

# 1 Introdução

## 1.1. Um Breve Histórico sobre Cascas Esbeltas

As estruturas de cúpulas e domos da Antiguidade à Idade Média eram bastante espessas e só podiam resistir a carregamentos de compressão, devido ao uso de materiais frágeis como o barro e a pedra. A primeira casca da arquitetura moderna é geralmente creditada àquela construída pela empresa ótica Zeiss na Áustria em 1920 (Bradshaw *et al.*, 2002). Nos Estados Unidos, cascas foram extensivamente estudadas pela indústria aeronáutica nos anos de 1930. Em 1933, Donell, um engenheiro aeronáutico, formulou as equações gerais para cascas cilíndricas, incluindo as ações de membrana e flexão (Donnell, 196). A seguir, em 1938, Marguerre, com base na teoria não linear de Von Kármán para placas esbeltas, desenvolve uma teoria não linear para cascas abatidas (Marguerre, 1938). Teorias mais refinadas para análise não linear de cascas foram propostas por, dentre outros, Sanders, Flügge e Koiter (Amabili, 2008).

Eduardo Torroja, da Espanha, inicia nos anos de 1930 o estudo sistemático de cascas de concreto para cobertura de grandes espaços. Entretanto, foi o trabalho de Felix Candela, no México, que popularizou o uso das cascas nos anos de 1950. Suas cascas são espetaculares, tanto pela aparência e leveza, quanto pelas soluções estruturais e construtivas por ele adotadas. Em um tempo quando uma espessura de casca de 75 mm era considerada ousada, Candela construiu uma casca em forma de parabolóide hiperbólico com menos de 16 mm de espessura para o Cosmic Ray Pavilion, na cidade do México. A Figura 1.1 mostra um exemplo de como Candela habilmente criou uma cobertura usando a geometria de parabolóide hiperbólico.

Além de Candela e Torroja, podem-se destacar, tanto por seus aspectos estéticos e técnicos, as obras de Nervi, na Itália, Heinz Isler, na Suíça, Paduart, na

França, Saarinen, nos Estados Unidos, e Eládio Dieste, no Uruguai, dentre outros. No Brasil, destaca-se a extensa obra de Oscar Niemeyer, que projetou várias cascas esbeltas, sendo a maioria delas com cálculo estrutural de Joaquim Cardozo e José Carlos Sussekind. A Figura 1.2 mostra alguns exemplos notáveis de cascas modernas.

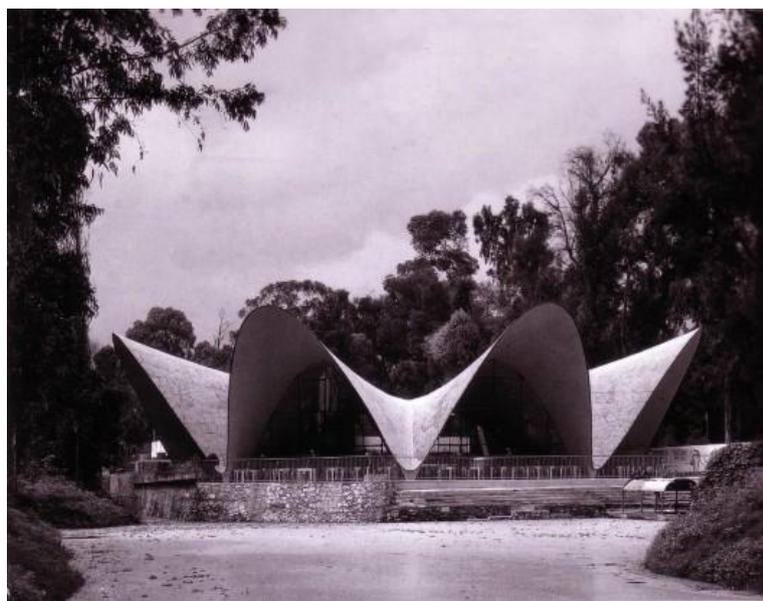
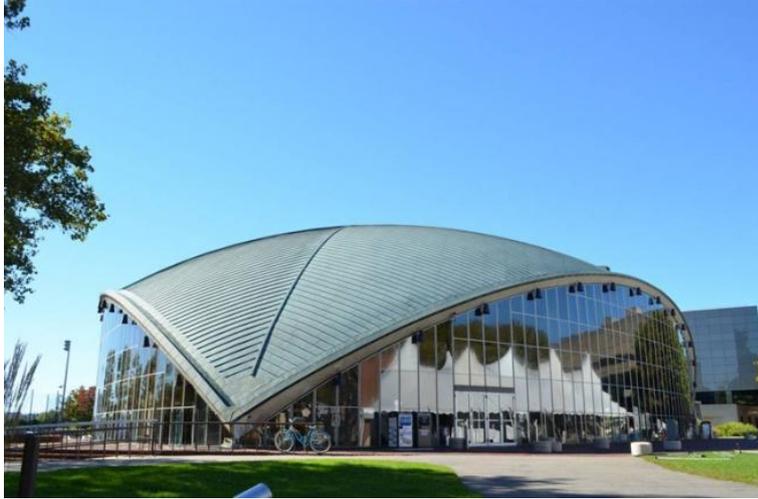


Figura 1.1- Felix Candela - Restaurante Los Manantiales, México ([www.jotdown.es](http://www.jotdown.es))



(a) Sidney Opera House, Australia ([en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org))



(b) MIT Auditorium, Cambridge, USA ([collegeapps.about.com](http://collegeapps.about.com))



(c) Terminal TWA no aeroporto JFK em Nova Iorque ([www.preservationnation.org](http://www.preservationnation.org))



(d) Congresso Nacional, Brasília, Brasil ([pt.wikipedia.org](http://pt.wikipedia.org))



(e) Igreja de Jesus Obreiro, Uruguai (openbuildings.com)

Figura 1.2 – Grandes estruturas em forma de casca

## 1.2.

### **Cascas Esbeltas: Vantagens e Características Básicas**

As cascas são estruturas eficazes. Sua curvatura é explorada na natureza e tecnologia sempre que grandes vãos ou alta capacidade de carga são necessários. Porém, para que a eficácia seja real, ou seja, para que se possa conjugar a vantagem de vencer grandes vãos com grande capacidade de carga, considerando o fato que são estruturas esbeltas, o projeto deve utilizar o material de construção de forma otimizada e tomar como premissa que a casca deve estar submetida a um estado de tensões de membrana e que as tensões de flexão devem ser evitadas ou minimizadas.

As cascas esbeltas, apesar de possuírem excelente eficiência estrutural como membrana, e, portanto, mesmo através de espessuras bastante reduzidas, suportarem tensões normais de grande magnitude, por outro lado, estão sujeitas ao fenômeno da flambagem, local e global, principalmente nos apoios, onde há geralmente uma concentração de esforços de compressão. Assim, o projetista deve estar atento para evitar que tais fenômenos ocorram. O efeito das imperfeições iniciais da estrutura, levando a efeitos não lineares de segunda ordem, associada à grande esbeltez, aumenta a probabilidade de flambagem. Uma descrição detalhada da bibliografia, teoria e acidentes relativos à perda de estabilidade de cascas pode ser encontrada em <http://shellbuckling.com/index.php>.

Também estas estruturas podem apresentar frequências de vibração baixas, podendo ser facilmente excitadas por cargas ambientais extremas, como tornados e terremotos. Com isto, a análise dinâmica de cascas esbeltas torna-se um item de extrema importância no projeto estrutural. Muitas vezes, para geometrias não usuais, são necessários inclusive ensaios em túnel de vento para se obter os dados necessários à análise. A Figura 1.3 mostra um modelo reduzido de casca conoidal analisado no túnel de vento da Universidade Técnica de Szczecin, na Polônia, bem como uma típica distribuição de pressão devida a uma carga de vento.

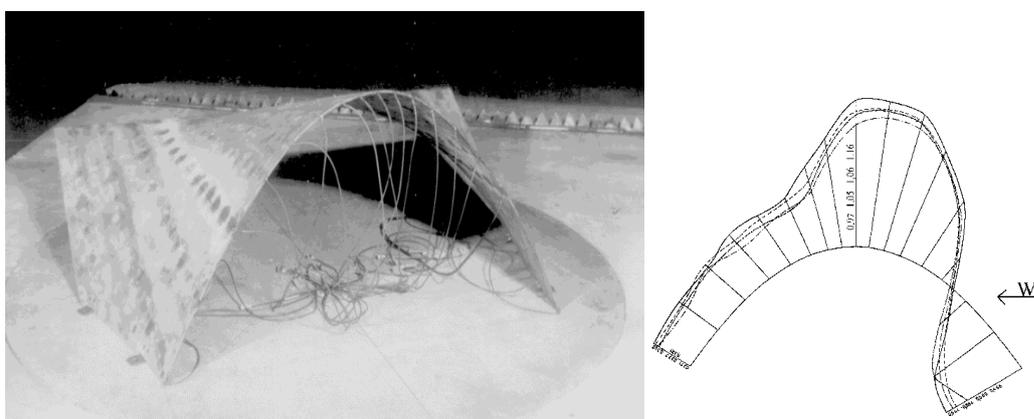


Figura 1.3 - Modelo de casca conoidal para estudo em túnel de vento e distribuição de pressão devido à carga de vento (<http://www.aerodynamic-dr.com/Publ.1.htm>).

### 1.3. Definição de Superfícies Regradas

Diz-se (<http://shellbuckling.com/index.php>) que uma superfície  $S$  é regradada quando as seguintes condições são satisfeitas: (i) existe uma curva  $D$  contida em  $S$ , tal que, para cada ponto  $P$  de  $D$ , existe uma reta  $LP$  contida em  $S$ , passando por  $P$ ; e (ii) a união de todas as retas  $LP$  forma a superfície  $S$ . A curva  $D$  é chamada uma diretriz da superfície  $S$  e cada reta  $LP$  é denominada uma geratriz de  $S$  (Figura 1.4).

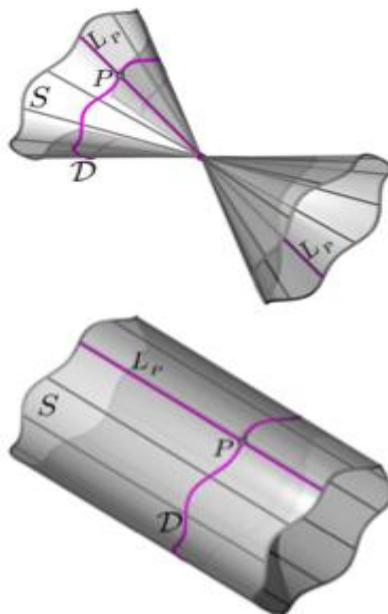


Figura 1.4 - Superfícies Regradas

(<http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga2V1aula13.pdf>)

As superfícies regradas podem ser subdivididas em dois tipos: as superfícies regradas desenvolvíveis, ou seja, que podem ser planificadas, e as superfícies não desenvolvíveis. Entre as superfícies desenvolvíveis, estão as superfícies cilíndricas e as superfícies cônicas. Superfícies regradas cilíndricas são superfícies regradas em que as retas geratrizes  $LP$  são paralelas entre si, enquanto as superfícies regradas cônicas são superfícies regradas em que todas as retas geratrizes  $LP$  têm um ponto em comum. Considere-se, por exemplo, um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço. Seja  $D$  uma curva contida no plano  $z = 0$ . Para cada ponto  $P \in D$ , tome-se a reta  $LP$  que passa por  $P$  e que é paralela ao eixo  $OZ$ . A união de todas essas retas é uma superfície regrada cilíndrica  $S$  (Figura 1.5). Considere-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço. Sejam  $D$  uma curva contida no plano  $z = 2$  e o ponto  $A = (0,0,4)$ . Para cada ponto  $P \in D$ , considere-se a reta  $L_P$  que passa por  $P$  e  $A$ . A união de todas essas retas é uma *superfície regrada cônica* (Figura 1.5).

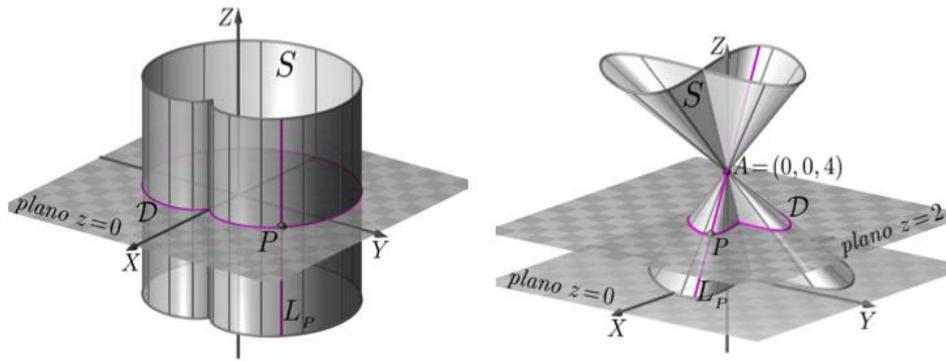


Figura 1.5 - Superfícies Regradas Cilíndrica e Cônica

(<http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga2V1aula13.pdf>)

As superfícies regradas não desenvolvíveis possuem algumas propriedades que as identificam, a saber: (a) não podem ser desenvolvidas sobre um plano; (b) duas geratrizes infinitamente próximas se cruzam; e (c) o plano tangente à superfície em um ponto contém a geratriz que passa pelo dito ponto, mas não é tangente à superfície em outros pontos da geratriz citada. Existem diversos tipos de superfícies regradas não desenvolvíveis e esses tipos são classificados de acordo com a posição da geratriz, diretriz e do plano diretor. As mais conhecidas são: parabolóide hiperbólico, cilindróide, conoide, e hiperbolóide de revolução de uma só folha.

#### 1.4. Superfícies Regradas Usuais em Engenharia Civil

A Figura 1.6 ilustra a superfície regrada conhecida como parabolóide hiperbólico. Ela é gerada por uma reta (geratriz) que se move apoiada em duas retas (diretrizes) reversas, isto é, que não pertencem ao mesmo plano. Esta é uma das geometrias mais usadas em arquitetura, sendo um exemplo típico apresentado na Figura 1.7.

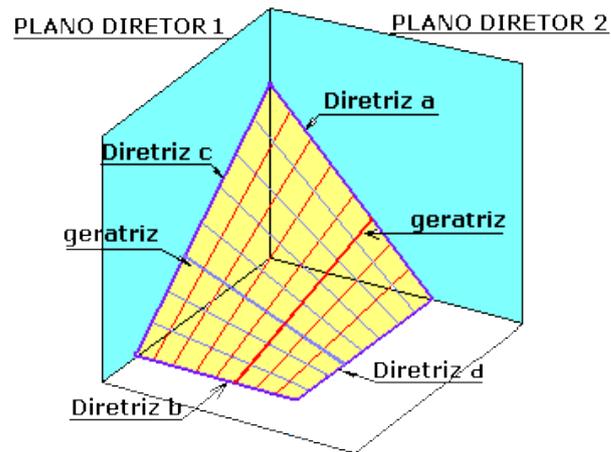


Figura 1.6 - Parabolóide Hiperbólico (www.mat.uel.br)



Figura 1.7 - Parabolóide Hiperbólico - Igreja do Colégio Marianistas (Zaragoza - Espanha) (www.catedu.es)

A Figura 1.8 mostra esquematicamente a superfície conhecida por cilindróide. Ela é gerada por uma reta que se desloca paralelamente a um plano diretor, apoiando-se sempre sobre duas curvas (diretrizes). A Figura 1.9 mostra um exemplo de cilindróide.

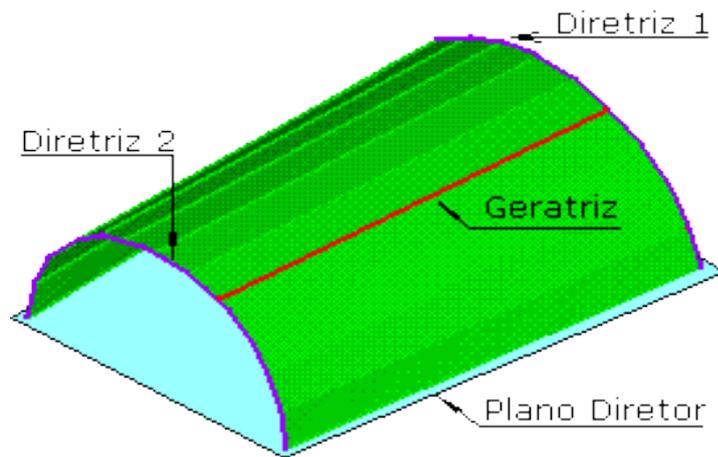


Figura 1.8 – Cilindróide (www.mat.uel.br)



Figura 1.9 - Cilindróide - Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, Brasil (torre-oscar-niemeyer.fgv.br)

A Figura 1.10 mostra a superfície regrada conhecida por hiperbolóide de revolução. Ela é gerada por uma reta (diretriz), que gira em torno de um eixo vertical reverso à mesma, isto é, a reta AB pertence a um plano diferente daquele que contém o eixo.

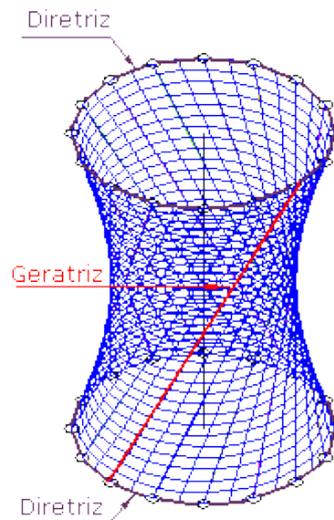


Figura 1.10 - Hiperbolóide de revolução de uma só folha (www.mat.uel.br)

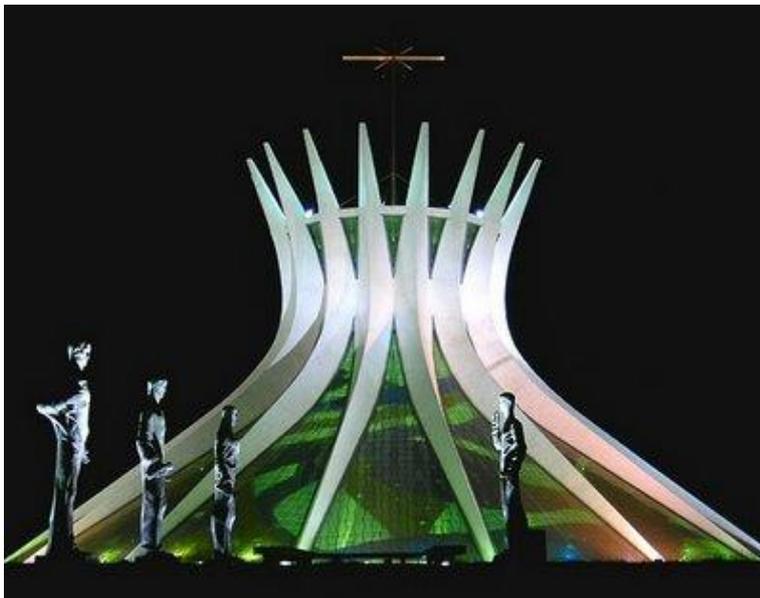
O hiperbolóide de uma só folha é amplamente utilizado na construção civil. Por exemplo, ele é utilizado nas torres de refrigeração das usinas nucleares. Como o hiperbolóide de uma folha é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície, ela pode ser construída por vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais, mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção. Exemplos típicos de hiperbolóides são apresentados na Figura 1.11.



(a) Torre de resfriamento na estação de energia de Didcot, Inglaterra (commons.wikimedia.org)



(b) Passarela na Corporation Street, Manchester, Inglaterra  
([www.maths.manchester.ac.uk](http://www.maths.manchester.ac.uk))



(c) Catedral de Brasília, Brasil ([curvasearquitectura.wordpress.com](http://curvasearquitectura.wordpress.com))

Figura 1.11 - Exemplos típicos de estruturas em hiperbolóide

Finalmente, a Figura 1.12 apresenta a superfície regrada conhecida por conoide, objeto de estudo do presente trabalho. Ela é gerada por uma reta que se desloca paralelamente a um plano diretor e se apoia em duas diretrizes: uma reta e uma curva que não pertencem ao mesmo plano. Exemplos típicos são apresentados na Figura 1.13.

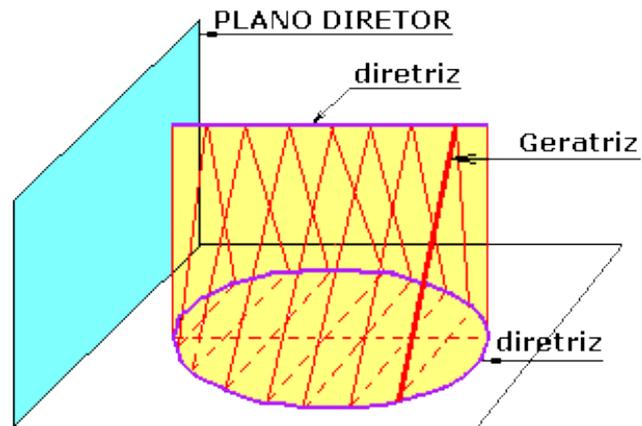


Figura 1.12 – Conóide ([www.mat.uel.br](http://www.mat.uel.br))



(a) Cobertura Conoidal no Centro de Exposição de Valencia, Espanha ([www.eventplannerspain.com](http://www.eventplannerspain.com))



(b) Cobertura Conoidal – Escola da Sagrada Família, projeto de Antoni Gaudí, Barcelona, Espanha ([www.mathcurve.com](http://www.mathcurve.com))



(c) Hipódromo Zarzuela, projeto de Eduardo Torroja, Espanha, meados de 1930  
([www.abc.es](http://www.abc.es))

Figura 1.13 – Exemplos típicos de estruturas em conóides.

## 1.5. Revisão Bibliográfica

A literatura clássica sobre equilíbrio, estabilidade e vibrações de cascas trata usualmente de cascas de revolução, em particular cascas cilíndricas, cônicas e esféricas, com ênfase no comportamento de membrana destas estruturas (Flügge, 1973; Gould, 1977; Leissa, 1973; Brush e Almroth, 1975). A análise de cascas com outras geometrias, apesar do uso frequente em engenharia, é rara na literatura, em particular cascas conoidais.

Em 1989, Ghosh *et al.* fizeram uma análise aproximada da flexão de cascas conoidais, duplamente curva, com curvatura gaussiana negativa, utilizando o método de Galerkin, com o intuito de obter uma solução simples que permitisse ao projetista ter um conhecimento preliminar da natureza e valores característicos dos esforços da casca. Dois problemas numéricos foram analisados e os resultados foram comparados com os resultados disponíveis em elementos finitos.

Em 1992, Das e Bandyopadhyay, analisaram numericamente uma casca conoidal parabólica em flexão, usando a técnica das diferenças finitas e introduzindo condições de contorno realistas. Além disso, realizaram ensaios experimentais para corroborar a análise numérica.

Bradshaw *et al.* publicaram em 2002, o artigo denominado “Estruturas Especiais: Passado, Presente e Futuro”, no qual forneceram uma perspectiva histórica de como as estruturas especiais, como as cascas esbeltas, por exemplo, evoluíram ao longo das últimas décadas; sua prática ao iniciar do século 21; e uma projeção de suas potenciais aplicações e evoluções para o futuro, destacando o uso de diversas superfícies regradadas.

Ramm e Wall apresentaram, em 2004, um estudo chamado “Estruturas de cascas – uma sensível inter-relação entre o físico e o numérico”. Neste estudo descreveram primeiramente as características típicas das estruturas de cascas, incluindo os benefícios, bem como a vulnerabilidade à flambagem devido à grande esbeltez. Num segundo momento, estes aspectos típicos foram estudados através de métodos numéricos e computacionais, sendo apresentados diversos exemplos práticos.

Em outubro de 2005, Meyer e Sheer descreveram o interesse atual dos engenheiros e arquitetos em projetar estruturas de cascas finas de concreto, destacando as vantagens das cascas de concreto em termos de economia, estética e utilidade, algo que no passado era tido como unanimidade.

Burger e Billington, em 2006, apresentaram um estudo da estrutura do restaurante *Los Manantiales*, em Xochimilco, no México, através do artigo “Felix Candela, elegância e resistência: uma verificação da casca de Xochimilco”. A estrutura, um parabolóide hiperbólico de oito lados e quatro selas de interseção, foi modelada através de um programa de elementos finitos e os resultados comparados com as observações feitas em campo das condições atuais da estrutura e as fotos de arquivo tiradas durante a construção.

Em 2010, Tomás e Martí estudaram como otimizar o comportamento estrutural das cascas de concreto, através de pequenas mudanças em sua geometria, particularmente evitando ou reduzindo ao máximo os esforços de flexão.

Mais recentemente, em 2013, Sahoo estudou as características dinâmicas de cascas conoidais de material composto e a influência de aberturas no comportamento estrutural. Neste trabalho, foram determinados as frequências

naturais e modos de vibração das cascas conoidais. Para este propósito foi desenvolvido um código de elementos finitos, combinando-se um elemento curvo de casca de oito nós com um elemento de viga curva de três nós. O código foi validado através da comparação dos resultados com problemas de referência disponíveis na literatura. O tamanho das aberturas e seu posicionamento em relação ao centro da casca foram variados para diferentes condições de contorno e diferentes formatos das cascas conoidais compostas. Os efeitos destas variações paramétricas nas frequências naturais e modos de vibração foram, então, considerados em detalhes.

Também em 2013, Balkshi e Chakravorty, investigaram a flambagem de cascas conoidais esbeltas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas. Nayak e Bandyopadhyay (2002) também estudaram a aplicação dos elementos finitos para estruturas de cascas reforçadas, através das combinações apropriadas do elemento de casca isoparamétrico duplamente curvo de oito nós com o elemento de viga curvo de três nós.

Não se encontrou, entretanto, na literatura técnica um estudo detalhado das vibrações e estabilidade de cascas conoidais, objetivo desta pesquisa.

## **1.6. Objetivo**

O objetivo desta dissertação é estudar o comportamento estrutural de uma casca conoidal parabólica comumente utilizada na cobertura de grandes vãos, em virtude de suas características geométricas e pela facilidade de fabricação e moldagem no local da obra.

Com o auxílio de um programa de elementos finitos, a estrutura da casca conoidal é modelada e um estudo paramétrico é desenvolvido com a finalidade de estudar o efeito das condições de contorno, curvatura da casca e dimensões da estrutura na distribuição dos esforços, frequências naturais e modos de vibração, e carga crítica da casca. Este estudo tem por finalidade fornecer ao engenheiro projetista uma visão geral do comportamento desta classe de estruturas e um subsídio para futuras pesquisas nesta área.

## **1.7. Descrição do Conteúdo da Dissertação**

O Capítulo 1 apresenta os conceitos gerais sobre cascas, uma introdução às superfícies regradas e sua aplicação em engenharia civil, principalmente em coberturas de grandes vãos, a revisão bibliográfica e este resumo da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta um resumo da teoria não linear de placas de von Kármán.

O Capítulo 3 apresenta a teoria de cascas conoidais abatidas, com base no procedimento proposto por Marguerre.

O Capítulo 4 estuda a influência das condições de contorno, curvatura e dimensões da casca na distribuição dos esforços de membrana e flexão. Para evidenciar as características típicas de cascas, os resultados são comparados com aqueles obtidos para uma placa de mesmas dimensões.

O Capítulo 5 trata da análise dinâmica, mais especificamente a determinação das frequências naturais e modos de vibração das cascas conoidais.

O Capítulo 6 analisa a influência do carregamento nas frequências naturais da casca e determina, através do critério dinâmico da estabilidade, a carga crítica em função das condições de contorno, curvatura e dimensões.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.