

3

Detecção ótima GSM

Este capítulo dedica-se aos esquemas de detecção GSM que minimizam a probabilidade de erro. Inicialmente será apresentado o receptor de máxima verossimilhança. Em seguida, será apresentada uma formulação de um limitante superior da probabilidade de erro de bit do detector ótimo para sistemas MIMO convencionais, aqui aplicada ao sistema GSM. Também serão apresentadas análises dos ganhos de diversidade e codificação do sistema. Estes servirão de base para a proposta de escolha de mapeamentos das combinações de antenas transmissoras ativas de sistemas GSM que maximizem o ganho de codificação. Por fim, será apresentado o algoritmo *Sphere Decoding*, que possibilita a detecção de sistemas MIMO com desempenho do detector ótimo e reduzida complexidade de computação. Propostas de modificações deste algoritmo com o objetivo de oferecer reduções adicionais ao esquema original também serão introduzidas.

3.1

Detecção ML

Considerando o modelo de transmissão apresentado na Seção 2.2, o detector ótimo no sentido da minimização da probabilidade de erro corresponde ao detector que maximiza a probabilidade *a posteriori* (MAP) $P(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \mathbf{H})$. Através da aplicação direta da regra de Bayes, temos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} P(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \mathbf{H}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \mathbf{H}) P(\mathbf{s}),\end{aligned}\tag{3-1}$$

onde \mathcal{S} é conjunto dos vetores de sinal possíveis de serem transmitidos. Reconhecendo que todos os elementos de \mathcal{S} são igualmente prováveis, a maximização da probabilidade *a posteriori* corresponde à maximização da função de verossimilhança (*maximum likelihood*, ML):

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \mathbf{H}).\tag{3-2}$$

Reconhecendo a função verossimilhança $p(\mathbf{y}|\mathbf{s}, \mathbf{H})$ como uma distribuição normal de média $\mathbf{H}\mathbf{s}$ e matriz covariância $\sigma^2\mathbf{I}_{N_R}$, a maximização da verossimi-

lhança apresenta a forma:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \left\{ \text{Re}(\mathbf{y}^H \mathbf{H} \mathbf{s}) - \frac{1}{2} \|\mathbf{H} \mathbf{s}\|^2 \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{s}\|^2.\end{aligned}\quad (3-3)$$

Levando em consideração a estrutura do sinal GSM, o detector ML pode ser reescrito como:

$$\{\hat{k}, \hat{\mathbf{b}}\}_{\text{ML}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{N_A} \\ c \in \{1, 2, \dots, N_C\}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_c \mathbf{b}\|^2. \quad (3-4)$$

Finalmente, o vetor de símbolos GSM é reconstruído fazendo-se:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \mathbf{P}_{\hat{k}} \hat{\mathbf{b}}. \quad (3-5)$$

O custo de computação deste detector é proporcional ao número de combinações de antenas, ao número de antenas ativas e à ordem da modulação. Tem-se assim, que o número de hipóteses a serem testadas no detector ML em (3-4) é $N_C M^{N_A}$. Desta forma, esta estratégia, apesar de fornecer o desempenho ótimo, possui implementação viável apenas em configurações de sistema com baixas taxas de transmissão.

3.2

Limitante superior para a probabilidade de erro de detecção do detector ótimo GSM

Um limitante superior para a probabilidade de erro de bit do sistema GSM que emprega o detector ML pode ser obtido a partir da união das probabilidades de erro entre pares de símbolos transmitidos. Como subprodutos desta derivação, será possível investigar aspectos relevantes característicos dos sistemas GSM, como o ganho de diversidade, o ganho de codificação e a apresentação de um critério para escolha das matrizes de combinações permitidas das antenas transmissoras.

Considere um sistema GSM que transmite palavras-código de comprimento L , constituindo matrizes \mathbf{S} de dimensão $N_T \times L$. No caso particular, ao se considerar sistemas sem codificação, estas palavras-código reduzem-se a vetores de símbolos GSM \mathbf{s} , de dimensão $N_T \times 1$. A probabilidade de erro na

detecção de uma palavra-código transmitida pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{S}}(\text{erro}) &= \sum_{\mathbf{S}_i} P(\mathbf{S}_i) P\left(\bigcup_{\mathbf{S}_j, \mathbf{S}_j \neq \mathbf{S}_i} \mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j\right) \\ &\leq \sum_{\mathbf{S}_i} P(\mathbf{S}_i) \sum_{\substack{\mathbf{S}_j \\ \mathbf{S}_j \neq \mathbf{S}_i}} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j). \end{aligned} \quad (3-6)$$

A desigualdade em (3-6) resulta do limitante da união, e $P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j)$ corresponde à probabilidade de se decidir por \mathbf{S}_j quando \mathbf{S}_i foi transmitido, chamado também de probabilidade de erro par a par. Pelo teorema da probabilidade total, a probabilidade de erro par a par é dada por:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) = \int P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j | \mathbf{H}) p_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}) d\mathbf{H}, \quad (3-7)$$

sendo $p_{\mathbf{H}}(\mathbf{H})$ a função densidade de probabilidade de \mathbf{H} .

Ao se considerar o detector ótimo, a probabilidade de erro par a par condicional presente em (3-7) é encontrada na literatura de sistemas MIMO[36]. Seguindo procedimento equivalente:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j | \mathbf{H}) &= P\left(\|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{S}_i\|_{\mathbf{F}}^2 > \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{S}_j\|_{\mathbf{F}}^2\right) \\ &= P\left(\|\mathbf{H}\mathbf{S}_i + \mathbf{N} - \mathbf{H}\mathbf{S}_i\|_{\mathbf{F}}^2 > \|\mathbf{H}\mathbf{S}_i + \mathbf{N} - \mathbf{H}\mathbf{S}_j\|_{\mathbf{F}}^2\right) \\ &= P\left(2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^{\mathbf{H}} \left(\mathbf{H}(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i) \right) \right) \right] - \|\mathbf{H}(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i)\|_{\mathbf{F}}^2 > 0 \right), \end{aligned} \quad (3-8)$$

sendo \mathbf{Y} e \mathbf{N} as matrizes $N_R \times L$ do sinal recebido e o ruído aditivo na recepção durante L usos do canal, respectivamente. Definindo $\mathbf{D}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i)$, tem-se:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j | \mathbf{H}) &= P\left(2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^{\mathbf{H}} \mathbf{D}_{\mathbf{H}} \right) \right] - \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{F}}^2 > 0\right) \\ &= P(c > 0) \end{aligned} \quad (3-9)$$

A variável de decisão $c = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{tr} \left(\mathbf{N}^{\mathbf{H}} \mathbf{D}_{\mathbf{H}} \right) \right] - \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{F}}^2$ é uma variável aleatória Gaussiana. Sua média e variância, desenvolvidas no Apêndice B, são:

$$\begin{aligned} \mu_c &= \mathbb{E}[c] = -\|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{F}}^2 \\ \operatorname{var}_c &= \mathbb{E}\left[(c - \mu_c)^2\right] = 2N_0 \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{F}}^2 \end{aligned} \quad (3-10)$$

Assim, a expressão em (3-9) assume a forma:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j | \mathbf{H}) &= Q\left(\sqrt{\frac{1}{2N_0}} \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_F\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4N_0 \sin^2 \theta} \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_F^2\right) d\theta. \end{aligned} \quad (3-11)$$

A segunda igualdade em (3-11) segue da representação alternativa da função Q [37], sendo Q o complemento da função distribuição cumulativa da distribuição normal de média nula e variância unitária. A probabilidade de erro par a par não-condicional é obtida substituindo a expressão acima em (3-7):

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4N_0 \sin^2 \theta} z\right) p_Z(z) d\theta dz, \quad (3-12)$$

sendo $z = \|\mathbf{D}_{\mathbf{H}}\|_F^2$ e $p_Z(z)$ sua função densidade de probabilidade. Invertendo a ordem de integração, tem-se:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4N_0 \sin^2 \theta} z\right) p_Z(z) dz \right] d\theta. \quad (3-13)$$

Considerando \mathcal{M}_γ a função geradora de momento da variável aleatória γ , dada pela expressão

$$\mathcal{M}_\gamma(s) = \int_0^\infty e^{s\gamma} p_\gamma(\gamma) d\gamma, \quad (3-14)$$

define-se a integral entre colchetes em (3-13) como a função geradora de momento de Z . Tem-se então:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{M}_z\left(-\frac{1}{4N_0 \sin^2 \theta}\right) d\theta. \quad (3-15)$$

A fim de determinar a forma de \mathcal{M}_z , faz-se a manipulação algébrica de z . Definindo $\mathbf{\Delta} = \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i$, tem-se:

$$\begin{aligned} z &= \|\mathbf{H}\mathbf{\Delta}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^H\mathbf{H}^H) \\ &= \text{vec}(\mathbf{H}^H)^H (\mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^H) \text{vec}(\mathbf{H}^H), \\ &= \mathbf{u}^H \mathbf{A} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3-16)$$

sendo $\mathbf{u} = \text{vec}(\mathbf{H}^H)$ e $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{N_R} \otimes \mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^H$. Assim, z é identificada como uma variável aleatória que corresponde a uma forma Gaussiana quadrática. Partindo do modelamento do canal MIMO apresentado na Seção 2.1, a média

e matriz covariância de \mathbf{u} são dadas por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} &= \mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}} &= \mathbb{E}[(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}})^H] = \mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}^H]\end{aligned}\quad (3-17)$$

A função geradora de momento de uma forma Gaussiana quadrática $z = \mathbf{u}^H \mathbf{A} \mathbf{u}$, em que \mathbf{u} é um vetor complexo Gaussiano e \mathbf{A} é uma matriz Hermitiana, foi calculada em [38] e tem a forma:

$$\mathcal{M}_z(s) = \frac{\exp\left(s\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}}^H \mathbf{A} (\mathbf{I}_{N_R N_T} - s\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}}\right)}{|\mathbf{I}_{N_R N_T} - s\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \mathbf{A}|}.\quad (3-18)$$

Como \mathbf{u} possui média nula, (3-18) é reduzida para:

$$\mathcal{M}_z(s) = |\mathbf{I}_{N_R N_T} - s\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \mathbf{A}|^{-1}.\quad (3-19)$$

Ao considerar o caso em que os enlaces do canal MIMO possuem ganhos correlacionados, é conveniente admitir a representação de Kronecker para compor $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$, conforme apresentado na Seção 2.1. Fazendo $\mathbf{R}_{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_{\text{rx}}^* \otimes \mathbf{R}_{\text{tx}}^*$ e usando a igualdade $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{D})$, (3-19) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{M}_z(s) = |\mathbf{I}_{N_R N_T} - s\mathbf{R}_{\text{rx}}^* \otimes \mathbf{R}_{\text{tx}}^* \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta}^H|^{-1}.\quad (3-20)$$

O determinante de uma matriz equivale ao produto dos seus autovalores. Considere duas matrizes genéricas, \mathbf{A} e \mathbf{B} , de posto M e N , respectivamente, e com autovalores não nulos iguais a $\{\lambda_i^{\mathbf{A}}\}_{i=1}^M$ e $\{\lambda_j^{\mathbf{B}}\}_{j=1}^N$. Os MN autovalores de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ são iguais a $\lambda_i^{\mathbf{A}} \lambda_j^{\mathbf{B}}$, $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Aplicando estas identidades, (3-20) tem a forma:

$$\mathcal{M}_z(s) = \prod_{l=1}^{r_t} \prod_{m=1}^{r_r} \left(1 - s\epsilon_l^{(i,j)} \sigma_m\right)^{-1},\quad (3-21)$$

onde $\{\sigma_m\}_{m=1}^{r_r}$ são os autovalores não nulos da matriz Hermitiana \mathbf{R}_{rx}^* , de posto r_r , ou, equivalentemente, de \mathbf{R}_{rx} . Já $\{\epsilon_l^{(i,j)}\}_{l=1}^{r_t}$ são os autovalores não nulos de $\mathbf{R}_{\text{tx}}^* \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta}^H$, de posto r_t . Considerando o caso de sistemas não-codificados, a palavra-código \mathbf{S} reduz-se ao vetor \mathbf{s} , logo $\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta}^H$ possui posto unitário. Consequentemente, $\mathbf{R}_{\text{tx}}^* \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta}^H$ também terá posto unitário e $\epsilon^{(i,j)}$ é seu único autovalor. Por simplicidade de notação, os índices i e j no autovalor ϵ , dependentes das palavras-código, serão omitidos.

A obtenção da probabilidade de erro par a par não condicional exige a integração da função geradora de momento, como apresentado em (3-15). Para tal, o produtório em \mathcal{M}_z deve ser decomposto em múltiplas somas, empregando método das frações parciais:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(s) &= \prod_{m=1}^P \left(1 - s\epsilon\sigma_m\right)^{-M_m} \\ &= \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^{M_m} \frac{A_{m,n}}{(1 - s\epsilon\sigma_m)^n}. \end{aligned} \quad (3-22)$$

Na primeira igualdade de (3-22), a nova forma de \mathcal{M}_z leva em conta o caso geral em que \mathbf{R}_{rx} possui $P \leq r_r$ autovalores distintos, que ocorrem com multiplicidade M_1, \dots, M_P . Os coeficientes $A_{m,n}$ podem ser determinados usando [39]:

$$A_{m,n} = \frac{1}{(M_m - n)!} \frac{1}{(-\epsilon\sigma_m)^{M_m-n}} \frac{\partial^{M_m-n}}{\partial s^{M_m-n}} \left[\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq m}}^P \frac{1}{(1 - s\epsilon\sigma_\nu)^{M_\nu}} \right] \Bigg|_{s=\frac{1}{\epsilon\sigma_m}}. \quad (3-23)$$

Aplicando em (3-15) e utilizando o resultado da integração apresentado em [40], obtém-se a expressão da probabilidade de erro par a par:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j) &= \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^{M_m} \frac{A_{m,n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\epsilon\sigma_m}{4N_0 \sin^2 \theta}} \right)^n d\theta \\ &= \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^{M_m} \frac{A_{m,n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \frac{\epsilon\sigma_m}{4N_0}} \right)^n d\theta \\ &= \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^{M_m} A_{m,n} \mu \left(\frac{\epsilon\sigma_m}{4N_0} \right)^n \sum_{o=1}^{n-1} \binom{n-1+o}{o} \left[1 - \mu \left(\frac{\epsilon\sigma_m}{4N_0} \right) \right]^o, \end{aligned} \quad (3-24)$$

onde a notação $\mu(x)$ é definida como:

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right), \quad x \geq 0. \quad (3-25)$$

No caso particular de ausência de correlação entre antenas no lado receptor, $\mathbf{R}_{rx} = \mathbf{I}_{N_R}$ e seu único autovalor $\sigma_1 = 1$ ocorre com multiplicidade $M_1 = N_R$. Neste caso, o único coeficiente da expansão não nulo é $A_{1,N_R} = 1$.

A expressão de $P(\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j)$ reduz-se a:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \frac{\epsilon}{4N_0}} \right)^{N_R} d\theta \\ &= \mu \left(\frac{\epsilon}{4N_0} \right)^{N_R} \sum_{o=1}^{N_R-1} \binom{N_R-1+o}{o} \left[1 - \mu \left(\frac{\epsilon}{4N_0} \right) \right]^o. \end{aligned} \quad (3-26)$$

Finalmente, a probabilidade de erro de bit é obtida após aplicar a expressão da probabilidade de erro par a par em (3-6):

$$\begin{aligned} P_{\text{bit}}(\text{erro}) &\leq \sum_{\mathbf{s}_i} P(\mathbf{s}_i) \sum_{\substack{\mathbf{s}_j \\ \mathbf{s}_j \neq \mathbf{s}_i}} \frac{d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)}{m} P(\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j) \\ &\leq \frac{1}{2^m m} \sum_{\mathbf{s}_i} \sum_{\substack{\mathbf{s}_j \\ \mathbf{s}_j \neq \mathbf{s}_i}} d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) P(\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j), \end{aligned} \quad (3-27)$$

onde $d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ representa o número de bits diferentes ao comparar a codificação binária dos vetores \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j , ou, equivalentemente, a distância de Hamming entre estes vetores, e m , o número de bits emitidos no vetor \mathbf{s}_i .

Para a análise dos ganhos de codificação e de diversidade do sistema, é conveniente a substituição da expressão exata da probabilidade de erro par a par por um limitante superior. Pela Desigualdade de Chernoff, tem-se que:

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0. \quad (3-28)$$

Executando estratégia semelhante ao apresentado em [41], um limitante superior para a probabilidade de erro par a par não condicional em (3-7) é obtido ao aplicar (3-28) à expressão da probabilidade de erro par a par condicional em (3-11). Desta forma, chega-se a:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) &\leq \int_0^\infty \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{4N_0} z\right) p_Z(z) dz \\ &\leq \mathcal{M}_z\left(-\frac{1}{4N_0}\right). \end{aligned} \quad (3-29)$$

Realizando os passos apresentados em (3-16) a (3-21), o limitante superior de $P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j)$ é dado por:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) \leq \prod_{l=1}^{r_t} \prod_{m=1}^{r_r} \left(1 - s\epsilon_l \sigma_m \right)^{-1}. \quad (3-30)$$

Assumindo que no lado do receptor, \mathbf{R}_{rx} possui r_r autovalores iguais à unidade, (3-30) é adicionalmente simplificada para:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) \leq \frac{1}{\prod_{l=1}^{r_t} (1 + \rho' \epsilon_l)^{r_r}}, \quad (3-31)$$

sendo $\rho' = \frac{1}{4N_0}$. A definição dos ganhos do sistema exige a análise da probabilidade de erro par a par para valores assintóticos de relação sinal-ruído. A expansão do denominador de (3-31), desenvolvida no Apêndice C, revela seu termo dominante para altos valores de relação sinal-ruído (ou seja, $\rho' \rightarrow \infty$). Nestas condições, a expressão é representada por:

$$P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) \stackrel{\rho' \rightarrow \infty}{\leq} \frac{1}{\left[\rho' \left(\prod_{l=1}^{r_t} \epsilon_l \right)^{\frac{1}{r_t}} \right]^{r_t r_r}}. \quad (3-32)$$

Definem-se as contribuições do par $(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$ aos ganhos de diversidade e de codificação do sistema, respectivamente, como:

$$g_d(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) = r_t(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) r_r \quad (3-33a)$$

$$g_c(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) = \left(\prod_{m=1}^{r_t} \epsilon_m(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) \right)^{\frac{1}{r_t}}, \quad (3-33b)$$

onde $r_t(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$ e $\epsilon_m(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$ expressam, respectivamente, r_t e ϵ_m em função do par $(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$.

Os termos que mais influenciam o somatório de probabilidades de erro par a par em (3-6) são aqueles que decaem mais lentamente, ou seja, com menor $g_d(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j)$. Desta forma, os ganhos de diversidade e codificação são dados por:

$$G_d \triangleq \min_{\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j} g_d(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) \quad (3-34a)$$

$$G_c \triangleq \min_{\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j} g_c(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j), \quad \text{quando } g_d(\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j) = G_d, \quad (3-34b)$$

Os gráficos a seguir exibem curvas demonstrativas dos resultados apresentados. Na Figura 3.1 são mostradas curvas de desempenho, representadas pela probabilidade de erro de bit do detector ótimo de um sistema GSM sem codificação obtido por simulação computacional e o limitante superior desta probabilidade de erro, calculado em (3-24) a (3-27). Considera-se a configuração $N_T = 4$, $N_A = 2$, $N_R = 4$ e modulação QPSK nos símbolos emitidos pelas

antenas ativas. Verifica-se que para valores assintóticos da relação sinal-ruído, o limitante superior pode ser considerado coincidente com a curva obtida por simulação.

Este gráfico também exibe as curvas da probabilidade de erro de bit agrupadas de acordo com o nível de correlação entre os coeficientes do canal MIMO. São apresentadas curvas com coeficientes do canal descorrelacionados ($\tau_{tx} = \tau_{rx} = 0$) e com coeficientes correlacionados ($\tau_{tx} = \tau_{rx} = 0,75$). Construídos como apresentado na Seção 2.1, estes coeficientes de correlação produzem matrizes de correlação unilaterais de posto completo, logo $r_r = N_R$ e r_t depende do posto de $\Delta\Delta^H$. A diversidade do sistema, obtida em (3-33a) e (3-34a) com $r_r = N_R$ e $r_t = 1$ para sistemas não codificados, é verificada através da inclinação da curva de desempenho, fornecendo uma medida de quão rapidamente a probabilidade de erro de detecção decai com o aumento da relação sinal-ruído. Ao se considerar um sistema GSM não codificado, em que $r_t = 1$, a diversidade do sistema é $G_d = N_R$. Conforme esperado, o sistema GSM com o detector ótimo atinge diversidade máxima, indicada na Figura pela reta de inclinação N_R . Ao se comparar com as curvas em canal correlacionado, verifica-se que a maior distinção está no fato destas apresentarem deslocamento horizontal em relação às primeiras, no sentido de piora de desempenho. Este deslocamento horizontal deve ser contabilizado ao menor ganho de codificação causado pela correlação existente.

Na Figura 3.2, são avaliadas as curvas de desempenho do detector ótimo considerando a ausência de correlação no lado do transmissor, mas em dois cenários distintos no lado receptor; no primeiro caso, considera-se também a ausência de correlação entre as antenas receptoras, ou seja, $\mathbf{R}_{rx} = \mathbf{I}_{N_R}$, logo, \mathbf{R}_{rx} possui posto completo; no segundo caso, considera-se uma matriz de covariância do canal na recepção diferente da matriz identidade, tal que $\text{rank}(\mathbf{R}_{rx}) = 3$. A deficiência de posto desta matriz justifica a inclinação menor da curva no cenário de canal correlatado. Conforme exibido na Figura, a inclinação da curva neste caso evidencia que este sistema tem diversidade de ordem três.

3.3

Critério para escolha das combinações de antenas transmissoras

Conforme apresentado na Seção 2.2, o número de combinações de antenas transmissoras utilizado pelo sistema, N_C , é igual ou menor do que o número de combinações possíveis, N'_C , portanto $N'_C - N_C$ combinações permanecem não utilizadas. Tomando como base a abordagem apresentada para a análise dos ganhos do sistema MIMO, será avaliada a influência das combinações de

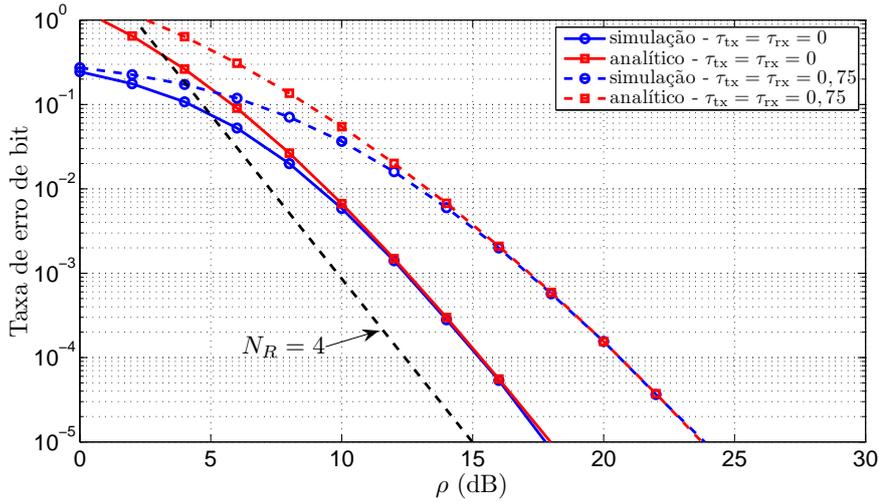


Figura 3.1: Taxa de erro de bit obtido em simulação e seu limitante superior analítico para canais MIMO com e sem correlação entre os coeficientes; reta inclinada para referência da ordem de diversidade do sistema. Configuração: $N_T = 4$, $N_A = 2$, $N_R = 4$, QPSK.

antenas transmissoras no desempenho do sistema GSM e sob que condições a escolha da combinação de antenas pode resultar em ganhos ao sistema.

Considere um transmissor GSM que seleciona N_A de um total de N_T antenas para realizar uma transmissão no canal MIMO. É empregado um esquema de modulação com constelação conhecida e simétrica, compondo um alfabeto de cardinalidade M . De acordo com os resultados apresentados na Seção 3.2, os pares $(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ que produzem os menores autovalores de $\Delta\Delta^H$ determinam o ganho de codificação do sistema GSM. Desta forma, as combinações de antenas transmissoras podem ser apropriadamente selecionadas no mapeamento Π para maximizar o ganho de codificação. Sendo $\Delta = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i$, o único autovalor ϵ de $\Delta\Delta^H$ pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{tr}(\Delta\Delta^H) \\ &= \sum_{t=1}^{N_T} |x_{t,j} - x_{t,i}|^2, \end{aligned} \quad (3-35)$$

sendo que $x_{t,i}$ e $x_{t,j}$, pertencentes aos vetores \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j , respectivamente, podem representar um símbolo $b \in \mathcal{B}$, gerados da modulação empregada, ou o símbolo 0, significando uma antena inativa.

Admita-se, sem perda de generalidade ao problema, um sistema GSM cujas antenas ativas emitem símbolos com energia E_s oriundos da modulação QPSK. Dentre os possíveis casos que podem compor os termos de (3-35), identificam-se:

Caso 1: $x_{t,i}$ oriundo da modulação QPSK e $x_{t,j} = 0$ (ou o inverso) \Rightarrow contribui

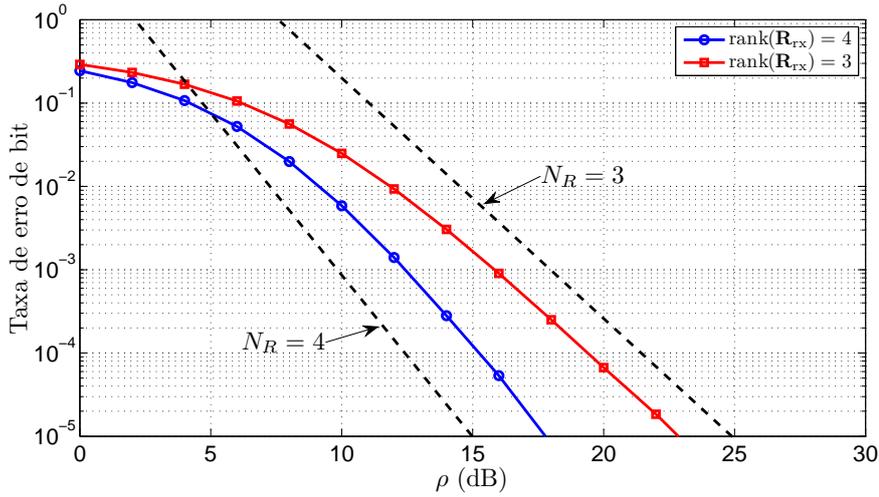


Figura 3.2: Taxa de erro de bit do detector ótimo em dois cenários de correlação entre as antenas receptoras. Configuração: $N_T = 4$, $N_A = 2$, $N_R = 4$, QPSK.

com E_s para o cálculo de ϵ ;

Caso 2: $x_{t,i}$ e $x_{t,j}$ oriundos da modulação QPSK \Rightarrow contribui com 0, $2E_s$ ou $4E_s$ para o cálculo de ϵ .

Considere um mapeamento Π que reúne N_C combinações de antenas transmissoras, indexadas c_1, c_2, \dots, c_{N_C} . Entre duas combinações quaisquer c_a e c_b , existe um par $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$ que minimiza ϵ , representado por $\epsilon_{a,b}^{\min}$. O vetor \mathbf{b} , de dimensão $N_A \times 1$, contém apenas os elementos pertencentes ao alfabeto de um esquema de modulação em amplitude e fase (*amplitude and phase shift keying*, APSK) contidos em \mathbf{s} , tal que $\mathbf{s}_i = \mathbf{P}_{c_a} \mathbf{b}_i$ e $\mathbf{s}_j = \mathbf{P}_{c_b} \mathbf{b}_j$. No problema da busca pelo mapeamento com maior ganho de codificação, deve-se selecionar as N_C combinações de antenas que maximizem ϵ^{\min} . Desta maneira, para os casos que podem compor os termos de (3-35), deve-se considerar, no Caso 1 o valor E_s , e no Caso 2, o valor 0, por este representar a menor contribuição ao cálculo de ϵ . Esta restrição resulta na definição de apenas dois estados para os termos que contabilizam para ϵ^{\min} : os valores lógicos 1 e 0. Como consequência, $\epsilon_{a,b}^{\min}$ é proporcional à $\kappa_{a,b}^{\Pi}$, a mínima distância de Hamming entre os vetores lógicos \mathbf{v}_a e \mathbf{v}_b do mapeamento Π , que indicam as posições das antenas ativas no vetor \mathbf{s} .

Com base nisto e pela definição de G_c em (3-34b), conclui-se que o ganho de codificação de um sistema GSM pode ser alterado pela escolha do mapeamento que maximize a mínima distância de Hamming entre todos os possíveis pares $(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b)$, denotado por κ_{\min}^{Π} . Um exemplo representativo é ilustrado na Figura 3.3. Nesta configuração, que utiliza $N_T = 9$, $N_A = 3$, $N_C = 8$, $N_R = 8$ e modulação QPSK, o número de combinações empregado

é $N_C < \left\lfloor \binom{N_T}{N_A} \right\rfloor_{2^p}$. Para este exemplo numérico foi selecionado um mapeamento Π_α que possui a maior mínima distância de Hamming possível, $\kappa_{\min}^\Pi = 2$. Por outro lado, a escolha das combinações de antenas em Π_β reduz a distância de Hamming mínima à unidade. Nas curvas apresentadas, verifica-se maior ganho de codificação, do mapeamento Π_α em relação ao Π_β .

Por outro lado, ao se considerar um cenário em que emprega-se $N_C = N_C^{\max} = \left\lfloor \binom{N_T}{N_A} \right\rfloor_{2^p}$ combinações de antenas de um total de $N_C^{\text{tot}} = \binom{N_T}{N_A}$, o estudo de casos práticos sugere que κ_{\min}^Π é igual à unidade, para qualquer dos $\binom{N_C^{\text{tot}}}{N_C^{\max}}$ possíveis mapeamentos Π . Para este cenário uma tentativa de alteração da definição de G_c é, em vez de se considerar apenas κ_{\min}^Π para a determinação do ganho de codificação do sistema, é que se defina a escolha de $\Pi_{g_c^{\max}}$ em termos do mapeamento que apresente menor frequência relativa de ocorrência da menor distância de Hamming entre todos os pares de vetores lógicos \mathbf{v}_a e \mathbf{v}_b do mapeamento Π . Neste caso, o mapeamento selecionado, Π_{sel} , corresponde a:

$$\Pi_{\text{sel}} = \arg \min_{\Pi} \frac{1}{\binom{N_C}{2}} \sum_{a=1}^{N_C-1} \sum_{b=a+1}^{N_C} \delta_{a,b}^\Pi \quad (3-36)$$

$$\delta_{a,b}^\Pi = \begin{cases} 1, & \text{se } \kappa_{a,b}^\Pi = 1 \\ 0, & \text{se } \kappa_{a,b}^\Pi > 1 \end{cases} \quad (3-37)$$

sendo $\delta_{a,b}^\Pi$ uma função indicadora de ocorrência da mínima distância de Hamming.

Na Figura 3.4 é exibido o desempenho, expresso em termos da taxa de erro de detecção do vetor de sinal transmitido, do detector ótimo em sistemas que empregam dois mapeamentos, Π_α e Π_β , sendo que em ambos $\kappa_{\min}^\Pi = 1$, mas a frequência relativa de κ_{\min}^Π em Π_α é 0,5 e de Π_β é 0,68. Foi utilizada a configuração: $N_T = 6$, $N_A = 2$, $N_C = 8$, $N_R = 4$, QPSK. A vantagem marginal obtida por Π_α indica que a tentativa de selecionar um melhor mapeamento no caso $N_C = \left\lfloor \binom{N_T}{N_A} \right\rfloor_{2^p}$ não se traduz em significativa melhora de desempenho.

Comparados aos sistemas MIMO convencionais, os sistemas GSM pressupõem alguns itens adicionais a serem projetados. Além dos conhecidos itens que afetam o compromisso entre desempenho de detecção e taxa de transmissão (que incluem ordem da modulação e número de antenas transmissoras), as combinações de antenas empregadas impactam na relação desempenho-taxa. O aumento do número de combinações proporciona o aumento da taxa de transmissão, mas também do número de hipóteses a serem testadas, reduzindo a probabilidade de correta detecção. Ao considerar um receptor de duas fases,

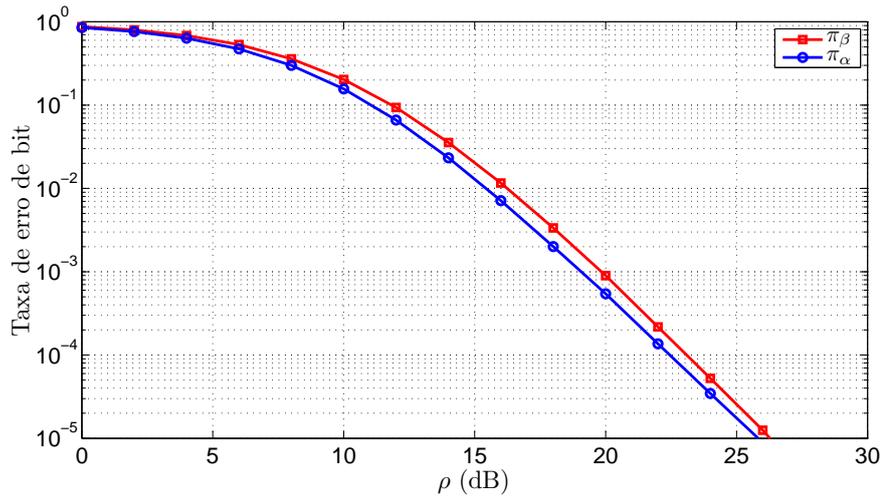


Figura 3.3: Taxa de erro de detecção do vetor transmitido (taxa de erro de bloco) do detector ótimo para dois mapeamentos. Configuração: $N_T = 9$, $N_A = 3$, $N_C = 8$, $N_R = 3$, QPSK, mínimas distâncias de Hamming de π_α e π_β são 2 e 1, respectivamente.

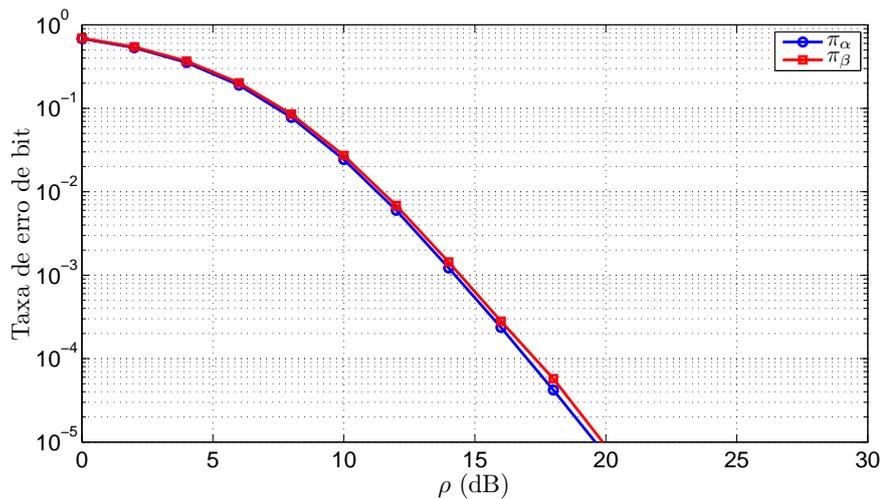


Figura 3.4: Taxa de erro de detecção do vetor transmitido (taxa de erro de bloco) do detector ótimo para dois mapeamentos π_α e π_β . Configuração: $N_T = 6$, $N_A = 2$, $N_C = 8$, $N_R = 4$, QPSK, $\kappa_{\min}^{\Pi} = 1$.

o aumento do número de combinações de antenas incorre em maior incerteza na detecção da correta combinação de antenas, degradando o desempenho do detector como um todo. Por outro lado, um cenário em que há antenas suficientes no lado transmissor possibilita o uso de mapeamentos com maior distância mínima de Hamming, gerando maiores ganhos de codificação ao sistema.

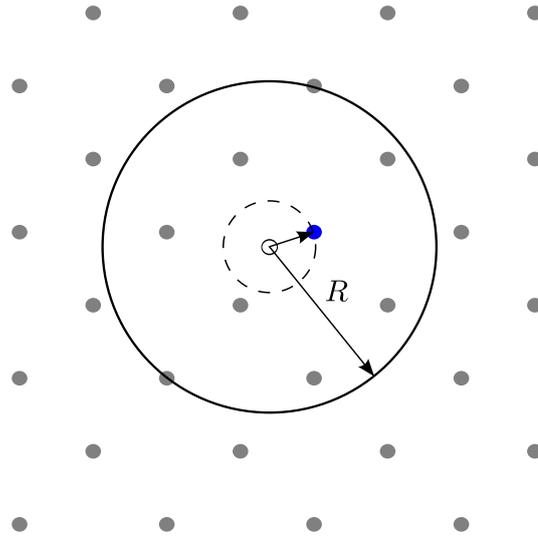


Figura 3.5: Ilustração da região de busca definida pelo algoritmo *Sphere Decoding*.

3.4 Algoritmo Sphere Decoding (SD)

Este algoritmo trata de uma abordagem alternativa para a solução de problemas de minimização da distância vetorial, equivalente ao problema encontrado nos detectores ML, e que tem sido foco de muitos estudos, especialmente com aplicação em sistemas MIMO [17]. Este método baseia-se na busca pelo ponto, pertencente a um reticulado finito, mais próximo do vetor de observação [42]. A redução de custo computacional, característico desta técnica, surge do fato de serem considerados apenas os possíveis vetores transmitidos equivalentes aos pontos do reticulado internos a uma hipersfera, como ilustrado na Figura 3.5 em um espaço de duas dimensões. Um ponto no espaço vetorial de dimensão N_R , definido pelo vetor \mathbf{s} , pertence à esfera se:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \leq R^2, \quad (3-38)$$

sendo R o raio de busca. Um aspecto importante desta estratégia é a escolha do raio da esfera. Se R é feito muito grande, muitos pontos entrarão na esfera, tornando a busca mais custosa. Por outro lado, se o valor de R é feito muito pequeno, não serão encontrados pontos dentro da esfera. Uma das estratégias de seleção de raio é a selecioná-lo como função da variância do ruído de forma que se obtenha alta probabilidade de se encontrar ao menos um ponto dentro da esfera. A complexidade do algoritmo *Sphere Decoding* é variável, dependente do número de pontos internos à esfera. Trabalho recente [43] demonstrou que seu custo computacional é função do raio inicial da esfera,

apresentando complexidade esperada com crescimento exponencial com o número de símbolos a detectar para um valor fixo de SNR. Recentemente, variações do algoritmo fixam a complexidade computacional do algoritmo, e atingem desempenho de detecção quase ótimo [44].

No contexto dos detectores de sistemas multiantena, os algoritmos *Sphere Decoding* propõem-se a oferecer soluções alternativas à exaustiva busca realizada para se decidir pelo vetor de símbolos de máxima verossimilhança. Como apresentado no Apêndice D, a expressão da distância Euclidiana que compõe o detector ML e a expressão (3-38) pode ser convenientemente reescrita como:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}) + \|\mathbf{y}\|^2 - \mathbf{y}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger) \mathbf{y}, \quad (3-39)$$

onde $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}$ representa o vetor $N_T \times 1$, resultado da equalização *zero-forcing* (ZF) do vetor de dados recebido. Por sua vez, $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$ é a pseudo-inversa à esquerda da matriz \mathbf{H} . Os pontos a serem examinados internos à esfera satisfazem a:

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})\|^2 \leq d^2, \quad (3-40)$$

onde d representa o raio da esfera. A busca é feita por pontos do reticulado no entorno de $\tilde{\mathbf{s}}$.

Aplicando a decomposição Cholesky à matriz $N_T \times N_T$ positiva semi-definida $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$, tem-se $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{U}^H \mathbf{U}$, onde \mathbf{U} é triangular superior com elementos u_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N_T$, $i \leq j$, o problema pode ser reescrito como [17]:

$$\|\mathbf{U}(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})\|^2 = \sum_{i=1}^{N_T} u_{ii}^2 \left| s_i - \tilde{s}_i + \sum_{j=i+1}^{N_T} \frac{u_{ij}}{u_{ii}} (s_j - \tilde{s}_j) \right|^2 \leq d^2. \quad (3-41)$$

Formas alternativas de (3-41) para solução do problema em (3-38) são encontrados na literatura. Há abordagens que empregam a decomposição QR em vez da decomposição Cholesky [42], ou que substituem a expressão (3-39) por formas alternativas que dispensam a equalização ZF [18]. As estratégias que serão aqui apresentadas são adaptáveis a estas variações.

A busca pelos pontos do reticulado inicia-se no nível $i = N_T$, para o qual a expressão em (3-41) resulta em $|s_{N_T} - \tilde{s}_{N_T}| \leq \frac{d}{u_{N_T N_T}}$. Os símbolos que satisfazem a inequação são os candidatos a s_{N_T} . Uma vez que um dos candidatos foi selecionado como a decisão corrente para s_i , a busca continua no próximo nível. A cada nível, os novos candidatos escolhidos são aqueles

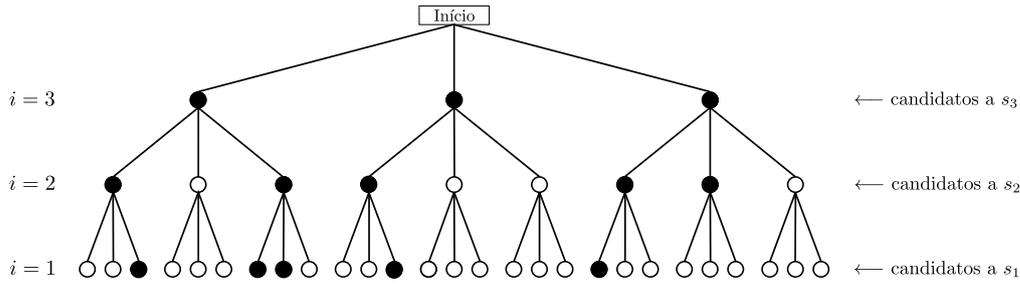


Figura 3.6: Representação da árvore de busca do algoritmo SD para um sistema MIMO com $N_T = 3$ e $M = 3$. Os círculos pretos representam candidatos cuja distância é inferior ao raio de busca.

internos à nova circunferência:

$$u_{ii}^2 |s_i - \tilde{s}_{i|i+1}|^2 \leq d_i^2, \quad (3-42)$$

onde

$$\tilde{s}_{i|i+1} = \tilde{s}_i - \sum_{j=i+1}^{N_T} \frac{u_{ij}}{u_{ii}} (s_j - \tilde{s}_j). \quad (3-43)$$

Após a seleção de um dos candidatos para ocupar a posição de s_i , o raio de busca para o próximo nível é atualizado de acordo com:

$$d_{i-1}^2 = d_i^2 - u_{ii}^2 |s_i - \tilde{s}_{i|i+1}|^2. \quad (3-44)$$

O fluxo deste algoritmo define uma árvore estruturada em N_T níveis. Os nós existentes no nível i da árvore são ocupados pelos símbolos da constelação empregada e representam os candidatos a ocupar a posição do elemento s_i no vetor \mathbf{s} . Os candidatos que não satisfazem a (3-42) são desconsiderados e os ramos da árvore abaixo destes nós são eliminados. A cada vez que o nível um é atingido, um vetor \mathbf{s} com localização restrita ao raio inicialmente estipulado é encontrado. Esta estrutura é ilustrada na Figura 3.6. A busca é iniciada pelos ramos mais a esquerda. Os caminhos nos ramos da árvore que chegam ao nível $i = 1$ ligados por círculos sólidos definem vetores \mathbf{s} dentro da esfera. A solução ML é então determinada procurando-se o vetor de máxima verossimilhança dentre aqueles produzidos na saída do algoritmo.

3.5

Desenvolvimento de algoritmo SD para sistemas GSM

Grande parte do desenvolvimento apresentado sobre algoritmos SD aplicável aos problemas de detecção em sistemas de comunicações foi realizada para sistemas MIMO SMX [17, 21]. No entanto, a redução de custo computacional desta técnica na implementação do detector ML instiga sua aplicação nos sistemas GSM.

O método, da forma apresentada na seção anterior, pode ser aplicado aos sistemas GSM com algumas adaptações. A adição do símbolo $s = 0$ entre os nós da árvore e as combinações de antenas permitidas podem fazer com que a solução ML encontrada não corresponda a um vetor transmitido válido. Assim, o algoritmo SD a ser implementado deve ter meios de apresentar esta garantia. Além disto, algumas melhorias propostas aos algoritmos SD empregados aos sistemas SMX necessitam certos cuidados para sua devida aplicação nos sistemas GSM. Desenvolvimentos mais recentes do algoritmo estabelecem métodos de ordenamento dos candidatos em cada nível da árvore, na tentativa de encontrar o vetor transmitido mais próximo do centro da esfera já nas primeiras vezes que chegar ao último nível da árvore. Eles baseiam-se no ordenamento proposto por Schnorr-Euchner (SE) [19]. Em seu trabalho, foi proposta uma estratégia de ordenamento dos candidatos de acordo com a distância relativa ao centro do intervalo definido em (3-42). Apesar de a técnica ser eficaz, ela é desenvolvida assumindo que a constelação de símbolos transmitidos é real, dando origem a um reticulado real. Para isto, é realizada a conversão de imaginário para real da relação entre entrada e saída de sinais em sistemas MIMO:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \iff \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{y}) \\ \text{Im}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{H}) & -\text{Im}(\mathbf{H}) \\ \text{Im}(\mathbf{H}) & \text{Re}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{s}) \\ \text{Im}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{n}) \\ \text{Im}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}. \quad (3-45)$$

Esta decomposição ocasiona a duplicação da dimensão das matrizes e vetores envolvidos. No algoritmo SD, a consequência é a duplicação do número de níveis da árvore de busca. Nos sistemas GSM, o uso do algoritmo SD real necessitaria a adoção de métodos que garantissem a consonância entre as decisões nas partes real e imaginária do vetor transmitido e, conseqüentemente, a geração de soluções que correspondam a vetores detectados válidos.

Como resultado deste capítulo, a proposta apresentada nesta Tese e publicada em [45] consiste no desenvolvimento de um detector SD adaptado a sistemas GSM e que emprega modificações que visam a redução do processo de busca pela solução ótima, através da combinação de duas estratégias: 1–

o ordenamento de candidatos, considerando o sistema na forma complexa, portanto mais aplicável aos sistemas GSM; 2- a restrição do número de candidatos válidos em cada nível da busca, levando em conta a estrutura do vetor de símbolos GSM.

Quanto à contribuição 1 citada acima, métodos de ordenamento de candidatos, baseados na forma complexa do algoritmo SD, que cumprem a mesma tarefa da estratégia proposta nesta Tese foram encontrados na literatura, desenvolvidos para sistemas MIMO SMX [20, 21]. Assim a modificação do método de ordenamento na forma complexa não consiste em uma contribuição pioneira, mas sim a identificação deste como requisito para aplicação em sistemas GSM.

3.5.1

Ordenamento dos candidatos

O algoritmo gerado pelo método apresentado na Seção 3.4 encontrará um ou mais pontos do reticulado internos à região definida pelo raio de busca e selecionará aquele que resultar na mínima distância ao centro da esfera, \tilde{s} ou, equivalentemente, aquele com máxima distância do limite da esfera, $\tilde{d} = \sqrt{d^2 - d_0^2}$. No entanto, adaptações deste algoritmo foram desenvolvidas a fim de melhorar o processo de busca.

Métodos de ordenamento dos candidatos podem melhorar a eficiência do algoritmo, aumentando a chance de que a chegada a um nó no último nível da árvore (nó folha) corresponda a um vetor transmitido que seja a solução ML. Com este objetivo, foi elaborada uma estratégia para ordenar os nós em cada nível da árvore. Verificando (3-44), a expressão da atualização do raio é composta de dois termos: o raio da esfera atual e a quantidade de redução do raio relacionado ao candidato selecionado no nível corrente da árvore. Visto que diferentes escolhas de candidatos resultam em diferentes quantidades de redução do raio, um método de ordenamento que, a cada nível da árvore, dê preferência aos candidatos que resultem na menor redução de raio pode levar à solução de (3-41) em uma das primeiras incursões na árvore. Este fator de redução do raio, denotado por $\delta_i^{(j)}$ e inserido por cada candidato x_j , $j = 1, 2, \dots$, é chamado aqui de distância incremental:

$$\delta_i^{(j)} = u_{ii}^2 \left| x_i^{(j)} - \tilde{s}_{i|i+1} \right|^2. \quad (3-46)$$

O candidato com menor distância incremental (por exemplo, $x_i^{(J)}$) é selecionado para ocupar s_i , e a redução de raio adicionado no i -ésimo nível por este candidato, Δ_i , é considerada fazendo-se as atribuições $s_i = x_i^{(J)}$ e $\Delta_i = \delta_i^{(J)}$.

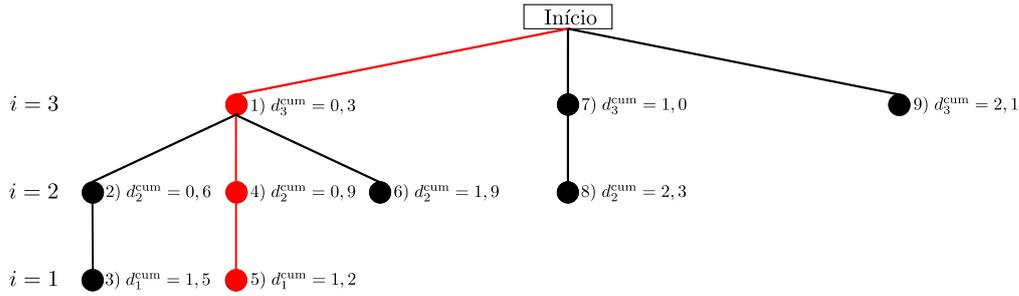


Figura 3.7: Exemplo da árvore de busca no algoritmo SD modificado. A numeração ao lado dos círculos indica a ordem que os nós foram visitados. O caminho em vermelho indica a solução de menor distância acumulada.

Quando o algoritmo atinge um nó folha e um vetor é encontrado dentro da esfera, o raio da esfera, d , é atualizado pela distância correspondente a este vetor. Esta atualização de raio, proposta por Viterbo-Boutros (VB) [46], restringe o algoritmo a, nas próximas vezes que um nó folha for atingido, ele necessariamente irá compor a solução de menor distância ao centro da esfera dentre os caminhos já percorridos na árvore, e a última solução corresponderá à solução ML. A estratégia proposta nesta Tese, como uma variação da enumeração SE, ordena os candidatos no nível i da árvore de acordo com sua proximidade a $\tilde{s}_{i|i+1}$. Além disso, assim como no VB, a estratégia ameniza a necessidade de especificação inicial do raio d pois, atribuindo-lhe o valor de infinito no início do algoritmo, garante que sempre se encontrará o vetor transmitido estimado dentro da esfera. Adicionalmente, esta técnica é diretamente aplicada a constelações complexas.

A distância incremental possui um uso adicional na determinação se um nó da árvore pode resultar na melhor solução corrente. A distância acumulada de um nó no nível i ao centro da esfera é dado por:

$$d_i^{\text{cum}} = \sum_{k=i}^{N_T} \Delta_k. \quad (3-47)$$

Assim, um nó da árvore no nível i para o qual $d_i^{\text{cum}} > d$ não resultará na melhor solução e, portanto, os ramos da árvore abaixo dele podem ser removidos. Esta operação garante que, em qualquer ponto da execução do algoritmo, o último vetor encontrado até este momento é mais próximo do centro da esfera que os encontrados anteriormente. A Figura 3.7 exemplifica a execução do algoritmo SD modificado. Nele, os candidatos são posicionados da esquerda para a direita em ordem crescente das suas distâncias incrementais. Os ramos abaixo dos nós numerados 6, 8 e 9 foram excluídos pela distância acumulada ultrapassar a solução corrente.

3.5.2

Seleção de candidatos com restrição de caminhos

Reduções adicionais no processo de busca podem ser alcançadas explorando a estrutura do sinal transmitido GSM. Diferentemente dos esquemas MIMO-SMX, deve-se levar em consideração o número limitado de combinações de antenas permitidas. Isto significa que, no nível i da árvore, possivelmente apenas o candidato $s_i = 0$, representando uma antena não ativa, ou um símbolo s_i , extraído do esquema de modulação empregado, estará disponível. Conseqüentemente, os possíveis candidatos em cada nível da árvore devem ser selecionados apropriadamente.

Considere a matriz de combinações permitidas \mathbf{V} , apresentada em (2-15) e repetida abaixo. Adicionando o índice $i = N_T$, que representa o estágio inicial em que todos os vetores \mathbf{v}_j estão disponíveis, ou seja, $j = 1, 2, \dots, N_C$, uma possível matriz \mathbf{V} para um sistema com $N_T = 4$ e $N_A = 2$ é:

$$\mathbf{V}^{(i=N_T)} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{N_C}] \quad (3-48)$$

$$\mathbf{V}^{(i=N_T)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Assim, antes de definir os candidatos no nível i da árvore, deve-se determinar se as hipóteses $s_i = 0$ e $s_i \in \mathcal{S}$ são possíveis, verificando a existência de 0 e 1, respectivamente, na i -ésima linha de $\mathbf{V}^{(i)}$.

Após a seleção do candidato no nível i , seguindo a estratégia de ordenamento apresentado na seção anterior, a matriz de combinações para o próximo nível $\mathbf{V}^{(i-1)}$ deve ser atualizada. Se o candidato selecionado pertence a \mathcal{S} , são removidos os vetores \mathbf{v}_j em que $v_{ij} = 0$, caso contrário, são removidas as colunas em que $v_{ij} = 1$. Se aplicado a sistemas GSM, o algoritmo SD original não garante que o vetor \mathbf{s} possui combinação válida de antenas. Neste caso, a solução natural é localizar a opção seguinte de menor distância cuja combinação de antenas pertença ao conjunto de combinações válidas. Diferentemente, o algoritmo modificado proposto, além de reduzir o número de nós a percorrer, garante que o vetor encontrado tem validade.

A execução da estratégia proposta é apresentada de forma estruturada no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 GSM SPHERE DECODING

Entrada: \mathbf{y} , \mathbf{U} , $\mathbf{V}^{(N_T)}$.**Saída:** $\hat{\mathbf{s}}$.

```

1:  $i \leftarrow N_T$     $d_i \leftarrow \infty$     $\tilde{s}_{i|i+1} \leftarrow \tilde{s}_i$ 
2: Determinar candidatos  $s_i$  em (3-42).
3: while flag_done = 0 do {flag = 1 significa que a busca foi finalizada}
4:   if nenhum candidato encontrado no nível  $i$  then
5:      $i \leftarrow i + 1$ 
6:   else if  $i > N_T$  then
7:     flag_done  $\leftarrow$  1
8:   else
9:     Computar  $\delta_i^{(j)}$  em (3-46) para todos os candidatos permitidos de
       acordo com  $\mathbf{V}^{(i)}$  {Deve ser pulado se já calculado anteriormente.}
10:    Atribuir  $s_i \leftarrow x_i^{(J)}$  e  $\Delta_i \leftarrow \delta_i^{(J)}$ .
11:    Classificar os demais candidatos em ordem crescente de  $\delta_i^{(j)}$ .
12:    Computar a distância acumulada:  $d_i^{\text{cum}} \leftarrow \sum_{k=i}^{N_T} \Delta_k$ .
13:    if  $d_i^{\text{cum}} > d$  then
14:       $i \leftarrow i + 1$ 
15:    else
16:      if  $i > 1$  then
17:         $i \leftarrow i - 1$ 
18:        Atualizar  $\mathbf{V}^{(i)}$ .
19:        Determinar  $\tilde{s}_{i|i+1}$ ,  $d_i$  e candidatos a  $s_i$  em (3-43), (3-44) e
           (3-42).
20:        else {encontrado vetor dentro da esfera}
21:          Salvar  $\hat{\mathbf{s}}$     $d \leftarrow d_0$ .
22:          Descartar demais candidatos no nível  $i = 1$ .
23:        end if
24:      end if
25:    end if
26: end while

```

3.5.3**Resultados numéricos: complexidade computacional**

A eficiência do algoritmo apresentado na busca pela solução ML é investigada em três configurações de sistema, apresentadas na Tabela 3.1. O algoritmo SD, como apresentado neste capítulo, não possui custo de computação determinístico, assim mensurou-se o tempo de execução requerido em termos do número médio de nós visitados na árvore. Os resultados são apresentados na Figura 3.8 para três versões do algoritmo. Primeiro, o algoritmo SD, na forma apresentada em [17], usado como partida para as modificações. Esta estratégia inicia a execução com um valor de raio inicial d_1 . Caso encontre entre as soluções internas à esfera alguma que corresponda a um vetor GSM válido, o algoritmo é encerrado. Caso contrário, um novo raio, d_2 ($d_2 > d_1$),

é especificado e o algoritmo é reiniciado. No algoritmo SD-DI, o esquema de ordenamento de candidatos é adicionado. Este detector também pode gerar soluções não válidas, portanto, incrementos no valor do raio inicial também são necessários. O algoritmo proposto em sua forma final, identificado por SD-DI-RC, emprega o raio $d \rightarrow \infty$ e gera apenas soluções GSM válidas. Pelos gráficos, verifica-se que a quantidade de nós que os algoritmos precisam percorrer é reduzida com o aumento da relação sinal-ruído. Além disto, nos três cenários, é verificado que as modificações apresentadas proporcionam redução do número médio de nós visitados.

A avaliação da eficiência computacional do detector SD-DI-RC é complementada com a contagem do número de operações requerido pelo algoritmo, em termos do número de operações reais de ponto flutuante (FLOPs) requerido para a detecção de um bloco recebido. Nesta contagem, as operações são registradas e atribuídos os devidos pesos [47]. Para a operação de multiplicação matricial é considerado o método ingênuo, de complexidade $\mathcal{O}(n^3)$, e as inversões matriciais, por decomposição LU. Os resultados são apresentados em dois cenários: primeiramente, o custo para a detecção contabilizando todas as operações matemáticas requeridas. Este caso equivale à situação em que o canal variou suficientemente em relação à transmissão anterior, de forma que os cálculos que envolvem a matriz \mathbf{H} não podem ser pré-computados e aproveitados para a corrente detecção. No segundo cenário, o canal pode ser considerado fixo durante sucessivos períodos de transmissão. Neste caso, variáveis e termos de cálculos que envolvem \mathbf{H} , tais como a matriz pseudo-inversa e a decomposição Cholesky, requeridas em (3-41), podem ser previamente calculados e, portanto, não incluídos no custo computacional das estratégias (tanto para a estratégia SD proposta como para o detector ML ótimo clássico em (3-4)).

Na Figura 3.9, as curvas em cor vermelha exibem a razão entre o número de FLOPs requeridos pelo SD-DI-RC e pelo detector ML ótimo, apresentado em (3-4), considerando que em ambas as estratégias os termos que podem ser pré-computados não são incluídos na contagem de operações. Nas curvas azuis, é exibida a razão do número de FLOPs entre estas duas estratégias, e em nenhuma delas foram realizadas pré-computações, logo todas as operações são contabilizadas. Para referência, o número de FLOPs requerido pela estratégia ML para a detecção de um bloco é apresentado na Tabela 3.2. As curvas apresentadas acompanham o comportamento do número de nós visitados, exibindo redução do número de FLOPs requerido pelo algoritmo SD com o aumento da relação sinal-ruído. Tanto no caso quando as pré-computações são permitidas como no caso em que estas não o são, verifica-se que o algoritmo SD proposto reduz a complexidade de detecção quando a relação sinal-ruído é

Tabela 3.1: Configurações de sistema usadas nas simulações.

Config.	N_T	N_A	N_C	N_R	Modulação	Taxa (bits/s)
C1	4	2	4	4	QPSK	6
C2	5	3	8	5	QPSK	9
C3	4	2	4	4	QAM-16	10

Tabela 3.2: Número de FLOPs requerido pelo detector ML ótimo.

Config.	FLOPs	
	sem pré-computações	com pré-computações
C1	$6,6 \times 10^3$	$2,2 \times 10^3$
C2	$8,7 \times 10^4$	$2,3 \times 10^4$
C3	$1,1 \times 10^5$	$3,8 \times 10^4$

suficientemente alta. Além disto, como a região de SNR dos gráficos da Fig. 3.9 em que a complexidade do algoritmo proposto é mais alta corresponde a uma região de elevada taxa de erros de detecção, esta é uma região de baixo interesse de operação.

Nas três configurações apresentadas, verifica-se que quando pré-computações podem ser feitas, a redução de complexidade do algoritmo SD-DI-RC sobre o detector ML é mais significativa do que no caso em que estas não são feitas. Isto deve-se ao fato de o número de termos que podem ser pré-computados no detector ML ser mais expressivo do que os termos que podem ser pré-computados no algoritmo SD proposto. Além disto, analisando as três configurações de sistema apresentadas, verifica-se que a redução de complexidade é mais significativa quanto maiores as dimensões do sistema (número de antenas e ordem da modulação).

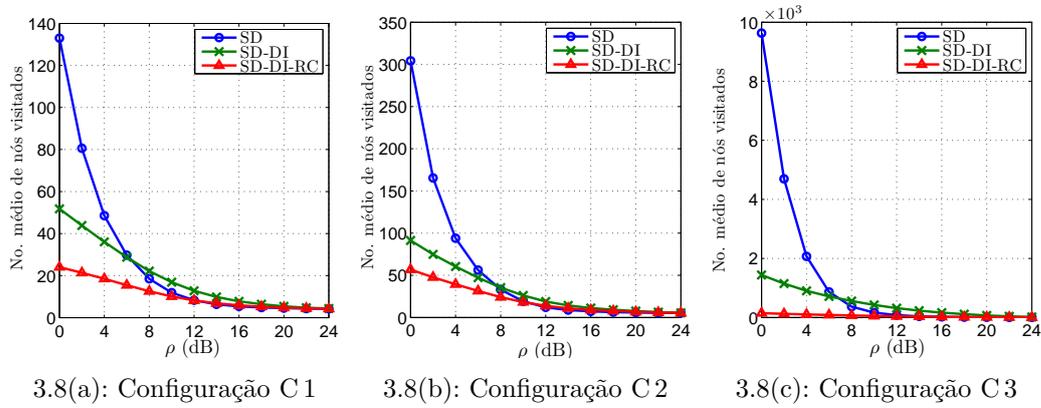


Figura 3.8: Número médio de nós visitados em função do SNR dos detectores SD ótimos.

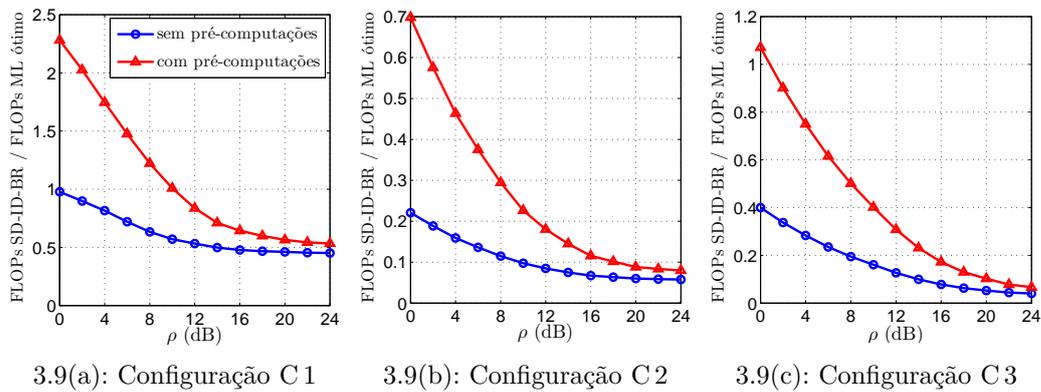


Figura 3.9: Razão entre o número de operações requerido pelo algoritmo SD-DI-RC e pelo detector ML ótimo em função do SNR. Casos: 1- Sem pré-computações: Todas as operações são contabilizados na contagem de FLOPs em ambas as estratégias; 2- Com pré-computações: Os termos que podem ser pré-computados em ambas as estratégias não são contabilizados na contagem de FLOPs.