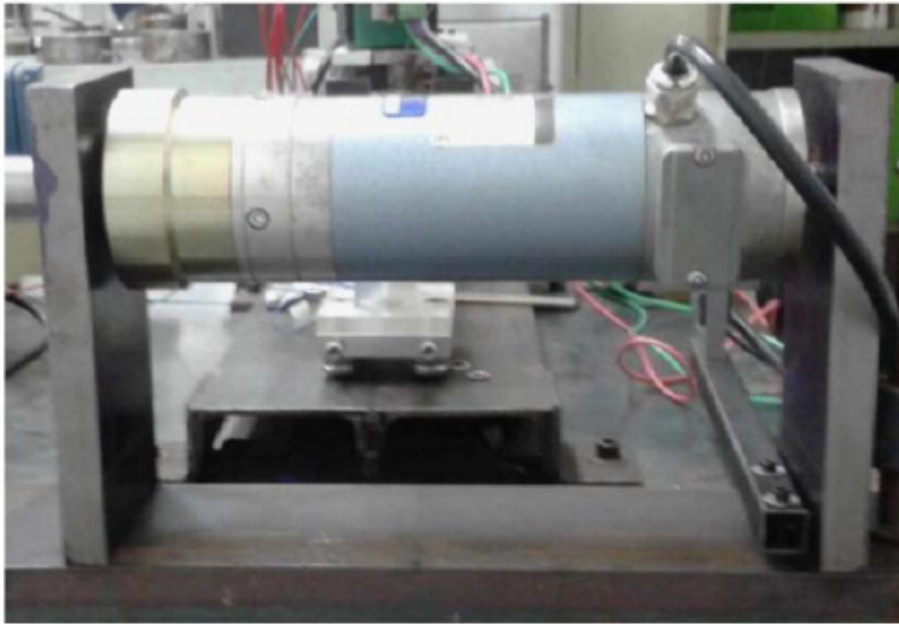


Figura B.2: Motor CC (Andrade, 2013).

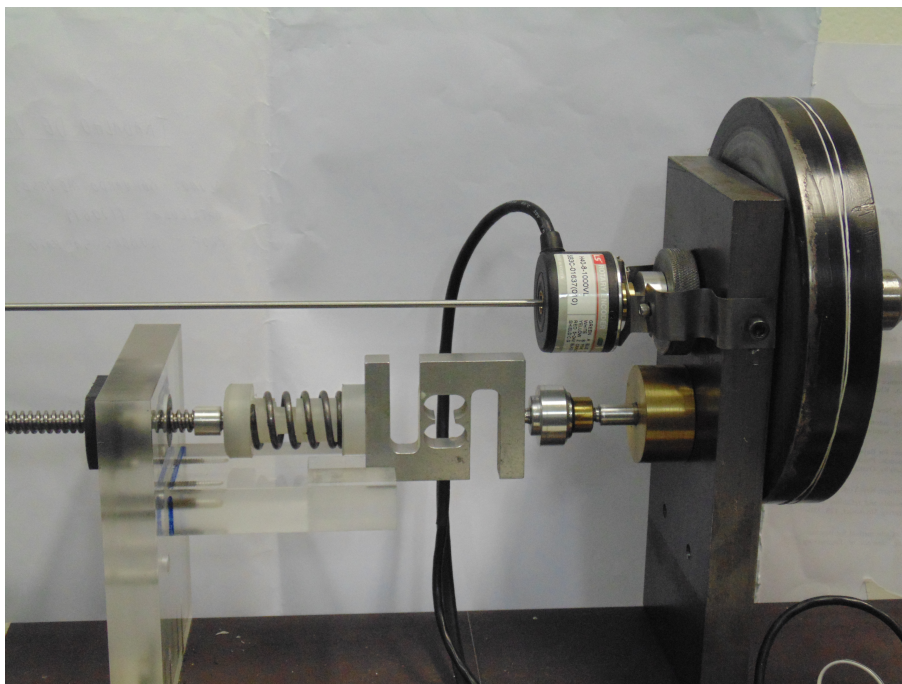


Figura B.3: Sistema de freio, instrumentado com uma célula de carga.

Para aferição do torque de reação sobre o motor, foi fixado no mesmo uma haste metálica apoiada na outra extremidade sobre um sensor de força piezoelétrico *PCB208C01*, como ilustrado na Fig. B.4. Uma vez aferidos o sinal

do sensor piezoelétrico e o comprimento do braço da força, foi possível adquirir a curva de torque de reação no tempo.

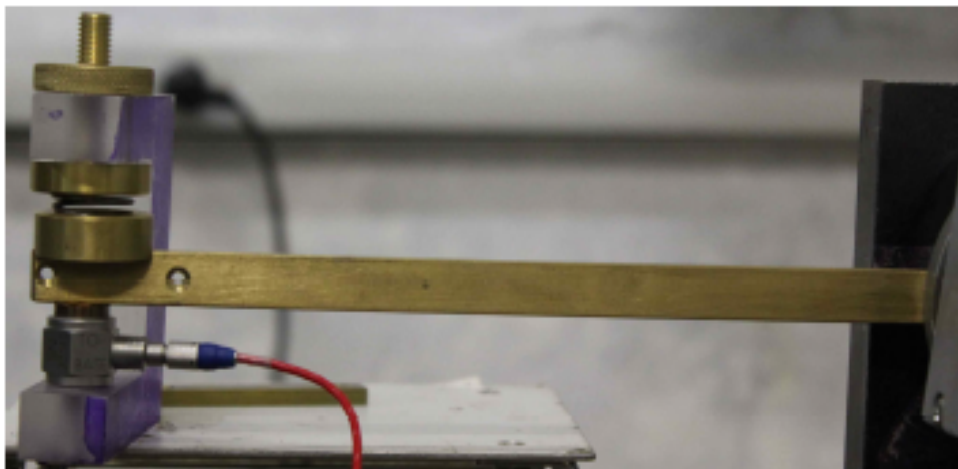


Figura B.4: Sistema de aferição do torque de reação (Andrade, 2013).

Os sinais de todos os sensores foram adquiridos por meio de uma placa de aquisição *NIUSB – 6229* da *National Instruments*, conforme ilustrado na Fig. B.5. Os sinais adquiridos foram observados por meio do *software Lab View 2010* e posteriormente processados através do *software MatLab*, para filtragem de ruídos da medição. Na Fig. B.6 é apresentado um trecho do ambiente de interface com o usuário implementado no *Lab View*.

A Fig. B.7 apresenta os sensores utilizados, e a Fig. B.8 ilustra a disposição do sistema de medição e aquisição de dados com relação a bancada de testes.



Figura B.5: Placa de aquisição de dados (Andrade, 2013).

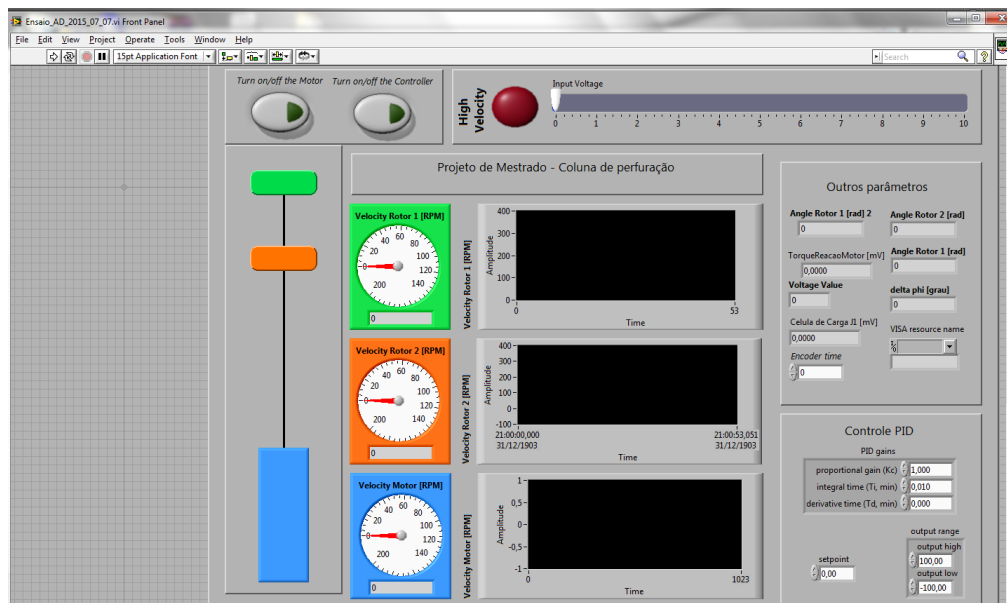


Figura B.6: Ambiente *LabView* para observação dos sinais adquiridos.

B.6(a):



B.6(b):



B.6(c):



Figura B.7: Sensores utilizados na bancada de testes: (a) *Encoder*; (b) Sensor de força piezoelétrico; (c) Célula de carga ((Andrade, 2013), adaptado).

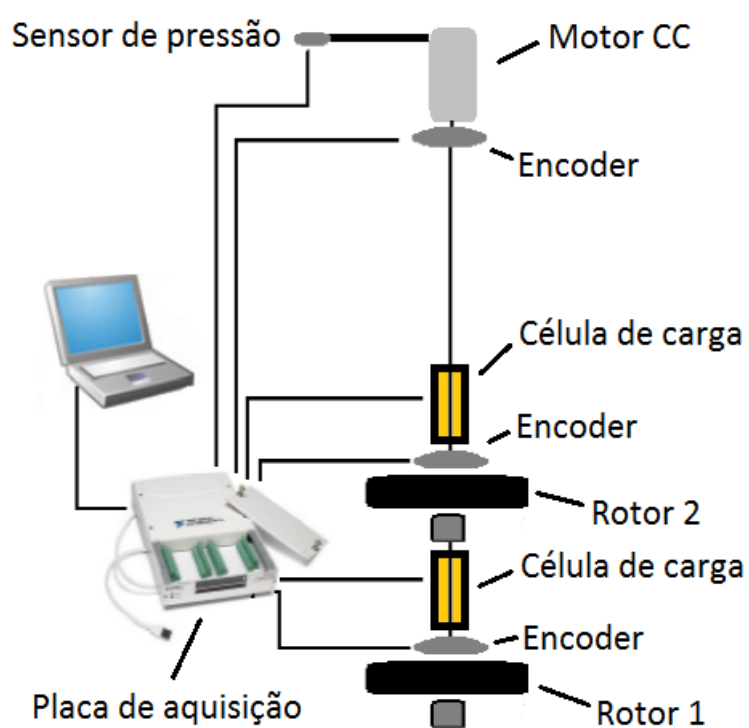


Figura B.8: Disposição dos sensores ao longo da bancada de testes.