8
Referências Bibliográficas

ASCHENBACH, M; FAZENDA, I; ELIAS, M. **A arte-magia das dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2006.

CATTAI, A. P. **Matemática Básica**, Universidade do Estado da Bahia, 2010. Disponível em: <http://cattai.mat.br>. Acesso em 01 de janeiro de 2015

CAVACAMI, E. e FURUYA, Y. K. S.. **Explorando Geometria Euclidiana com Origami.** Departamento de Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo – SP, 2009. Disponível em:: <http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>

DELGADO, J., FRENSEL, K. e CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: 1ª ed. SBM, 2013.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**/Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

KANEGAE, M. e IMAMURA, P. **Origami: Arte e técnica da dobradura de papel.** São Paulo: Aliança Cultural Brasil-Japão, 2002.

HATORI, K. **Origami versus Straight Edge and Compass**, 2003. Disponível em: <http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/conste.html>. Acesso em 10 de janeiro de 2015.

LANG, R. J. **Origami and geometric constructions**, disponível em: <http://www.langorigami.com, 2004>. Acesso em 20 de dezembro de 2014.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, A. dos S. **Álgebra linear e geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1982.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: História de uma Geometria Axiomática.** (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, 2008.

OLIVEIRA, F. F. **Origami: Matemática e Sentimento**, 2004**.** Disponível em: <http://nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>. Acesso em 15 de novembro de 2014.

RAFAEL, I. **Origami**, 2011. Disponível em: < http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf >. Acesso em 10 de janeiro de 2014.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. e GAUDÊNCIO, S. J. **A Geometria do Origami**. João Pessoa: Editora Universitária/ UFPB, 2003.

SATO, J. **Cônicas e suas aplicações.** Uberlândia – MG, 2004. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>. Acesso em 17 de janeiro de 2015.

SIQUEIRA, P. H. e COSTA, A. M. **Cônicas.** Universidade Federal do Paraná, 2ª ed., 2012. Disponível em: <www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/conicas.pdf>. Acesso em 17 de janeiro de 2015.

VENTURI, J. J. 1949 **– Cônicas e Quádricas –** 5ª ed. Curitiba. 243 p.

Apêndice I

No quinto capítulo justificamos os passos das construções através dos Axiomas de Huzita-Hatori e fornecemos a demonstração matemática do processo utilizado. Contudo, cabem algumas observações específicas ao professor para a realização da oficina sugerida.

A referida oficina para alunos do Ensino médio é dividida em três atividades: o estudo da elipse, o estudo da hipérbole, o estudo da parábola. A seguir, apresentaremos tais sugestões:

- O professor deverá seguir os passos explicados no capítulo 5, não havendo a necessidade de demonstração dos axiomas utilizados. Entretanto, é interessante que o aluno saiba da existência dos mesmos para que percebam a presença de uma matemática consistente no estudo realizado.

- Com relação ao material, sugerimos que sejam utilizadas folhas de papel vegetal, pois o mesmo é translúcido, o que facilita a realização vários passos necessários. Além disso, é essencial o uso de um lápis e uma régua.

- A organização dos alunos em sala pode ser feita em trios para que os mesmos possam observar juntos alguns aspectos como a excentricidade e transformações de coordenadas. Para isso, é primordial que o professor sinalize a necessidade de diferentes escolhas de localização dos focos no plano.

- Além do estudo das cônicas, esta é uma boa oportunidade para trabalhar conceitos provavelmente esquecidos e elementares nas construções, tais como os de: mediatriz, bissetriz, perpendicularidade e paralelismo. Este é, também, um momento favorável para explorar as noções de coeficiente angular ao construir as assíntotas da hipérbole, verificando a tangente do seu ângulo de inclinação.

- Ao invés de apresentar as definições dos lugares geométricos de cada curva e depois dar início à oficina, pode ser interessante inverter o processo. Ou seja, através das construções, induzir o aluno à compreensão das definições através da explicação matemática dos métodos utilizados nas dobras.

- Levar o aluno a utilizar a régua em todas as construções torna a compreensão mais acessível. Seu uso é importante inclusive nas construções que se referem à formação das curvas. Um exemplo desta utilização é pedir para que o discente escolha um ponto qualquer da elipse construída e, em seguida, para que some as distâncias do mesmo aos focos da curva e compare com o raio da circunferência inicial.

- Ao efetuar as dobras que definem as retas focal e não focal, é interessante evidenciar que as mesmas também definem os eixos de simetria das curvas (no caso da parábola, este eixo é único).

As construções através das dobraduras são ricas em muitos detalhes. Por isso, o professor deve explorar cada passo com clareza, criatividade e principalmente associando os mesmos às definições das curvas.

Anexo I

Oficina: Estudando as Curvas Cônicas através do Origami.

Período do aluno participante:

Caro aluno:

As Curvas Cônicas apresentadas através do Origami são instrumentos de uma pesquisa que tem por intuito construir um método de ensinar os conceitos de Cônicas de forma lúdica, enfatizando ainda, a versatilidade que o Origami possui na construção de conceitos matemáticos. Portanto, este questionário tem como objetivo apenas analisar conhecimentos prévios sobre o assunto, onde não será necessária a identificação dos participantes da oficina.

Atenciosamente,

Bruna Mayara Batista Rodrigues

Questionário diagnóstico

1) Os conceitos de Curvas Cônicas foram introduzidos no período em que você cursou o Ensino Médio?

2) Você saberia explicar por que a Elipse, Hipérbole e Parábola são chamadas de Curvas Cônicas?

3) Você saberia definir a Elipse, a Hipérbole e a Parábola? Se sim, escreva a definição de cada uma destas curvas.

Obrigada pela colaboração.

Anexo II

Deixe aqui a sua avaliação!

Sua opinião é muito importante. Portanto, responda aqui apenas três questões sobre a oficina envolvendo o estudo das Cônicas através do Origami.

1) Ao longo da oficina sobre o estudo das cônicas através do Origami, foi apresentado algum conceito que você ainda não conhecia?

- sim
- não

2) Você considera o Origami um instrumento útil para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos?

- sim
- não

3) As construções da Elipse, Hipérbole e Parábola foram claras para que pudessem ser entendidas as definições destas curvas?

- sim
- não

Enviar

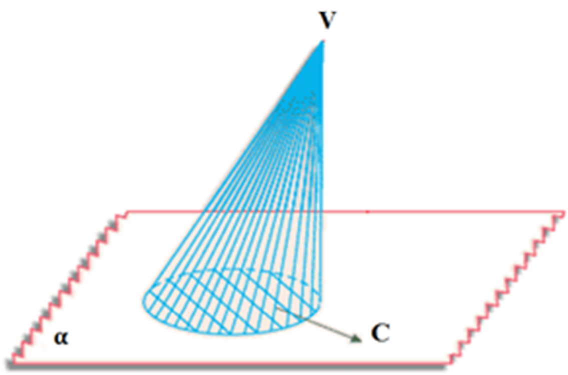
Anexo III

O estudo das Curvas Cônicas através do Origami

Certamente todos aqui já conhecem a Elipse, a Hipérbole e a Parábola. Mas vocês já pararam para pensar como essas curvas são obtidas?

É essencial relembrarmos alguns conceitos de cone para que possamos compreender como as seções cônicas são geradas.

Cone



Fonte: http://loadinginformations.blogspot.com.br/2012/09/cone-circular.html

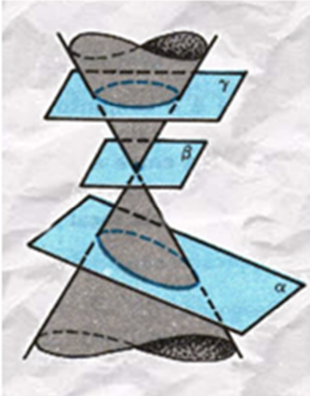
Elementos de um cone

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm

De posse dessas informações, poderemos ver como as seções cônicas são geradas.

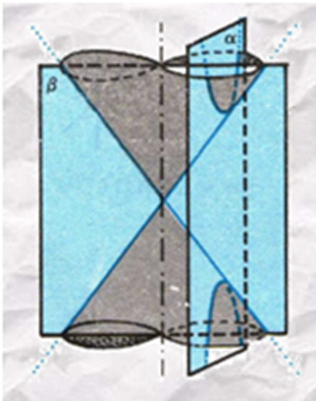
y

➢ Quando o plano secante intersectar todas as posições da geratriz e o eixo, a curva gerada será uma <u>elipse</u>.



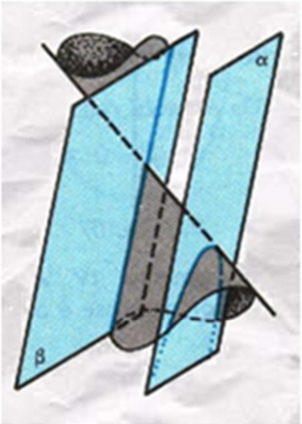
Fonte:http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/conicas.htm

➢ Quando o plano secante for paralelo ao eixo, a curva obtida será uma <u>hipérbole</u>.



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm

➢ **Quando o plano secante for paralelo a uma única posição da geratriz, a curva gerada será uma <u>parábola.</u>**



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm

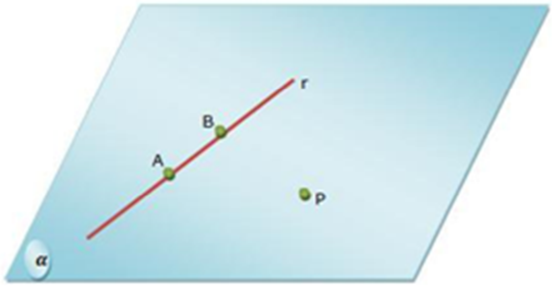
O origami

- O que é origami?
- Em quais aspectos o origami pode auxiliar no ensino da Matemática?

Existem sete axiomas que definem o que se pode construir para que retas e pontos incidam através de uma única dobragem. Estes axiomas são chamados de “axiomas de Huzita-Hatori” e todos eles possuem belas e ricas demonstrações matemáticas.

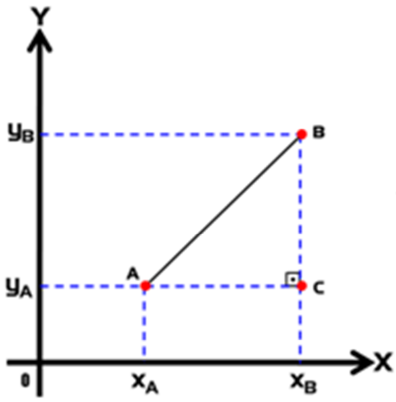
Ponto, reta e plano

São conceitos primitivos e não definidos na Geometria.



Fonte: http://www.colegioweb.com.br/trabalhos-escolares/matematica/retas-e-planos-no-espaco/determinacao-de-planos.html

Distância entre dois pontos



$AC = |X_B - X_A|$
$CB = |Y_B - Y_A|$

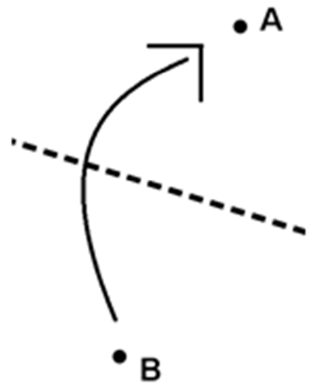
Fonte: http://geometrianodiadia.blogspot.com.br/2012/09/geometria-analitica-distancia-entre.html

Axiomas de Huzita-Hatori

Axioma 1: Dados dois pontos A e B, existe apenas uma dobragem que passa pelos dois pontos.

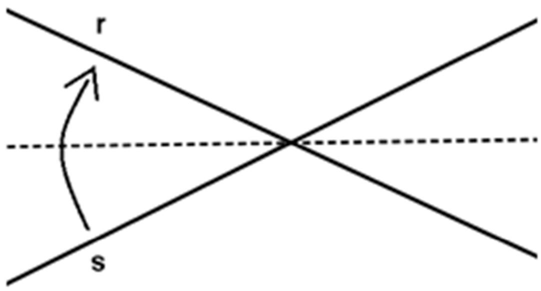
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 2: Dados dois pontos A e B, existe uma única dobragem capaz de torná-los coincidentes.



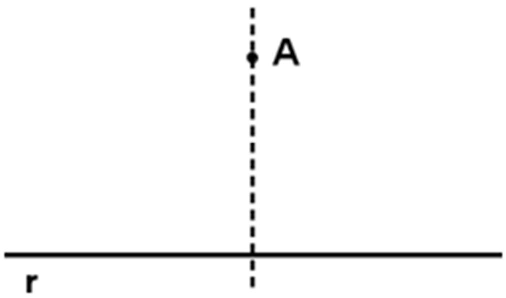
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 3: Dadas as retas r e s, existe uma dobragem que coloca uma reta sobre a outra.



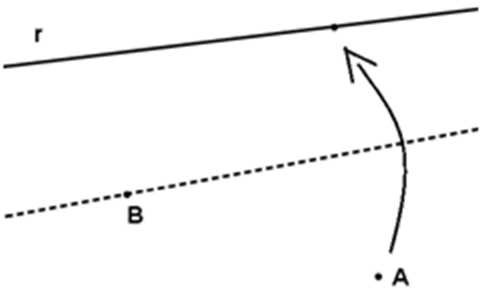
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 4: Dados um ponto A e uma reta r, existe uma dobragem perpendicular a r que passa por A.



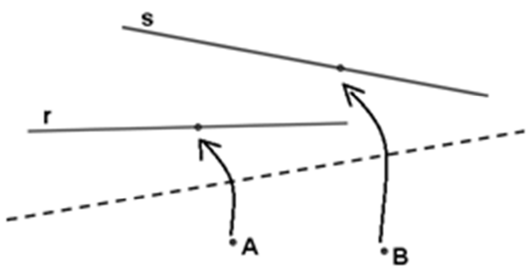
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 5: Dados dois pontos A e B, e uma reta r, se a distância entre A e B for maior ou igual à distância de B à reta r, existe uma dobragem capaz de fazer com que A incida em r de forma que a dobragem passe pelo ponto B.



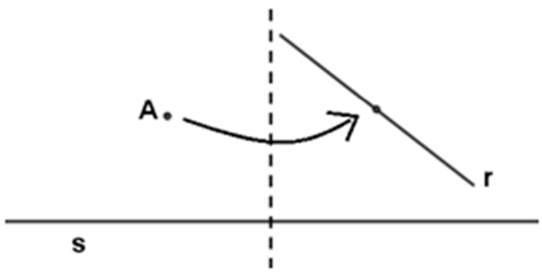
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 6: Dados dois pontos A e B, e duas retas r e s não paralelas, pode ser feita uma dobragem de forma que A incida em r e B em s.



Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Axioma 7: Dado um ponto A, e duas retas, r e s, se as retas não forem paralelas, existe uma dobragem que faz A incidir em r, de maneira que a dobragem seja perpendicular à reta s.



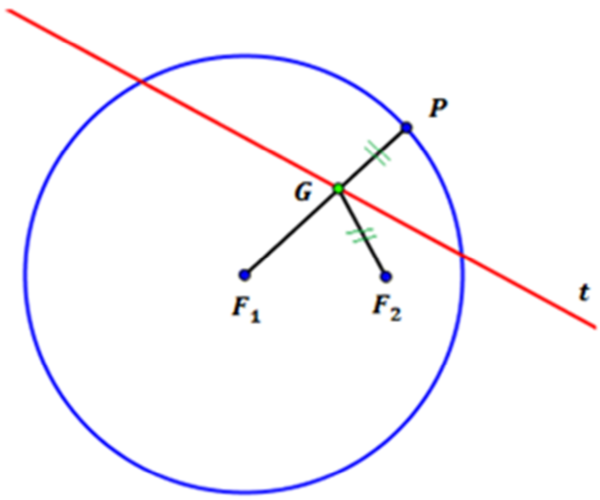
Fonte: http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf

Agora que já conhecemos os axiomas de Huzita-Hatori e percebemos que o origami pode se tornar uma forte ferramenta para o ensino de vários temas matemáticos, começaremos as construções propostas nesta oficina.

A construção da Elipse através do Origami

Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Elipse



Definição do Lugar Geométrico da Elipse através da construção com Origami

Definição da Elipse

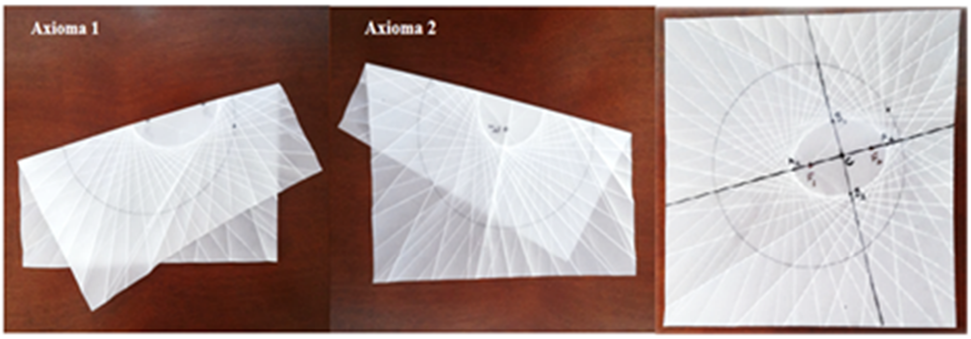
$$\mathbf{E} = \{\mathbf{P}\ |\mathbf{d}(\mathbf{P}, \boldsymbol{F_1}) + \ \mathbf{d}(\mathbf{P}, \boldsymbol{F_1}) = \mathbf{2a}\},$$

onde P $\in \mathbb{R}^2$.

Os elementos da Elipse dados através da construção com Origami

Elementos da Elipse:

- Centro;
- Reta focal;
- Vértices A_1 e A_2;
- Eixo focal;
- Reta não focal;
- Vértices B_1 e B_2;
- Eixo não focal;
- Excentricidade.



1) Utilize a construção do axioma 1 dados os focos F_1 e F_2;

2) Utilize a construção do axioma 2 dados os focos F_1 e F_2;

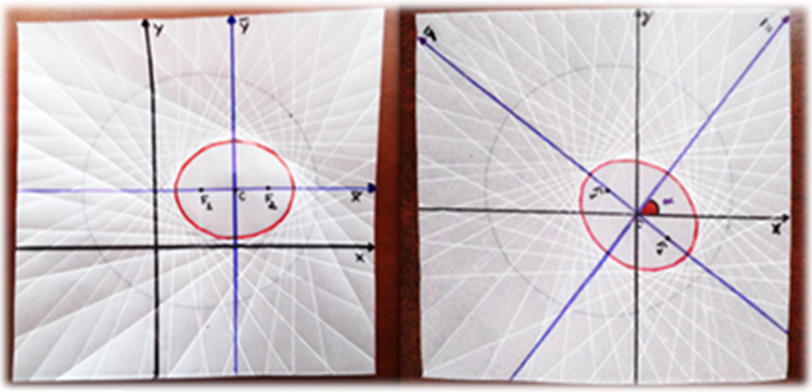
3) Marque todos os elementos da Elipse citados que surgiram a partir destas dobragens.

Exibição de uma animação referente à excentricidade da elipse

Considerando uma Elipse centrada na origem, cujo eixo focal é o eixo das abscissas e, através do aprendizado referente ao seu Lugar Geométrico e alguns cálculos algébricos, temos que sua equação é dada por:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

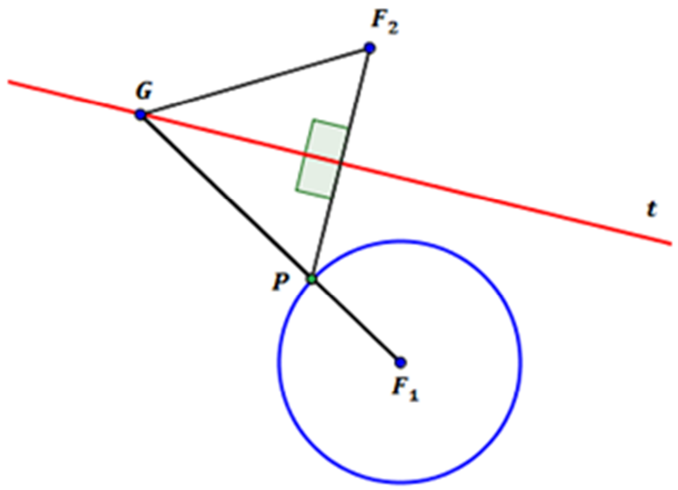
Translação e rotação da elipse



A construção da Hipérbole através do Origami

Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Hipérbole



Definição do Lugar Geométrico da Hipérbole através da construção com Origami

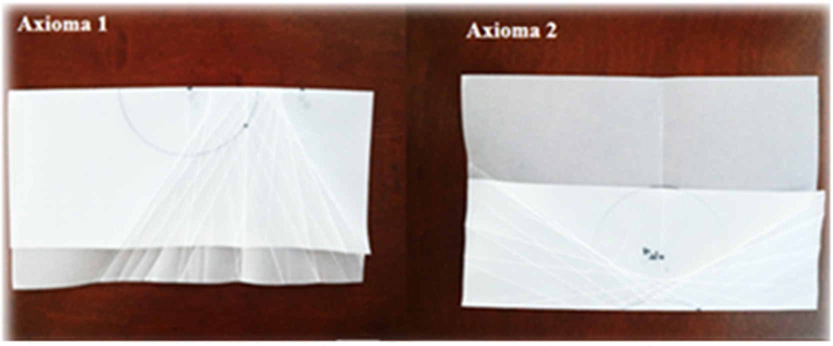
Definição da Hipérbole

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{P} \mid \mathbf{d}(\mathbf{P}, F_1) - \mathbf{d}(\mathbf{P}, F_1) = \pm \mathbf{2a}\},$$

onde P $\in \mathbb{R}^2$.

Elementos da Hipérbole:

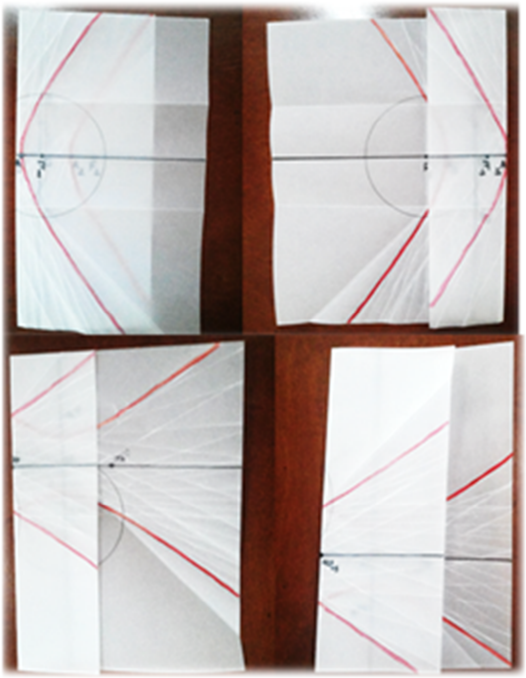
- Centro;
- Reta focal;
- Vértices A_1 *e* A_2;
- Eixo focal;
- Reta não focal;
- Vértices imaginários B_1 *e* B_2;
- Eixo não focal;
- Retângulo da base;
- Assíntotas;
- Excentricidade.



1) Utilize a construção do axioma 1 dados os focos F_1 e F_2 ;

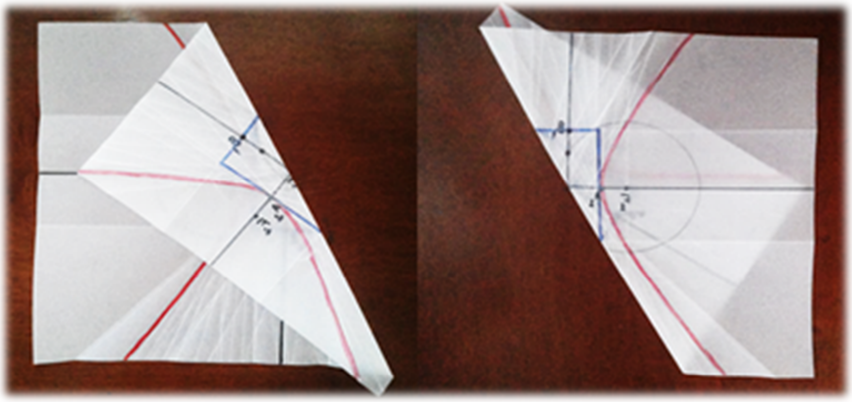
2) Utilize a construção do axioma 2 dados os focos F_1 e F_2 ;

3) Marque as retas focal e não focal, o centro da curva e os vértices A_1 e A_2.



5) Utilize o axioma 4 em relação aos vértices A_1 e A_2 e a reta focal e em relação aos vértices B_1 e B_2 e a reta não focal.

6) Marque os pontos de interseção entre os vincos. Estes são os vértices do retângulo de base.



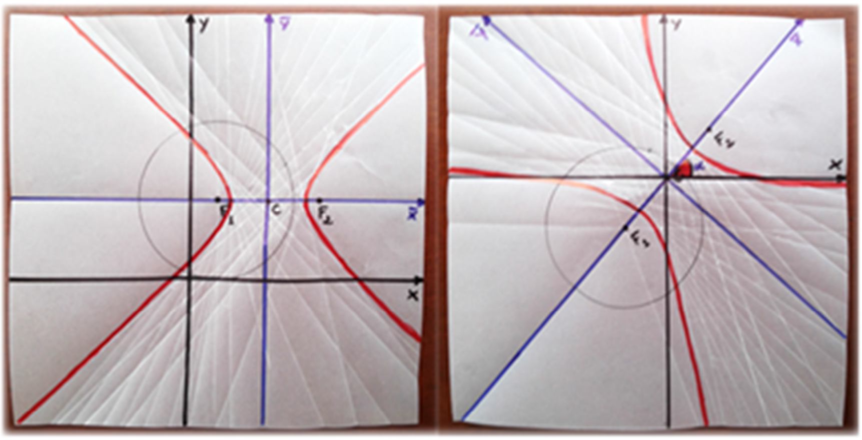
6) Utilizando o axioma 1 em relação ao centro da curva e os vértices do retângulo da base, marque as assíntotas da hipérbole.

Exibição de uma animação referente à excentricidade da hipérbole

Considerando uma Hipérbole centrada na origem, cujo eixo focal é o eixo das abscissas, através do aprendizado referente ao seu Lugar Geométrico e alguns cálculos algébricos, temos que sua equação é dada por:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

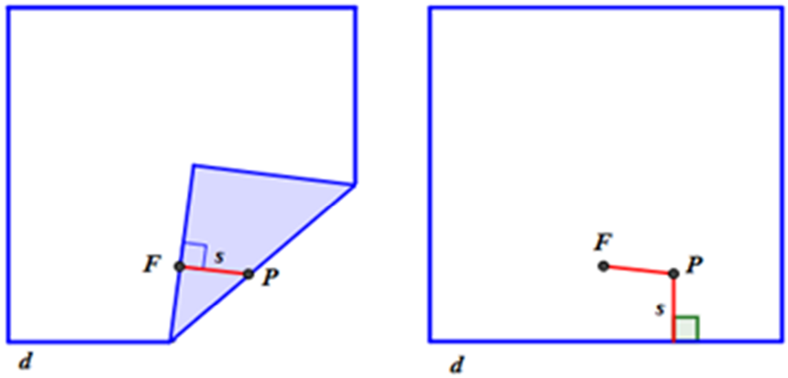
Translação e rotação da hipérbole



A construção da Parábola através do Origami

Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Parábola.



Definição do Lugar Geométrico da Parábola através da construção com Origami

Definição da Parábola

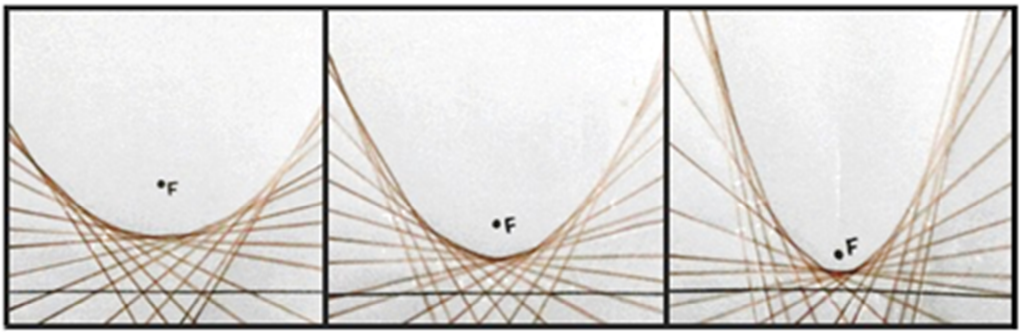
$$P = \{Q \mid \mathbf{d}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{F}) = \mathbf{d}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{d}),$$
$$\text{onde } Q \in \mathbb{R}^2.$$

Elementos da Parábola

- Diretriz;
- Foco;
- Reta focal;
- Vértice;
- Parâmetro;
- Excentricidade.

Utilize o axioma 4 a partir do foco F e a diretriz da Parábola. Com esta dobragem, encontraremos a reta focal e o vértice da Parábola.

“Parábolas: quem viu uma, viu todas.”



Referência: http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/75/parabolas1.pdf

Considerando a diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco acima da diretriz, temos as seguintes informações sobre os elementos da Parábola:

Vértice: V = (x_0, y_0)

Foco: F = $(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$

Diretriz: r: y = $y_0 - \frac{p}{2}$

A partir destes dados e dos conhecimentos obtidos a respeito do Lugar Geométrico da Parábola é possível encontrar a seguinte equação:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

Vimos que o estudo das equações das Curvas Cônicas não está relacionado ao acúmulo de fórmulas decoradas. Mas sim à demonstração das mesmas através do conhecimento do Lugar Geométrico de cada uma delas.

Além disso, vimos que um pedaço de papel pode ser muito mais do que um instrumento de escrita. O papel pode se tornar um eficiente espaço para incríveis descobertas e construções matemáticas.