

**Rafael Abrantes Penchel**

**Síntese de Antenas Refletoras Utilizando  
Seções Cônicas e Superfícies Quádricas  
Confocais**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Orientador : Prof. José Ricardo Bergmann  
Coorientador: Prof. Fernando José da Silva Moreira

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2014



**Rafael Abrantes Penchel**

## **Síntese de Antenas Refletoras Utilizando Seções Cônicas e Superfícies Quádricas Confocais**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. José Ricardo Bergmann**

Orientador

Centro de Estudos em Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Fernando José da Silva Moreira**

Coorientador

Universidade Federal de Minas Gerais — UFMG

**Prof. José Ricardo Descardeci**

Universidade Federal do Tocantins — UFT

**Prof. Sandro Rogério Zang**

Universidade Federal de São João del Rei — UFSJ

**Prof. Flavio José Vieira Hasselmann**

Centro de Estudos em Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Cássio Gonçalves do Rego**

Universidade Federal de Minas Gerais — UFMG

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de Dezembro de 2014

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Rafael Abrantes Penchel**

Graduado em Engenharia de Telecomunicações na Universidade FUMEC em 2006, mestre em Engenharia Elétrica na área de Antenas e Propagação pela Universidade Federal de Minas Gerais em 2009. Atualmente é aluno de doutorado na área de Eletromagnetismo Aplicado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro onde integra o grupo de métodos computacionais em teoria eletromagnética.

#### Ficha Catalográfica

Penchel, Rafael Abrantes

Síntese de Antenas Refletoras Utilizando Seções Cônicas e Superfícies Quádricas Confocais / Rafael Abrantes Penchel; orientador: José Ricardo Bergmann; coorientador: Fernando José da Silva Moreira. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.

v., 243 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. Óptica Geométrica. 3. Antena refletora. 4. Antena omndirecional. 5. Antena offset. 6. Seção cônica. 7. Superfície quádrlica confocal. 8. Equação de Monge-Ampère. I. Bergmann, José Ricardo. II. Moreira, Fernando José da Silva. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

## Agradecimentos

Este trabalho teve a contribuição de várias entidades e pessoas. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Ao Prof. José Ricardo Bergmann, meu orientador, pela disponibilidade nas inúmeras orientações, pelas críticas, correções e sugestões feitas durante a orientação e, principalmente pelos ensinamentos ao longo destes anos;

Ao Prof. Fernando José da Silva Moreira, meu coorientador, pelas orientações, sugestões e pelo excelente trabalho de análise e revisão dos artigos publicados e desta tese;

Ao amigo Prof. Sandro Rogério Zang, por fornecer o programa de análise do Método de Momentos e, principalmente, pela amizade;

Ao amigo Maiquel Canabarro, por fornecer parte do programa de análise da Óptica Física e, sobretudo, pela ótima relação de amizade;

Ao amigo Guilherme Simon Rosa, pelo companheirismo e a ajuda com a redação do texto em  $\text{\LaTeX}$ ;

À minha família: meus pais Ripério e Solange pelo apoio, incentivo e amor incondicional, meu irmão Eduardo, pelo incentivo, companheirismo e amizade.

À minha esposa Amanda, pelo inestimável apoio e incentivo no dia-a-dia, pela paciência e compreensão ao longo destes anos e, acima de tudo, pelo amor.

Aos amigos do CETUC, em especial André Santos e Danielle Okamoto, pelo companheirismo e amizade.

Ao CNPq e a FINEP, através do Projeto CELLJAMMER/01090479 pelo apoio financeiro imprescindível para realização deste trabalho.



## Resumo

Penchel, Rafael Abrantes; Bergmann, José Ricardo; Moreira, Fernando José da Silva. **Síntese de Antenas Refletoras Utilizando Seções Cônicas e Superfícies Quádricas Confocais**. Rio de Janeiro, 2014. 243p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho propõe técnicas numéricas para a síntese de antenas refletoras que utilizando seções de cônicas ou superfícies quádricas confocais. Para tal, utilizando os princípios da Óptica Geométrica, foram desenvolvidos algoritmos capazes de sintetizar as superfícies refletoras desejadas. São analisadas duas geometrias distintas: a antena duplo-refletora com cobertura omnidirecional e a antena refletora *offset* com um único refletor. No primeiro problema, é apresentado um método alternativo para a síntese geométrica de antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional e diagrama de radiação arbitrário no plano de elevação. O subrefletor é um corpo de revolução gerado por uma única seção cônica e o refletor principal modelado é gerado por uma série de seções cônicas locais sequencialmente concatenadas. Para ilustrar o método, duas configurações axialmente simétrica são sintetizadas para proporcionar diagramas de radiação uniforme ou cossecante ao quadrado no plano de elevação. Os resultados são validados por uma técnica híbrida baseada em Casamento de Modos e o Método de Momentos. No segundo problema, é investigado um procedimento numérico alternativo para a síntese geométrica de antenas refletoras *offset* com diagrama de radiação arbitrário na região de campo distante. O método usa superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície modelada. Nesta abordagem, um operador não linear deve ser resolvido como um problema de contorno. Para ilustrar o método, são apresentadas antenas modeladas para prover diagrama de radiação Gaussiano em contornos de cobertura circular, elíptico e super-elíptico.

## Palavras-chave

Óptica Geométrica ; Antena refletora ; Antena omnidirecional ; Antena *offset* ; Seção cônica ; Superfície quádrica confocal ; Equação de Monge-Ampère .

## Abstract

Penchel, Rafael Abrantes; Bergmann, José Ricardo (advisor); Moreira, Fernando José da Silva. **Synthesis of Offset Reflector Antennas Using Conic Sections and Confocal Quadric Surfaces**. Rio de Janeiro, 2014. 243p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work proposes numerical techniques for synthesis of reflector antennas, using conic sections or confocal quadric surfaces. Under Geometrical Optics principles, algorithms to shape desired reflective surfaces have been developed. Two different geometries have been considered: omnidirectional dual-reflector antenna and single offset reflector antennas. In the first problem, it was presented an alternative method for synthesis of omnidirectional dual-reflector antennas with an arbitrary radiation pattern in elevation plane. The body-of-revolution subreflector is generated by a single conic section, while the shaped main reflector is generated by a series of local conic sections, sequentially consecutively concatenated. In order to illustrate the method, omnidirectional axis-displaced ellipse (OADE) and Cassegrain (OADC) configurations are synthesized to provide uniform or cosecant squared radiation pattern in the elevation plane. The GO shaping results are validated by a hybrid technique based on Mode Matching and Method of Moments. In the second problem, an alternative numerical procedure was investigated for the geometrical synthesis of offset reflector antennas with an arbitrary radiation pattern in the far-field region, according to geometrical optics. The method uses local axis-displaced confocal quadric surfaces to describe the shaped reflector. In this approach, a nonlinear operator must be solved as a boundary value problem. To illustrate the method, we have chosen several offset configurations with circular, elliptical and super-elliptical contour coverage and Gaussian power density. The results were validated by the physical optics approximation.

## Keywords

Geometrical Optics ; Reflector antennas ; Omnidirectional antennas ; Offset antennas ; Conic sections ; Confocal quadric surfaces ; Monge-Ampère equation .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	Contextualização do Problema . . . . .	17
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	20
1.3	Objetivos . . . . .	31
1.4	Organização do Trabalho . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Síntese de Antenas Duplo-Refletoras Omnidirecionais</b>	<b>37</b>
2.1	Introdução . . . . .	37
2.2	Geometria das Configurações Clássicas . . . . .	40
2.3	Métodos de Síntese do Refletor Principal . . . . .	42
2.4	Estudos de Caso . . . . .	51
2.5	Conclusões Parciais . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Síntese Geométrica de Antenas Refletoras Offset</b>	<b>103</b>
3.1	Introdução . . . . .	103
3.2	Notação em Coordenadas Complexas . . . . .	105
3.3	Equação de Monge-Ampère . . . . .	107
3.4	Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Solução Numérica do Operador Não-Linear</b>	<b>133</b>
4.1	Introdução . . . . .	133
4.2	Grade Polar . . . . .	135
4.3	Operador Não-Linear . . . . .	141
4.4	Método Iterativo de Newton . . . . .	148
4.5	Matriz Jacobiana do Operador . . . . .	151
4.6	Processo Iterativo de Síntese . . . . .	158
<b>5</b>	<b>Projetos de Antenas Refletoras Offset</b>	<b>160</b>
5.1	Introdução . . . . .	160
5.2	Modelo para o Alimentador . . . . .	162
5.3	Modelo para o Campo Distante . . . . .	163
5.4	Condição de Contorno . . . . .	165
5.5	Cobertura Gaussiana em Contorno Circular . . . . .	167
5.6	Cobertura Gaussiana em Contorno Elíptico . . . . .	196
5.7	Cobertura Gaussiana em Contorno Super-Elíptico . . . . .	204
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>217</b>
6.1	Síntese de Antenas Refletoras Circularmente Simétricas . . . . .	217
6.2	Síntese de Antenas Refletoras <i>Offset</i> . . . . .	218
6.3	Trabalhos Futuros . . . . .	219
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>220</b>
<b>A</b>	<b>Óptica Geométrica em Coordenadas Complexas</b>	<b>230</b>

A.1	Introdução . . . . .	230
A.2	Coordenadas Complexas . . . . .	230
A.3	Vetores em Coordenadas Complexas . . . . .	234
A.4	Lei de Snell . . . . .	237
A.5	Conservação da Energia . . . . .	239
A.6	Mapeamento $\tau : P(\eta) \rightarrow Q(\zeta)$ . . . . .	240

## Lista de figuras

1.1	Antena com refletor parabólico alimentada por uma fonte pontual no foco . . . . .	20
1.2	Antena com refletor cilíndrico alimentada por um conjunto de dipolos . . . . .	21
1.3	Geometria da antena <i>offset</i> com um refletor . . . . .	22
1.4	Geometria da antena <i>offset</i> duplo-refletora . . . . .	23
1.5	Conjunto de soluções para a antena <i>offset</i> duplo-refletora . . . . .	27
1.6	Antena refletora omnidirecional com foco anular . . . . .	28
1.7	Antena refletora omnidirecional com foco pontual . . . . .	29
1.8	Antena omnidirecional duplo-refletora . . . . .	30
1.9	Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da $L_{\eta\bar{\eta}}$ no plano $\phi = 90^\circ$ . . . . .	32
1.10	Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da $L_{\eta\eta}$ no plano $\phi = 0^\circ$ . . . . .	33
1.11	Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da $L_{\eta\bar{\eta}}$ no plano $\phi = 0^\circ$ . . . . .	33
1.12	Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da distribuição de amplitude na abertura ( $G$ ) no plano $\phi = 0^\circ$ . . . . .	34
2.1	Geometria da antena duplo-refletora com cobertura omnidirecional . . . . .	38
2.2	Diagrama de radiação de uma antena duplo-refletora com cobertura omnidirecional clássica . . . . .	38
2.3	Geometria de uma antena OADE clássica [65] . . . . .	41
2.4	Geometria de uma antena OADC clássica [65] . . . . .	41
2.5	Geometria de uma antena OADE com refletor principal modelado . . . . .	43
2.6	Geometria de uma antena OADC com refletor principal modelado . . . . .	43
2.7	Geometria de uma cônica com eixo deslocado . . . . .	44
2.8	Seção Cônica $M_n$ . . . . .	47
2.9	Seção de Parábola $M_n$ . . . . .	50
2.10	Cone circular que define o volume da antena . . . . .	52
2.11	Diagrama de radiação do modo TEM de uma corneta coaxial . . . . .	53
2.12	Caso A.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real . . . . .	56
2.13	Caso A.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual . . . . .	56
2.14	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos A.I e A.II . . . . .	57
2.15	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos A.I e A.II . . . . .	58
2.16	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos A.I e A.II . . . . .	59
2.17	Caso A.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	60
2.18	Caso A.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	61
2.19	Caso B.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real . . . . .	62
2.20	Caso B.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual . . . . .	62

2.21	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos B.I e B.II . . .	63
2.22	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos B.I e B.II . . . . .	64
2.23	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos B.I e B.II . . . . .	64
2.24	Caso B.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	65
2.25	Caso B.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	66
2.26	Caso C.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real . . . . .	67
2.27	Caso C.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual . . . . .	67
2.28	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos C.I e C.II . . .	68
2.29	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos C.I e C.II . . . . .	69
2.30	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos C.I e C.II . . . . .	70
2.31	Caso C.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	71
2.32	Caso C.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	71
2.33	Caso D.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real . . . . .	72
2.34	Caso D.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual . . . . .	72
2.35	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos D.I e D.II . . .	73
2.36	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos D.I e D.II . . . . .	74
2.37	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos D.I e D.II . . . . .	75
2.38	Caso D.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	76
2.39	Caso D.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	76
2.40	Caso E.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real . . . . .	79
2.41	Caso E.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual . . . . .	79
2.42	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos E.I e E.II . . .	80
2.43	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos E.I e E.II . . . . .	81
2.44	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos E.I e E.II . . . . .	82
2.45	Caso E.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	83
2.46	Caso E.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	83
2.47	Caso F.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real . . . . .	85
2.48	Caso F.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual . . . . .	85
2.49	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos F.I e F.II . . .	86
2.50	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos F.I e F.II . . . . .	86
2.51	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos F.I e F.II . . . . .	87
2.52	Caso F.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	88
2.53	Caso F.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	88
2.54	Caso G.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real . . . . .	90

2.55	Caso G.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual . . . . .	90
2.56	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos G.I e G.II . . .	91
2.57	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos G.I e G.II . . . . .	92
2.58	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos G.I e G.II . . . . .	93
2.59	Caso G.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	94
2.60	Caso G.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	94
2.61	Caso H.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real . . . . .	96
2.62	Caso H.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual . . . . .	96
2.63	Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos H.I e H.II . . .	97
2.64	Erro <i>rms</i> em relação à $N$ para os casos H.I e H.II . . . . .	98
2.65	Erro absoluto na geratriz modelada com $N = 25$ em função da coordenada $z$ para os casos H.I e H.II . . . . .	99
2.66	Caso H.I: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	100
2.67	Caso H.II: Diagramas de radiação no plano de elevação . . . . .	100
3.1	Geometria do problema de síntese . . . . .	104
3.2	Projeção Estereográfica . . . . .	106
3.3	Geometria da Antena Refletora <i>Offset</i> . . . . .	108
3.4	Conjunto de soluções da Lei de Snell . . . . .	109
3.5	Cone de raios incidentes e refletidos . . . . .	110
3.6	Seção de cônica com eixo deslocado . . . . .	113
3.7	Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado . . . . .	114
3.8	Mapeamento para obtenção de uma quádrlica solução inicial . . . .	118
3.9	Traçado de raios da superfície quádrlica confocal . . . . .	120
3.10	Diagrama das direções de incidência no plano complexo $\eta$ . . . . .	121
3.11	Diagrama das direções de reflexão no plano complexo $\zeta$ . . . . .	121
3.12	Diagrama de irradiação da função $I(\eta)$ no plano complexo $\eta$ . . . .	123
3.13	Diagrama de irradiação da função $G(\zeta)$ plano complexo $\zeta$ . . . . .	123
3.14	Transformação Linear: expansão ou contração e rotação . . . . .	124
3.15	Transformação Linear: translação . . . . .	125
3.16	Transformação Linear: expansão, rotação e translação . . . . .	126
3.17	Conjunto de círculos no plano complexo $\eta$ . . . . .	126
3.18	Conjunto de círculos no plano complexo $\zeta$ após a expansão e translação . . . . .	127
3.19	Transformação Linear: inversão e reflexão . . . . .	128
3.20	Conjunto de círculos no plano complexo $\zeta$ após a inversão . . . . .	129
3.21	Conjunto de círculos no plano complexo $\zeta$ dados pela transformação linear fracionária . . . . .	131
4.1	Células para a representação local da função $L$ . . . . .	134
4.2	Sistemas de Coordenadas principal e auxiliares . . . . .	135
4.3	Grade regular polar $10 \times 10$ no plano $\theta'\phi'$ . . . . .	136
4.4	Grade regular polar $10 \times 30$ no plano $\theta'\phi'$ . . . . .	137
4.5	Grade regular polar $10 \times 10$ no plano complexo $\eta'$ . . . . .	138
4.6	Grade regular polar $10 \times 30$ no plano complexo $\eta'$ . . . . .	138

4.7	Grade regular polar $10 \times 10$ no plano complexo invertido $1/\eta'$	139
4.8	Grade regular polar $10 \times 30$ no plano complexo invertido $1/\eta'$	139
4.9	Grade regular polar $10 \times 10$ no plano complexo $\eta$	140
4.10	Grade regular polar $10 \times 30$ no plano complexo $\eta$	141
4.11	Grade polar com células triangulares	143
4.12	Célula triangular com quatro pontos	144
4.13	Célula triangular no centro da grade	149
4.14	Célula triangular no primeiro anel da grade	150
4.15	Célula triangular nas bordas da grade	151
4.16	Matriz jacobiana para uma grade com 20 pontos	152
4.17	Processo iterativo do algoritmo de síntese	159
5.1	Contorno Super-Elíptico	163
5.2	Diagrama de radiação do alimentador no plano $1/\eta'$	168
5.3	Diagrama de radiação do alimentador em 3D	168
5.4	Caso A: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$	169
5.5	Caso A: Direções de reflexão da solução inicial no plano $1/\zeta''$	169
5.6	Caso A: Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$	170
5.7	Caso A: Direções de reflexão da superfície modelada plano $1/\zeta''$	171
5.8	Caso A: Traçado de raios da superfície modelada plano $zx$	171
5.9	Caso A: Diagrama de radiação no plano de simetria	172
5.10	Caso A: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 0,9GHz	173
5.11	Caso A: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 1,8GHz	173
5.12	Caso A: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 7,2GHz	173
5.13	Caso B: Traçado de raios da solução inicial no plano de simetria	174
5.14	Caso B: Direções de reflexão da superfície inicial plano $1/\zeta''$	175
5.15	Caso B.I: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	176
5.16	Caso B.I: Traçado de raios no plano de simetria	176
5.17	Caso B.I: Diagrama de radiação da plano de simetria	177
5.18	Caso B.II: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	178
5.19	Caso B.II: Traçado de raios no plano de simetria	178
5.20	Caso B.II: Diagrama de radiação da plano de simetria	179
5.21	Caso B.III: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	180
5.22	Caso B.III: Traçado de raios no plano de simetria	180
5.23	Caso B.III: Diagrama de radiação da plano de simetria	181
5.24	Caso B.IV: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	182
5.25	Caso B.IV: Traçado de raios no plano de simetria	182
5.26	Caso B.IV: Diagrama de radiação da plano de simetria	183
5.27	Caso B.V: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	184
5.28	Caso B.V: Traçado de raios no plano de simetria	184
5.29	Caso B.V: Diagrama de radiação da plano de simetria	185
5.30	Caso B.VI: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$	186
5.31	Caso B.VI: Traçado de raios no plano de simetria	186
5.32	Caso B.VI: Diagrama de radiação da plano de simetria	187
5.33	Caso B.I: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda	188
5.34	Caso B.II: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda	188
5.35	Caso B.III: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda	188
5.36	Caso B.IV: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda	189
5.37	Caso B.V: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda	189



5.38	Caso B.VI: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na borda . . . . .	189
5.39	Caso B.I: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	190
5.40	Caso B.II: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	190
5.41	Caso B.III: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	190
5.42	Caso B.IV: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	191
5.43	Caso B.V: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	191
5.44	Caso B.VI: Direções no plano $1/\zeta''$ com destaque na centro . . . . .	191
5.45	Caso B.I: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	193
5.46	Caso B.II: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	193
5.47	Caso B.III: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	194
5.48	Caso B.IV: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	194
5.49	Caso B.V: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	195
5.50	Caso B.VI: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère .	195
5.51	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ . . . . .	196
5.52	Caso C: Direções de reflexão da solução inicial no plano $1/\zeta''$ . . . . .	197
5.53	Caso C: Traçado de raios na solução inicial no plano de simetria . .	198
5.54	Caso C.I: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	198
5.55	Caso C.I: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	199
5.56	Caso C.I: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	199
5.57	Caso C.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	200
5.58	Caso C.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	200
5.59	Caso C.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	200
5.60	Caso C.II: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	201
5.61	Caso C.II: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	202
5.62	Caso C.II: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	202
5.63	Caso C.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	203
5.64	Caso C.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	203
5.65	Caso C.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	203
5.66	Caso D: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ . .	204
5.67	Caso D.I: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	205
5.68	Caso D.I: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	206
5.69	Caso D.I: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	206
5.70	Caso D.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	207
5.71	Caso D.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	207
5.72	Caso D.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	207
5.73	Caso D.II: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	208
5.74	Caso D.II: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	209
5.75	Caso D.II: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	209
5.76	Caso D.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	210
5.77	Caso D.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	210
5.78	Caso D.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	210
5.79	Caso E.I: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	211
5.80	Caso E.I: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	212
5.81	Caso E.I: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	212
5.82	Caso E.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	213
5.83	Caso E.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	213
5.84	Caso E.I: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	213
5.85	Caso E.II: Traçado de raios no plano de simetria . . . . .	214

5.86	Caso E.II: Direções de reflexão no plano $1/\zeta''$ . . . . .	215
5.87	Caso E.II: Diagrama de radiação da plano de simetria . . . . .	215
5.88	Caso E.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 28GHz . . . . .	216
5.89	Caso E.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 38GHz . . . . .	216
5.90	Caso E.II: Diagrama de radiação no plano $uv$ em 60GHz . . . . .	216
A.1	Projeção Estereográfica . . . . .	231
A.2	Representação das direções de incidência e reflexão na esfera de raio unitário . . . . .	234

## Lista de tabelas

1.1	Ocupação do espectro pelas tecnologias de telefonia móvel celular .	18
2.1	Parâmetros das antenas OADC com diagrama setorial uniforme . .	55
2.2	Parâmetros das antenas OADE com diagrama setorial uniforme . .	68
2.3	Parâmetros das antenas OADE com diagrama setorial uniforme . .	78
2.4	Parâmetros das antenas OADE com diagrama cossecante ao quadrado	89
2.5	Valor do $E_{rms}(\lambda)$ considerando $N = 25$ e diagrama de radiação objetivo uniforme (casos da Seção 2.4.1) . . . . .	101
2.6	Valor do $E_{rms}(\lambda)$ considerando $N = 25$ e diagrama de radiação objetivo cossecante ao quadrado (casos da Seção 2.4.2) . . . . .	101
2.7	Volume das antenas em $10^3 \lambda^3$ . . . . .	102

*O esforço é grande e o homem é pequeno.  
Eu, Diogo Cão, navegador, deixei  
Este padrão ao pé do areal moreno  
E para diante naveguei.*

*A alma é divina e a obra é imperfeita.  
Este padrão sinala ao vento e aos céus  
Que, da obra ousada, é minha a parte feita:  
O por-fazer é só com Deus.*

*E ao imenso e possível oceano  
Ensinam estas Quinas, que aqui vês,  
Que o mar com fim será grego ou romano:  
O mar sem fim é português.*

*E a Cruz ao alto diz que o que me há na alma  
E faz a febre em mim de navegar  
Só encontrará de Deus na eterna calma  
O porto sempre por achar.*

**Fernando Pessoa.**

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Contextualização do Problema

Inspirado em conceitos da óptica conhecidos desde a antiguidade clássica, os refletores parabólicos metálicos começaram a ser empregados em sistemas telescópios apenas no final do século XVII. Algumas geometrias específicas, como a Cassegrain e a Gregorian, têm nomes dos tipos análogos aos telescópios inventados pelos astrônomos. A primeira antena refletora parabólica da história foi construída em 1888 pelo físico alemão Heinrich Hertz [1]. O refletor era feito de chapa de metal de zinco, tinha uma abertura de 1,2 metros de largura, distância focal de 0,12 metros e operava em 450 MHz. Hertz demonstrou com sucesso a existência das ondas eletromagnéticas, fato que havia sido previsto por James Clerk Maxwell anos antes [2].

Na segunda metade do século passado, auge da Guerra Fria, as tecnologias comunicação via satélites apresentaram grandes desenvolvimentos. O primeiro grande passo foi dado em outubro de 1957, quando a extinta União Soviética colocou em órbita o Sputnik 1, primeiro satélite artificial operando em baixa órbita para transmissão sinais em HF (*High Frequency* – 3 a 30 MHz). Desde então, deu-se um progressivo desenvolvimento em diversos campos importantes para esta nova forma de comunicação, tais como, tecnologia de transistores, circuitos de micro-ondas e antenas refletoras.

Com a larga expansão dos serviços de telecomunicações na segunda metade do século passado, o espectro tornou-se um recurso extremamente concorrido entre os prestadores de serviços, ficando evidente a necessidade de maior eficiência no uso deste bem que é escasso e finito. Nesta direção, inúmeras faixas de frequências passaram a ser utilizadas pelos operadores simultaneamente, gerando problemas de interferência entre estações que operam no mesmo canal, a interferência co-canal, além das interferências provenientes dos serviços alocados nas bandas adjacentes. Muito se fez no que concerne à mitigação de interferência produzida por canais adjacentes, sendo desenvolvidos filtros cada vez mais seletivos e possibilitando maior eficiência no aproveitamento das faixas destinadas a cada serviço.

Pensando na interferência co-canal, alguns artifícios podem ser empregados para minimizar o problema. A opção mais simples é reduzir a EIRP (*Effective Isotropically Radiated Power*) do sistema e, conseqüentemente, re-

duzir a região de cobertura. Além de pouco eficiente, esta técnica, na maioria dos casos, gera dificuldade de recepção pelo usuário e perda na qualidade do serviço prestado. Outra possibilidade é aumentar a distância de reuso, usando as perdas de propagação, do espaço livre e as causadas pelo relevo, para isolar sinais que operam em um mesmo canal simultaneamente. O preço a ser pago, é a perda de eficiência no uso do espectro, quanto maior a distância de reuso maior será a ineficiência no uso de determinada faixa de frequência. Uma alternativa mais efetiva é projetar adequadamente o sistema irradiante, utilizando antenas que concentrem a energia nas regiões a serem cobertas e minimizando nas demais.

Tratando, em particular, da telefonia móvel celular, a popularização de *tables* e *smartphones* com telas cada vez maiores tem gerado demanda por vídeos em alta definição, baixa latência em videoconferências e aplicações multimídia que envolvem transferências de grandes quantidade de dados. Este crescente interesse por altas taxas de transmissão está se tornando um desafio para os provedores de serviço. Atualmente, as operadoras contam com apenas algumas faixas do espectro entre 700MHz e 2,6GHz que, juntas, totalizam menos de 780MHz de banda, como pode ser verificado na Tabela 1.1 [3]. Para atender ao volume de tráfego de dados previsto para os próximos anos é fundamental que a próxima geração de telefonia móvel opere em outras faixas de frequência com maior disponibilidade de banda [4].

Banda	Uplink (MHz)	Downlink(MHz)
700MHz	746–763	776–793
AWS	1710–1775	2110–2155
IMT Extension	2500–2570	2620–2690
GSM 900	880–915	925–960
UMTS Core	1920–1980	2110–2170
GSM 1800	1710–1785	1805–1880
PCS 1900	1850–1910	1930–1990
Cellular 850	824–849	869–894
Digital	470–854	

Tabela 1.1: Ocupação do espectro pelas tecnologias de telefonia móvel celular

Pesquisas recentes tem sugerido que algumas faixas de frequência em ondas milimétricas são uma alternativa viável para a próxima geração de telefonia celular (5G) [4], [5], [6] e [7]. Em [5] e [7] são apresentadas medidas em ambiente urbano para canal banda larga celular e ponto-a-ponto nas faixas de 28GHz, 38GHz e 60GHz. No sistema irradiante foram utilizadas antenas direcionais com ganhos de 15dBi ou 25dBi e ângulo de abertura de 30° ou 8°, respectivamente. Em [6] são apresentados os resultados de uma extensa campanha de medidas realizada em Nova York considerando as faixas de

28GHz e 38GHz para comunicação móvel celular e adotando antenas diretivas. Além disto, tem-se considerando o uso de técnicas de processamento que fazem a modelagem adaptativa do diagrama de radiação de um conjunto de antenas [8]. É evidente que o maior desafio de se trabalhar nessas faixas de frequência é a grande atenuação imposta ao sinal pelo espaço livre (LOS—*line-of-sight*) e por obstáculos (NLOS—*non-line-of-sight*). Em células com menos de 1km de raio, a absorção atmosférica e a atenuação por chuva representam um efeito mínimo nas faixas consideradas [9], [10]. Em ondas milimétricas, uma alternativa para enfrentar este desafio são as antenas refletoras modeladas. Além de permitir altos ganhos e apresentar comportamento banda larga, a modelagem da superfície possibilita a otimização da cobertura e redução de interferências.

Durante as décadas de 1970 e 1980 inúmeros trabalhos exploraram técnicas para modelagem de antenas refletoras objetivando maximizar a diretividade, reduzir o nível dos lóbulos secundários, reduzir polarização cruzada nas configurações *offset* ou mesmo controlar a distribuição da energia em contornos genéricos. A aplicação destas técnicas possibilitou o desenvolvimento de antenas modeladas mais eficientes, proporcionando coberturas satelitais mais restritas ao contorno objetivo e minimizando possíveis interferências nas regiões adjacentes. Mais recentemente, uma técnica de síntese foi utilizada para a modelagem do refletor principal de antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional. Mostrou-se que o diagrama de radiação no plano vertical das antenas sintetizadas, além de proporcionar distribuição uniforme de potência na região objetivo da cobertura, pode evitar interferências nas adjacências.

Neste cenário, o presente trabalho aborda o desenvolvimento de novas técnicas para a modelagem de antenas refletoras baseadas em Óptica Geométrica (GO—*Geometrical Optics*), em particular com a adoção de seções cônicas ou superfícies quádricas confocais para representar a geratriz de uma superfície ou a própria superfície refletora, respectivamente. Alguns trabalhos recentemente publicados indicaram que esta prática leva a expressivas melhoras nos algoritmos de síntese. Busca-se com esta abordagem, menor erro na solução numérica dos problemas e melhor convergência para a solução, uma vez que estas funções representam mais adequadamente cada seção que compõe a superfície refletora. Neste trabalho, serão explorados métodos de síntese para duas geometrias: primeiramente para antenas duplo-refletoras axialmente simétricas com cobertura omnidirecional e em seguida as antenas refletoras *offset*, ambas com viabilidade de aplicação para a próxima geração de telefonia móvel celular.

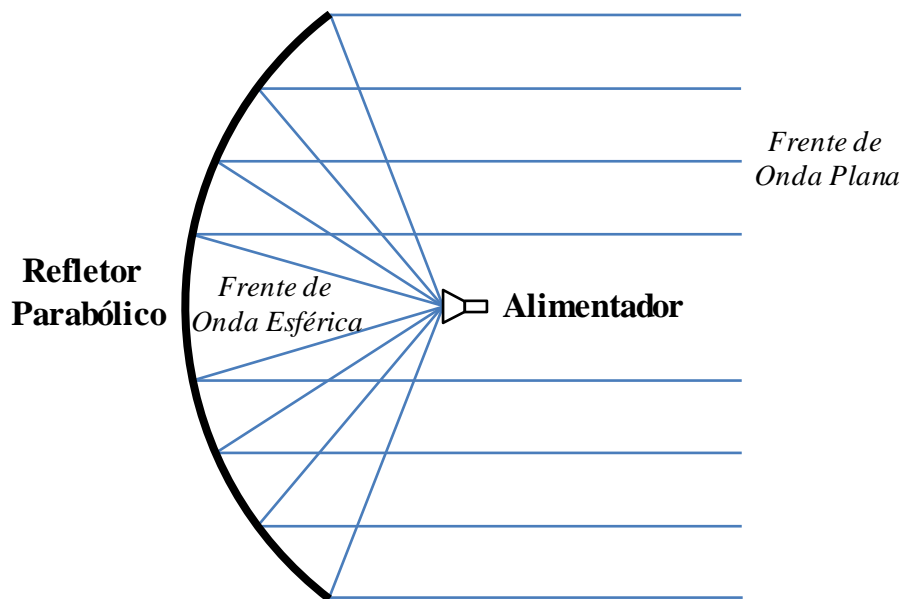


Figura 1.1: Antena com refletor parabólico alimentada por uma fonte pontual no foco

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O princípio básico que rege o funcionamento das antenas refletoras é a capacidade que algumas superfícies, especificamente aquelas em que a geratriz é uma parábola, têm de colimar a energia em uma direção, sendo capazes de proporcionar altas diretividades. As primeiras antenas refletoras eram compostas pelo alimentador e uma superfície refletora, que em geral era parabólica [11]. A escolha desta superfície em particular, se justifica pelas suas propriedades intrínsecas de reflexão, que transformam uma frente de onda esférica em uma frente de onda plana na abertura, como ilustrado na Figura 1.1. Idealmente, se considerarmos uma fonte pontual irradiando um campo linearmente polarizado, após a reflexão tem-se fase uniforme na abertura. Entretanto, em casos práticos, a uniformidade na fase não é atingida em função das próprias características do campo que ilumina o refletor, além do bloqueio na abertura imposto pelo alimentador e suas estruturas de sustentação. Não obstante, boas eficiências são alcançadas e, aliados à facilidade de fabricação e baixo custo, levaram essa classe de antenas refletoras a ocupar, quase que na totalidade, o mercado de enlaces terrestres na faixa de micro-ondas.

Algumas aplicações mais restritas, como antenas refletoras para radar, utilizam refletores modelados para obtenção de diagrama de radiação específicos. No início da década de 1940, um procedimento de modelagem do refletor baseado em GO foi apresentado em [12]. O método foi utilizado para síntese de refletores cilíndricos (observe a Figura 1.2), com um único raio de



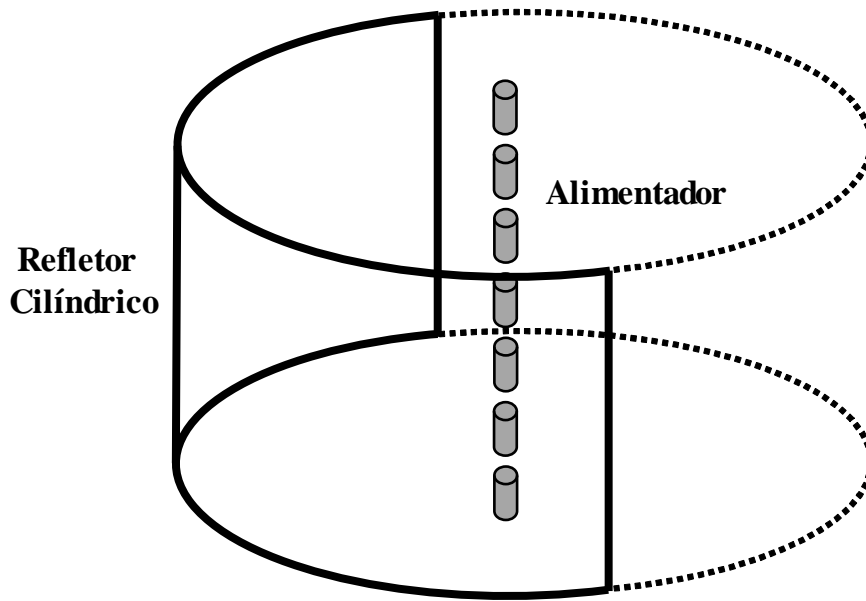


Figura 1.2: Antena com refletor cilíndrico alimentada por um conjunto de dipolos

curvatura, alimentados por um conjunto de dipolos em linha e refletores com dois raios de curvatura iluminados por uma fonte pontual. Em [13] e [14] a técnica introduzida por Chu foi utilizada para obter um diagrama de radiação cossecante ao quadrado no plano de elevação.

Assim como nas antenas de refletor único, o projeto das antenas duplo-refletores clássicas é baseado nas propriedades das cônicas confocais, combinando um dos focos de uma elipse ou hipérbole com o foco de uma parábola produzindo fase uniforme na abertura [15], [16]. Comparadas às antenas com um único refletor, estas apresentam como vantagens a facilidade de acesso ao alimentador, maior controle sobre os campos na abertura, menos ruído uma vez que o alimentador não fica apontado para o chão e maior eficiência. Em contrapartida, a complexidade de fabricação, em particular o alinhamento dos refletores, é muito maior, tornando o custo de fabricação menos atraente. Nas aplicações de comunicações via satélites onde antenas de alta eficiência são requeridas, as antenas duplo-refletores são largamente empregadas. Quatro diferentes configurações axialmente simétricas foram caracterizadas e amplamente estudadas em [17] e [18], são elas: ADC (*axis-displaced Cassegrain*) e ADG (*axis-displaced Gregorian*), ADH (*axis-displaced hyperbola*) e ADE (*axis-displace ellipse*).

Em meados da década de 1950, uma generalização desta técnica explorada em [17] e [18] foi apresentada em [19] e [20]. Baseado em GO, o método foi desenvolvido para a síntese de antenas duplo-refletores axialmente simétricas com distribuição de fase e amplitude arbitrários na abertura do refletor prin-

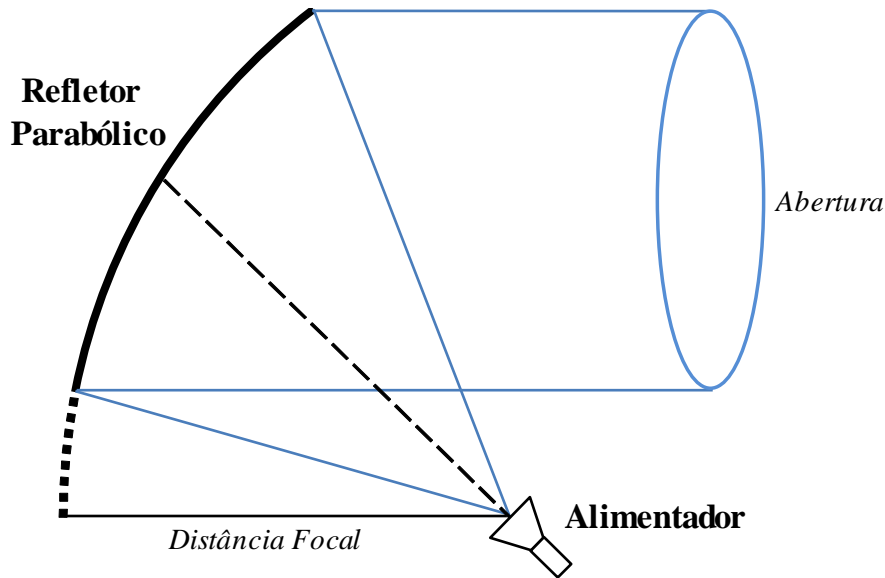


Figura 1.3: Geometria da antena *offset* com um refletor

cial. Utilizando três princípios ópticos básicos, Lei de Snell, Conservação da Energia e Teorema de Mallus [14], um par de equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem foi obtido e avaliado numericamente. Duas configurações de refletores, ADC e ADG foram projetadas para fase e amplitude uniformes na abertura obtendo-se 1% de bloqueio da abertura pelo subrefletor.

Outra possível geometria são as antenas refletoras *offset*, que também podem ter um único refletor ou ser duplo-refletores [21], [22]. A principal vantagem destas configurações é evitar o bloqueio da abertura, conforme ilustrado na Figura 1.3. Estas geometrias assimétricas representam um grande avanço, comparadas às geometrias com simetria, pois evitam espalhamento eletromagnético causado pelo alimentador ou subrefletor e suas respectivas estruturas de sustentação, minimizando o nível de lóbulos secundários e aumentando a eficiência do sistema. Outro aspecto positivo é conseguir isolar a estrutura de alimentação da energia refletida na região central da superfície refletora, minimizando a perda de retorno do alimentador [21]. Em contrapartida, a grande desvantagem dos sistemas *offset* reside na complexidade e custos de implementação da estrutura mecânica de sustentação dos refletores e alimentador [23]. Com relação ao comportamento eletromagnético, o principal ponto negativo é gerar polarização cruzada quando alimentada por uma fonte com polarização linear ou circular [24].

Naturalmente, a solução imediata para o projeto de antenas refletoras *offset* é o uso de superfícies quádricas confocais [25]. Entretanto, a rotação na polarização impostas pela geometria torna-se um grande inconveniente quando a aplicação exige baixos níveis polarização cruzada. Na segunda metade da

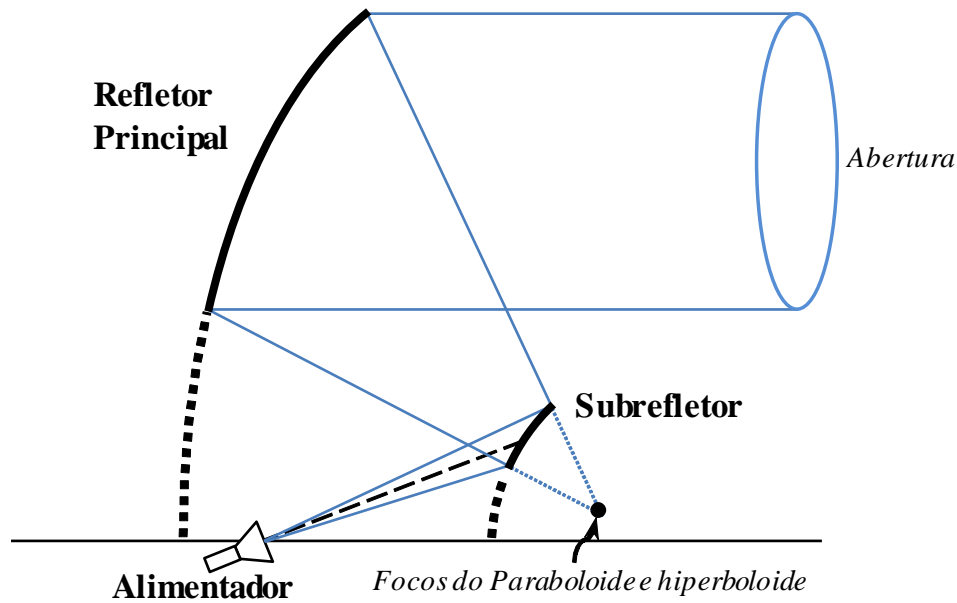


Figura 1.4: Geometria da antena *offset* duplo-refletora

década de 1970, foi demonstrado em [26] e [27] que uma antena duplo-refletora *offset* pode ser projetada de tal forma que, quando alimentada por uma fonte linearmente polarizada, a despolarização decorrente da assimetria dos refletores pode ser largamente reduzida, proporcionando baixo nível de polarização cruzada. O princípio utilizado consiste em obter uma condição em que ocorra o casamento do campo espalhado do subrefletor com o do refletor principal. Nesta condição a componente de polarização cruzada na abertura causada pela assimetria do refletor principal pode ser compensada pela assimetria do subrefletor, desde que, sejam utilizados determinados ângulos de rotação no alimentador. Do ponto de vista da GO, pode-se mostrar que o perfeito casamento é atingido quando a condição de Mizugutch é respeitada e, nestes casos, círculos concêntricos no alimentador são mapeados em círculos concêntricos na abertura da antena [28].

### 1.2.1

#### Síntese Aproximada de Antenas Refletores Offset

Considerando a geometria duplo-refletora *offset* ilustrada na Figura 1.4 e com uma abordagem matemática similar à adotada em [19] e [20], um par de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem pode ser obtido e solucionado de forma aproximada para fase uniforme na abertura [29], [30]. Em [29] é apresentado um método aproximado para obter controle de fase e amplitude em uma abertura aproximadamente circular. A técnica utiliza o mesmo conceito empregado em [31], onde é mostrado que a maior parte da

redistribuição da energia em sistemas duplo-refletores circularmente simétricos é realizada pelo subrefletor. No primeiro passo, o par de equações diferenciais é resolvido levando a refletores com erros de fase e distribuição de energia. Esta solução é alcançada assumindo uma função de mapeamento, que rigorosamente é desconhecida, e impondo um perímetro pré-especificado para a abertura. No segundo passo, mantendo-se o subrefletor, um novo refletor principal é sintetizado. Nesta solução, a distribuição de fase requerida *a priori* é exata, enquanto que a distribuição de energia é aproximada. Apesar do perímetro da abertura sintetizada ser aproximado do especificado, testes baseados em GO mostraram que existem pequenos erros. Utilizando este conceito, em [32] é apresentada uma antena duplo-refletora *offset* com diâmetro de  $157,10\lambda$  projetada, construída e medida, atingindo eficiência de 84,5%. A existência de solução para essa classe de equações diferenciais de fato nunca foi provada, causando grande controvérsia entre os autores. Para existência de solução, é necessário que as equações diferenciais formem um diferencial total. Em [29] e [30] é apontado que, em geral, esta solução não existe para uma distribuição arbitrária de amplitude e fase na abertura. Entretanto, também é mostrado que para muitos casos importantes as equações diferenciais parciais são muito próximas de um diferencial total, tornando a função de mapeamento utilizada uma boa aproximação.

Com uma abordagem um pouco diferente, e mais uma vez utilizando os conceitos da GO aplicados em [19] e [20], em [33] é apresentada uma técnica aproximada para a síntese de antenas duplo-refletores *offset* com fase uniforme na abertura. A primeira aproximação é feita na imposição da conservação da energia ao longo de um tubo de raios. Como já mencionado, a função de mapeamento é desconhecida, e as superfícies refletoras são assimétricas. Entretanto, assumindo o prévio conhecimento desta função, e considerando ainda, a superfície circularmente simétrica, a solução do mapeamento é obtida numericamente. A segunda aproximação é feita impondo a Lei de Snell em apenas um dos refletores, neste caso no subrefletor, resultando num par de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem que definem a curvatura do subrefletor em cada ponto. Utilizando o conjunto de equações diferenciais obtido, impondo fase uniforme na abertura e assumindo a condição proposta em [27] para minimizar o erro de mapeamento causado pela assimetria dos refletores, um sistema duplo-refletor Gregorian foi sintetizado apresentando bons níveis de eficiência e baixa polarização cruzada.

### 1.2.2

#### Síntese Rigorosa de Antenas Refletoras Offset

Como alternativa às técnicas de síntese geométrica discutidas na seção anterior, é apresentado em [34] uma análise matemática rigorosa para o problema de síntese de antenas refletoras *offset* com um único refletor e contorno da abertura geral. A primeira inovação nesta abordagem é a utilização de variáveis paramétricas para representar as direções no espaço, substituindo expressões trigonométricas por algébricas, levando à grandes simplificações nas expressões. Nesta abordagem a Lei de Snell é aplicada na equação de conservação da energia resultando em uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère elíptica ou hiperbólica, que representa fisicamente a transformação da densidade de potência contida em um tubo de raios.

Com a abordagem proposta em [34] e utilizando cálculo tensorial, em [35], as mesmas expressões são obtidas para a síntese de uma superfície refletora iluminada por uma fonte pontual. A solução numérica da equação de Monge-Ampère é apresentada em [36] para o caso elíptico, e em [37] e [38] para o caso hiperbólico, onde uma antena com um refletor *offset* é projetada para o perímetro circular na região de campo distante. O algoritmo desenvolvido constitui-se de um procedimento iterativo em que aproximações baseadas em diferenças finitas são aplicadas a uma forma linearizada de um operador diferencial.

Em [39], os mesmos problemas explorados em [34]–[38] são abordados utilizando coordenadas complexas, e unificados em uma única equação diferencial de Monge-Ampère elíptica ou hiperbólica, dependendo do sinal. O novo sistema de coordenadas complexas é definido através de projeção estereográfica em uma esfera de raio unitário [40]. Com este novo formalismo, é mostrado que o mapeamento entre um raio incidente e refletido, pode ser qualquer transformação analítica, em particular uma transformação analítica conformal nos casos onde a distorção é uniforme.

Utilizando a notação desenvolvida em [39], em [41] são apresentadas as principais relações entre a distribuição de fase e densidade de potência proveniente de uma fonte pontual e o plano da abertura, considerando antenas refletoras *offset* com um único refletor e com dois refletores. É demonstrado que para os sistemas duplo-refletores, ambas as distribuições, fase e densidade de potência, podem ser alcançadas no plano da abertura sem as aproximações feitas em [29] e [30]. Além disto, verifica-se que a transformação da densidade de potência em tubo de raios também é representada por uma equação do tipo Monge-Ampère. Particularizando a solução para o caso de simetria axial,

duas equações diferenciais ordinárias são obtidas e avaliadas com as mesmas condições iniciais assumidas em [20].

Para atender a necessidade de uso eficiente do espectro nos sistemas de comunicação via satélites, quatro condições são buscadas: antenas com baixo nível de polarização cruzada para operação de dois sinais com polarizações ortogonais, aberturas não circulares para iluminação eficiente da região a ser coberta, fase uniforme na abertura para maximizar o ganho e controle da distribuição de densidade de potência na abertura para controlar o nível de lóbulo secundário. Buscando atender estas condições, em [42] é explorada uma técnica inicialmente proposta em [43]. Utilizando coordenadas complexas, é demonstrado que a equação diferencial parcial não linear de primeira ordem numericamente avaliada em [43] pode ser, de fato, resolvida analiticamente. Além disto, mostra-se que para o caso de fase uniforme na abertura, a condição para polarização cruzada nula implica que o sistema tenha necessariamente um plano de simetria. Em [44] o problema é novamente examinado, concluindo-se que, em princípio a modelagem pode compensar não somente a assimetria dos refletores, mas também assimetrias provenientes do diagrama de radiação do alimentador.

Utilizando a formulação proposta em [41], em [45] o problema de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* é particularizado para uma abertura circular e fase uniforme. A formulação matemática exata é apresentada, e novamente uma equação diferencial parcial do tipo Monge-Ampère é avaliada utilizando uma adaptação da técnica desenvolvida para sistemas com um único refletor [35]. Como solução, um conjunto de funções reais associadas ao refletor principal é obtido, conforme ilustrado na Figura 1.5. A escolha da solução mais apropriada é feita pela escolha de uma constante que define a distância ao ponto central do refletor. Em [46] a formulação é particularizada para sistemas duplo-refletores com fase uniforme e abertura elíptica.

Um aspecto bastante controverso e pouco significativo para o projeto de antenas refletoras *offset* modeladas é a existência de solução para a equação de Monge-Ampère e a unicidade desta solução. É bem verdade que nunca foi provado matematicamente que a solução exista para uma abertura com geometria geral. Entretanto, diversos trabalhos, entre eles [47], [48] e [49], demonstraram através de resultados numéricos a existência de solução para vários contornos de abertura. Em [50], além da tradicional abertura circular, diversos outro tipos de aberturas com geométricas elípticas e modeladas foram amplamente estudadas e sintetizadas com sucesso. Para validação do método, resultados de análise difrativa foram apresentados para as antenas sintetizadas. Com relação à unicidade da solução, de fato não se pode garantir que ao mudar

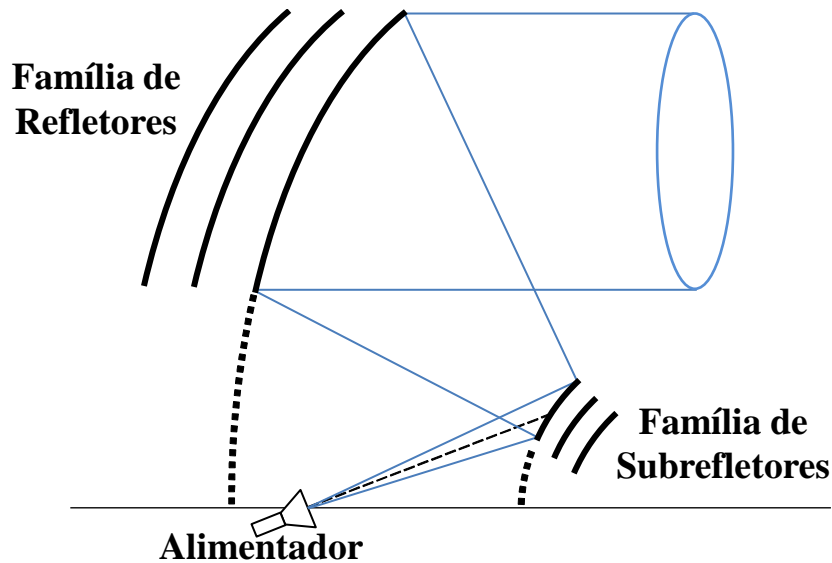


Figura 1.5: Conjunto de soluções para a antena *offset* duplo-refletora

a solução inicial do problema ter-se-á a mesma resposta inicialmente obtida.

Com uma abordagem matemática e sem aplicação prática, em [51] é estabelecida a existência de solução para a equação de Monge-Ampère em certos termos, matematicamente conceituados como “soluções fracas”. Em [52], utilizando abordagem similar à proposta em [51], um novo método de síntese rigorosa é apresentado. A técnica utiliza uma coleção de elipsoides confocais para compor a superfície refletora modelada. Para a solução do mapeamento, é desenvolvido um algoritmo iterativo para solução do problema de redistribuição da energia na forma integral, obtendo-se a energia referente a cada uma das elipses que compõem a superfície em vez de avaliar a equação diferencial de Monge-Ampère numericamente. Outra abordagem alternativa para a síntese geométrica de sistemas duplo-refletores é explorada em [53] e [54] onde a redistribuição da energia é formulada e resolvida como um problema de transferência de massa de Monge-Kantorovich.

### 1.2.3

#### Síntese de Antenas Refletoras Utilizando Seções Cônicas

Em [55] um novo procedimento para a síntese de antenas duplo-refletoras circularmente simétricas é apresentado. Nesta abordagem, as geratrizes do sub-refletor e do refletor principal são descritas por um conjunto seções de cônicas sequencialmente concatenadas tendo como objetivo prover, na abertura, fase uniforme e distribuição de amplitude especificada a priori. Para representação das cônicas, utilizou-se um sistema de coordenadas cartesianas, recaindo em uma equação algébrica não linear e sendo aproximada para prover uma solução

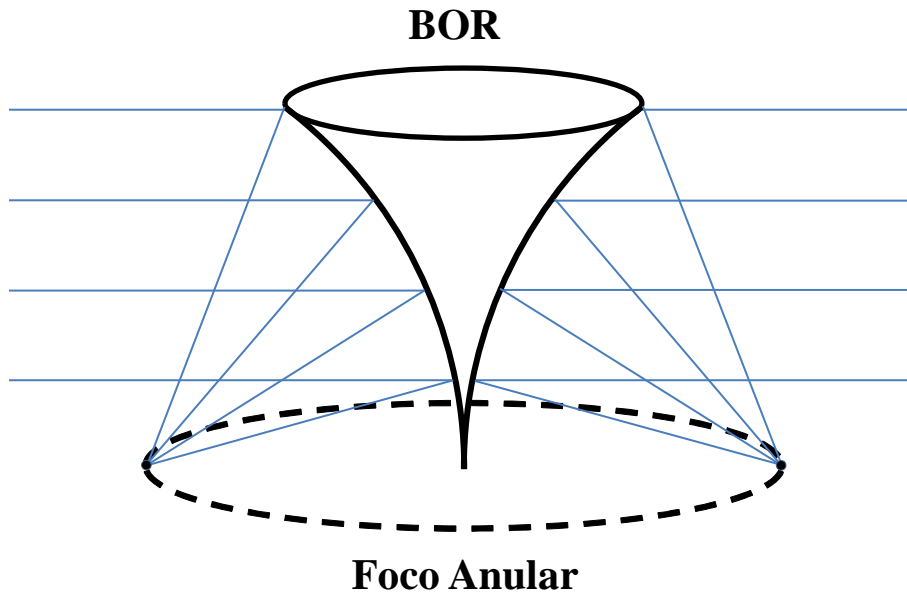


Figura 1.6: Antena refletora omnidirecional com foco anular

iterativa com um único passo. A formulação foi aperfeiçoada em [56] e [57], com a utilização de um sistema de coordenadas polar para descrever cada cônica. Além disso, o conceito foi expandido a outras configurações duplo-refletoras circularmente simétricas. A técnica de síntese foi comparada ao tradicional método de síntese baseado na integração numérica de uma equação diferencial ordinária e foi verificado que a convergência ocorre com menos iterações. Uma extensão do método para antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional é apresentada em [58], sendo obtida mais uma vez, distribuição de fase uniforme, porém agora para uma abertura cilíndrica.

#### 1.2.4

#### Síntese de Antenas Refletoras Omnidirecionais

O problema de se obter alta diretividade no plano vertical do diagrama de radiação de antenas com cobertura omnidirecional, por muito tempo foi solucionado somente através do uso de dipolos verticalmente empilhados. A desvantagem desta abordagem reside, sobretudo, na estreita faixa de operação obtida em função da dificuldade de controlar os efeitos do acoplamento mútuo entre os dipolos. Em [59], uma nova visão para o problema foi apresentada utilizando corpo de revolução (BOR—*Body of Revolution*), como ilustrado na Figura 1.6. O sistema foi composto por uma superfície refletora, cuja geratriz é uma parábola, e um complexo sistema de alimentação em forma de anel, que foi projetado e construído para operar da faixa de 1GHz. Mais tarde, uma geometria similar foi proposta em [60] utilizando como alimentador uma



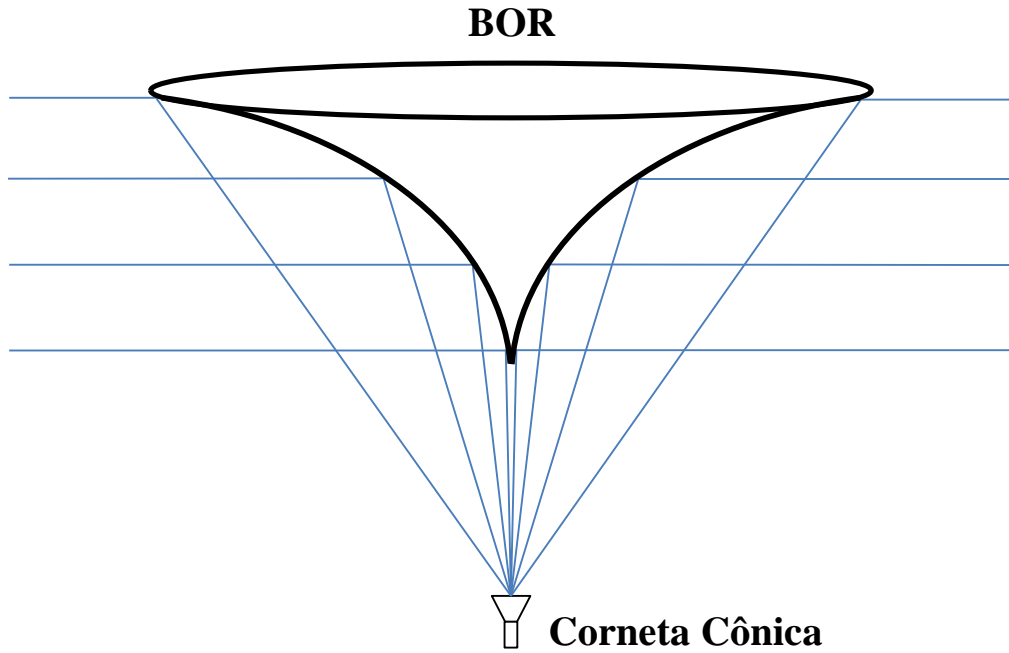


Figura 1.7: Antena refletora omnidirecional com foco pontual

corneta cônica no foco da parábola geratriz, como mostra a Figura 1.7.

Uma nova proposta de geometria para as antenas refletoras omnidirecionais foi introduzida em [61]. O sistema foi composto por dois refletores axialmente simétricos, sendo a geratriz do subrefletor uma parábola e o refletor principal uma superfície modelada, como ilustrado Figura 1.8. Além disto, utilizando princípios da GO e impondo a conservação da energia, foi proposto um método para a modelagem do refletor principal tendo como função objetivo o diagrama de radiação no plano vertical na região de campo distante. Alimentando o sistema com o modo  $TM_{01}$  de uma abertura circular e assumindo um setor angular constante como função objetivo, um protótipo foi projetado, construído e analisado através do método da Indução por Imagem [62]. Uma geometria similar foi apresentada em [63]. A principal diferença em relação à proposta por Norris é o refletor principal cônico ao invés de modelado, além da alimentação feita pelo modo TEM de uma corneta coaxial.

A síntese de antenas duplo-refletoras clássicas, aquelas cujas geratrizes são cônicas confocais, com cobertura omnidirecional foi amplamente explorada em [64]. Neste trabalho, parábolas, elipses e hipérboles foram combinadas de formas distintas gerando quatro configurações de refletores axialmente simétricas: OADC (*omnidirectional axis-displaced Cassegrain*) e OADG (*omnidirectional axis-displaced Gregorian*), OADH (*omnidirectional axis-displaced hyperbola*) e OADE (*omnidirectional axis-displaced ellipse*). Além disto, foi apresentada a formulação fechada para a obtenção das geratrizes bem como

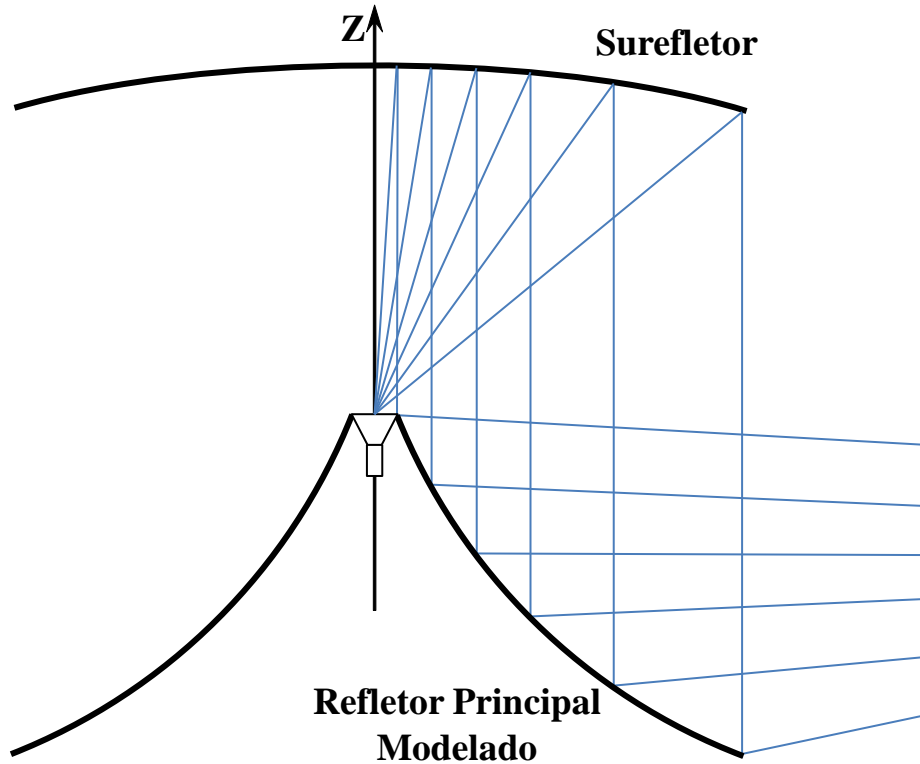


Figura 1.8: Antena omnidirecional duplo-refletora

um estudo paramétrico das dimensões de projeto que proporcionam as estruturas mais compactas. Em [65], a formulação foi generalizada através de uma notação vetorial aplicável a todas as configurações de refletores, além de tornar arbitrária a direção do feixe no plano de elevação.

Utilizando uma abordagem similar à descrita em [20], em [66] é proposta uma nova metodologia para a síntese de antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional com fase uniforme na abertura e distribuição de amplitude pré-especificada. A grande diferença no tratamento do problema em relação à [20] é a imposição direta do princípio de Fermat [14], ao invés da aplicação da Lei de Snell. Duas configurações, OADC e OADE, são sintetizadas e analisadas através solução da equação integral do campo elétrico pelo Método de Momentos (MoM—*Method of Moments*), amplamente documentados em [67], [68] e [69], e pelo Método da Abertura (ApM—*Aperture Method*) [70].

Em [71] e [72] é apresentado um método simples e eficiente para a síntese do refletor principal de antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional. Diferente de [61], aqui é utilizado como geratriz do subrefletor, seção de elipse com eixo deslocado ao invés de parábola, de forma a minimizar a perda de retorno da antena. Além disto, para prover uma distribuição uniforme de potência na região de cobertura, é utilizado como função objetivo um diagrama

de radiação cossecante ao quadrado [14], [73], [74]. Outro aspecto interessante da abordagem é a utilização das coordenadas complexas introduzidas em [39] para representação das direções, facilitando o desenvolvimento da formulação e, sobretudo, a imposição da Lei de Snell. Como estudos de casos, três antenas OADE são sintetizadas e analisadas através do MoM, apresentando resultados próximos do diagrama objetivo. Em [75] e [76] é projetada outra configuração axialmente simétrica, desta vez, a geratriz do subrefletor é uma hipérbole ao invés de elipse. Além disto, em [75] é feita uma análise do comportamento do diagrama de radiação em função da frequência, sendo verificada pouca variação no ganho máximo em 10% da banda de operação.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo avaliar o uso de cônicas e quádricas confocais na síntese geométrica de antenas refletoras. Para tal, foram desenvolvidos algoritmos computacionais, utilizando os princípios da GO, capazes de sintetizar as superfícies requeridas. Concentrado em duas frentes distintas, o presente estudo aborda a síntese de antenas duplo-refletoras circularmente simétricas com cobertura omnidirecional e a síntese de antenas refletoras *offset* com um único refletor.

A primeira proposta deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional, utilizando os princípios da GO e seções de cônicas, capaz de sintetizar o refletor principal de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional cujo diagrama de radiação no plano vertical é uma função geral. Além disto, estabelecer uma comparação com os métodos conhecidos e avaliar as vantagens desta abordagem para o problema. Como estudos de casos, são sintetizadas antenas com diferentes configurações de refletores (OADC e OADE), posição da cáustica (real ou virtual) e diagrama de radiação objetivo (setorial e cossecante ao quadrado). Para validação do método, é utilizado um método de análise que utiliza o Método de Casamento de Modos (MMT – *Mode Matching Technique*), amplamente documentado em [77], [78], [79], para representar os campos no interior do alimentador e o MoM para solucionar as equações integrais para os campos elétrico e magnético [67], [68] e [69].

Apesar de a síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* baseada na equação de Monge-Ampère ter sido amplamente estudada durante quase duas décadas [34]–[50], o problema de aumento exponencial do erro de discretização na região central das grades polares ainda é um dos inconvenientes do método. Este erro ocorre em virtude do procedimento numérico empregado ser baseado em diferenças finitas, levando a erros de truncamento nas derivadas parciais

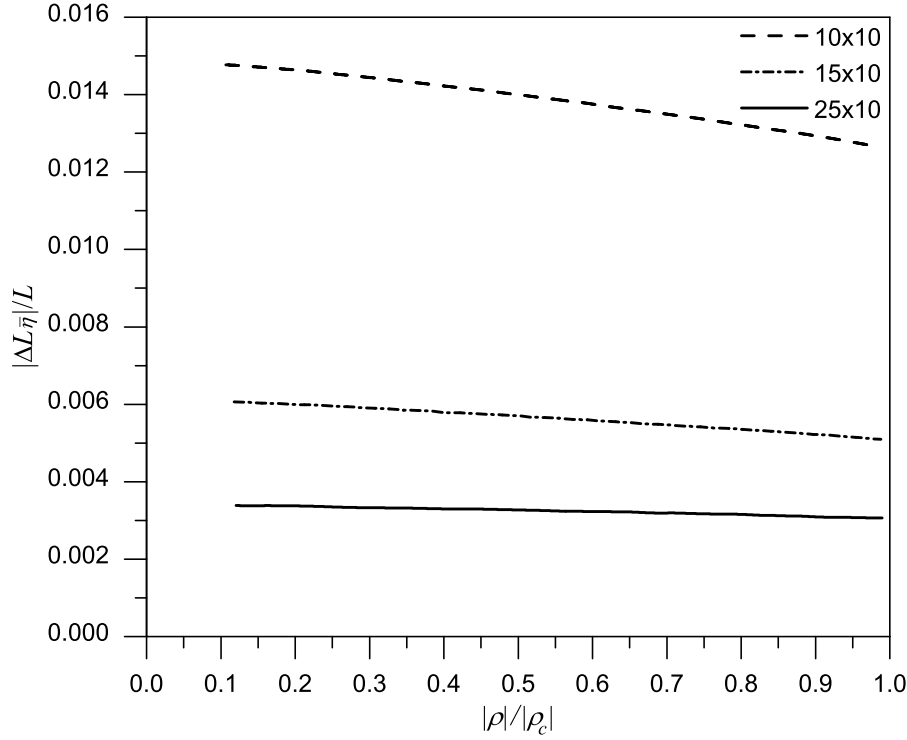


Figura 1.9: Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da  $L_{\bar{\eta}}$  no plano  $\phi = 90^\circ$

de primeira e segunda ordem que são proporcionais à  $1/\rho$  ou  $1/\rho^2$ , respectivamente, onde  $\rho$  é o raio da grade polar. Como consequência, o erro na distribuição de fase e amplitude na região central da grade é maior do que nas bordas. Para ilustrar o problema, em [50] é apresentada uma comparação entre as expressões exatas obtidas para um sistema confocal com solução analítica e as aproximações por diferenças finitas. Na Figura 1.9 é mostrado o erro de truncamento apresentado pela derivada da função  $L$ , que é proporcional a  $1/\rho$ , para considerando grades com 10 anéis e 10 radiais ( $10 \times 10$ ), 15 anéis e 10 radiais ( $15 \times 10$ ) e 20 anéis e 10 radiais ( $20 \times 10$ ). Nas Figuras 1.10 e 1.11 são apresentados os erros das derivadas de segunda ordem que são proporcionais a  $1/\rho^2$ , ficando claro que nestes casos o problema é ainda mais evidente. A Figura 1.12 mostra-se uma comparação entre a distribuição de amplitude exata e a aproximada para diferentes grades, mostrando mais uma vez que o erro numérico aumenta consideravelmente no centro da grade [50].

A técnica de solução numérica da Equação de Monge-Ampere proposta no presente trabalho utiliza superfície quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície refletora modelada. O principal objetivo desta proposta é reduzir o erro de discretização na região central de uma grade polar e tornar o método mais flexível para ser utilizado em outros tipos de grade. Ao utilizar as quádricas confocais, o erro de discretização

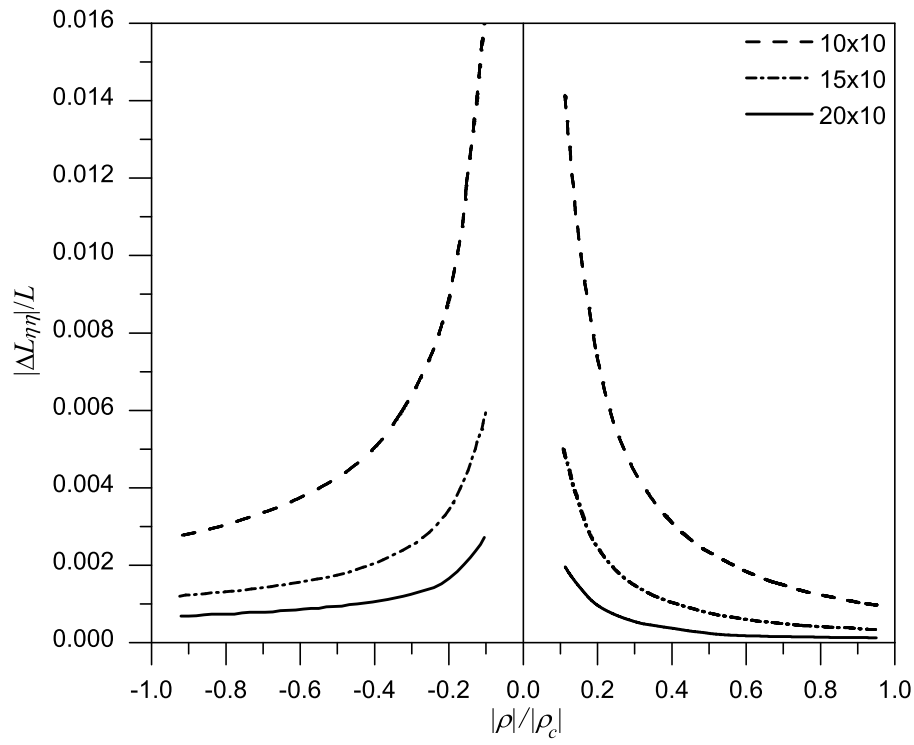


Figura 1.10: Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da  $L_{\eta\eta}$  no plano  $\phi = 0^\circ$

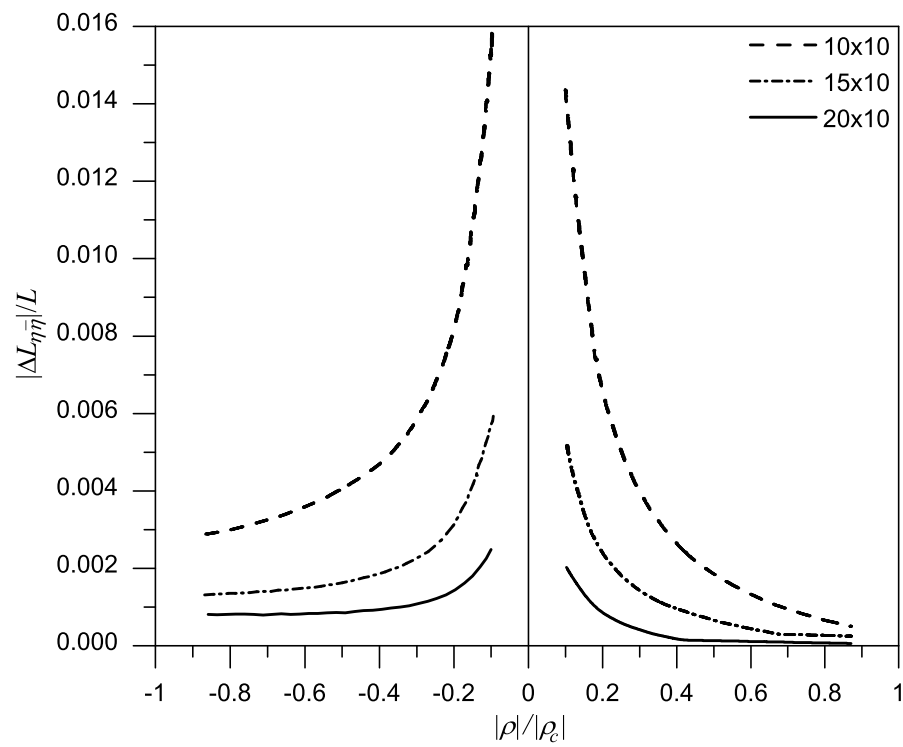


Figura 1.11: Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da  $L_{\eta\bar{\eta}}$  no plano  $\phi = 0^\circ$

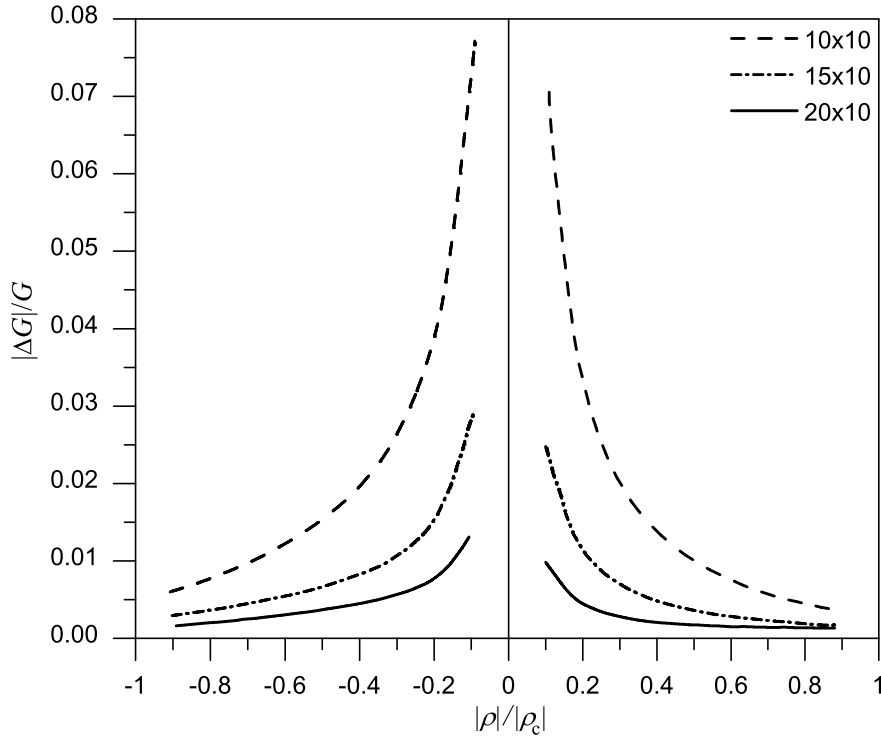


Figura 1.12: Comparação entre o valor exato e o aproximado por diferenças finitas da distribuição de amplitude na abertura ( $G$ ) no plano  $\phi = 0^\circ$

das derivadas não ocorre, uma vez que se tem a expressão analítica para a função de mapeamento local e suas derivadas, sendo necessário determinar os parâmetros que definem cada quádrlica. Como a técnica numérica utilizada é fundamentada em um algoritmo iterativo que utiliza o resíduo de um operador para corrigir a solução anterior e obter a próxima, espera-se, com essa nova representação, que a convergência para a solução ocorra com menos iterações, de forma análoga ao ocorrido na síntese de antenas duplo-refletoras circularmente simétricas [57], [58].

## 1.4

### Organização do Trabalho

O presente trabalho aborda o emprego de seções cônicas para a síntese de superfícies refletoras em duas diferentes geometrias: antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional e antenas com um refletor *offset*. Dois algoritmos foram implementados e os resultados, bem como as respectivas formulações estão organizados conforme descrito a seguir. Inicialmente o trabalho trata do problema com menor grau de complexidade onde existe simetria circular. A presença desta simetria conduz à solução do problema a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, diferente do caso sem simetria onde uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem precisa ser

avaliada.

No Capítulo 2 são apresentadas duas metodologias para a síntese do refletor principal de antenas duplo-refletoras axialmente simétricas com cobertura omnidirecional. Na Seção 2.3 é descrita a formulação que utiliza seções de cônicas confocais sequencialmente concatenadas para compor a geratriz do refletor principal, e em seguida tem-se a particularização, quando a geratriz é composta exclusivamente por seções de parábolas. Na Seção 2.4 diversos estudos de casos são abordados, entre eles as configurações OADE e OADC onde o refletor principal é modelado para o diagrama de radiação no plano ser cossecante ao quadrado e também constante em uma seção angular. Além disto, é feito um estudo de erro comparando os métodos apresentados na Seção 2.3 com o método descrito em [71]. Por fim, na Seção 2.5 são feitas as conclusões parciais sobre o emprego de cônicas para síntese de refletores circularmente simétricos.

No Capítulo 3, é descrito o problema de síntese rigorosa de antenas refletoras *offset*, no qual deseja-se obter uma superfície refletora capaz de produzir o diagrama de radiação arbitrário na região de campo distante, quando iluminada por uma fonte pontual. Antes de formular o problema é apresentada na Seção 3.2 a notação em coordenadas complexas utilizada para representar as direções dos raios incidente e refletido. Na Seção 3.3, a Lei de Snell é aplicada para relacionar as direções de incidência e reflexão, obtendo-se uma equação diferencial de primeira ordem. Em seguida, a Conservação da Energia é aplicada a um tubo elementar de raios levando a outra equação diferencial parcial que, combinada com a anterior, resulta em uma equação diferencial parcial de segunda ordem não-linear do tipo Monge-Ampère. Na Seção 3.4 é apresentada uma solução particular da equação de Monge-Ampère na forma de uma superfície quádrlica confocal e a expressão analítica para a densidade de potência na região de campo distante em função dos parâmetros que definem a superfície quádrlica e a densidade de potência do alimentador. No fim da seção é apresentado um estudo sobre relação de mapeamento de uma quádrlica nos planos complexos de incidência e reflexão.

No Capítulo 4 é apresentada a técnica numérica adotada para resolver a equação diferencial descrita no Capítulo 3 como um problema de contorno. Na formulação apresentada, assume-se que a superfície refletora pode ser localmente representada por um conjunto de superfícies quádrlicas confocais com eixos deslocados. Na seção 4.2 é apresentada a grade polar adotada na discretização da superfície refletora e os sistemas de coordenadas auxiliares. Utilizando resultados do Capítulo 3, na Seção 4.3 é obtido um operador não-linear associado à equação de Monge-Ampère em função dos parâmetros que

definem a quádrlica. Na Seção 4.5 é detalhada a formulação do procedimento numérico onde são apresentadas as expressões analíticas para a determinação das derivadas do operador. A sequência lógica de operações executadas pelo algoritmo iterativo de solução do operador é descrita na Seção 4.6

No Capítulo 5, são apresentados diversos estudos de casos para avaliar o algoritmo de síntese apresentado no Capítulo 4 e verificar se os resultados dados pelo algoritmo desenvolvido para solução da equação de Monge-Ampère são os esperados. São definidos os modelos cosseno elevado para o alimentador e gaussiano para o campo distante nas Seções 5.2 e 5.3, respectivamente. Na Seção 5.4 são apresentadas as condições de contorno utilizadas nos estudos de casos. Nas seções 5.5 a 5.6 e 5.7 são apresentados estudos de caso considerando o contorno objetivo circular, elíptico e super-elíptico. As superfícies refletoras modeladas são analisadas via aproximações da Ótica Física com correção das correntes de borda, considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz [80], [81], [82]. Também é apresentada uma série de estudos de caso com objetivo de avaliar o algoritmo em diversas situações, deste as de mais fácil convergência em que a diferença entre o diagrama de radiação inicial e objetivo é pequena às de maior dificuldade em que essa diferença é grande.

Por fim, no Capítulo 6 são sumarizadas as principais observações feitas para as duas geometrias estudadas e apresentadas as conclusões e propostas de continuidade da pesquisa.



**2.1****Introdução**

As antenas duplo-reletores com cobertura omnidirecional são compostas por duas superfícies de revolução (subrefletor e refletor principal) obtidas através da revolução de uma geratriz em torno do eixo de simetria  $z$ , conforme ilustra a Figura 2.1. Como são superfícies circularmente simétricas, pode trabalhar apenas com as geratrizes dos refletores. Nas configurações clássicas a geratriz do subrefletor é uma elipse ou hipérbole e a geratriz do refletor principal é uma parábola. Analisando o diagrama de radiação das antenas duplo-reletores clássicas (observe a Figura 2.2), constata-se que seu feixe diretivo, em alguns casos, pode não ser o mais adequado para prover cobertura. Por apresentar diagrama altamente diretivo, a região de cobertura fica restrita à uma pequena seção angular, podendo gerar regiões de sombra. Para melhorar o desempenho destas antenas, em [71] foi apresentado um método de síntese geométrica baseado na solução de uma equação diferencial ordinária com o objetivo de modelar o refletor principal para obter, na região de campo distante, um diagrama cossecante ao quadrado. Neste tipo de diagrama atenuação do espaço livre é compensada pela maior diretividade da antena nas regiões mais afastadas, conseguindo, segundo os princípios da GO, uma distribuição uniforme de potência na região de cobertura. O objetivo deste capítulo é apresentar soluções alternativas mais eficientes para a modelagem do refletor principal, sendo mantido o subrefletor clássico. Serão apresentados dois métodos: no primeiro a geratriz do refletor principal é formada por seções cônicas (elipses e hipérbolas), enquanto que no segundo são utilizadas seções de parábolas.

O processo de modelagem tem início com a determinação das superfícies clássicas (sub-refletor e refletor principal), dadas as dimensões práticas de projeto especificadas a priori [65]. Através da formulação apresentada em [65] são obtidos os parâmetros que definem de maneira única a antena clássica, bem como as coordenadas das geratrizes do subrefletor e refletor principal. É importante ressaltar que o processo de síntese do refletor principal baseia-se na determinação de um conjunto de refletores (refletor principal e subrefletor) clássicos, sendo o refletor principal substituído por outro modelado que proporcione o comportamento no diagrama de radiação especificado por uma função objetivo.

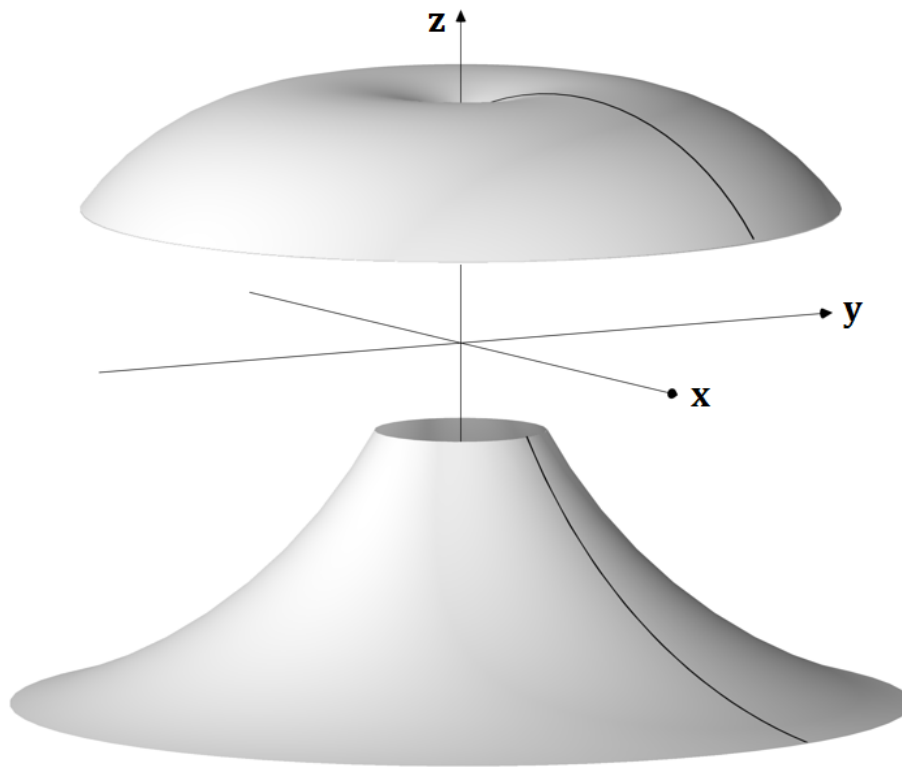


Figura 2.1: Geometria da antena duplo-refletora com cobertura omnidirecional

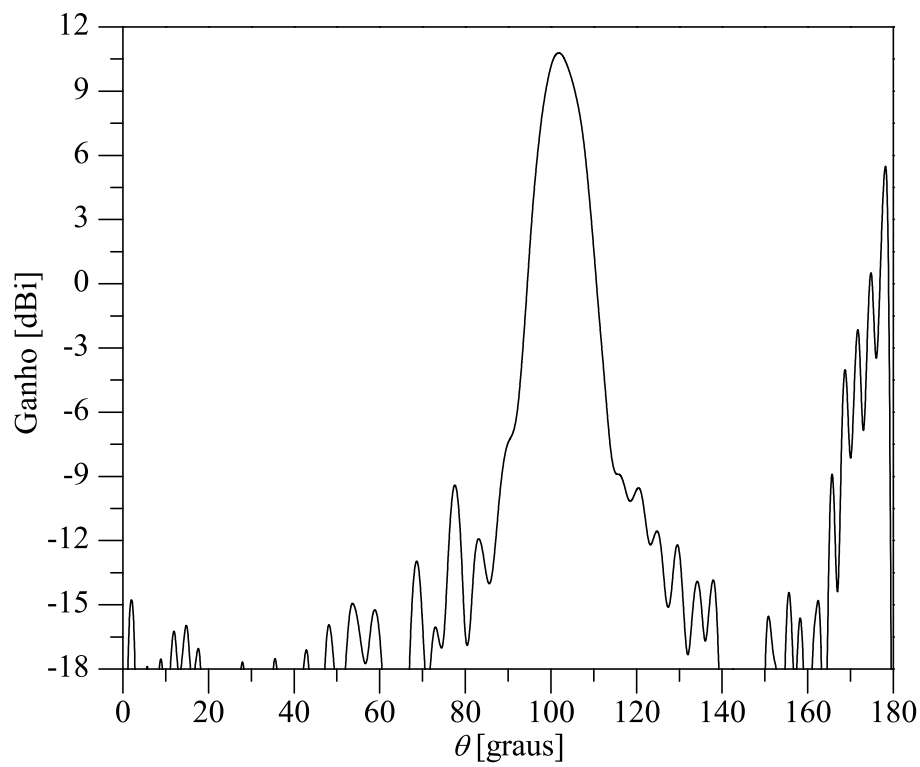


Figura 2.2: Diagrama de radiação de uma antena duplo-refletora com cobertura omnidirecional clássica

Na Seção 2.3.1 será apresentada a formulação para o método de síntese geométrica em que o refletor principal modelado é representado por uma combinação de seções de elipses ou hipérboles locais sequencialmente concatenadas. Para tal, serão utilizados os princípios da GO, especificamente a Lei de Snell e a Conservação da Energia, as características da cônica que gera o subrefletor, a função do diagrama de radiação circularmente simétrico do alimentador, a função do diagrama de radiação circularmente simétrico do campo distante e os limites angulares do campo distante. Nesta solução, a imposição da Lei de Snell nas extremidades de cada cônica local leva a um sistema de equações lineares que é avaliado em cada passo da síntese assim como a equação integral de mapeamento obtida através da imposição da conservação da energia.

Uma forma alternativa de síntese do refletor principal é mostrada na Seção 2.3.2. O procedimento é bastante similar ao descrito na Seção 2.3.1, porém mais simples, onde são utilizadas parábolas locais ao invés de elipses e hipérboles para compor o refletor principal. Tal escolha gera algumas simplificações, visto que a excentricidade de cada cônica local passa a ser um parâmetro conhecido ( $e = 1$ ) e, como consequência, não é necessário solucionar nenhum sistema de equações lineares em cada passo da síntese.

Após desenvolver todo o ferramental teórico e computacional para a síntese de antenas duplo-refletores com cobertura omnidirecional, na Seção 2.4 serão apresentadas algumas das antenas projetadas utilizando métodos de síntese descritos na Seção 2.3 e alimentadas por uma corneta coaxial corrugada. As antenas projetadas serão analisadas por um algoritmo que utiliza o Método de Casamento de Modos (MMT – *Mode Matching Technique*), amplamente documentado em [77], [78], [79], para representar os campos no interior do alimentador e o Método de Momentos (MoM – *Method of Moments*) para solucionar as equações integrais para os campos elétrico e magnético permitindo a determinação do campo espalhado [67], [68], [69]. A combinação deste dois métodos produz um acurado método híbrido de análise rigorosa de antenas refletores circularmente simétricas [83].

Na Seção 2.4.1 serão apresentadas as geometrias de antenas OADC e OADE onde o refletor principal foi modelado para apresentar um diagrama de radiação uniforme em uma seção angular no plano de elevação. Para esta função objetivo, foram explorados dois setores angulares diferentes e para cada um deles duas formas diferentes de mapeamento dos raios refletidos pelo refletor principal (cáustica real e virtual). Além disto, para cada caso é feita uma análise comparativa entre o método de síntese apresentado em [71] [72] e os métodos descritos na Seção 2.3. Na Seção 2.4.2 também são abordadas as configurações OADC e OADE, porém com o refletor principal modelado

para apresentar um diagrama de radiação cossecante ao quadrado no plano de elevação considerando diferentes setores angulares e formas de mapeamento dos raios. Por fim, na Seção 2.5 são feitas as conclusões parciais sobre a utilização de seções de cônicas na síntese de antenas refletoras axialmente simétricas, sendo feita uma análise comparativa entre dois métodos discutidos neste capítulo.

## 2.2

### Geometria das Configurações Clássicas

Conforme destacado na introdução deste capítulo, os métodos de síntese apresentados na Seção 2.3 modelam apenas do refletor principal, a geratriz subrefletor permanece uma cônica. O subrefletor é determinado utilizando a formulação apresentada em [65]. Desta forma, os algoritmos de síntese determinam inicialmente uma antena clássica (subrefletor e refletor principal) e em seguida, modelam um novo refletor principal. Nesta seção será feita uma breve apresentação das configurações clássicas definindo os parâmetros de projeto utilizados para definir o subrefletor.

Nesta Seção, as antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional são compostas por dois refletores circularmente simétricos, ambos em relação ao eixo  $z$ , sendo suas geratrizes cônicas clássicas (Figura 2.3 e Figura 2.4). Nas configurações clássicas, a superfície do subrefletor pode ser gerada a partir de qualquer seção cônica, conectada ao eixo de simetria (eixo  $z$ ) no ponto  $Q$ , onde é definido o vértice do subrefletor. Os dois focos são localizados pelos pontos  $O$  e  $P$ , sendo o ponto  $O$  a origem do sistema de coordenadas e o ponto  $P$  posicionado de maneira que coincida com o foco do refletor principal. Tal refletor tem como cônica geratriz uma parábola delimitada pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , que estão localizados fora do eixo de simetria, disponibilizando espaço para o alimentador e facilitando acesso ao foco. De acordo com os princípios da GO, os raios partem do foco situado na origem, sofrem a primeira reflexão no subrefletor, passam pelo outro foco da cônica que gera o subrefletor (ponto  $P$ ), e são refletidos paralelos entre si, no caso do refletor principal clássico gerado por uma parábola [64],[65].

Na configuração OADE, o raio principal ( $\theta_F = 0$ ) que parte de  $O$  atinge a borda externa do refletor principal (ponto  $P_1$ ) após partir do vértice  $Q$ , como ilustra a Figura 2.3. Na configuração OADC (Figura 2.4), o raio principal atinge a borda interna (ponto  $P_2$ ). A principal diferença entre as duas configurações é que a geratriz do subrefletor da OADE é uma elipse enquanto que a da OADC é uma hipérbole. Há ainda as configurações OADG e OADH, cuja diferença em relação à OADC e OADE é a forma de mapeamento [65].

As antenas duplo-refletoras clássicas para cobertura omnidirecional po-

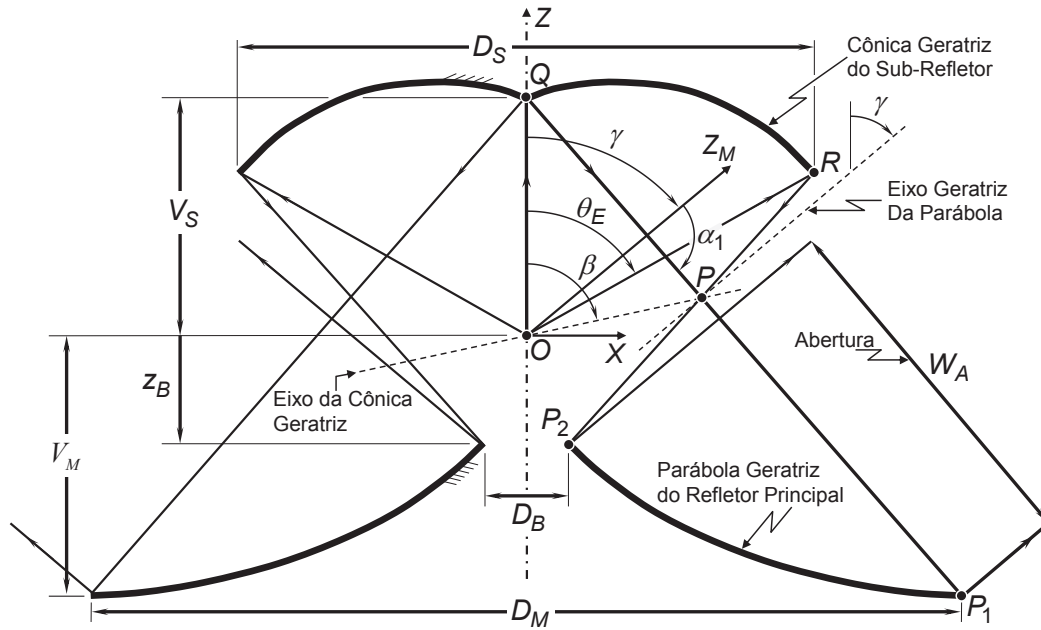


Figura 2.3: Geometria de uma antena OADE clássica [65]

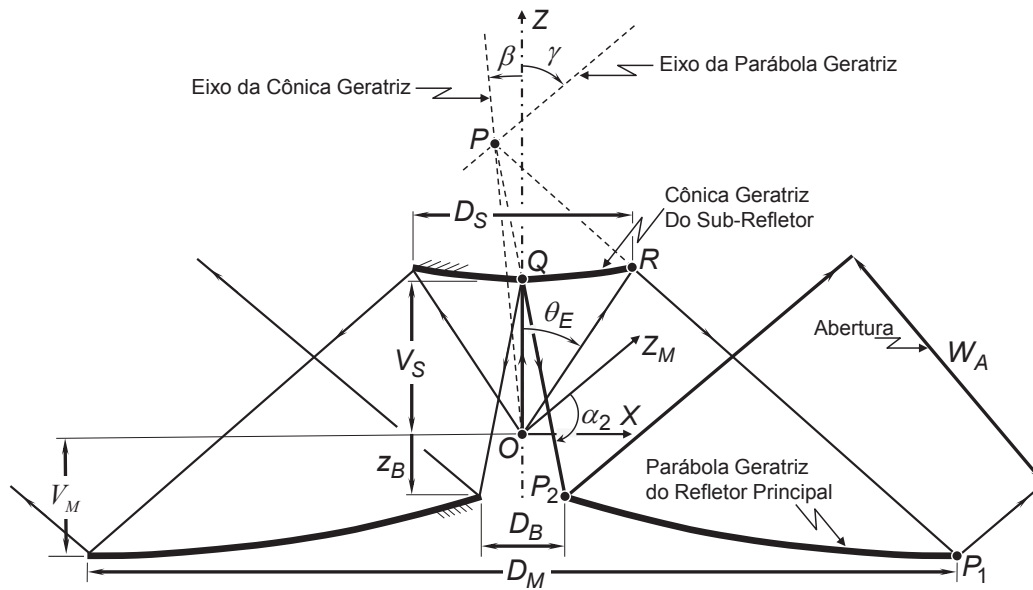


Figura 2.4: Geometria de uma antena OADC clássica [65]

dem ser unicamente definidas pela opção de mapeamento e alguns parâmetros geométricos. São eles: a distância focal da parábola geratriz ( $F$ ), o ângulo ( $\gamma$ ) entre o eixo de simetria (eixo  $z$ ) e o eixo da parábola geratriz, a excentricidade ( $e$ ) e a distância inter-focal ( $2c$ ) da cônica que gera o sub-refletor, o ângulo ( $\beta$ ) entre o eixo da cônica do sub-refletor e o eixo de simetria (eixo  $z$ ) e o ângulo de abertura do subrefletor ( $\theta_E$ ). Apesar de apropriados para definição dos refletores, os parâmetros acima são pouco práticos no projeto de antenas, sendo mais usadas as dimensões (diâmetros, comprimentos, etc.) do conjunto subrefletor e refletor principal. Em [65] foram definidos seis parâmetros apropriados ao projeto das antenas, onde as dimensões usadas apontam a localização dos pontos  $Q$  (vértice),  $P_1$  (borda externa) e  $P_2$  (borda interna) em relação à origem do sistema de coordenadas, são elas:  $V_S$  a distância entre a origem e o vértice  $Q$ , o diâmetro do refletor principal  $D_M$ , a coordenada  $z$  da borda interna do refletor principal  $z_B$ , o diâmetro da abertura central  $D_B$ , a largura da abertura cônica  $W_A$  e o ângulo entre o eixo de simetria (eixo  $z$ ) e o eixo da parábola geratriz  $\gamma$  [65].

## 2.3

### Métodos de Síntese do Refletor Principal

#### 2.3.1

##### Concatenação de Seções de Elipses e Hipérboles

As antenas duplo-refletores com cobertura omnidirecional são compostas por duas superfícies de revolução (subrefletor e refletor principal) obtidas através da revolução de uma geratriz em torno do eixo de simetria  $z$ . Como são superfícies circularmente simétricas, pode-se trabalhar apenas com as geratrizes dos refletores. Para a configuração OADE, a geratriz da superfície subrefletora é uma seção de elipse com dois focos: um localizado na origem ( $O$ ) e o outro entre o subrefletor e o refletor principal ( $P$ ), conforme ilustra a Figura 2.5. Na configuração OADC o foco  $P$  está localizado atrás do subrefletor (observe a 2.6). O centro de fase onde o alimentador deve ser posicionado na própria origem  $O$ , enquanto o ponto  $P$ , após a rotação sobre o eixo  $z$ , define um anel cáustico real (OADE) entre os refletores ou virtual (OADC) acima do subrefletor. Conhecido o subrefletor, o método consiste em determinar um refletor principal para o qual, dado um alimentador e seu respectivo diagrama de radiação, tenha-se, na região de campo distante, o diagrama objetivo.

Inicialmente, considera-se o subrefletor iluminado por uma fonte pontual localizada na origem  $O$  e seu respectivo diagrama de radiação circularmente simétrico  $G_F(\theta_F)$ , onde  $\theta_F$  define a direção dos raios em relação ao eixo  $z$ ,

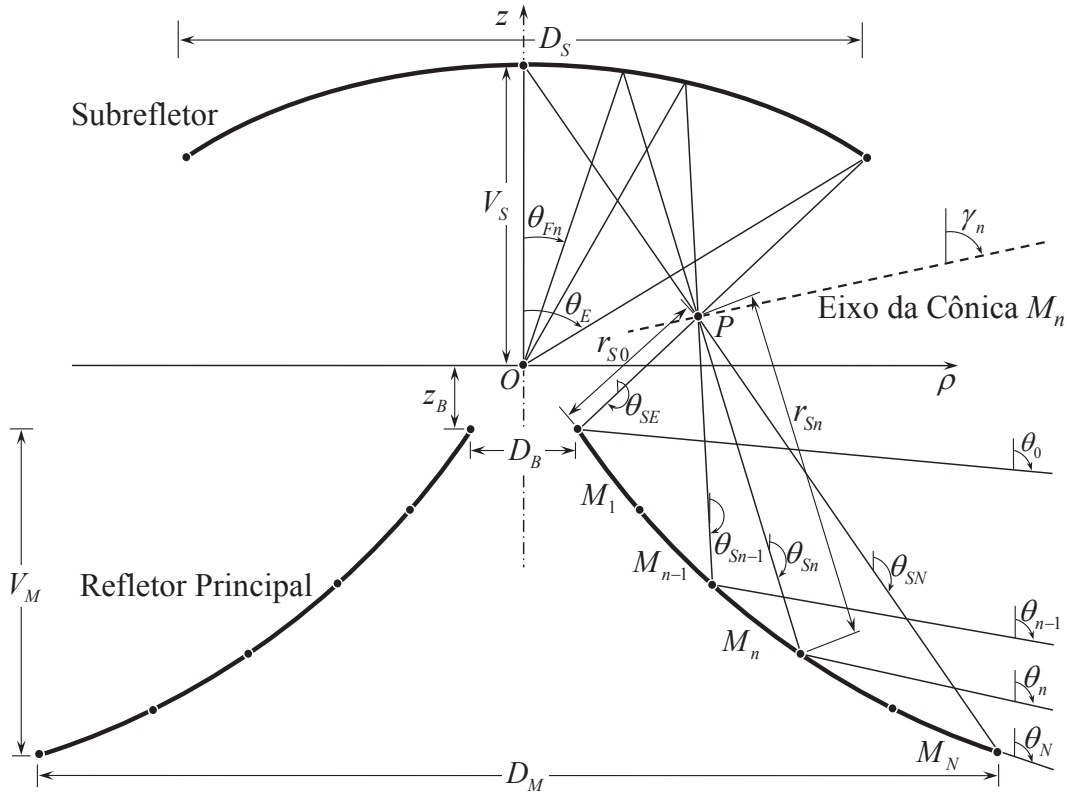


Figura 2.5: Geometria de uma antena OADE com refletor principal modelado

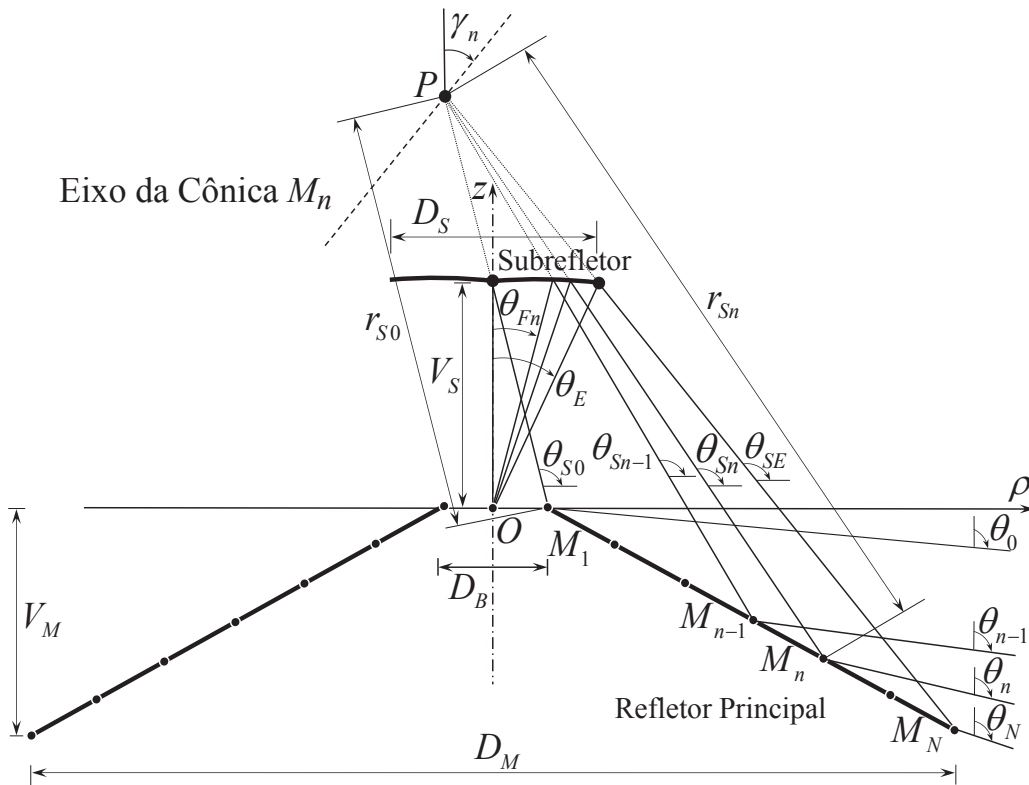


Figura 2.6: Geometria de uma antena OADC com refletor principal modelado

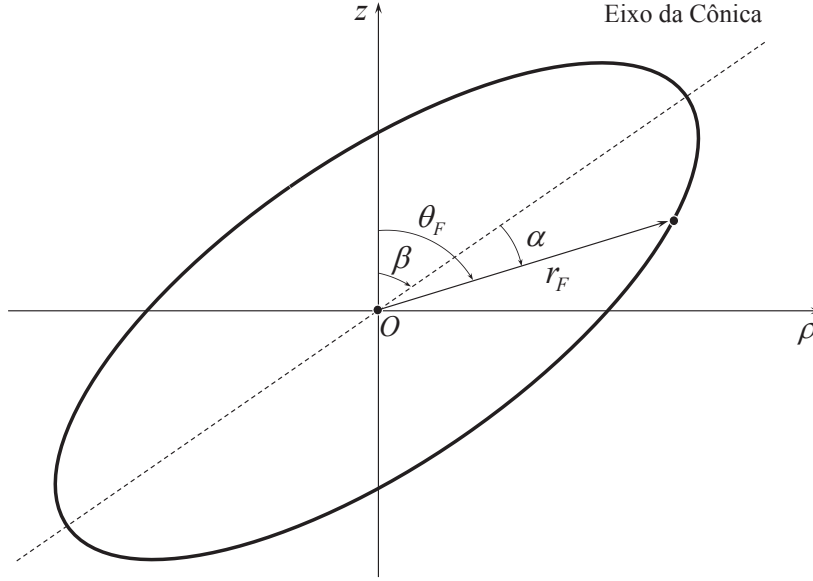


Figura 2.7: Geometria de uma cônica com eixo deslocado

conforme ilustra a Figura 2.5. Após a reflexão no subrefletor, o raio passa através da cáustica  $P$  fazendo um ângulo  $\theta_S$  com o eixo  $z$  antes de incidir sobre o refletor principal modelado. No presente método de síntese, os princípios da GO são utilizados para modelar o refletor principal de forma que produza o diagrama de radiação no plano vertical  $G_A(\theta)$  na região de campo distante da antena, onde  $\theta$  é a direção de observação relativa ao eixo  $z$  e pertence ao intervalo  $[\theta_0, \theta_N]$ , que define o tubo de raios refletidos pelo refletor modelado [84], [85], [86].

Para determinar a geratriz da superfície subrefletora, utilizam-se as distâncias  $V_S$  e  $z_B$ , os diâmetros  $W_A$ ,  $D_S$ ,  $D_M$ , o ângulo  $\theta_E$  e a formulação apresentada em [65]. Após o subrefletor ser determinado, é necessário obter uma relação entre a direção de incidência  $\theta_F$  e a direção de reflexão  $\theta_S$  considerando a geratriz do subrefletor uma cônica (elipse ou hipérbole). A partir da equação polar da cônica escreve-se:

$$r_F = \frac{a}{e \cos \alpha - 1}, \quad (2-1)$$

onde  $r_F$  é a distância entre a origem  $O$  e um ponto qualquer do subrefletor,  $a$  é o *semi-latus rectum*, definido pela relação

$$a = c(e - 1/e), \quad (2-2)$$

$2c$  é a distância interfocal,  $e$  é a excentricidade e  $\alpha$  é o ângulo entre o eixo da cônica e um ponto qualquer da cônica, conforme ilustrado na Figura 2.7. Por inspeção, percebe-se que  $\alpha$  é a diferença entre o ângulo de elevação do eixo de



simetria  $\beta$  e o ângulo  $\theta_F$ , logo (2-1) pode ser reescrita como

$$r_F = \frac{a}{e \cos(\theta_F - \beta) - 1}. \quad (2-3)$$

Expandindo (2-3) obtém-se

$$r_F = \frac{a}{e \sin\beta \sin\theta_F + e \cos\beta \cos\theta_F - 1}. \quad (2-4)$$

Conforme demonstrado em [39], grandes simplificações podem ser obtidas com a utilização da notação em coordenadas complexas nos problemas de síntese de antenas refletoras. Detalhes desta notação são descritos no Apêndice A. Desta forma, pode-se definir a seguinte relação para distância  $r_F$  [45]:

$$r_F = e^{S(\eta_F)} (|\eta_F|^2 + 1), \quad (2-5)$$

onde  $S(\eta_F)$  é uma função real que descreve a superfície do subrefletor e  $\eta_F$  a direção é dada por

$$\eta_F = \cot\left(\frac{\theta_F}{2}\right) e^{i\phi_F}, \quad (2-6)$$

onde  $\phi_F$  é o ângulo de azimute em relação ao eixo  $x$ . Como o problema é circularmente simétrico pode-se trabalhar apenas com o plano  $\phi_F = 0$ . Logo:

$$\eta_F = \cot\left(\frac{\theta_F}{2}\right), \quad (2-7)$$

A substituição de (2-5) em (2-4) resulta em

$$ae^{-S(\eta_F)} = (|\eta_F|^2 + 1) e \sin\beta \sin\theta_F + (|\eta_F|^2 + 1) e \cos\beta \cos\theta_F - (|\eta_F|^2 + 1). \quad (2-8)$$

Manipulando (2-7) pode-se extrair as seguintes relações:

$$\cos\theta_F = \frac{|\eta_F|^2 - 1}{|\eta_F|^2 + 1}, \quad (2-9a)$$

$$\sin\theta_F = \frac{2|\eta_F|}{|\eta_F|^2 + 1}. \quad (2-9b)$$

Substituindo (2-9a) e (2-9b) em (2-8) encontra-se:

$$ae^{-S(\eta_F)} = 2|\eta_F|e \sin\beta + |\eta_F|^2 (e \cos\beta - 1) - (e \cos\beta + 1). \quad (2-10)$$

Sabe-se que no plano  $\phi_F = 0$  (equações (A-14a) e (A-14b) no Apêndice A):

$$\bar{\eta}_F + \eta_F = 2|\eta_F|, \quad (2-11a)$$

$$\bar{\eta}_F - \eta_F = 0, \quad (2-11b)$$

onde  $\bar{\eta}_F$  é o complexo conjugado da direção  $\eta_F$ . Com o auxílio de (2-11a)

chega-se, por fim, à equação geral da cônica em coordenadas complexas [45]:

$$ae^{-S(\eta_F)} = (\eta_F + \bar{\eta}_F) e \sin \beta + |\eta_F|^2 (e \cos \beta - 1) - (e \cos \beta + 1). \quad (2-12)$$

A imposição a Lei de Snell sobre a superfície subrefletora leva à seguinte equação diferencial ordinária [71]:

$$\frac{dS(\eta_F)}{d\eta_F} = \frac{2}{\eta_S - \eta_F}, \quad (2-13)$$

onde a direção  $\eta_S$  é definida tal que

$$\eta_S = \cot \left( \frac{\theta_S}{2} \right), \quad (2-14)$$

e o ângulo  $\theta_S$  representa a direção dos raios refletidos pelo subrefletor em relação ao eixo  $z$ . Derivando (2-12) de ambos os lados e substituindo em (2-13), tem-se:

$$\frac{dS(\eta_F)}{d\eta_F} = - \frac{2 [e \sin \beta + |\eta_F| (e \cos \beta - 1)]}{(\eta_F + \bar{\eta}_F) e \sin \beta + |\eta_F|^2 (e \cos \beta - 1) - (e \cos \beta + 1)}. \quad (2-15)$$

Particularizando (2-15) para o plano  $\phi_F = 0$ , e substituindo em (2-13) encontra-se:

$$\frac{2}{\eta_S - \eta_F} = - \frac{2 [e \sin \beta + \eta_F (e \cos \beta - 1)]}{2\eta_F e \sin \beta + \eta_F^2 (e \cos \beta - 1) - (e \cos \beta + 1)}. \quad (2-16)$$

Manipulando (2-16) é fácil demonstrar que

$$\eta_S = \frac{e \cos \beta + 1 - \eta_F e \sin \beta}{e \sin \beta + \eta_F (e \cos \beta - 1)}, \quad (2-17)$$

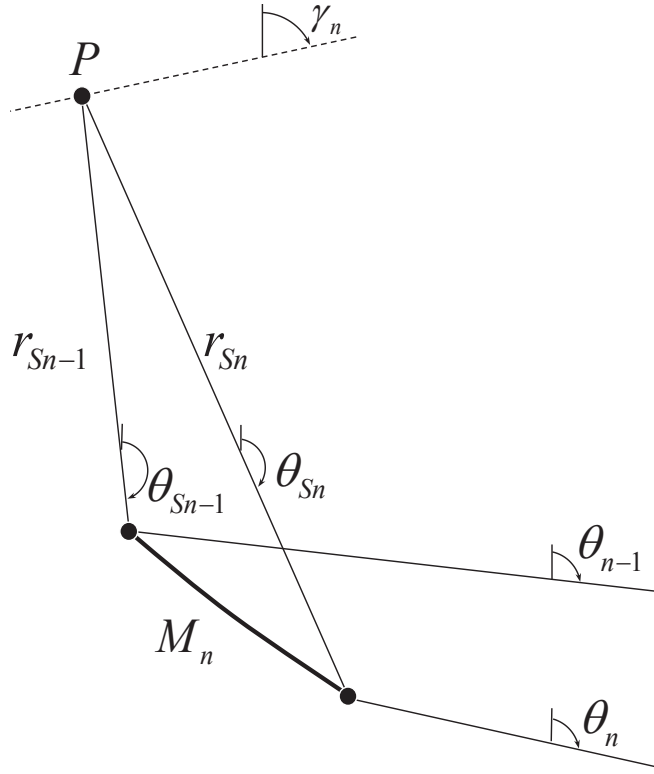
ou em coordenadas esféricas

$$\cot \left( \frac{\theta_S}{2} \right) = \frac{e \cos \beta + 1 - \cot(\theta_F/2) e \sin \beta}{e \sin \beta + \cot(\theta_F/2) (e \cos \beta - 1)}. \quad (2-18)$$

A equação (2-18) possibilita a determinação da direção dos raios refletidos no subrefletor conhecendo-se apenas a excentricidade  $e$ , o ângulo de elevação do eixo da cônica  $\beta$  e ângulo de incidência  $\theta_F$ . Note que (observe as Figuras 2.5 e 2.6), necessariamente, o raio refletido (para a OADC a projeção do raio refletido) irá passar pelo foco  $P$ .

No presente método de síntese, a geratriz do refletor principal é representada por uma combinação de seções cônicas locais  $M_n (n = 1, 2, \dots, N)$  sequencialmente concatenadas, tendo um dos focos no ponto  $P$ , conforme ilustrado na Figura 2.5. A seção cônica  $M_n$  é limitada pelos ângulos  $\theta_{S_{n-1}}$  e  $\theta_{S_n}$  e seu eixo de simetria faz um ângulo  $\gamma_n$  com o eixo  $z$ . Da equação da cônica tem-se:

$$r_S = \frac{a_n}{e_n \sin \gamma_n \sin \theta_S + e_n \cos \gamma_n \cos \theta_S - 1} \quad (2-19)$$

Figura 2.8: Seção Cônica  $M_n$ 

onde  $r_S$  é a distância entre a origem  $O$  e a seção cônica,  $e_n$  a excentricidade,  $\gamma_n$  o ângulo de elevação do eixo de simetria e  $a_n$  o *semi-latus rectum*. Pode-se ainda, reescrever (2-19) na forma

$$r_S = \frac{a_n}{b_n \sin \theta_S + d_n \cos \theta_S - 1}, \text{ para } \theta_S [\theta_{Sn-1}, \theta_{Sn}], \quad (2-20)$$

onde

$$a_n = c_n (e_n - 1/e_n), \quad (2-21a)$$

$$b_n = e_n \sin \gamma_n, \quad (2-21b)$$

$$d_n = e_n \cos \gamma_n. \quad (2-21c)$$

Aplicando (2-20) para a direção  $\theta_{Sn}$  obtém-se:

$$r_{Sn} = \frac{a_n}{b_n \sin \theta_{Sn} + d_n \cos \theta_{Sn} - 1} \quad (2-22)$$

que representa a distância entre o foco  $P$  e uma das extremidades da seção da cônica, conforme ilustrado na Figura 2.8. Para a direção  $\theta_{Sn-1}$ , associada à outra extremidade da seção da cônica, reescreve-se (2-20) como:

$$a_n = r_{Sn-1} [b_n \sin \theta_{Sn-1} + d_n \cos \theta_{Sn-1} - 1]. \quad (2-23)$$

O processo iterativo de síntese tem início com  $n = 0$ , correspondendo a

$\theta_{F0} = 0$  para a configuração OADC ou  $\theta_{F0} = \theta_E$  para OADE. Nesta iteração, a distância  $r_{S0}$  é definida como a distância entre a cáustica  $P$  e o primeiro ponto da síntese, que é especificado *a priori* pelo diâmetro da abertura central  $D_B$  e pela coordenada  $z$  da borda interna do refletor principal  $z_B$  (observe as Figuras 2.5 e 2.6). O segundo ponto da síntese é determinado através da equação (2-22), entretanto, os parâmetros  $a_n$ ,  $b_n$  e  $d_n$  não são conhecidos. Para obter os parâmetros cônica  $M_n$ , primeiramente se escreve (2-20) em coordenadas complexas

$$a_n e^{-L(\eta_S)} = (\eta_S + \bar{\eta}_S) b_n + |\eta_S|^2 (d_n - 1) - (d_n + 1), \quad (2-24)$$

onde  $L$  é uma função real associada a distância  $r_S$  através de

$$r_S = e^{L(\eta_S)} (|\eta_S|^2 + 1). \quad (2-25)$$

Em seguida, deve-se novamente impor a Lei de Snell, descrita por [71]:

$$\frac{dL(\eta_S)}{d\eta_S} = \frac{2}{\eta - \eta_S}, \quad (2-26)$$

onde a direção  $\eta$  é dada por

$$\eta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2-27)$$

e  $\theta$  é o ângulo dos raios refletidos pelo refletor principal definido em relação ao eixo  $z$ . Derivando (2-24) e substituindo (2-26) em obtém-se:

$$\eta = \frac{d_n + 1 - \eta_S b_n}{b_n + \eta_S (d_n - 1)}. \quad (2-28)$$

que pode ser reescrita como uma equação linear na forma

$$(\eta + \eta_S) b_n + (\eta \eta_S - 1) d_n = \eta \eta_S + 1. \quad (2-29)$$

Em coordenadas esféricas tem-se:

$$\begin{aligned} \left[ \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_S}{2}\right) \right] b_n + \left[ \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_S}{2}\right) - 1 \right] d_n \\ = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_S}{2}\right) + 1. \end{aligned} \quad (2-30)$$

Aplicando a equação (2-30) aos extremos da cônica  $M_n$ , ou seja, às direções correspondentes iterações  $n - 1$  e  $n$ , obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left[ \cot\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_{Sn-1}}{2}\right) \right] b_n + \left[ \cot\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_{Sn-1}}{2}\right) - 1 \right] d_n \\ = \cot\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_{Sn-1}}{2}\right) + 1, \end{aligned} \quad (2-31)$$

$$\left[ \cot\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_{Sn}}{2}\right) \right] b_n + \left[ \cot\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_{Sn}}{2}\right) - 1 \right] d_n = \cot\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_{Sn}}{2}\right) + 1. \quad (2-32)$$

Com este sistema de equações lineares, pode-se obter  $b_n$  e  $d_n$ . O parâmetro  $a_n$  pode ser obtido através da equação (2-23). Note que  $r_{Sn-1}$  é conhecido e  $\theta_{Sn-1}$  pode ser obtido através da relação (2-18) uma vez que  $\theta_{Fn-1}$  é conhecido do processo de discretização. Entretanto, é necessário que se conheça  $\theta_{n-1}$  e  $\theta_n$  para resolver o sistema de equações formado por (2-31) e (2-32). Impondo a conservação da energia em um tubo de raios partido da origem  $O$ , pode-se obter a seguinte relação entre  $\theta_{Fn}$  e  $\theta_n$ :

$$\int_{\theta_{Fn}}^{\theta_E} G_F(\theta_F) \sin\theta_F d\theta_F = N_F \int_{\theta_0}^{\theta_n} G_A(\theta) \sin\theta d\theta, \quad (2-33)$$

onde a constante de normalização  $N_F$  dada por

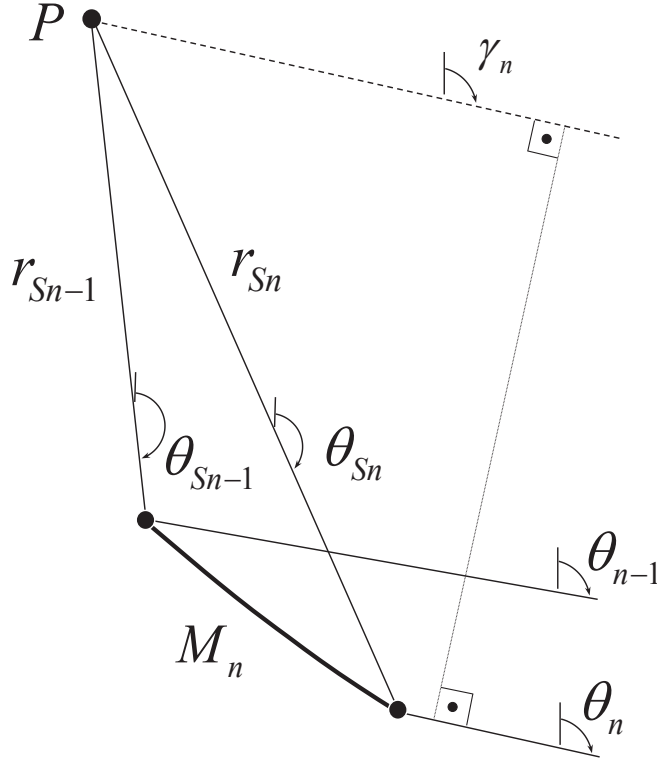
$$N_F = \frac{\int_0^{\theta_E} G_F(\theta_F) \sin\theta_F d\theta_F}{\int_{\theta_0}^{\theta_N} G_A(\theta) \sin\theta d\theta}, \quad (2-34)$$

garante que a energia contida no tubo de raios permanece a mesma após duas as reflexões,  $\theta_0$  e  $\theta_N$  são as direções pré-específicas dos raios refletidos nas iterações  $n = 0$  e  $n = N$ , respectivamente. A relação entre as direções  $\theta_0$  e  $\theta_N$  definem as características da cáustica formada no plano de elevação. Se  $\theta_N > \theta_0$ , a cáustica é virtual, caso contrario a cáustica é real. É importante observar que, como uma dada trajetória  $n-1$  é refletida pela cônica  $M_{n-1}$  e  $M_n$  na mesma direção, a Lei de Snell garante que a geratriz do refletor principal tem as derivadas de primeira ordem contínuas.

A formulação apresentada pode ser aplicada a todas as configurações duplo-refletoras axialmente simétricas, sendo necessárias algumas adaptações no método iterativo. Na configuração OADC, ilustrada na Figura 2.6, o raio correspondente à primeira iteração tem direção  $\theta_{Fn} = 0$ , e a última  $\theta_{Fn} = \theta_E$ . Outra diferença ocorre na imposição da conservação da energia, sendo necessária uma mudança nos limites de integração para adequação da relação entre  $\theta_{Fn}$  e  $\theta_n$ , logo:

$$\int_0^{\theta_{Fn}} G_F(\theta_F) \sin\theta_F d\theta_F = N_F \int_{\theta_0}^{\theta_n} G_A(\theta) \sin\theta d\theta. \quad (2-35)$$

A formulação apresentada nesta seção foi particulariza para as configurações OADE e OADC, entretanto, pode ser facilmente aplicada para as demais configurações duplo-refletoras axialmente simétricas OADG e OADH.

Figura 2.9: Seção de Parábola  $M_n$ 

### 2.3.2

#### Concatenação de Seções de Parábolas

Com a mesma lógica apresentada na seção anterior, o método apresentado nesta seção utiliza parábolas concatenadas ao invés de elipses e hipérboles para descrever a geratriz do refletor modelado [87]. O procedimento iterativo é o mesmo, exceto por algumas modificações que serão descritas a seguir. Para descrever cada seção de parábola  $M_n$ , a equação da cônica (2-20) deve ser utilizada considerando as seguintes modificações:

$$a_n = 2F_n, \quad (2-36a)$$

$$e_n = 1. \quad (2-36b)$$

onde  $F_n$  é a distância focal da parábola  $M_n$ . Além disto, o ângulo  $\theta_n$  do raio refletido pela parábola é igual ao próprio ângulo de elevação do eixo de simetria  $\gamma_n$ , conforme se verifica na Figura 2.9. Consequentemente, para as configurações OADE e OADC, a conservação da energia deve ser reescrita, respectivamente, como

$$\int_{\theta_{Fn}}^{\theta_E} G_F(\theta_F) \sin\theta_F d\theta_F = N_F \int_{\theta_0}^{\gamma_n} G_A(\theta) \sin\theta d\theta, \quad (2-37)$$

$$\int_{\theta_0}^{F_n} G_F(\theta_F) \sin\theta_F d\theta_F = N_F \int_{\theta_0}^{\gamma_n} G_A(\theta) \sin\theta d\theta. \quad (2-38)$$

Como  $r_{S_{n-1}}$  e  $\theta_{S_{n-1}}$  são determinados na iteração anterior, utilizando (2-36a) e (2-36b) a equação (2-23) pode ser reescrita como:

$$F_n = \frac{r_{S_{n-1}}}{2} [\cos(\gamma_n - \theta_{S_{n-1}}) - 1]. \quad (2-39)$$

Em seguida,  $r_{S_n}$  é calculado para a iteração seguinte através de

$$r_{S_n} = \frac{2F_n}{\cos(\gamma_n - \theta_{S_n}) - 1}. \quad (2-40)$$

O procedimento apresentado é mais simples do que o descrito na seção 2.3.1 uma vez que nenhum sistema de equações lineares precisa ser solucionado. Outro aspecto importante é que o método leva a uma geratriz contínua, porém com derivadas descontínuas nos pontos de intersecção entre duas parábolas consecutivas. A formulação apresentada pode facilmente ser aplicada para as demais configurações duplo-refletores axialmente simétricas OADG e OADH.

## 2.4

### Estudos de Caso

Para avaliar os métodos de síntese descritos na Seção 2.3, diversos estudos de casos foram analisados considerando diferentes configurações de refletores, funções objetivo e forma de mapeamento dos raios. Na Seção 2.4.1 foi utilizada como função objetivo uma seção angular no plano de elevação com diagrama de radiação uniforme, sendo exploradas as configurações OADE e OADC com diferentes mapeamentos de raios: com a cáustica real em frente ao refletor modelado, ou com a cáustica virtual [85], [86], [88]. Todas as antenas foram sintetizadas pelos três métodos: o método baseado na concatenação seções de elipses e hipérboles (Método I), o método que faz a concatenação de seções de parábolas (Método II) e o método baseado na solução de uma equação diferencial ordinária (Método III), permitindo a realização de um minucioso estudo de erro comparando os métodos propostos (métodos I e II) com método descrito na literatura (Método III) [71], [72]. Além disto, é feita uma análise das distorções no diagrama de radiação causadas pelos erros de síntese utilizando um método de análise rigorosa baseado MMT/MoM [79].

Na Seção 2.4.2 o diagrama de radiação objetivo no plano de elevação é cossecante ao quadro, de forma a se ter, segundo os princípios da GO, uma distribuição uniforme de potência na região de cobertura [84], [87], [89]. Também são exploradas as configurações OADE e OADC com cáustica real e virtual, além do estudo de erro comparando os métodos de síntese e seus efeitos no diagrama de radiação.

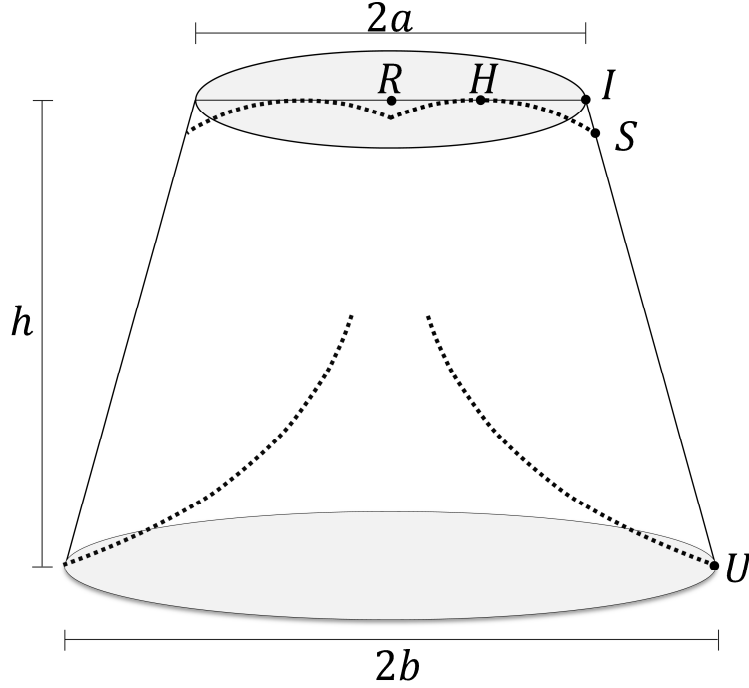


Figura 2.10: Cone circular que define o volume da antena

Em outra importante análise feita para todos os estudos de caso das seções 2.4.1 e 2.4.2, o volume das antenas sintetizadas é determinado. O objetivo é avaliar quais geometrias são mais compactas levando em conta a configuração (OADE ou OADC), o tipo de mapeamento (cáustica real ou virtual) e os limites angulares do campo distante.

O volume será aqui definido como o cone circular com raios  $a$ ,  $b$  e altura  $h$ , como ilustrado na Figura 2.10. O raio  $b$  é definido como a metade do diâmetro do refletor modelado  $D_M$ . O raio  $a$  e a altura  $h$  são obtidos através da intercessão das retas  $\overline{US}$  e  $\overline{RH}$ . Por inspeção, obtém-se que a equação reta  $\overline{US}$ , sendo ela descrita pela seguinte expressão:

$$z = m(x - x_S) + z_S, \quad (2-41)$$

onde o coeficiente  $m$  é dado por:

$$m = \frac{z_U - z_S}{x_U - x_S}. \quad (2-42)$$

A reta  $\overline{RH}$  é descrita através de:

$$z = z_H, \quad (2-43)$$

onde  $z_H$  é o maior valor da coordenada  $z$  do subrefletor, obtido numericamente. Igualando (2-41) a (2-43) obtém-se a coordenada  $x$  do ponto  $I$ :

$$x_I = \frac{z_H - z_S}{m} + x_S. \quad (2-44)$$



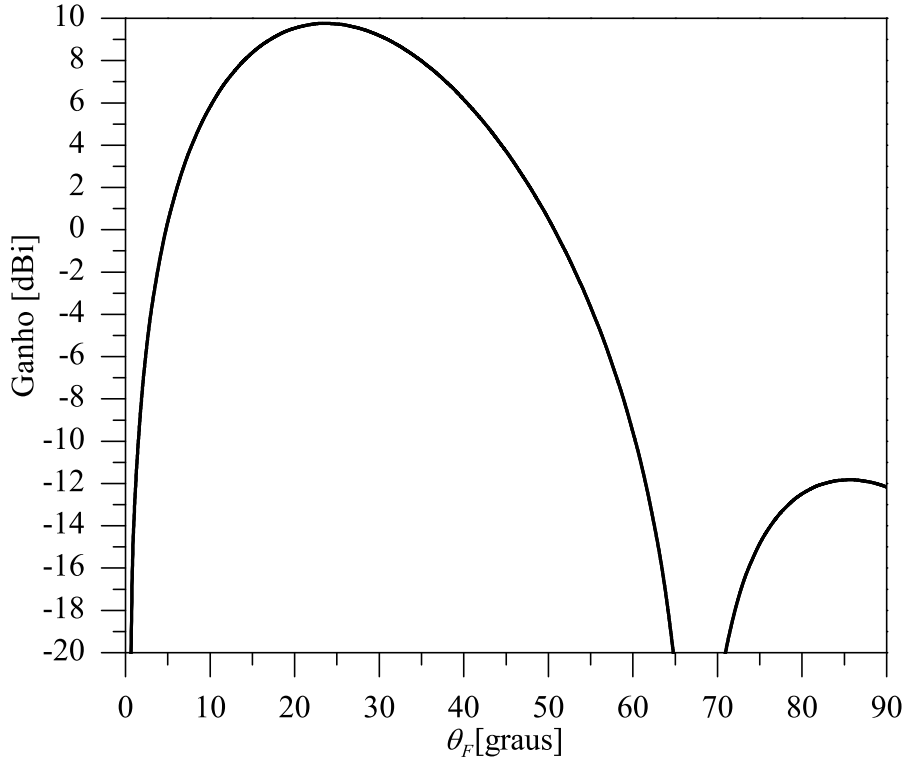


Figura 2.11: Diagrama de radiação do modo TEM de uma corneta coaxial

Desta forma, mostra-se que:

$$a = \left| \left( \frac{z_H - z_S}{z_U - z_S} \right) (x_U - x_S) + x_S \right|, \quad (2-45a)$$

$$b = |x_U|, \quad (2-45b)$$

$$c = |z_U - z_I|. \quad (2-45c)$$

O volume é obtido através de [90]:

$$V = \frac{1}{3} |a^2 + ab + b^2|. \quad (2-46)$$

Para todos os estudos de caso apresentados no Capítulo 2, foi adotado o mesmo modelo de alimentador, que é representado por um diagrama de radiação circularmente simétrico correspondente à radiação por uma abertura coaxial iluminada pelo modo TEM (veja a Figura 2.11) e representando por [71]:

$$G_F(\theta_F) = G_{0F} \left[ \frac{J_0(kr_i \sin\theta) - J_0(kr_e \sin\theta)}{\sin\theta} \right]^2, \text{ para } \theta \leq \pi/2, \quad (2-47)$$

onde  $J_0$  é a Função de Bessel de ordem zero e  $G_{0F}$  um fator de normalização. A equação (2-47) representa a intensidade de radiação de uma abertura coaxial sobre um plano condutor elétrico perfeito onde  $r_i$  e  $r_e$  representam os raios

interno e externo, respectivamente. É necessário um cuidado especial a escolha dos raios interno ( $r_i$ ) e externo ( $r_e$ ) uma vez que eles estão diretamente associados à forma do diagrama de radiação. Deve-se buscar valores ótimos tal que a atenuação na borda do subrefletor não seja muito alta prejudicando o diagrama do conjunto, nem muito baixa aumentando excessivamente as perdas por transbordamento e, conseqüentemente, reduzindo a eficiência da antena. Nos casos de estudo apresentados nas Seções 2.4.1 e 2.4.2, adota-se-á  $r_i = 0,45\lambda$  e  $r_e = 0,90\lambda$ . Estes valores fornecem, aproximadamente 10dB de atenuação na borda considerando  $\theta_F = 50^\circ$ .

### 2.4.1

#### Cobertura Setorial Uniforme

Para ilustrar os métodos de síntese descritos na Seção 2.3 algumas antenas foram modeladas para prover cobertura setorial uniforme no plano de elevação. Inicialmente, serão explorados casos da configuração OADC com aberturas de  $\pm 7,5^\circ$  e  $\pm 15^\circ$  em relação à linha do horizonte [85]. Além disto, é estudado o comportamento do diagrama de radiação para diferentes mapeamentos dos raios, ou seja, com a cáustica real em frente ao refletor principal, ou com a cáustica virtual. Posteriormente será abordada a configuração OADE com as mesmas aberturas e mapeamento dos raios propostos para a OADC [86], [88].

A função objetivo que descreve o diagrama de radiação setorial uniforme no plano de elevação é obtida através de uma normalização onde a potência total radial é um, logo:

$$\int_0^{2\phi} \int_{\theta_0}^{\theta_N} G_A(\theta) \sin\theta d\theta d\phi = 1. \quad (2-48)$$

Considerando  $G_A(\theta)$  constante, mostra-se que

$$G_A(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\cos\theta_0 - \cos\theta_N} \right|. \quad (2-49)$$

O módulo é inserido no resultado apenas para generalizar a formulação, tornando-a válida nos casos onde os limites de integração são invertidos, representando outro mapeamento.

#### Configuração OADC com Cobertura Uniforme

No primeiro estudo de caso (Caso A.I) o refletor principal de uma configuração OADC foi sintetizado para irradiar, sob os princípios da GO, um diagrama de radiação setorial uniforme no plano de elevação sobre  $\pm 7,5^\circ$  em relação à linha do horizonte, ou seja, de  $\theta_0 = 97,50^\circ$  a  $\theta_N = 82,50^\circ$ .

Parâmetros	Caso A.I	Caso A.II	Caso B.I	Caso B.II
$D_S(\lambda)$	20,03	20,03	20,03	20,03
$V_S(\lambda)$	9,50	9,50	9,50	9,50
$D_M(\lambda)$	20,00	20,00	20,00	20,00
$V_M(\lambda)$	8,37	8,22	8,58	8,27
$D_B(\lambda)$	2,40	2,40	2,40	2,40
$z_B(\lambda)$	0	0	0	0
$2c(\lambda)$	69,93	69,93	69,93	69,93
$e$	0,787098	0,787098	0,787098	0,787098
$\beta$	171,82°	171,82°	171,82°	171,82°
$\theta_E$	54,07°	54,07°	54,07°	54,07°
$\theta_0$	97,50°	82,50°	105,0°	75,0°
$\theta_N$	82,50°	97,50°	75,0°	105,0°
$Volume(10^3\lambda^3)$	5,633	5,586	5,700	5,604

Tabela 2.1: Parâmetros das antenas OADC com diagrama setorial uniforme

Como  $\theta_0 > \theta_N$ , a cáustica é formada em frente ao refletor principal, logo é uma cáustica real [85]. Esta configuração é basicamente o mesmo projeto apresentado em [61], exceto que aqui será utilizado como alimentador o modo TEM de uma corneta coaxial e o subrefletor é uma elipse ao invés de uma parábola, de forma a reduzir a perda de retorno. A elipse geratriz do subrefletor é obtida a partir de uma configuração clássica OADC com os seguintes parâmetros:  $V_S = 9,5\lambda$ ,  $D_B = 2,4\lambda$ , diâmetro do refletor principal clássico  $D_M = 20\lambda$ , abertura central  $z_B = 0$ , abertura do refletor principal clássico  $W_A = 8,25\lambda$ , e  $\gamma = 90^\circ$ . Estes valores geram uma elipse com excentricidade  $e = 0,787098$ , distância interfocal  $2c = 69,93\lambda$ , e ângulo de elevação do eixo de simetria  $\beta = 171,82^\circ$  em relação ao eixo  $z$ . Como consequência, o diâmetro do subrefletor projetado  $D_S = 20,03\lambda$ , o ângulo de borda  $\theta_E = 54,07^\circ$  e a distância  $r_{S0} = -69,77\lambda$  utilizada como valor inicial no processo de síntese descrito na Seção 2.3. As geratrizes e o traçado de raios são apresentados na Figura 2.12 e valores citados acima, bem como outras dimensões físicas das antenas sintetizadas estão sumarizados na Tabela 2.1. O valor negativo de  $r_{S0}$  indica que o anel cáustico  $P$  se encontra abaixo do refletor principal modelado, como indica a Figura 2.12.

No segundo estudo de caso (Caso A.II) apresentado nesta seção, foi utilizado o mesmo subrefletor do Caso A.I e o refletor principal foi modelado com os limites angulares do campo distante invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 82,50^\circ$  a  $\theta_N = 97,50^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e, portanto, a cáustica é virtual e está localizada atrás refletor principal, conforme ilustrado na Figura 2.13. Na Tabela 2.1 são listados os principais parâmetros desta antena e, em particular, percebe-se que o diâmetro  $D_M$  e a altura  $V_M$  dos estudos de caso A.I e A.II

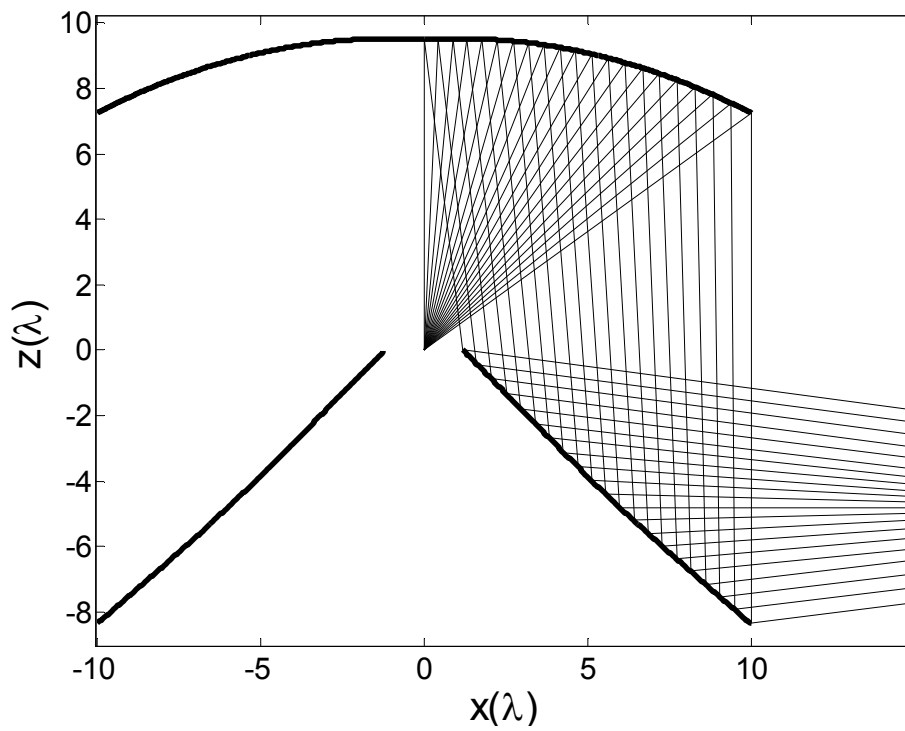


Figura 2.12: Caso A.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real

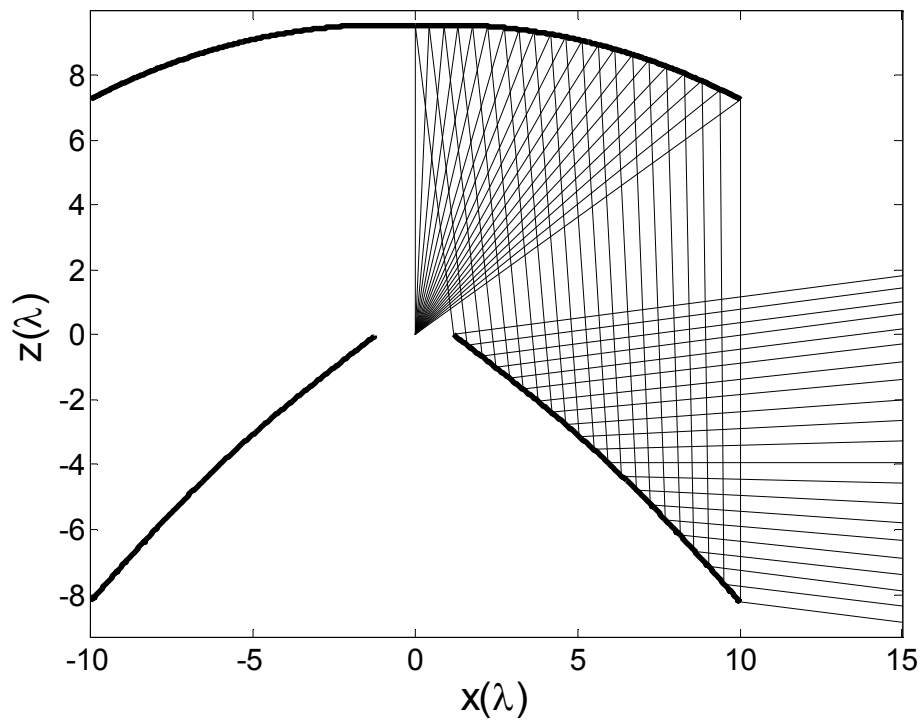


Figura 2.13: Caso A.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual

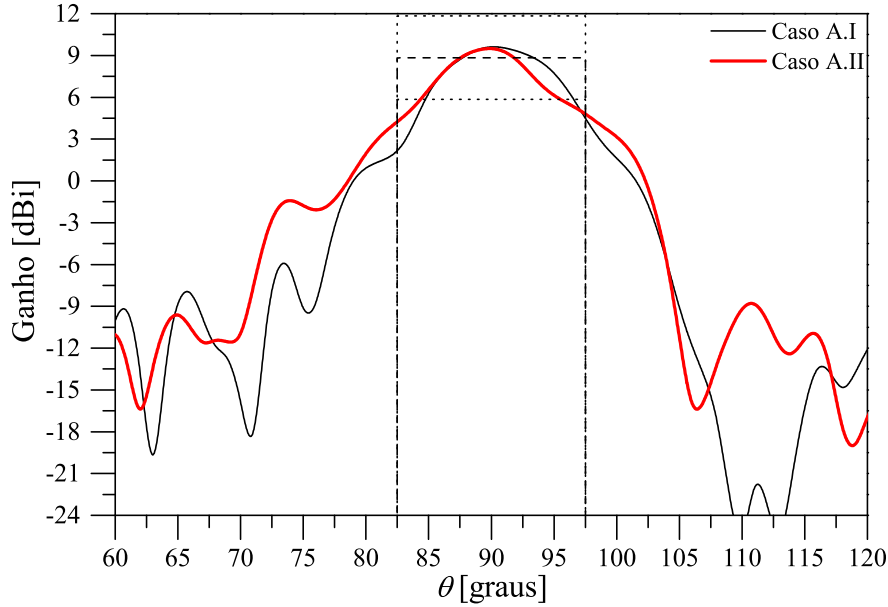


Figura 2.14: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos A.I e A.II

são bem próximos, sugerindo que a forma como os raios são mapeados no campo distante na configuração OADC é pouco significativo na determinação de estruturas mais compactas.

Os diagramas de radiação dos casos A.I e A.II, obtidos através do método de análise combinada MMT/MoM, são ilustrados na Figura 2.14, juntamente com o diagrama de radiação objetivo da GO e os limites  $\pm 3\text{dB}$ . As geratrizes do refletor principal modelado utilizada para análise foram obtidas através do método baseado na solução de uma equação diferencial utilizando um número muito grande de pontos ( $N = 10^5$ ). Na análise do MoM foi considerada uma discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  (20 segmentos em cada comprimento de onda) e a frequência de operação  $9.3\text{GHz}$ . As diferenças observadas entre o diagrama objetivo e os obtidos através do MMT/MoM podem ser atribuídas a diferenças entre diagrama de radiação da corneta coaxial considerada na análise e o modelo de abertura coaxial utilizado na síntese e aos efeitos difrativos de acoplamento eletromagnéticos não considerados no processo de síntese [79]. Observando os diagrama de radiação, nota-se que nas direções próximas à  $\theta = 90^\circ$ , em particular  $86^\circ < \theta < 93^\circ$ , os diagramas dos Casos A.I e A.II são mais próximos da função objetivo. Uma das razões disto é que o diagrama nesta região é determinado pela parte central do refletor, onde os efeitos difrativos das bordas são menos intensos. Do ponto de vista das dimensões físicas, a configuração com cáustica real apresentou um volume igual a  $5,633 \times 10^3 \lambda^3$ , enquanto na com cáustica virtual o volume foi  $5,586 \times 10^3 \lambda^3$ . Nesta comparação o Caso A.II mostrou-se mais compacto do que o Caso A.I, apesar de essa diferença ser bastante sutil.

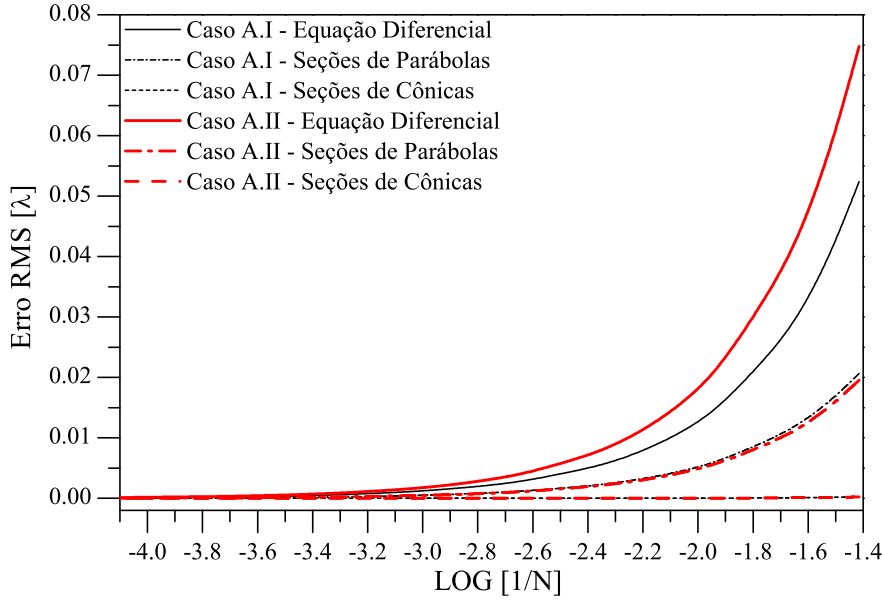


Figura 2.15: Erro *rms* em relação à  $N$  para os casos A.I e A.II

Um aspecto importante a ser avaliado nos métodos propostos no presente trabalho é a convergência da solução, ou seja, deseja-se verificar o comportamento do erro, definido como a diferença entre a solução exata e a obtida numericamente, a medida em que se aumenta o número pontos na utilizados na síntese. A dificuldade de se determinar o erro vem da inexistência de uma solução analítica exata para os casos em estudo. Entretanto, pode-se utilizar como aproximação da solução exata uma superfície de referência obtida através do tradicional método de síntese baseado na solução de uma equação diferencial ordinária com um número muito grande de passos  $N = 10^5$  [71], [72]. Para quantificar o erro em cada síntese, definiu-se um erro *rms* (*root mean square*) da seguinte forma:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( r_{Sn}^{ref} - r_{Sn} \right)^2} \quad (2-50)$$

onde  $r_{Sn}^{ref}$  é a distância do ponto  $P$  à geratriz de referência e  $N$  o número de pontos utilizados. Em todos os estudos de caso  $E_{RMS}$  foi calculado considerando  $N$  igual a múltiplos de 25 no intervalo entre  $N = 25$  ( $\log(1/25) \approx -1,4$ ) e  $N = 12500$  ( $\log(1/12500) \approx -4,1$ ). A Figura 2.15 apresenta o  $E_{rms}$  para os três métodos de síntese. Observando gráfico nota-se que a convergência do Método I é muito mais rápida que a outros dois métodos. No Caso A.I, para  $N = 25$  o Método I (seções de elipses e hipérboles) apresentou  $E_{rms} = 2,30 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II (seções de parábolas)  $E_{rms} = 2,06 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III (baseado em equação diferencial)  $E_{rms} = 5,23 \times 10^{-2}\lambda$ . Portanto, o erro no Método I

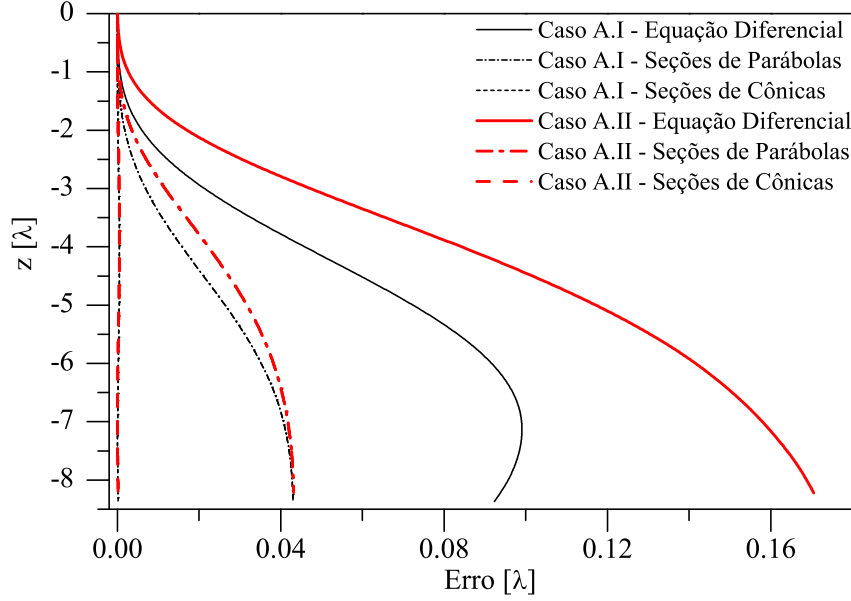


Figura 2.16: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos A.I e A.II

foi aproximadamente 90 vezes menor que Método II e 230 vezes menor que o Método III. Para que os métodos II e III tivessem aproximadamente o mesmo erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$ , seria necessário que a síntese foi feita com  $N = 2000$  e  $N = 5000$ , respectivamente. No Caso A.II, também para  $N = 25$ , o Método I apresentou  $E_{rms} = 2,27 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 1,95 \times 10^{-2}\lambda$  e Método I  $E_{rms} = 7,48 \times 10^{-2}\lambda$ . Nesta configuração o erro no Método I foi 90 vezes menor que no Método II e quase 330 vezes menor que no Método III. Considerando o erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$  seria necessário que a síntese nos métodos II e III foi feita com aproximadamente  $N = 2000$  e  $N = 6000$ , respectivamente. Comparando agora os dois casos, no Método I a configuração com cáustica real (Caso A.I) apresentou erro  $rms$  menor que a configuração com cáustica virtual.

Os métodos de síntese discutidos na Seção 2.3, bem como o apresentado em [71], empregam procedimentos iterativos em que cada ponto da geratriz é obtida a partir do ponto anterior e, conseqüentemente, erro é cumulativo. Por conta disto, em geral, os últimos pontos da síntese são os de maior erro. Para verificar este comportamento calculou-se o seguinte erro absoluto:

$$E_{abs} = \left| r_{Sn}^{ref} - r_{Sn} \right|. \quad (2-51)$$

A Figura 2.16 mostra o erro absoluto em função da coordenada  $z$  considerando a geratriz modelada com 25 pontos. Para o Caso A.I, no segundo ponto (o primeiro é definido *a priori*) da síntese o erro é aproximadamente  $E_{abs} = 8,5 \times 10^{-7}\lambda$ ,  $E_{abs} = 8,5 \times 10^{-7}\lambda$  e  $E_{abs} = 4,8 \times 10^{-5}\lambda$  para o Método I,

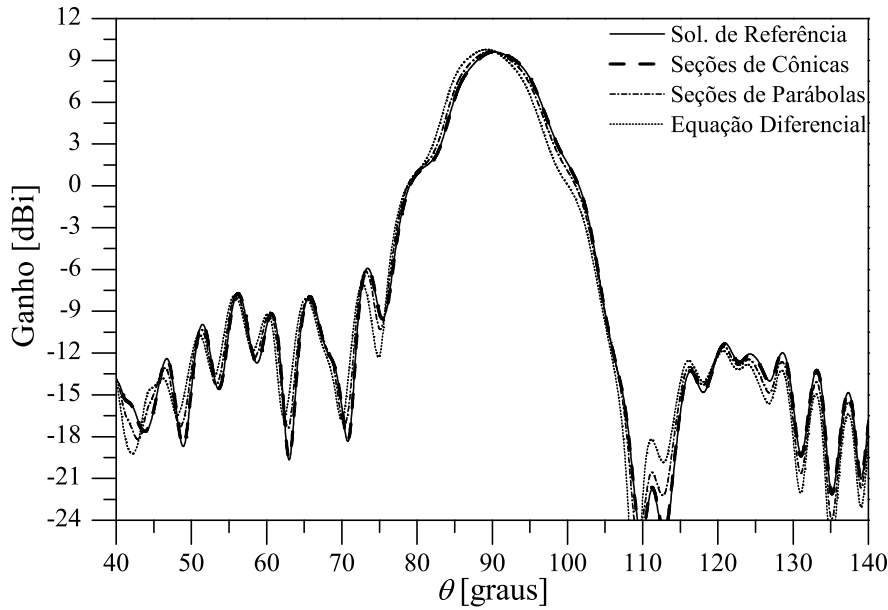


Figura 2.17: Caso A.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

Método II e Método III, respectivamente. No último ponto,  $E_{abs} = 1,5 \times 10^{-4} \lambda$ ,  $4,3 \times 10^{-2} \lambda$  e  $9,2 \times 10^{-2} \lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Em todos os três métodos o erro no último ponto foi maior, entretanto, no Método I ele foi 600 vezes menor que no Método III e quase 300 vezes menor que no Método II. O Caso A.II apresenta valores muito semelhantes. Observa-se, nos dois casos, que no Método I erro absoluto é muito menor que nos outros métodos e, além disto, proporcionalmente ele cresceu menos. Comparando o erro no segundo e o último ponto, no Método III o erro aumentou 1900 vezes, no Método II 50.000 vezes e no Método I 180 vezes. Nos Métodos II e III o erro cresce rapidamente em direção à borda do refletor, sendo essa característica mais aguda no Método III.

As Figuras 2.17 e 2.18 apresentam os diagramas de radiação dos casos A.I e A.II, respectivamente, considerando as geratrizes modeladas pelos três métodos com  $N = 25$  e a geratriz referência  $N = 10^5$ . A análise eletromagnética utilizada para a obtenção dos diagramas de radiação foi realizada pelo algoritmo de análise combinada MMT/MoM considerando  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Como esperado, as maiores discrepâncias ocorreram no diagrama determinado a partir da geratriz modelada pelo Método III, o diagrama correspondente ao Método I o resultado muito similar à solução de referência. Comparando os diagramas de radiação dos casos A.I e A.II, é fácil notar que o diagrama correspondente ao Método III do Caso A.II apresenta maiores diferenças em relação à solução de referência que no Caso A.I. Isso ocorre porque os erros de síntese em A.II também são maiores, conforme ilustram as Figuras 2.15 e 2.16.



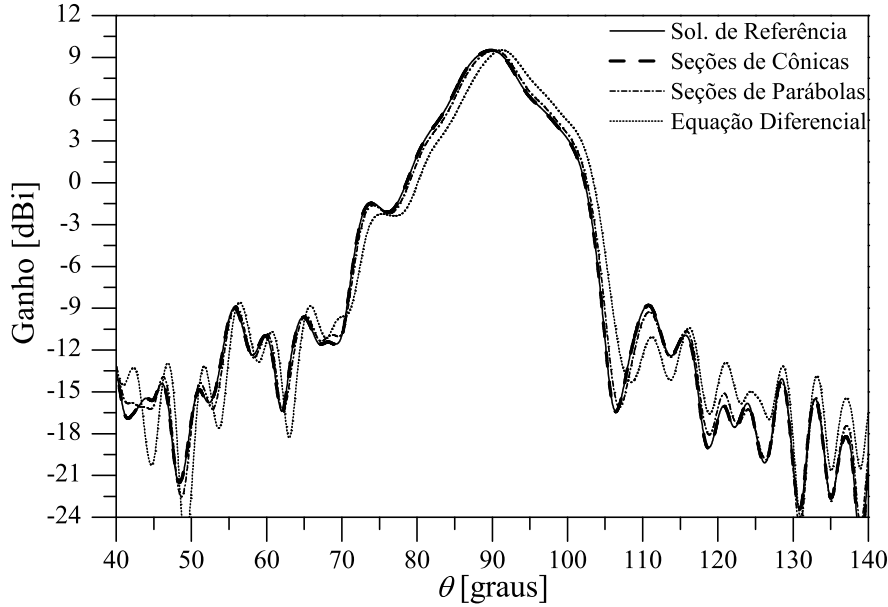


Figura 2.18: Caso A.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

Para avaliar o comportamento do diagrama de radiação quando a setor angular objetivo é mais amplo, o refletor principal de uma configuração OADC foi sintetizado para irradiar, segundo os princípios da GO, um diagrama de radiação setorial uniforme no plano de elevação sobre  $\pm 15^\circ$  (Caso B.I) em relação à linha do horizonte, ou seja, de  $\theta_0 = 105^\circ$  a  $\theta_N = 75^\circ$  (observe a Figura 2.19). O subrefletor utilizado tem rigorosamente as mesmas dimensões e parâmetros do empregado nos casos A.I e A.II, conforme indicado na Tabela 2.1. As geratrizes do subrefletor e do refletor modelado, bem como o traçado de raios, são ilustrados na Figura 2.19, onde a cáustica real em frente ao refletor principal é aparente. A mesma configuração com os limites angulares do campo distante invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 75^\circ$  a  $\theta_N = 105^\circ$  é apresentada no Caso B.II. O subrefletor é o mesmo do Caso B.I, porém  $\theta_N > \theta_0$  e, conseqüentemente, a cáustica é virtual e encontra-se atrás do refletor principal, como pode ser observado na Figura 2.20.

Observando a Tabela 2.1 percebe-se que, assim como nos casos A.I e A.II, as dimensões físicas das antenas nos casos B.I e B.II são muito parecidas. O Caso B.I apresentou volume igual a  $5,700 \times 10^3 \lambda^3$  e o Caso B.II, ligeiramente mais compacta, volume igual a  $5,604 \times 10^3 \lambda^3$ . Novamente a diferença entre os volumes das antenas com cáustica real e virtual é bastante sutil, confirmando que a opção de mapeamento para essa configuração é pouco relevante. Comparando o Caso A.I ao Caso B.I e o Caso A.II ao Caso B.II, há um pequeno aumento da dimensão  $V_M$  e, conseqüentemente, no volume nos casos modelados para provê cobertura em um setor angular maior (casos B.I e B.II). A baixa relevância do tipo de mapeamento e da abertura do setor

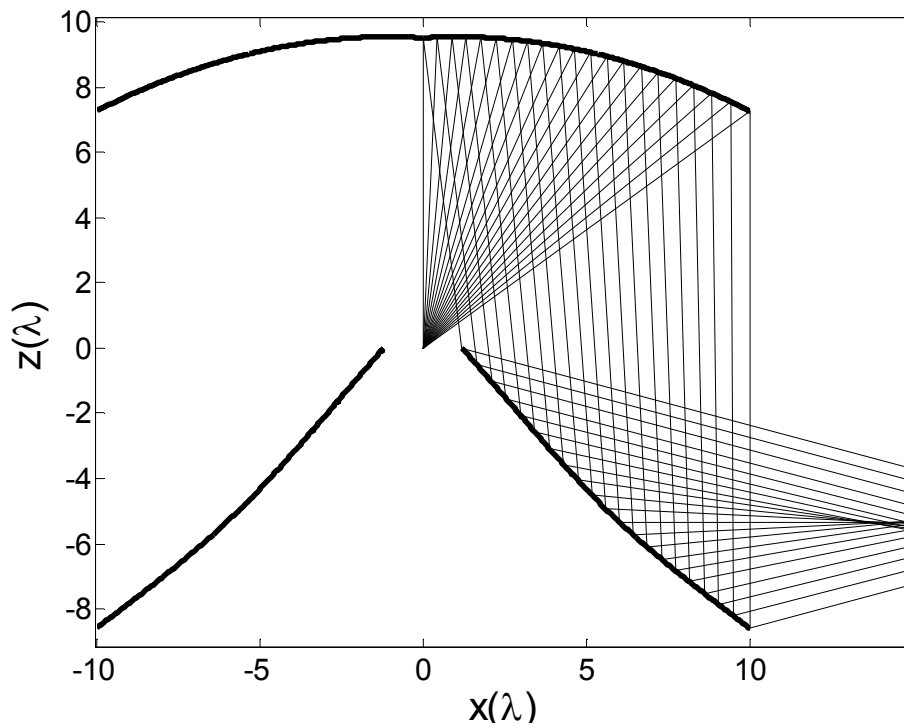


Figura 2.19: Caso B.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real

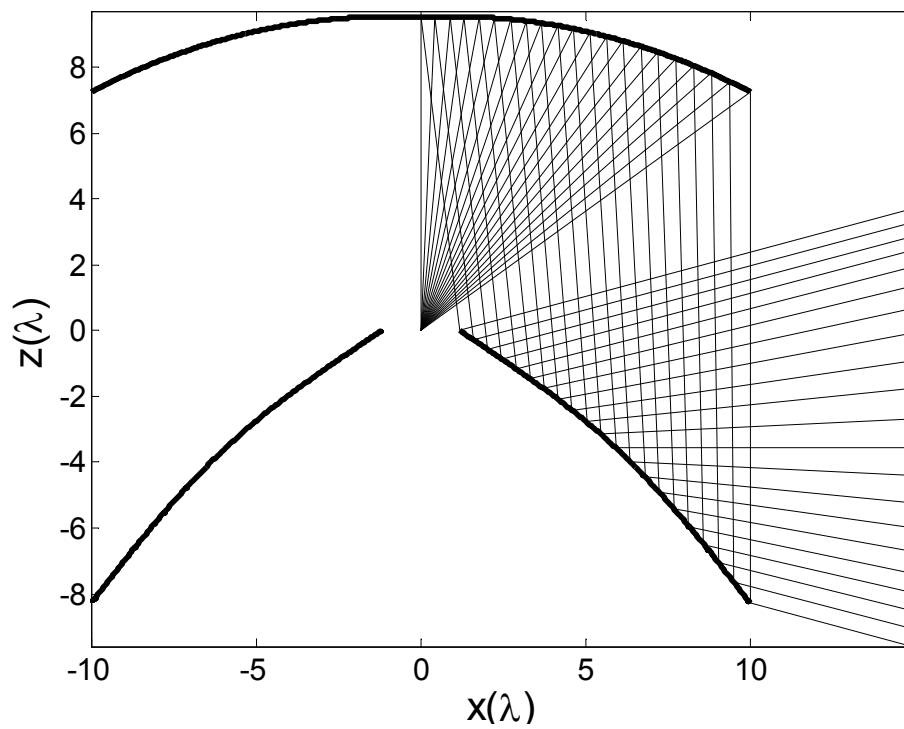


Figura 2.20: Caso B.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual

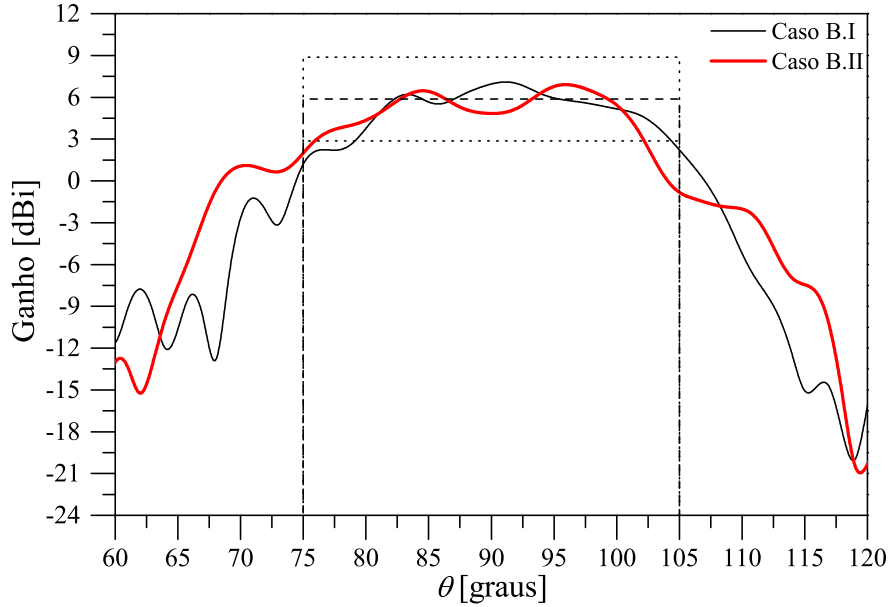
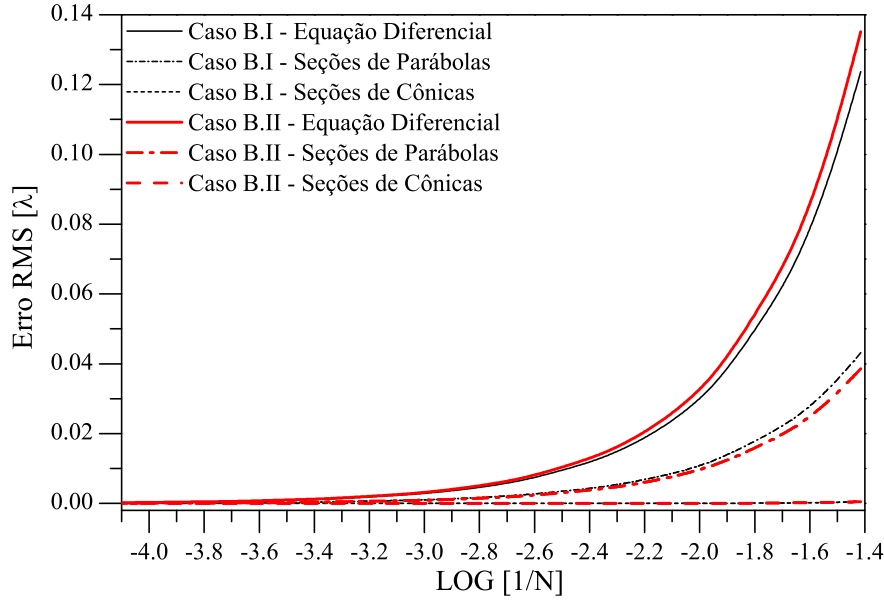
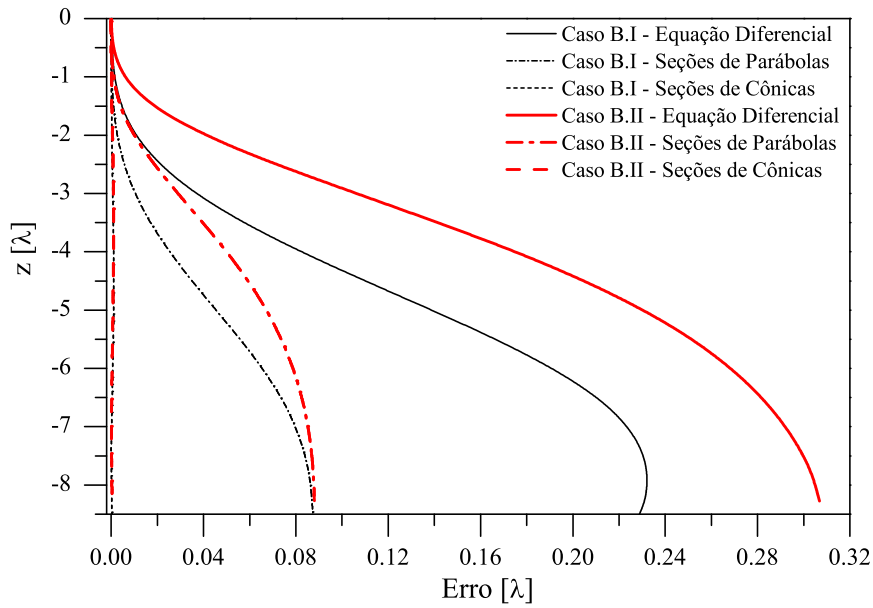


Figura 2.21: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos B.I e B.II

angular objetivo no volume ocorre porque o anel cáustico  $P$  da configuração OADC, de onde provem os raios, está muito afastado da superfície refletora.

Os diagramas de radiação dos casos B.I e B.II ilustrados na Figura 2.21 foram obtidos através do método MMT/MoM considerando as geratrizes obtidas através do Método III com  $N = 10^5$ ,  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Nota-se que nas direções  $80^\circ < \theta < 100^\circ$  os resultados são mais próximos da função objetivo, demonstrando que os efeitos difrativos são menos intensos na região central do refletor. Como consequência, quando é desejado um diagrama uniforme em um setor angular mais amplo, a região mais próxima à função objetivo também é maior.

A análise do erro  $rms$  para os casos B.I e B.II, feita com as mesmas definições e metodologia dos casos anteriores, é ilustrada na Figura 2.22. De imediato, se percebe um comportamento muito semelhante aos casos A.I e A.II, ou seja, o Método III tem o maior erro  $rms$ , o Método I o menor e o Método II um valor intermediário. No Caso B.I, considerando  $N = 25$ , o Método I teve  $E_{rms} = 4,66 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 4,31 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 1,23 \times 10^{-1}\lambda$ , ou seja, o erro do Método I foi mais de 90 vezes menor no que Método II e quase 270 vezes menor que o Método III. Considerando o erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$  seria necessário que a síntese nos métodos II e III fosse feita com cerca de 2200 e 6200 pontos, respectivamente. No Caso B.II, ainda para  $N = 25$ , obteve-se  $E_{rms} = 4,62 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $3,86 \times 10^{-2}\lambda$  e  $1,35 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Neste caso o Método I teve o erro  $rms$  foi mais de 80 vezes menor que no Método II e quase 300 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro  $rms$  do Método

Figura 2.22: Erro *rms* em relação à  $N$  para os casos B.I e B.IIFigura 2.23: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos B.I e B.II

I com  $N = 25$  a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita adotando-se, aproximadamente,  $N = 2000$  e  $N = 5000$ , respectivamente. Comparando os erros *rms* dos casos A.I e A.II, ilustrados na Figura 2.15, aos dos casos B.I e B.II, ilustrados Figura 2.22, percebe-se que ele foi quase duas vezes maior. Essa relação coincide exatamente com a alteração do setor angular objetivo, que no caso B.I e B.II também foi dois vezes maior.

Na Figura 2.23 é ilustrado o erro absoluto considerando a geratriz modelada com 25 pontos. O mesmo comportamento dos casos anteriores é

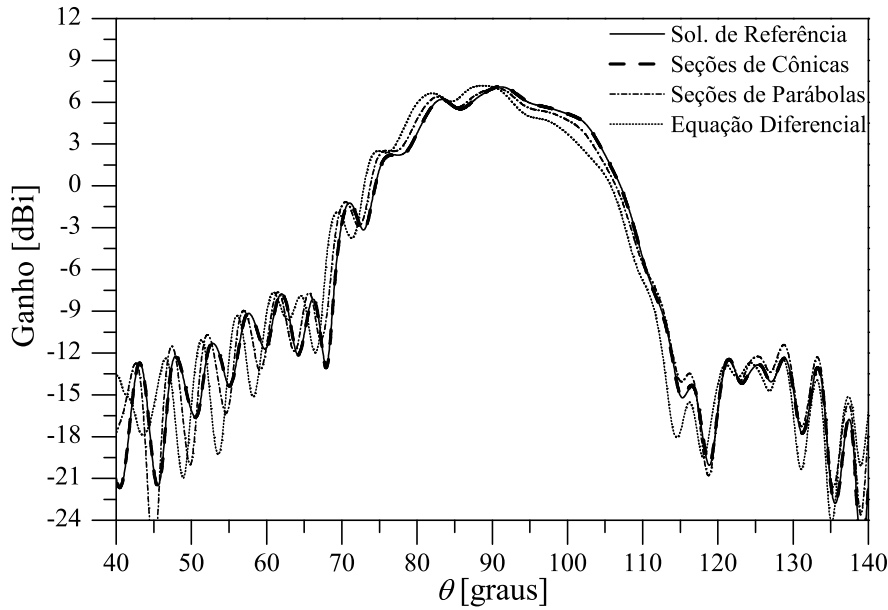


Figura 2.24: Caso B.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

observado, nos Método II e III o erro o cresce rapidamente em direção à borda, enquanto que para no Método I, além de muito menor, apresenta um comportamento mais estável. Para o Caso B.I, no segundo ponto da síntese tem-se  $E_{abs} = 2,09 \times 10^{-6}\lambda$ ,  $2,09 \times 10^{-6}\lambda$  e  $2,31 \times 10^{-4}\lambda$  para o métodos I, II e III, respectivamente, e no último ponto  $E_{abs} = 3,27 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $8,74 \times 10^{-2}\lambda$  e  $2,28 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro nestes pontos, o erro absoluto aumentou, aproximadamente, 150 vezes no Método I, 40.000 vezes no Método II e quase 1000 vezes no Método III. Comparando os erros dos casos A.I e A.II, ilustrados na Figura e 2.16, aos dos casos B.I e B.II ilustrados Figura 2.23 percebe-se que foram quase duas vezes maior, assim como o setor angular objetivo.

As Figuras 2.24 e 2.25 apresentam os diagramas de radiação dos casos B.I e B.II obtidos através do MMT/MoM considerando na síntese as geratrizes modeladas com  $N = 25$ , geratriz referência  $N = 10^5$  e na análise  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Neste exemplo, a discrepância da solução do Método III, comparada à dos casos A.I e A.II, é ainda mais proeminente, enquanto que a solução do Método I é muito similar à solução de referência.

### Configuração OADE com Cobertura Uniforme

Neste estudo de caso (Caso C.I), o refletor principal de uma configuração OADE foi sintetizado para irradiar, sob os princípios da GO, um diagrama de radiação setorial uniforme no plano de elevação sobre  $\pm 7,5^\circ$  em relação à linha do horizonte, ou seja, de  $\theta_0 = 97,50^\circ$  a  $\theta_N = 82,50^\circ$ . Como  $\theta_0 > \theta_N$ , a cáustica encontra-se em frente ao refletor principal, logo é real. A elipse

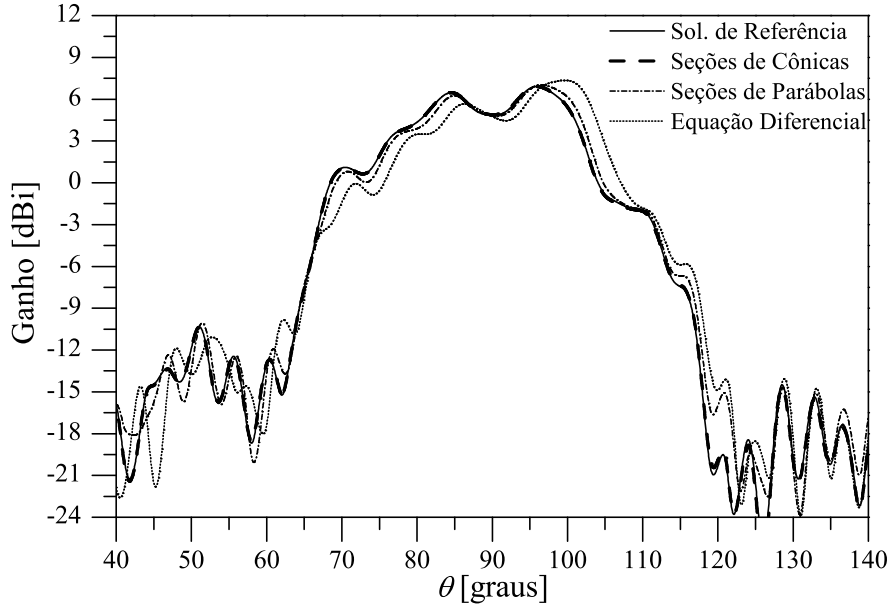


Figura 2.25: Caso B.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

geratriz do subrefletor é obtida a partir de uma configuração clássica OADE com os seguintes parâmetros:  $V_S = 9,5\lambda$ ,  $D_B = 2,4\lambda$ , diâmetro do refletor principal clássico  $D_M = 20\lambda$ , abertura central  $z_B = 0$ , abertura do refletor principal clássico  $W_A = 8,25\lambda$ , e  $\gamma = 90^\circ$ . Estes valores geram uma elipse com excentricidade  $e = 0,270899$ , distância interfocal  $2c = 4,69\lambda$ , e ângulo de elevação  $\beta = 54,79^\circ$  do eixo de simetria em relação ao eixo  $z$ . Como consequência, o diâmetro do subrefletor projetado  $D_S = 16,49\lambda$ , ângulo de borda  $\theta_E = 48,72^\circ$  e a distância  $r_{S0} = 3,77\lambda$  utilizada como valor inicial nos processos de síntese descritos na Seção 2.3. As geratrizes, bem como o traçado de raios, são ilustradas na Figura 2.26. No segundo estudo de caso desta seção (Caso C.II) ilustrado na Figura 2.27, foi adotado o mesmo subrefletor do Caso C.I, a mesma função objetivo porém os limites angulares do campo distante foram invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 82,50^\circ$  a  $\theta_N = 97,50^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e, portanto, a cáustica é virtual. As principais dimensões físicas das antenas sintetizadas neste estudo de caso estão sumarizadas na Tabela 2.2.

Comparando os parâmetros  $D_M$  e  $V_M$  dos casos C.I e C.II percebe-se que a configuração com cáusticas real tem dimensões menores que a configuração com cáustica virtual, sugerindo que, diferente da configuração OADC, na configuração OADE a forma de mapeamento dos raios tem maior importância para a obtenção de antenas mais compactas. Analisando os volumes (observe a Tabela 2.2, a configuração com cáustica real tem volume igual a  $5,270 \times 10^3 \lambda^3$  enquanto que na com cáustica virtual o volume é  $6,073 \times 10^3 \lambda^3$ . Comparando os casos A.I ao C.I e A.II ao C.II, ou seja, casos com mesmos parâmetros iniciais de projeto, função objetivo, limites do campo distante e mapeamento

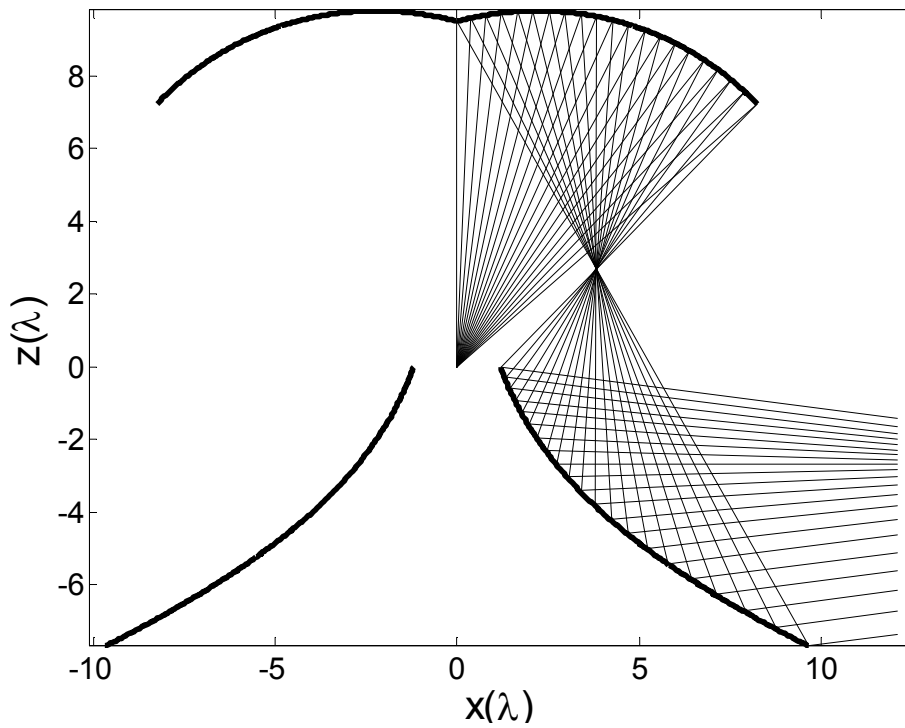


Figura 2.26: Caso C.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real

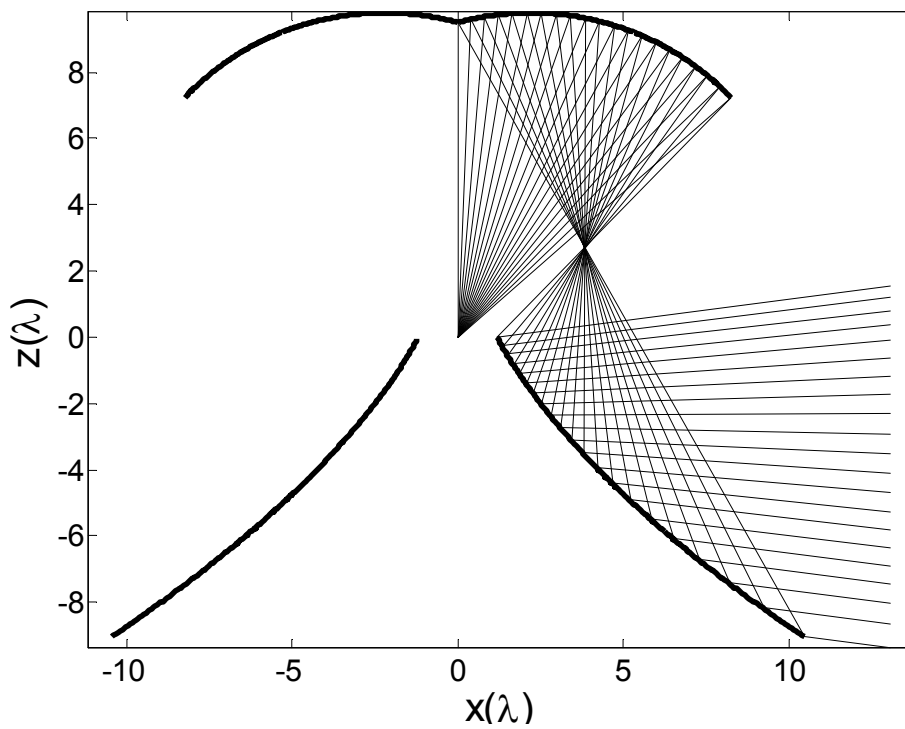


Figura 2.27: Caso C.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual

Parâmetros	Caso C.I	Caso C.II	Caso D.I	Caso D.II
$D_S(\lambda)$	16,49	16,49	16,49	16,49
$V_S(\lambda)$	9,50	9,50	9,50	9,50
$D_M(\lambda)$	19,35	20,89	18,89	22,16
$V_M(\lambda)$	7,68	9,04	7,26	10,17
$D_B(\lambda)$	2,40	2,40	2,40	2,40
$z_B(\lambda)$	0	0	0	0
$2c(\lambda)$	4,69	4,69	4,69	4,69
$e$	0,270899	0,270899	0,270899	0,270899
$\beta$	54,79°	54,79°	54,79°	54,79°
$\theta_E$	48,72°	48,72°	48,72°	48,72°
$\theta_0$	97,50°	82,50°	105,0°	75,0°
$\theta_N$	82,50°	97,50°	75,0°	105,0°
$Volume(10^3\lambda^3)$	5,270	6,073	5,043	6,803

Tabela 2.2: Parâmetros das antenas OADE com diagrama setorial uniforme

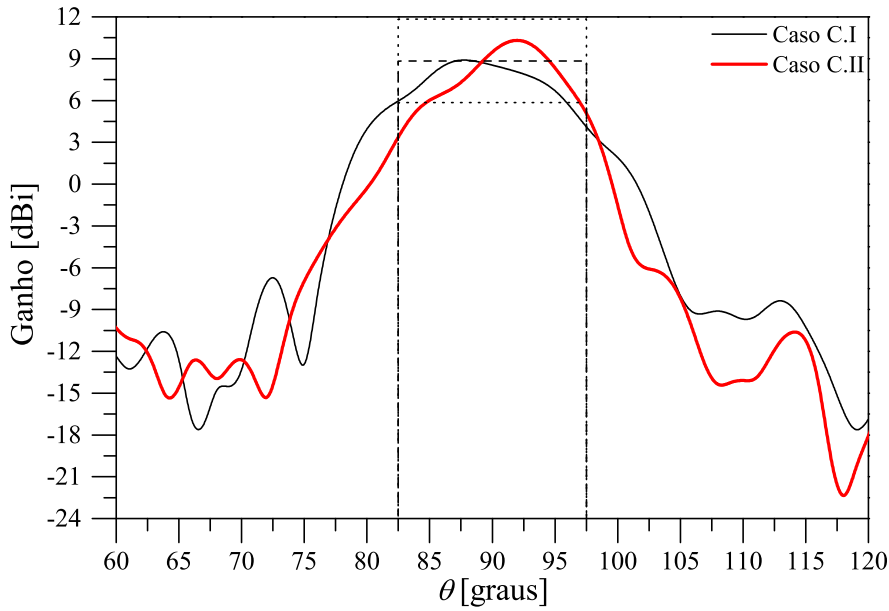


Figura 2.28: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos C.I e C.II

dos raios no campo distante, diferenciando-se pelo mapeamento dos raios no subrefletor, constata-se que (observe as tabelas 2.1 e 2.2) quando a cáustica é real a configuração mais compacta é a OADE e quando a cáustica é virtual é a OADC.

Os diagramas de radiação dos Casos C.I e C.II analisados através do MMT/MoM estão ilustrados na Figura 2.28, juntamente com a função objetivo e os limites  $\pm 3\text{dB}$ . As geratrizes foram obtidas através do Método III com  $N = 10^5$  e análise do MoM considerou discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação  $9.3\text{GHz}$ . É fácil perceber que nas direções centrais  $85^\circ < \theta < 95^\circ$  da região objetivo da síntese os resultados são mais próximos do diagrama de



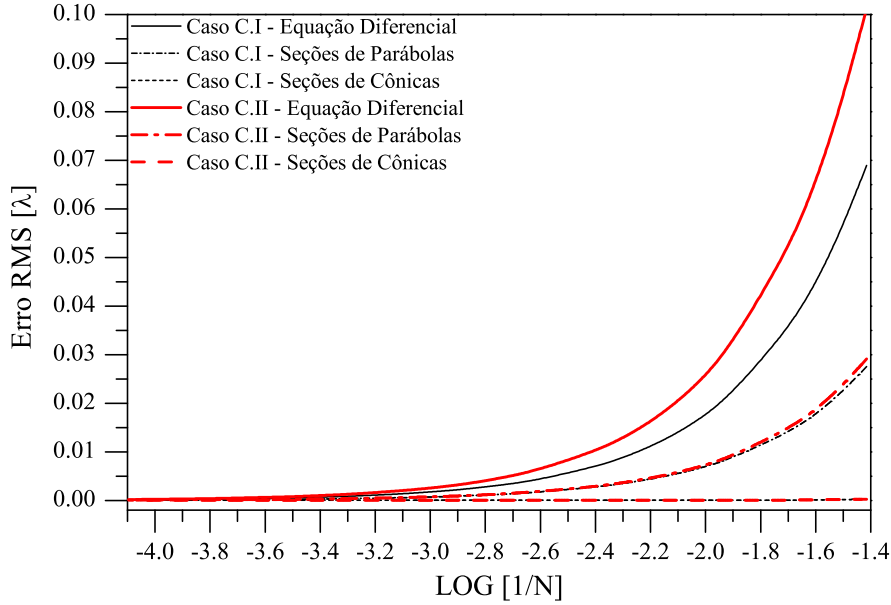


Figura 2.29: Erro  $rms$  em relação à  $N$  para os casos C.I e C.II

radiação buscado. Nesta direção os efeitos difrativos são menos representativos e, conseqüentemente, a síntese da GO apresenta melhores resultados.

Para avaliar o comportamento da convergência dos métodos apresentados, a Figura 2.29 mostra o erro  $rms$  dos casos C.I e C.II. Percebe-se mais uma vez o mesmo padrão de comportamento, ou seja, no Método I a convergência é muito mais rápida que a nos métodos II e III. No Caso C.I, para  $N = 25$ , o Método I teve  $E_{rms} = 2,43 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 2,75 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 6,90 \times 10^{-2}\lambda$ , ou seja, o erro do Método I foi mais de 110 vezes menor que o Método II e mais de 280 vezes menor que o Método III. Considerando o erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$ , a síntese com métodos II e III precisaria ser feita com 3000 e 6500 pontos, respectivamente, para o mesmo erro  $rms$ . Para Caso C.II, obteve-se  $E_{rms} = 2,66 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $2,91 \times 10^{-2}\lambda$  e  $1,01 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Aqui, o Método I teve o erro  $rms$  quase 110 vezes menor que o Método II e mais de 380 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro  $rms$  do Método I com 25 pontos, a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita considerando, aproximadamente  $N = 3000$  e  $N = 10000$ , respectivamente. Comparando agora os casos A.I e A.II, ilustrados na Figura 2.15, aos casos C.I e C.II, ilustrados Figura 2.29, o erro  $rms$  foi cerca de 25% maior na configuração OADE.

O erro absoluto foi novamente determinado considerando as geratrizes modeladas com 25 pontos. A Figura 2.30 mostra o resultado para os três métodos em função da coordenada  $z$ . O mesmo comportamento dos casos anteriores é observado, nos Métodos II e III o erro cresce rapidamente em direção à borda e para o Método I ele é muito menor e cresce menos. No Caso

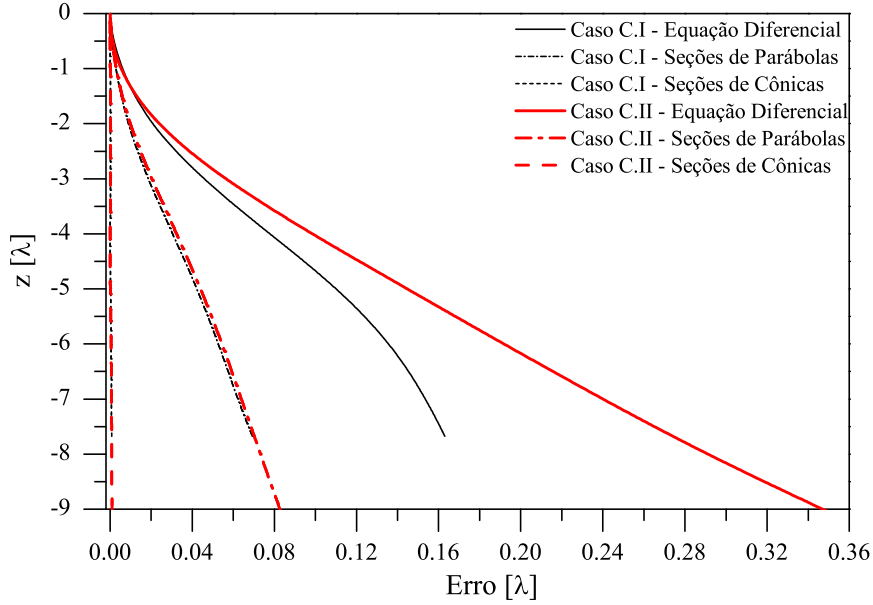


Figura 2.30: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos C.I e C.II

C.I, no segundo ponto da síntese obteve-se  $E_{abs} = 1,66 \times 10^{-6}\lambda$  no Método I,  $E_{abs} = 4,21 \times 10^{-4}\lambda$  no Método II e  $E_{abs} = 4,43 \times 10^{-4}\lambda$  Métodos III. No último ponto,  $E_{abs} = 7,57 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $E_{abs} = 6,92 \times 10^{-2}\lambda$  e  $E_{abs} = 1,63 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro no segundo e o último ponto, houve um aumento de, aproximadamente, 45 vezes no Método I, 165 vezes no Método II e quase 370 vezes no Método III, caracterizando o comportamento mais estável do Método I. Comparando agora os casos A.I e A.II, ilustrados na Figura e 2.16, aos casos C.I e C.II ilustrados Figura 2.30 nota-se na OADE o erro foi quase duas vezes maior.

Os diagramas de radiação dos casos C.I e C.II determinados através do MMT/MoM com 20 seg/ $\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz são apresentados nas Figuras 2.31 e 2.32. A solução de referência foi obtida utilizando-se uma geratriz com um número muito grande de pontos. As maiores discrepâncias ocorreram no diagrama determinado a partir da geratriz modelada pelo Método III, o diagrama correspondente ao Método I o resultado muito similar à solução de referência. Comparando os diagramas de radiação dos casos C.I e C.II, é fácil notar que o diagrama correspondente ao Método I do Caso C.II apresenta maiores diferenças em relação à solução de referência que Caso C.I, fato também observado nos gráficos de erro Figuras 2.29 e 2.30.

Mais uma vez deseja-se avaliar a síntese quando o setor angular objetivo é duas vezes maior. Para isto, o refletor principal de uma configuração OADE foi sintetizado para irradiar, segundo os princípios da GO, um diagrama de radiação setorial uniforme no plano de elevação sobre  $\pm 15^\circ$  (Caso D.I) em

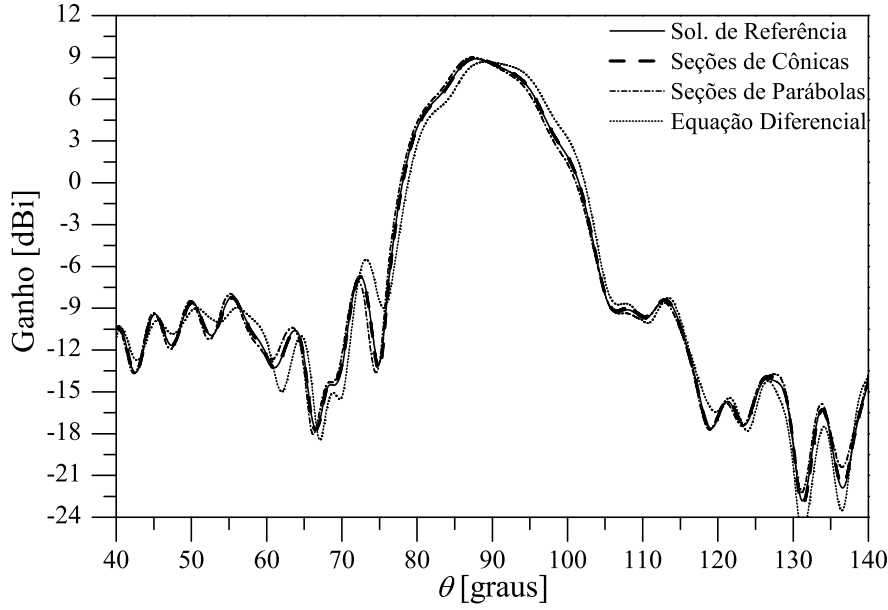


Figura 2.31: Caso C.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

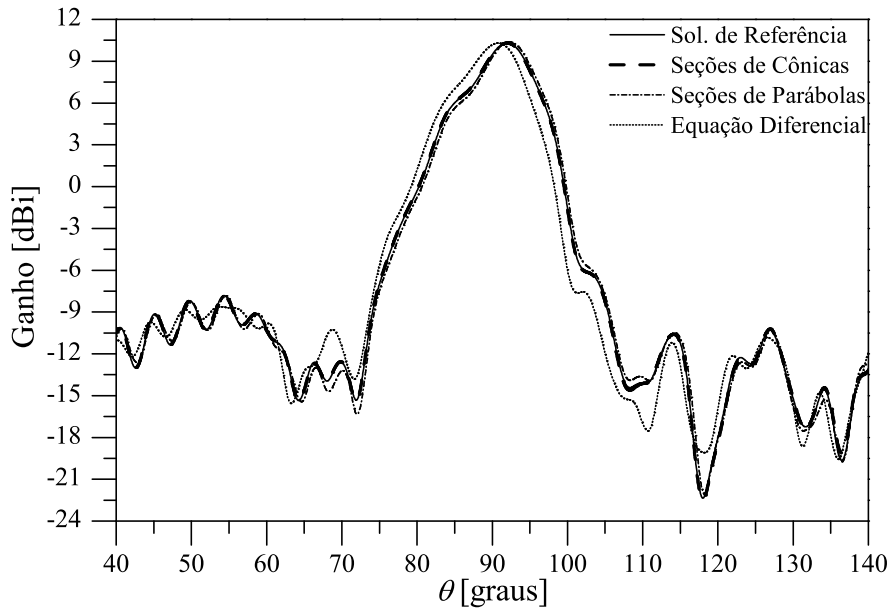


Figura 2.32: Caso C.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

relação à linha do horizonte, ou seja,  $\theta_0 = 105^\circ$  a  $\theta_N = 75^\circ$ . O subrefletor utilizado foi o mesmo dos casos C.I e C.II, conforme indicado na Tabela 2.2. Como  $\theta_0 > \theta_N$  a cáustica é real e está localizada em frente refletor principal. As geratrizes do subrefletor e do refletor modelado, bem como o traçado de raios, são ilustrados na Figura 2.33. No último estudo de caso (Caso D.II) desta seção, mantendo o subrefletor dos caso C.I e C.II o refletor principal foi modelado com os limites angulares do campo distante invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 75^\circ$  a  $\theta_N = 105^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e a cáustica é virtual está localizada atrás refletor principal, como se observa na Figura 2.34.

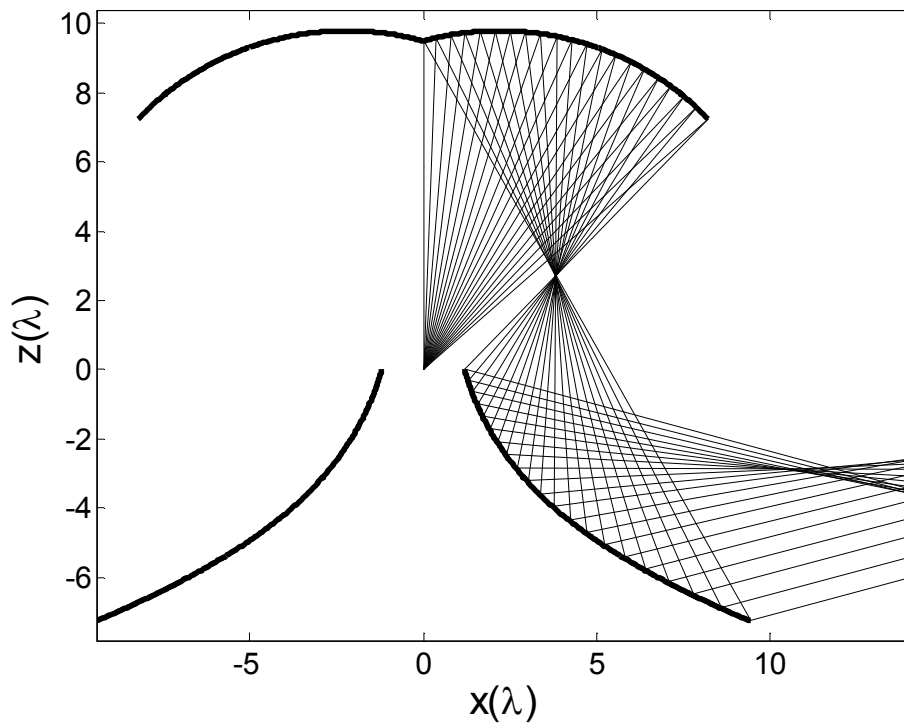


Figura 2.33: Caso D.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real

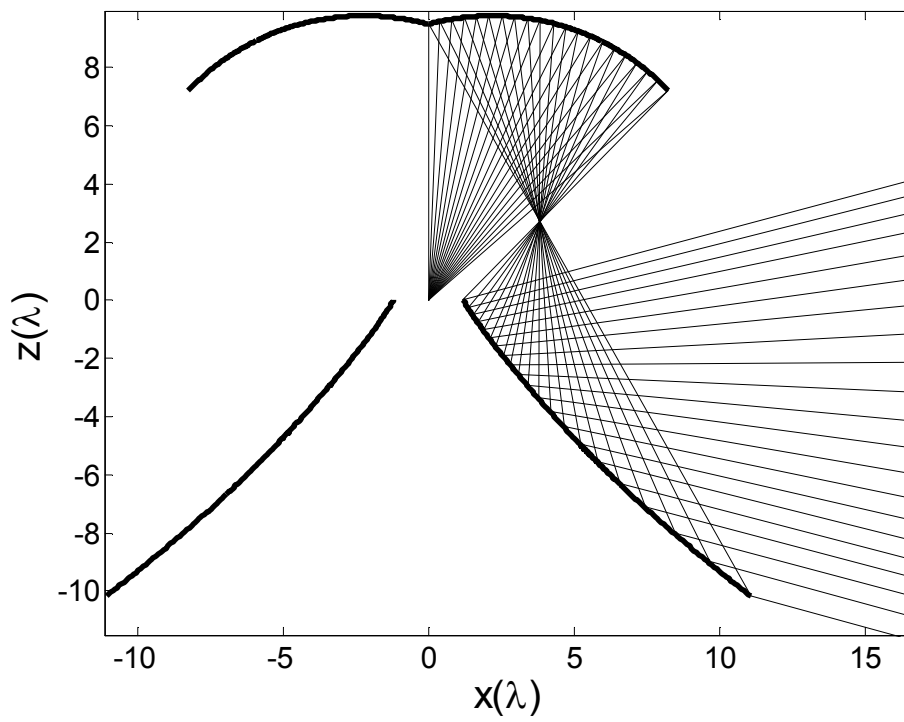


Figura 2.34: Caso D.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual

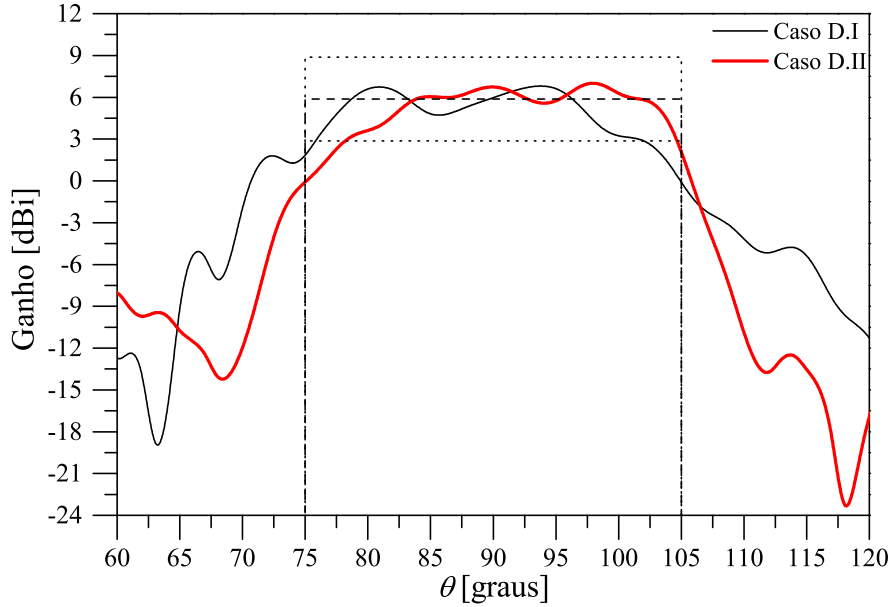


Figura 2.35: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos D.I e D.II

Ao analisar as dimensões de projeto  $D_M$  e  $V_M$  dos casos D.I e D.II nota-se que a configuração com cáusticas real (Caso D.I) tem dimensões menores que a configuração com cáustica virtual (Caso D.II), sugerindo mais uma vez que na configuração OADE a forma de mapeamento dos raios tem maior importância para a obtenção de antenas mais compactas. Comparando os volumes (observe a Tabela 2.2, a configuração com cáustica real tem volume igual a  $5,043 \times 10^3 \lambda^3$  enquanto que na com cáustica virtual o volume é  $6,803 \times 10^3 \lambda^3$ . Comparando as antenas OADE com cáustica real (caso C.I e D.I) percebe-se um comportamento diferente do observado para a configuração OADC com cáustica real (caso A.I e B.I), ao dobrar o setor angular objetivo o volume da antena reduziu. Na configuração OADE com cáustica virtual (caso C.II e D.II) o comportamento foi o mesmo da OADC (casos A.II e B.II), ou seja, o volume foi maior na antena com setor angular objetivo maior, porém o aumento foi maior. Comparando os casos B.I ao D.I e B.II ao D.II, ou seja, casos com mesmos parâmetros, diferenciando-se pelo mapeamento dos raios no subrefletor, constata-se novamente (observe as tabelas 2.1 e 2.2) que quando a cáustica em frente ao refletor principal é real a configuração mais compacta é a OADE e quando a cáustica é virtual é a OADC.

Novamente, foi utilizado MMT/MoM para a determinação dos diagramas de radiação dos Casos D.I e D.II e os resultados estão ilustrados na Figura 2.35. As geratrizes foram obtidas através do Método III com  $N = 10^5$  e análise do MoM considerou discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Para configuração OADE repete-se comportamento observado na configuração OADC, nas direções  $80^\circ < \theta < 100^\circ$  os resultados são mais próximos da função

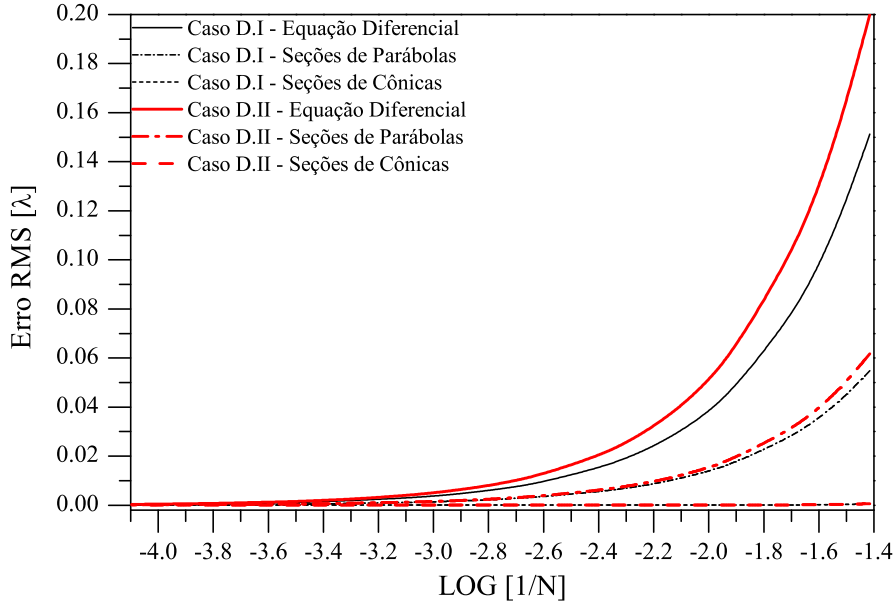


Figura 2.36: Erro  $rms$  em relação à  $N$  para os casos D.I e D.II

objetivo, confirmando que os efeitos difrativos são menos intensos na região central do refletor. Comparando os estudos de caso C.I e C.II a D.I e D.II, nota-se que quando se deseja o setor angular objetivo mais amplo, o diagrama de radiação obtido é mais próximo da função objetivo. Observando o traçado de raios e o diagrama de radiação, percebemos que as regiões próximas às bordas do refletor são responsáveis pela formação do diagrama de radiação na região próxima aos limites do campo distante. Por exemplo, no Caso D.II a região da borda superior do refletor modelado está associada ao comportamento do diagrama de radiação nas direções próximas à  $75^\circ$  e, conseqüentemente a parte inferior nas direções próximas à  $105^\circ$ .

A metodologia utilizada nos estudos de caso anteriores para avaliar a convergência dos métodos foi mais uma vez aplicada. A Figura 2.36 mostra o erro  $rms$  dos Casos D.I e D.II e repete-se o padrão de comportamento dos casos anteriores, com Método I apresentando erro muito menor que os métodos II e III. No Caso D.I, para  $N = 25$ , o Método I teve  $E_{rms} = 4,79 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 5,49 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 1,51 \times 10^{-1}\lambda$ , ou seja, o erro do Método I foi mais de 110 vezes menor no que Método II e mais de 310 vezes menor que o Método III. Considerando o erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$  seria necessário que a síntese nos métodos II e III fosse feita com cerca de 3000 e 8000 pontos, respectivamente. Para Caso D.II, obteve-se  $E_{rms} = 6,00 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $6,17 \times 10^{-2}\lambda$  e  $2,00 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Aqui, o Método I teve o erro  $rms$  mais de 100 vezes menor que no Método II e mais de 330 vezes menor que no Método III. Considerando o Método I com  $N = 25$ , a síntese com métodos II e III precisaria ser feita

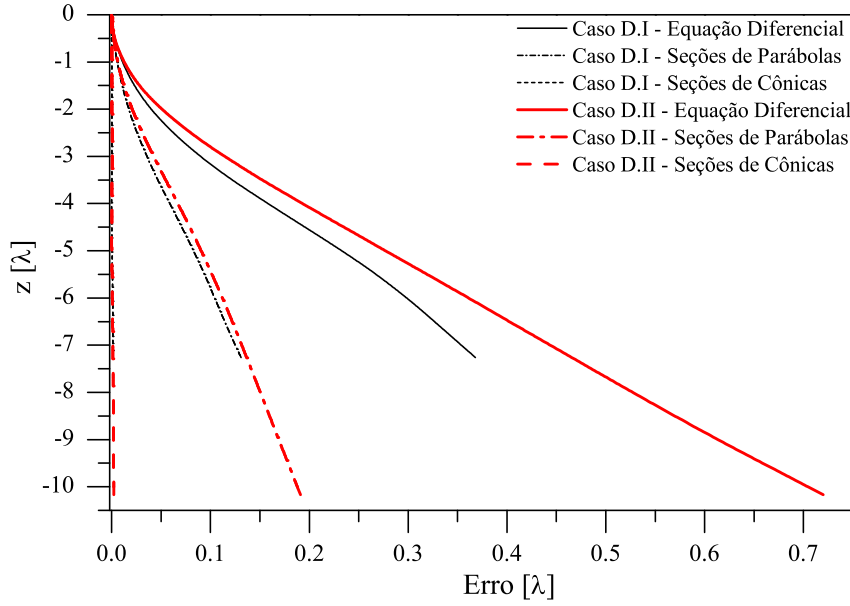


Figura 2.37: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos D.I e D.II

com aproximadamente 2500 e 8000 pontos, respectivamente, para o mesmo erro *rms*.

A Figura 2.37 mostra o erro absoluto na geratriz considerando as sínteses com 25 pontos. Pode-se observar que o erro cresce rapidamente em direção à borda nos Método II e III, enquanto que para no Método I é muito pequeno, repetindo o comportamento dos casos anteriores. Para o Caso D.I, no segundo ponto da síntese tem-se  $E_{abs} = 3,48 \times 10^{-5}\lambda$ ,  $E_{abs} = 9,22 \times 10^{-4}\lambda$  e  $E_{abs} = 6,27 \times 10^{-4}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente, e no último ponto  $E_{abs} = 1,45 \times 10^{-3}\lambda$ ,  $E_{abs} = 1,31 \times 10^{-1}\lambda$  e  $E_{abs} = 3,68 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro nestes pontos, houve um aumento de menos de 20 vezes no Método I, mais de 140 vezes no Método II e quase 600 vezes no Método III. Comparando os casos C.I e C.II, ilustrados na Figura e 2.30, aos casos D.I e D.II ilustrados Figura 2.37 verifica-se novamente que o erro absoluto dobrou de valor, assim como o setor angular objetivo da síntese. Comparando agora os casos B.I e B.II, ilustrados na Figura e 2.23, aos casos D.I e D.II nota-se na configuração OADE o erro foi quase duas vezes maior que na OADC.

As Figuras 2.38 e 2.39 apresentam os diagramas de radiação dos casos D.I e D.II obtidos através do método de análise MMT/MoM considerando na síntese as geratrizes modeladas com  $N = 25$ , geratriz referência  $N = 10^5$  e na análise do MoM discretização de 20 seg/ $\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Novamente constata-se que a discrepância da solução baseada em equação diferencial é maior, enquanto que a solução que utiliza seções de cônicas é

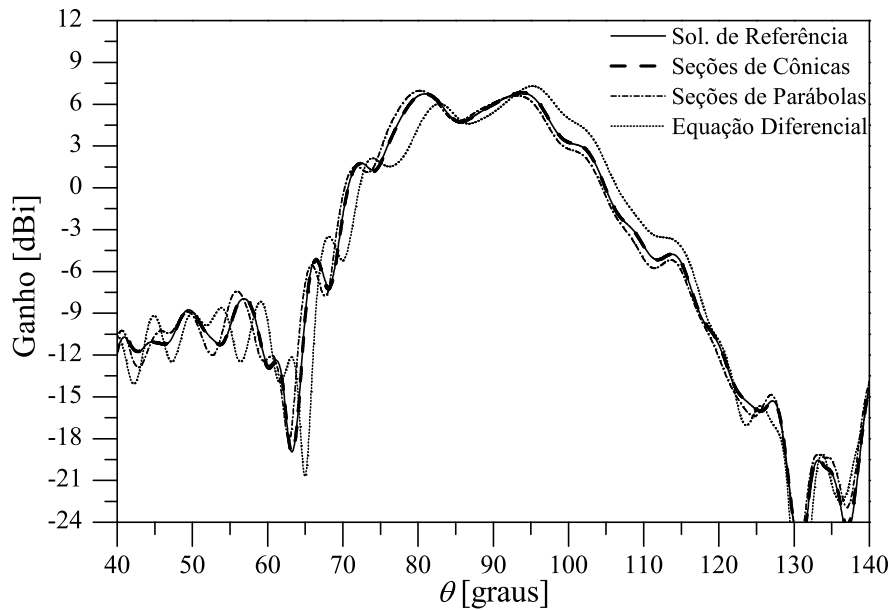


Figura 2.38: Caso D.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

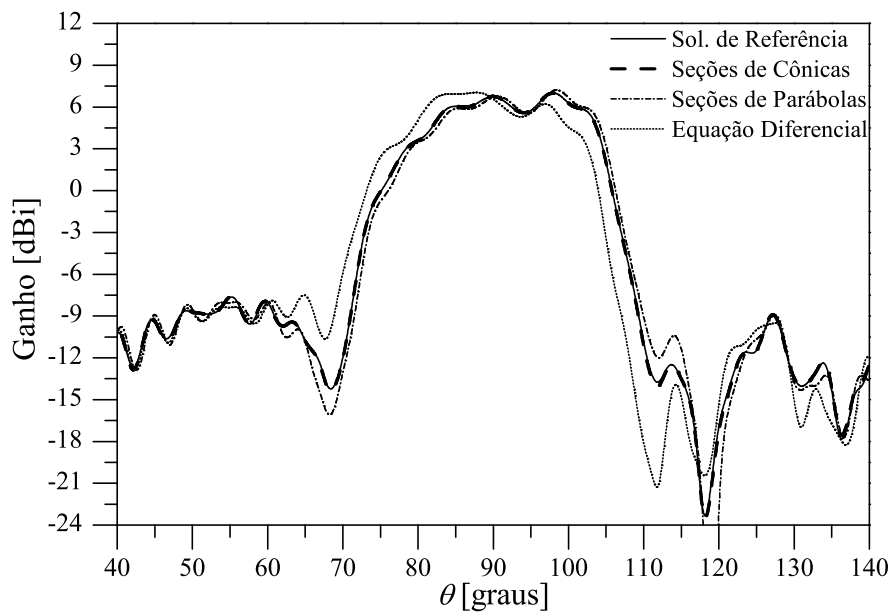


Figura 2.39: Caso D.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

muito similar à solução de referência. Comparando estes resultados com os dos casos C.I e C.II, verifica-se que as diferenças são maiores assim como os erros de síntese observados em 2.36 e 2.37.

Nos diversos estudos de casos realizados nessa seção, pôde-se perceber que quando a função objetivo é constante, o método de síntese baseado na concatenação de seções de elipses e hipérboles mais é eficiente que o método baseado em seções parábolas ou o que resolve uma equação diferencial ordinária. O próximo objetivo é verificar se esse comportamento é particular desta função objetivo, ou também se verifica para outros tipos de função. Para



isto, na próxima seção será feito o mesmo estudo porém considerando o diagrama de radiação objetivo uma função cossecante ao quadrado. Em relação ao volume das antenas ficou claro que na configuração OADC o tipo mapeamento dos raios e o setor angular objetivo tem pouca influência nos resultados. Já na configuração OADE as alterações são mais significativas. Comparando antenas com mesmas características de cobertura, as configurações OADE com cáustica real foram a mais compactas.

### 2.4.2

#### Cobertura Cossecante ao Quadrado

Nesta seção, a função objetivo que descreve o diagrama de radiação no plano de elevação é do tipo cossecante ao quadrado [84], [87], [89]. Desta forma, a atenuação do espaço livre é compensada pela maior diretividade da antena nas regiões mais afastadas da fonte, conseguindo-se, segundo os princípios da GO, distribuição uniforme de potência na região de cobertura. A função objetivo é definida como [71]:

$$G_A(\theta) = G_o \csc^2\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right). \quad (2-52)$$

onde  $G_o$  é uma constante através da normalização da potência total irradiada ( $P_{rad}$ ). Definindo  $P_{rad} = 1$ , pode-se escrever:

$$\int_0^{2\phi} \int_{\theta_0}^{\theta_N} G_o \csc^2\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) \sin\theta d\theta d\phi = 1. \quad (2-53)$$

Resolvendo a integral é fácil mostrar que:

$$G_o = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\cos\theta_0 \cos\theta_N}{\cos\theta_0 - \cos\theta_N} \right| \quad (2-54)$$

onde o módulo foi novamente inserido para generalizar a formulação tornando-a válida para os dois tipos de mapeamento dos raios.

#### Configuração OADC com Cobertura Cossecante ao Quadrado

No primeiro estudo de caso desta seção (Caso E.I), o refletor principal de uma configuração OADC foi modelado para provê um diagrama de radiação cossecante ao quadrado no plano de elevação entre  $\theta_0 = 115^\circ$  a  $\theta_N = 93^\circ$ . Como  $\theta_0 > \theta_N$ , a cáustica é formada em frente ao refletor principal, logo é uma cáustica real. A elipse geratriz do subrefletor é obtida a partir de uma configuração clássica OADC com os seguintes parâmetros:  $V_S = 8,0\lambda$ ,  $D_B = 2,4\lambda$ , diâmetro do refletor principal clássico  $D_M = 17,56\lambda$ , abertura central  $z_B = 0$ , abertura do refletor principal clássico  $W_A = 7,0\lambda$ , e  $\gamma = 102^\circ$ . Estes valores geram uma elipse com excentricidade  $e = 0,728301$ , distância

Parâmetros	Caso E.I	Caso E.II	Caso F.I	Caso F.II
$D_S(\lambda)$	18,59	18,59	18,59	18,59
$V_S(\lambda)$	8,00	8,00	8,00	8,00
$D_M(\lambda)$	17,51	17,52	17,43	17,46
$V_M(\lambda)$	8,57	8,48	9,73	9,26
$D_B(\lambda)$	2,40	2,40	2,40	2,40
$z_B(\lambda)$	0	0	0	0
$2c(\lambda)$	42,61	42,61	42,61	42,61
$e$	0,728301	0,728301	0,728301	0,728301
$\beta$	169,87°	169,87°	169,87°	169,87°
$\theta_E$	58,72°	58,72°	58,72°	58,72°
$\theta_0$	115,0°	93,0°	135,0°	93,0°
$\theta_N$	93,0°	115,0°	93,0°	135,0°
Volume( $10^3\lambda^3$ )	4,295	4,275	4,574	4,461

Tabela 2.3: Parâmetros das antenas OADE com diagrama setorial uniforme

interfocal  $2c = 42,607\lambda$ , e ângulo de elevação do eixo de simetria  $\beta = 169,87^\circ$  em relação ao eixo  $z$ . Como consequência, o diâmetro do subrefletor projetado é  $D_S = 18,59\lambda$ , o ângulo de borda  $\theta_E = 58,72^\circ$ . As geratrizes e o traçado de raios são apresentados na Figura 2.40 e valores citados acima, bem como outras dimensões físicas das antenas sintetizadas estão sumarizados na Tabela 2.3. No segundo estudo de caso (Caso E.II) desta seção, foi utilizado o mesmo subrefletor do Caso E.I e o refletor principal foi modelado com os limites angulares do campo distante invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 93^\circ$  a  $\theta_N = 115^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e, portanto, a cáustica é virtual e está localizada atrás refletor principal, conforme ilustrado na Figura 2.41.

Comparando o diâmetro  $D_M$  e a altura  $V_M$  dos estudos de caso E.I e E.II (observe a Tabela 2.3) verifica-se que são bem próximos, confirmando que o tipo de mapeamento na configuração OADC, independente da função objetivo, é pouco significativo na determinação de estruturas mais compactas. Analisando os volumes, a configuração com cáustica real tem volume igual a  $4,295 \times 10^3\lambda^3$  enquanto na com cáustica virtual o volume foi de  $4,275 \times 10^3\lambda^3$ . Nesta comparação a configuração com cáustica virtual mostrou-se ligeiramente mais compacta do que a com cáustica real.

Os diagramas de radiação dos Casos E.I e E.II ilustrados Figura 2.42 na foram determinados numericamente através do método de análise combinada MMT/MoM. As geratrizes utilizada para análise foram obtidas através do método baseado na solução de uma equação diferencial utilizando um número muito grande de pontos. Na análise do MoM foi considerada uma discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  (20 segmentos em cada comprimento de onda) e a frequência de operação 9.3GHz. Como esperado, o diagrama de radiação obtido pela análise

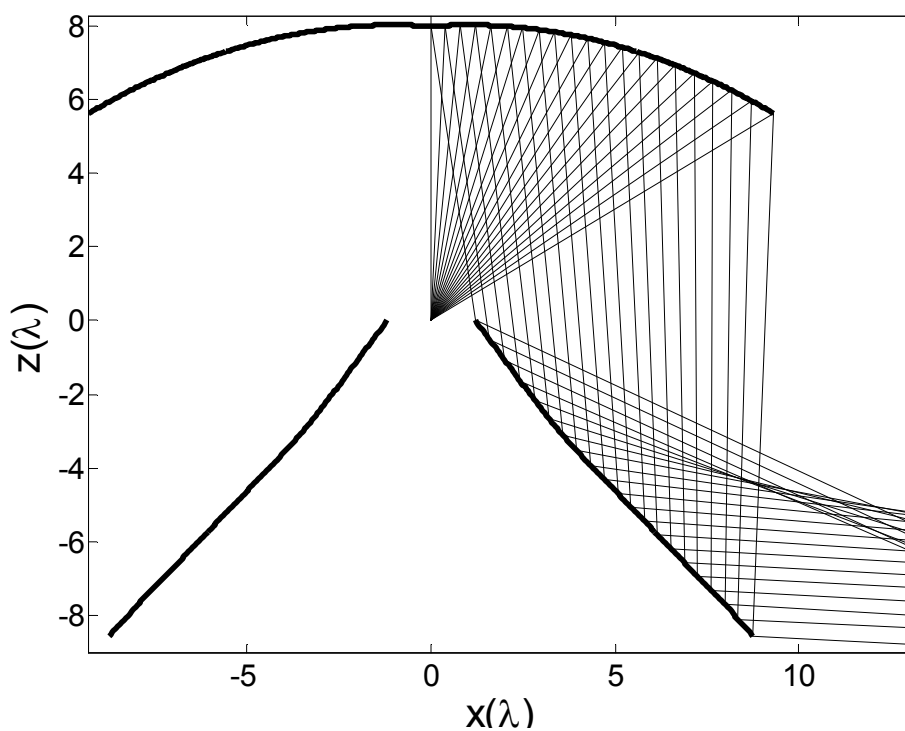


Figura 2.40: Caso E.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real

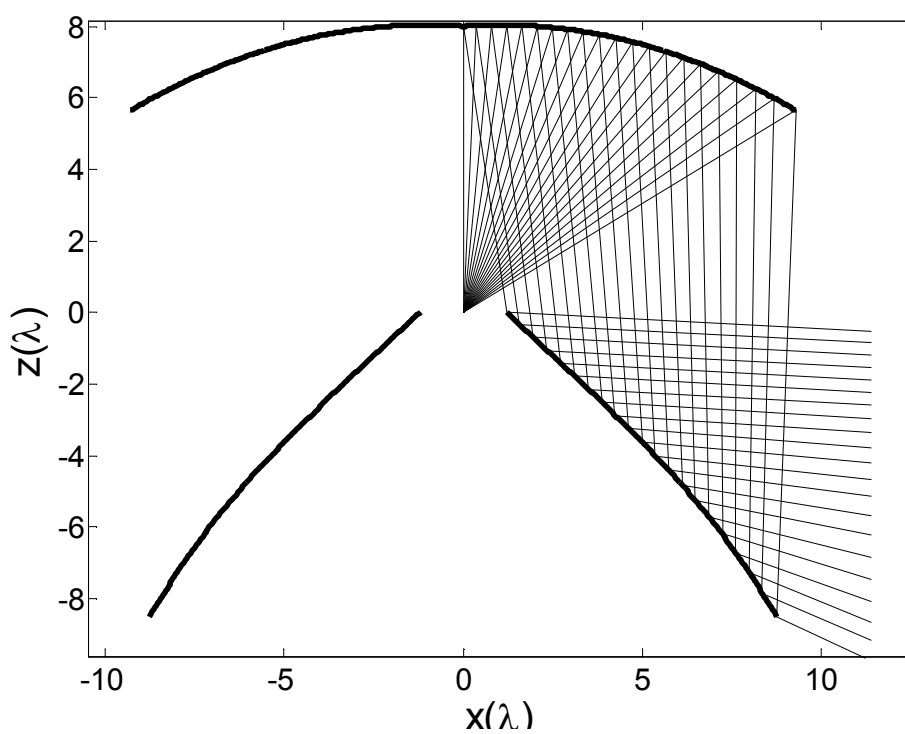


Figura 2.41: Caso E.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual

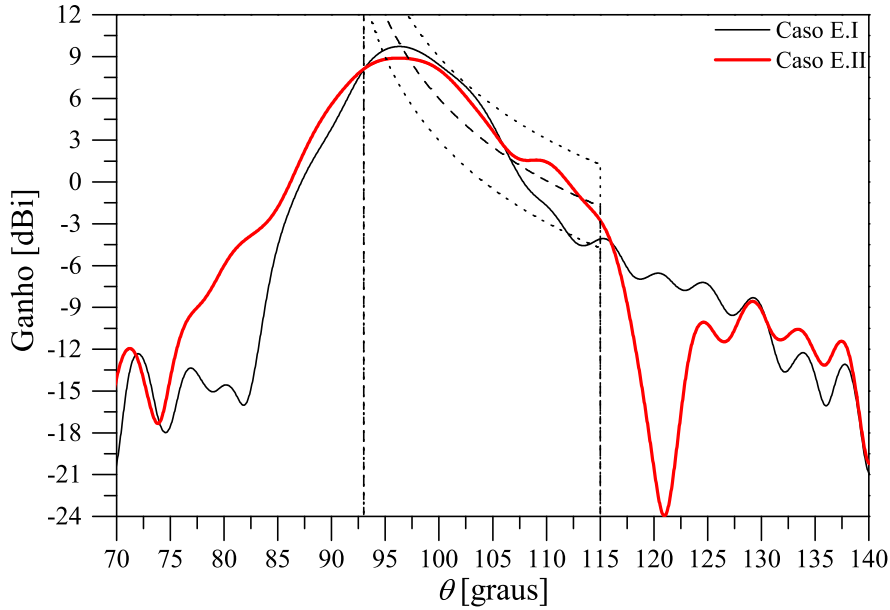


Figura 2.42: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos E.I e E.II

eletromagnética rigorosa é diferente da função objetivo da GO, entretanto, constata-se boa concordância entre os limites  $\theta_0$  e  $\theta_N$  da síntese. Estas discrepâncias podem ser atribuída à diferenças entre o diagrama de radiação da corneta coaxial considerada na análise e o modelo de abertura coaxial utilizado na síntese, além dos efeitos difrativos e de acoplamento eletromagnético não considerados no processo de síntese [79]. Observando a parte inferior do refletor modelado no Caso E.I (Figura 2.40) e a parte superior do refletor modelado no Caso E.II (Figura 2.41), nota-se que essas regiões assemelham-se a uma seção de uma parábola refletindo os raios em uma mesma direção e, desta forma, definindo o máximo no diagrama de radiação. Nas partes superior do Caso E.I e inferior do Caso E.II, percebe-se o espalhamento da energia refletida definindo a forma de cossecante ao quadrado nos diagramas de radiação.

Para avaliar a convergência dos métodos quando a função objetivo é cossecante ao quadrado, a Figura 2.43 apresenta o erro  $rms$  em função do número de pontos adotado para a síntese. De maneira análoga à Seção 2.4.1, a superfície de referência utilizada para a determinação do erro foi obtida através do método de síntese baseado na solução de uma equação diferencial ordinária (Método III) com um número muito grande de passos ( $N = 10^5$ ). No Caso E.I, para  $N = 25$  o Método I (seções de elipses e hipérboles) apresentou  $E_{rms} = 5,18 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II (seções de parábolas)  $E_{rms} = 5,12 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III (baseado em equação diferencial)  $E_{rms} = 1,48 \times 10^{-1}\lambda$ , ou seja, o erro no Método I foi quase 100 vezes menor que no Método II e 300 vezes menor que o Método III. Para que os métodos II e III tivessem aproximadamente o mesmo erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$  seria necessário que a síntese foi

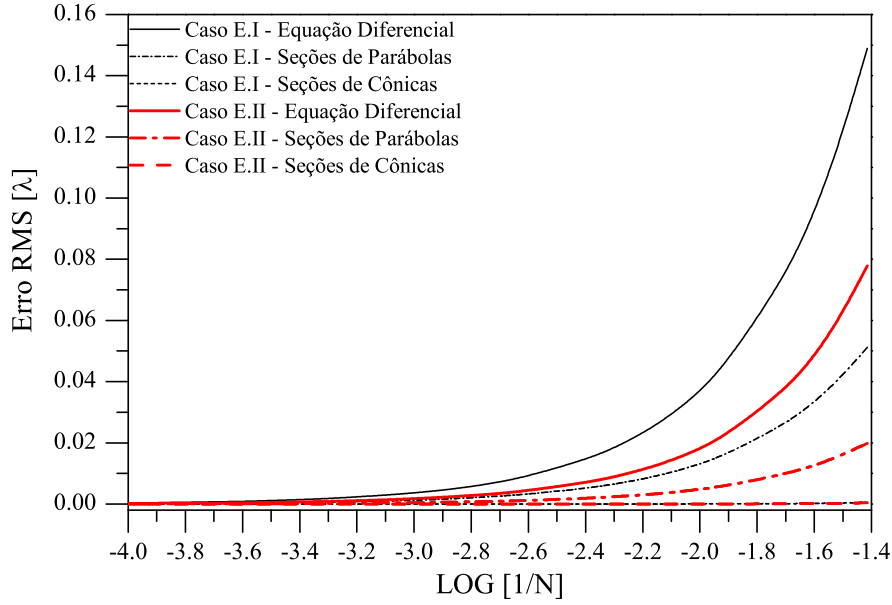


Figura 2.43: Erro *rms* em relação à  $N$  para os casos E.I e E.II

feita com  $N = 2500$  e  $N = 6000$ , respectivamente. No Caso E.II, também para  $N = 25$ , o Método I apresentou  $E_{rms} = 3,86 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 1,98 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 7,79 \times 10^{-2}\lambda$ . Logo, no Método I o erro foi mais de 50 vezes menor que no Método II e 200 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro *rms* do Método I com 25 pontos, a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita considerando, aproximadamente  $N = 1250$  e  $N = 4000$ . Da Figura 2.43 percebe-se um comportamento muito semelhante ao dos casos de estudo apresentados na Seção 2.4.1, onde a cobertura objetivo era setorial uniforme. Fica claro que o erro *rms* do Método I é muito menor que o dos outros métodos, indicando a convergência para solução independente da função objetivo adotada.

A Figura 2.44 mostra erro absoluto determinado para os três métodos em função da coordenada  $z$  considerando as geratrizes modeladas com 25 pontos. O mesmo comportamento dos casos anteriores é observado, nos Método II e III o erro cresce rapidamente em direção à borda e para no Método I ele é muito menor. No Caso C.I, no segundo ponto da síntese obteve-se  $E_{abs} = 2,12 \times 10^{-5}\lambda$  no Método I,  $E_{abs} = 2,12 \times 10^{-5}\lambda$  no Método II e  $E_{abs} = 2,03 \times 10^{-3}\lambda$  Métodos III. No último ponto,  $E_{abs} = 4,88 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $E_{abs} = 6,77 \times 10^{-3}\lambda$  e  $E_{abs} = 1,68 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro no segundo e o último ponto, houve um aumento de pouco mais de 20 vezes no Método I, 80 vezes nos métodos II e III, caracterizando o comportamento mais estável do Método I.

Analisando o erro no Caso E.I na Figura 2.44 percebe-se que na região  $-4 < z < 0$  o erro com Método II aumenta rapidamente e para a região

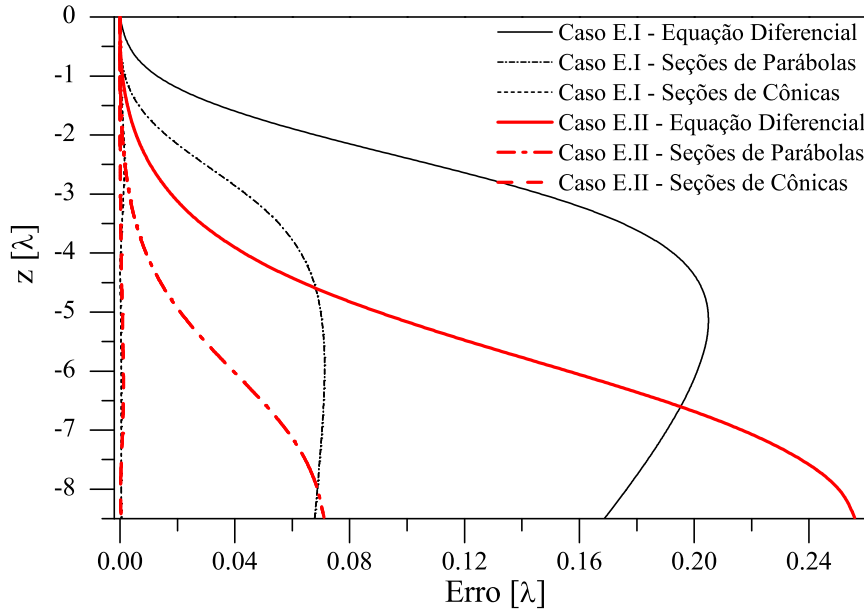


Figura 2.44: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos E.I e E.II

$-8,5 < z < -4$  erro estabiliza e até diminuiu. Observando agora a Figura 2.40, verifica-se que a região da geratriz  $-8,5 < z < -4$  se assemelha a uma seção de uma parábola refletindo os raios em uma mesma direção. Consequentemente, erro no método que concatena seções de parábolas reduz significativamente. No caso E.II, é a parte superior  $-4 < z < 0$  do refletor que se assemelha a uma parábola, e nessa região o erro com o Método II cresce muito pouco. A partir dessa observação pode-se intuir que a eficiência do método de síntese está diretamente ligada à capacidade que as seções interpoladoras tem de representar a geratriz. Como as seções de elipses e hipérboles tem mais graus de liberdade, elas conseguem representar melhor a geratriz modelada.

A avaliação dos efeitos do erro de síntese no diagrama de radiação dos casos E.I e E.II, são apresentadas nas Figuras 2.45 e 2.46. A geratriz da solução de referência foi obtida através do Método III com  $N = 10^5$  e as demais com  $N = 25$ . A análise foi realizada pelo MMT/MoM considerando discretização de 20 seg/ $\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Para o Método III há pequenas diferenças em relação à solução de referência nas direções próximas ao máximo ( $90 < \theta < 105$ ) que aumentam na medida em que se afasta do lóbulo principal do diagrama, enquanto que a solução do Método I é muito similar à solução de referência, mesmo nas regiões de lóbulos secundários. Nos dois casos, fica claro que as maiores diferenças nos diagramas ocorrem na região do lóbulo principal que defini o espalhamento da energia na forma de cossecante ao quadrado. Através do diagrama de raios na Figura 2.40 verifica-se que para o Caso E.I

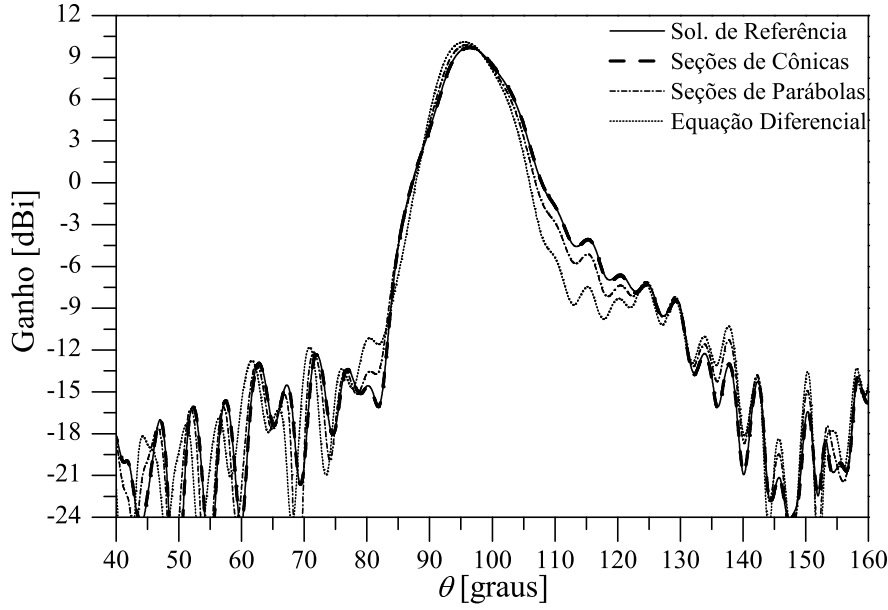


Figura 2.45: Caso E.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

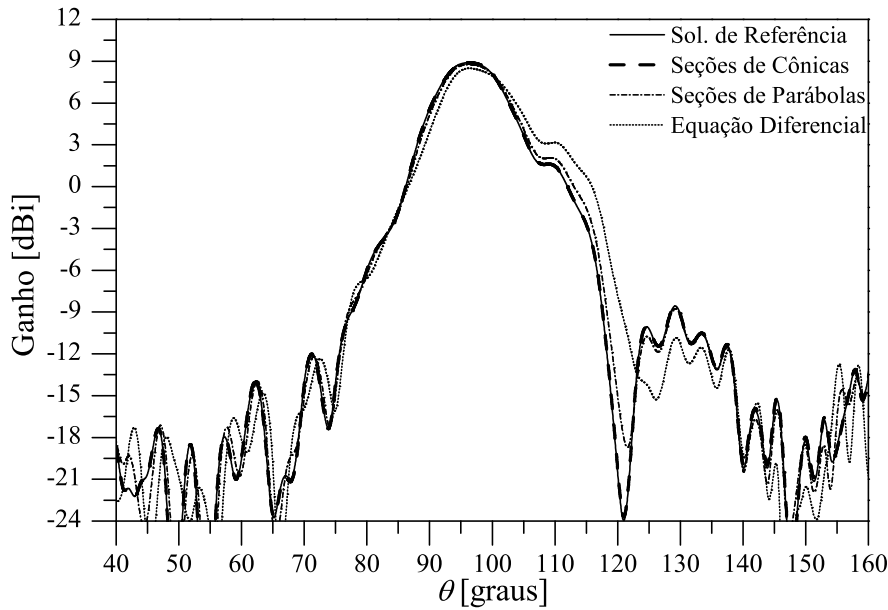


Figura 2.46: Caso E.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

é a parte superior da geratriz ( $-4 < z < 0$ ) que define a forma de cossecante ao quadrado e, nesta região, o erro absoluto na síntese (observe a Figura 2.44) aumenta rapidamente. Para o Caso E.II (observe a Figura 2.41) é a parte da inferior da geratriz ( $-8,5 < z < -4$ ), e é também a região onde o erro absoluto mais cresce (observe a Figura 2.44). Em resumo, os maiores desvios no diagrama de radiação são causados pelas regiões do refletor onde ocorrem os maiores erros de síntese.

Para estudar os algoritmos de síntese quando a setor angular objetivo é maior, o refletor principal de uma OADC foi modelado para provê cobertura

cossecante ao quadrado no plano de elevação entre  $\theta_0 = 135^\circ$  e  $\theta_N = 93^\circ$  (Caso F.I). Como  $\theta_0 > \theta_N$ , tem-se uma cáustica real, como mostra Figura 2.47. O subrefletor utilizado têm os mesmos parâmetros do empregado nos casos E.I e E.II (observe a Tabela 2.3). No último estudo de caso desta seção (Caso F.II), manteve-se o subrefletor do Caso F.I e modelou-se o refletor principal com os limites angulares invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 93^\circ$  a  $\theta_N = 135^\circ$ . Consequentemente,  $\theta_N > \theta_0$  e a cáustica é virtual, conforme ilustrado Figura 2.48.

Observando as dimensões físicas na Tabela 2.3 verifica-se o mesmo comportamento das outras antenas OADC modeladas: pouca diferença entre as dimensões das antenas com cáustica real e virtual, sendo a configuração com cáustica virtual ligeiramente menor. No Caso F.I volume foi  $4,574 \times 10^3 \lambda^3$  e no Caso F.II foi de  $4,461 \times 10^3 \lambda^3$ . Comparando os casos E.I e E.II a F.I e F.II, constata-se que as antenas OADC sintetizadas para um setor angular objetivo menor (casos E.I E.II) foram mais compactas.

Os diagramas de radiação obtidos através do MMT/MoM são ilustrados na Figura 2.49 juntamente com a função objetivo cossecante ao quadrado utilizada no processo de modelagem e os limites  $\pm 3\text{dB}$ . A análise foi feita considerando discretização do MoM com  $20 \text{ seg}/\lambda$ , frequência de operação 9.3GHz. A geratriz de referência com  $N = 10^5$  e as demais geratrizes com 25 pontos. Novamente o diagrama de radiação dado pelo MMT/MoM é diferente da função objetivo da GO, entretanto, boa concordância é alcançada entre os limites  $\theta_0$  e  $\theta_N$  objetivo da síntese. Da Figura 2.49 fica evidente que nas direções de maior energia, ou seja, entre  $93^\circ$  e  $110^\circ$  os resultados são mais próximos da função objetivo, enquanto que para  $\theta > 110^\circ$  as diferenças são maiores, evidenciando a maior dificuldade da síntese geométrica controlar o diagrama de radiação em regiões com baixo nível de energia. Isto ocorre porque a energia atribuída aos efeitos difrativos e de acoplamento é menos representativa nas direções onde o nível de energia é alto. Na medida em que o nível de energia diminui, os efeitos difrativos e de acoplamento tornam-se mais importantes e, não sendo eles levados em conta pela técnica de síntese, o controle sobre diagrama de radiação é menor.

A análise do erro *rms* para os casos F.I e F.II é ilustrada na Figura 2.50. Repete-se o comportamento de todos os casos apresentados anteriormente, evidenciando a maior eficiência do Método I quando comparado aos métodos II e III. No Caso F.I, considerando  $N = 25$ , o Método I teve  $E_{rms} = 2,10 \times 10^{-3} \lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 1,52 \times 10^{-1} \lambda$  e Método III  $E_{rms} = 4,71 \times 10^{-1} \lambda$ . Proporcionalmente, o erro do Método I foi mais de 70 vezes menor no que Método II e quase 230 vezes menor que o Método III. Considerando o erro *rms* do Método I com  $N = 25$  seria necessário que a síntese nos métodos II



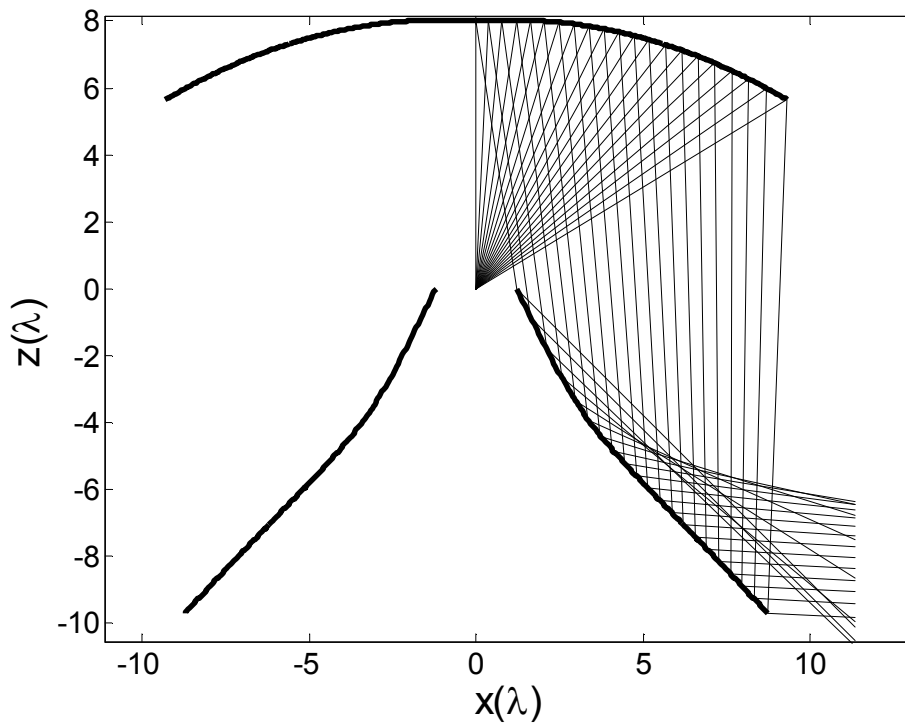


Figura 2.47: Caso F.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica real

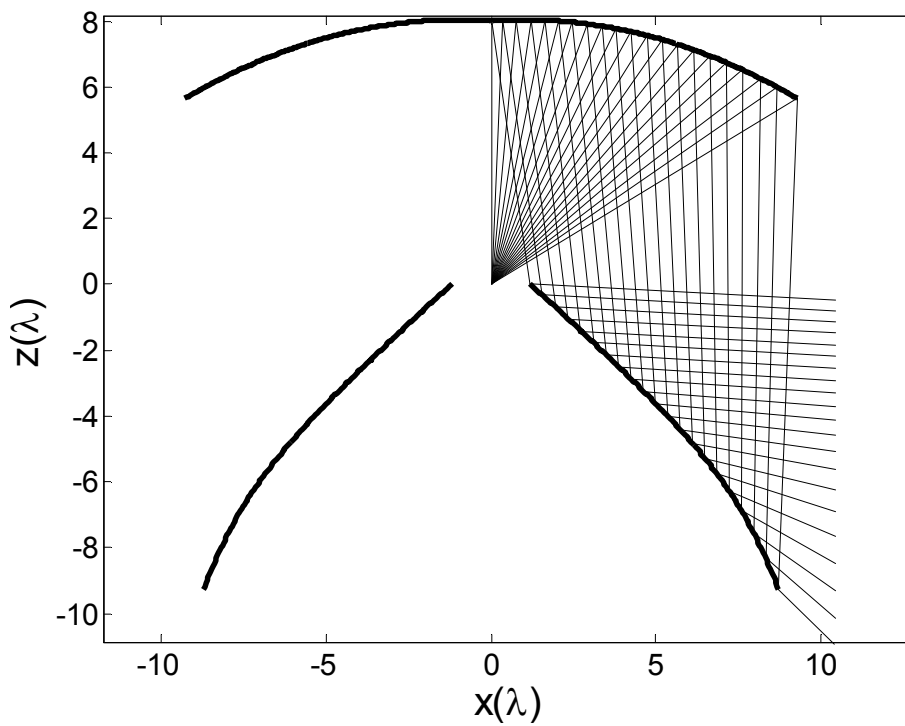


Figura 2.48: Caso F.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADC modelada com cáustica virtual

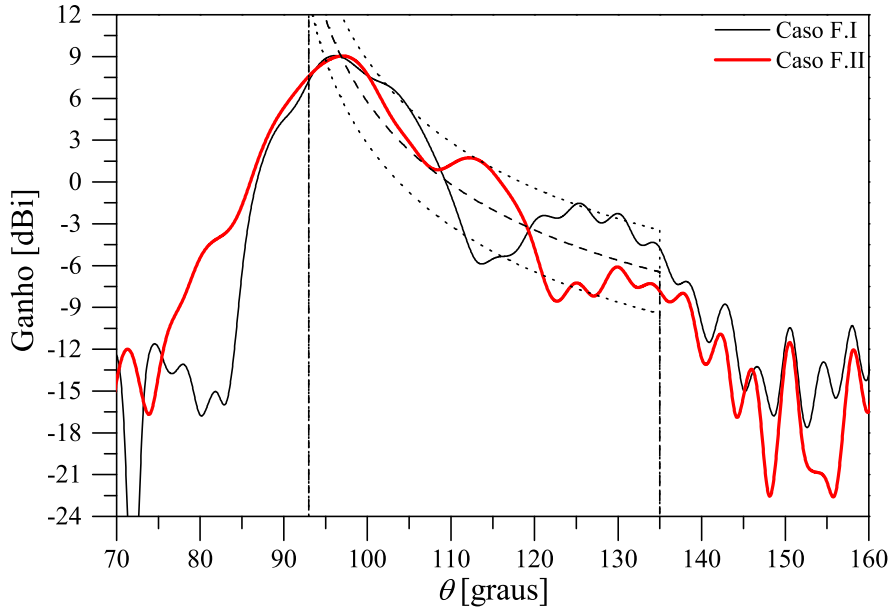
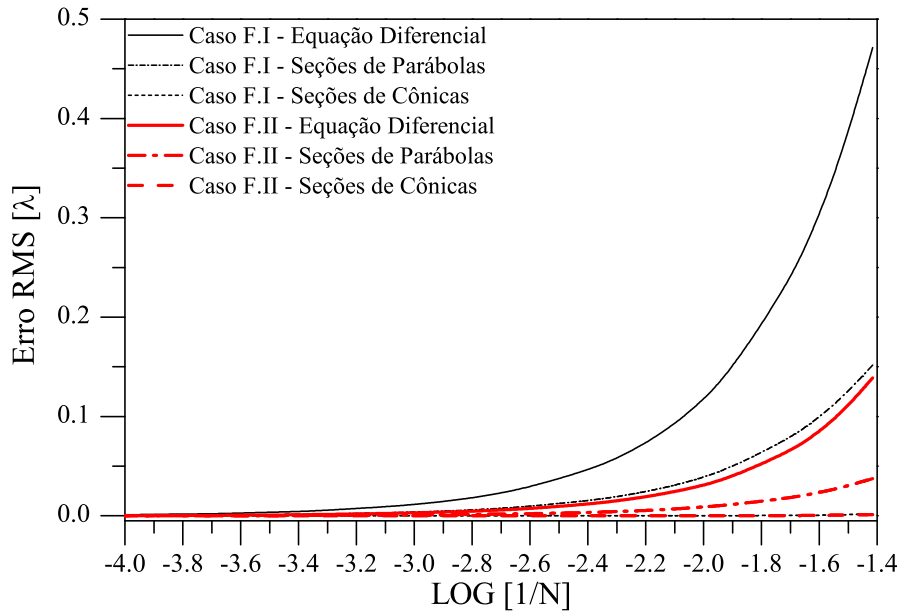


Figura 2.49: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos F.I e F.II

Figura 2.50: Erro *rms* em relação à *N* para os casos F.I e F.II

e III fosse feita com cerca de 2000 e 5000 pontos, respectivamente. No Caso F.II, ainda para  $N = 25$ , obteve-se  $E_{rms} = 1,0 \times 10^{-3}\lambda$ ,  $E_{rms} = 3,74 \times 10^{-2}\lambda$  e  $E_{rms} = 1,38 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Neste caso, o Método I teve o erro *rms* quase 40 vezes menor que o Método II e quase 140 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro *rms* do Método I com  $N = 25$  a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita adotando-se  $N = 800$  e  $N = 3000$ , respectivamente. Comparando os erros *rms* dos casos E.I e E.II, ilustrados na Figura 2.43, aos dos casos F.I e F.II, ilustrados Figura 2.50, percebe-se que houve um aumento expressivo, sobretudo no Método III.

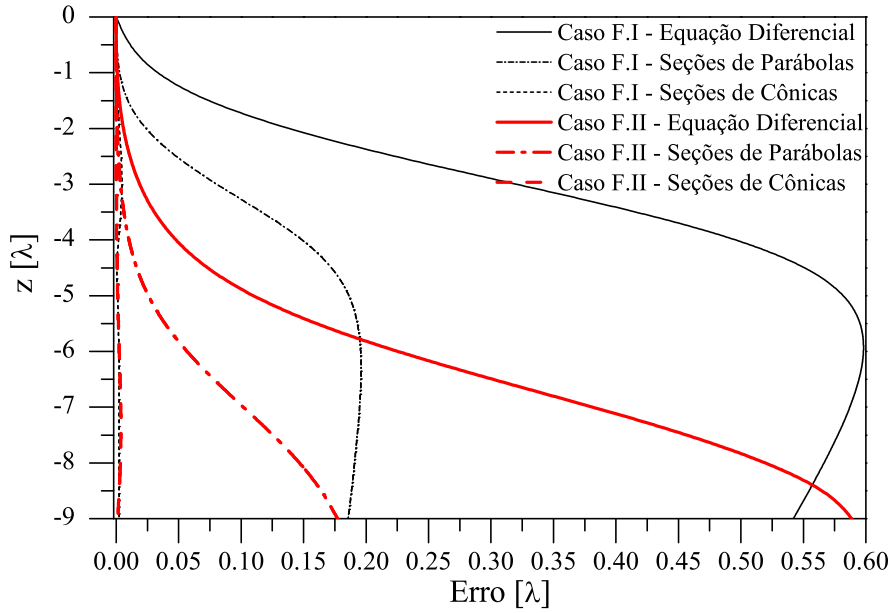


Figura 2.51: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos F.I e F.II

A análise do erro absoluto é novamente feita considerando as geratrizes modeladas com 25 pontos. Observando a Figura 2.51 verifica-se um comportamento semelhante aos casos anteriores. No segundo ponto da geratriz do Caso B.I tem-se  $E_{abs} = 1,80 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $1,80 \times 10^{-4}\lambda$  e  $1,49 \times 10^{-2}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente, e no último ponto  $E_{abs} = 2,32 \times 10^{-3}\lambda$ ,  $1,81 \times 10^{-2}\lambda$  e  $5,23 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro nestes pontos, o erro absoluto aumentou, aproximadamente, 12 vezes no Método I, 10.000 vezes no Método II e quase 35 vezes no Método III.

Comparando os erros dos casos E.I e E.II, ilustrados na Figura e 2.44, aos dos casos F.I e F.II nota-se um comportamento muito semelhante, porém com maior amplitude do erro. No caso F.I o erro com Métodos II em  $-4 < z < 0$  aumenta rapidamente e na região que se assemelha a uma parábola  $-8,5 < z < -4$  o erro estabiliza e até diminuiu. No caso F.II é a parte superior  $-4 < z < 0$  se assemelha a uma parábola e, nessa região, o erro com o Método II cresce muito pouco. Novamente conclui-se que a eficiência do método de síntese está ligada à capacidade de representação da geratriz pelas seções interpoladoras.

A avaliação dos efeitos do erro de síntese no diagrama de radiação é apresentada nas Figuras 2.52 e 2.53. Os diagramas de radiação dos casos F.I e F.II foram obtidos considerando as geratrizes com 25 pontos, a análise MMT/MoM com  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Observa-se que a discrepância do Método III em relação à solução de referência é mais expressiva na medida em que se afasta de região de máximo do diagrama, enquanto que no Método I é muito similar à solução de referência em todo o diagrama.

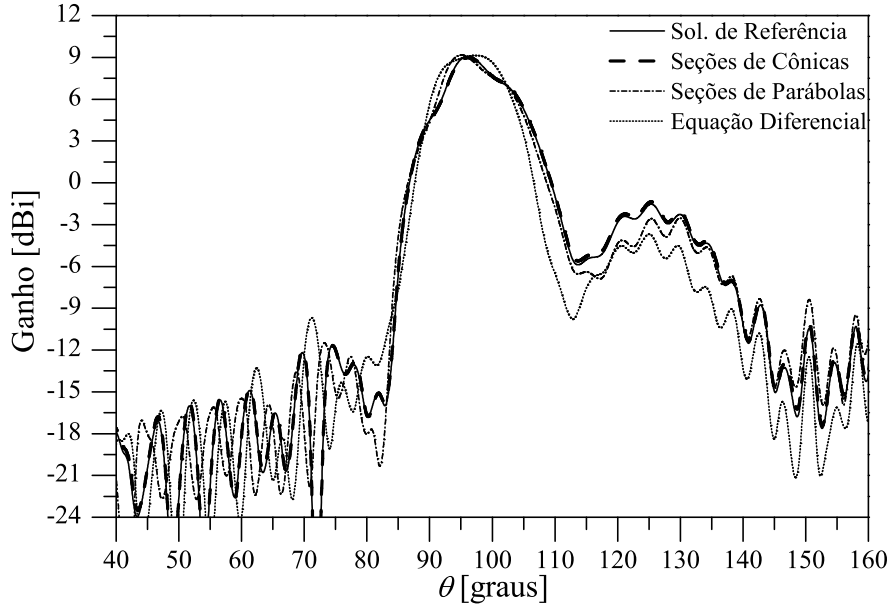


Figura 2.52: Caso F.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

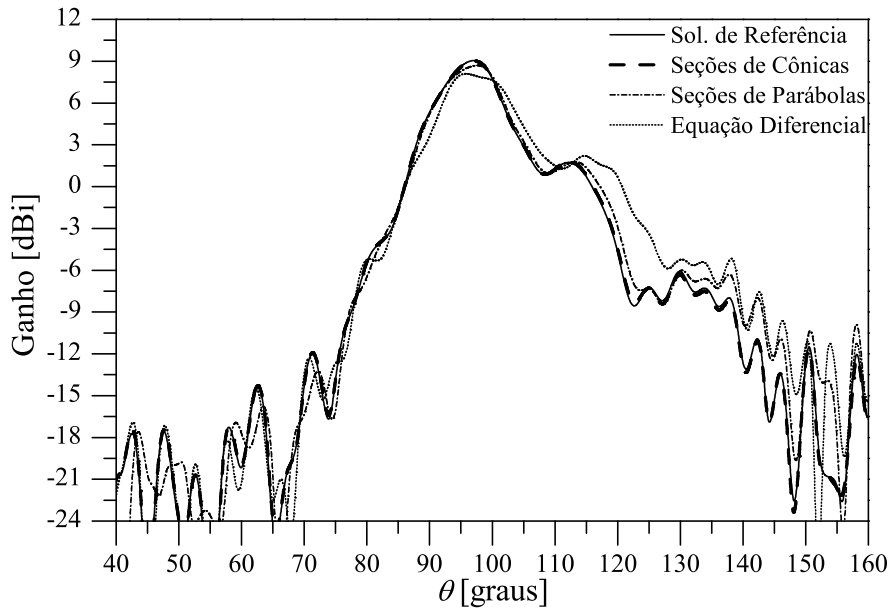


Figura 2.53: Caso F.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

### Configuração OADE com Cobertura Setorial Cossecante

No primeiro estudo de caso desta seção (Caso G.I), o refletor principal de uma configuração OADE foi sintetizado para irradiar, sob os princípios da GO, um diagrama cossecante ao quadrado no plano de elevação entre  $\theta_0 = 115,0^\circ$  a  $\theta_N = 93,0^\circ$ . Neste caso  $\theta_0 > \theta_N$  e cáustica é real. A geratriz do subrefletor é obtida a partir de uma configuração clássica OADE com os seguintes parâmetros:  $V_S = 8,0\lambda$ ,  $D_B = 2,4\lambda$ , diâmetro do refletor principal clássico  $D_M = 17,50\lambda$ , abertura central  $z_B = 0$ , abertura do refletor principal clássico  $W_A = 7,0\lambda$ , e  $\gamma = 102^\circ$ . Estes valores geram uma elipse com excentricidade

Parâmetros	Caso G.I	Caso G.II	Caso H.I	Caso H.II
$D_S(\lambda)$	14,91	14,91	14,91	14,91
$V_S(\lambda)$	8,00	8,00	8,00	8,00
$D_M(\lambda)$	16,06	18,36	16,53	26,42
$V_M(\lambda)$	7,38	9,58	7,83	17,31
$D_B(\lambda)$	2,40	2,40	2,40	2,40
$z_B(\lambda)$	0	0	0	0
$2c(\lambda)$	3,70	3,70	3,70	3,70
$e$	0,247265	0,247265	0,247265	0,247265
$\beta$	60,69°	60,69°	60,69°	60,69°
$\theta_E$	53,16°	53,16°	53,16°	53,16°
$\theta_0$	115,0°	93,0°	135,0°	93,0°
$\theta_N$	93,0°	115,0°	93,0°	135,0°
$Volume(10^3\lambda^3)$	2,896	3,751	3,057	8,299

Tabela 2.4: Parâmetros das antenas OADE com diagrama cossecante ao quadrado

$e = 0,24726471$ , distância interfocal  $2c = 3,704\lambda$ , e ângulo de elevação do eixo de simetria em relação ao eixo  $z$   $\beta = 60,69^\circ$ . Como consequência, o diâmetro do subrefletor projetado  $D_S = 14,91\lambda$ , ângulo de borda  $\theta_E = 53,16^\circ$ . As geratrizes e o traçado de raios são ilustradas na Figura 2.54. No segundo estudo (Caso G.II), foi adotado o mesmo o subrefletor do Caso G.I, a mesma função objetivo porém os limites angulares do campo distante foram invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 93,0^\circ$  a  $\theta_N = 115,0^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e, conseqüentemente, a cáustica é virtual. Na 2.55 são apresentadas as geratrizes e o traçado de raios deste caso. As principais dimensões físicas das antenas sintetizadas nos casos G.I e G.II estão listadas na Tabela 2.4.

Comparando os parâmetros  $D_M$  e  $V_M$  dos casos G.I e G.II percebe-se que a configuração com cáusticas real tem dimensões menores que a configuração com cáustica virtual, confirmando mais uma vez para as antenas OADE, a forma de mapeamento dos raios é determinante na obtenção de antenas mais compactas. Analisando os volumes (observe a 2.4), a configuração com cáustica real (Caso G.I) tem volume igual a  $2,896 \times 10^3 \lambda^3$  enquanto que na com cáustica virtual (Caso G.II) é  $3,751 \times 10^3 \lambda^3$ . Comparando os casos D.I ao G.I e D.II ao G.II (observe as tabelas 2.3 e 2.4) obtidos a partir dos mesmos parâmetros iniciais de projeto e diagrama objetivo, apenas com mapeamento dos raios no subrefletor diferente, verifica-se um comportamento diferente do observado na Seção 2.4.1, onde a função objetivo do campo distante era uma constante. Nas antenas modeladas com diagrama objetivo do tipo cossecante ao quadrado, a configuração OADE foi mais compacta que a OADC, tanto as com cáustica real como as com cáustica virtual.

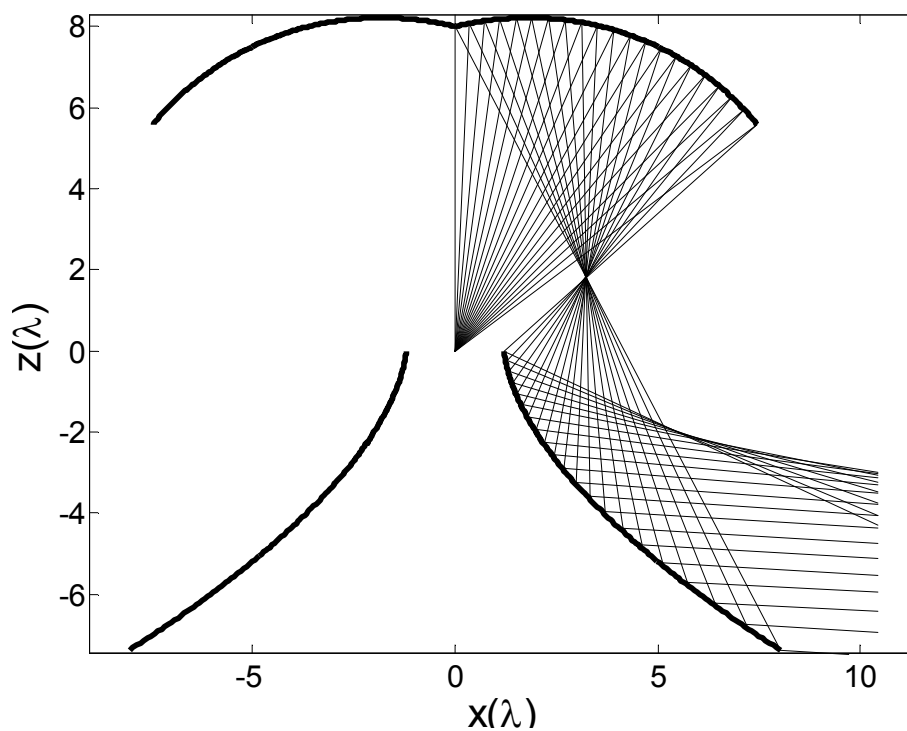


Figura 2.54: Caso G.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real

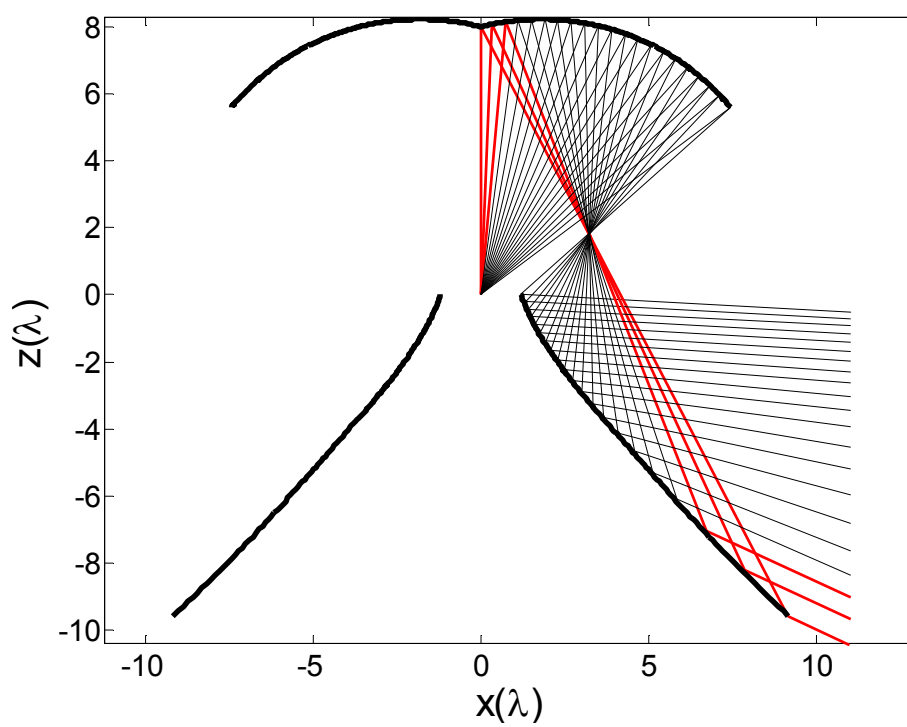


Figura 2.55: Caso G.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual

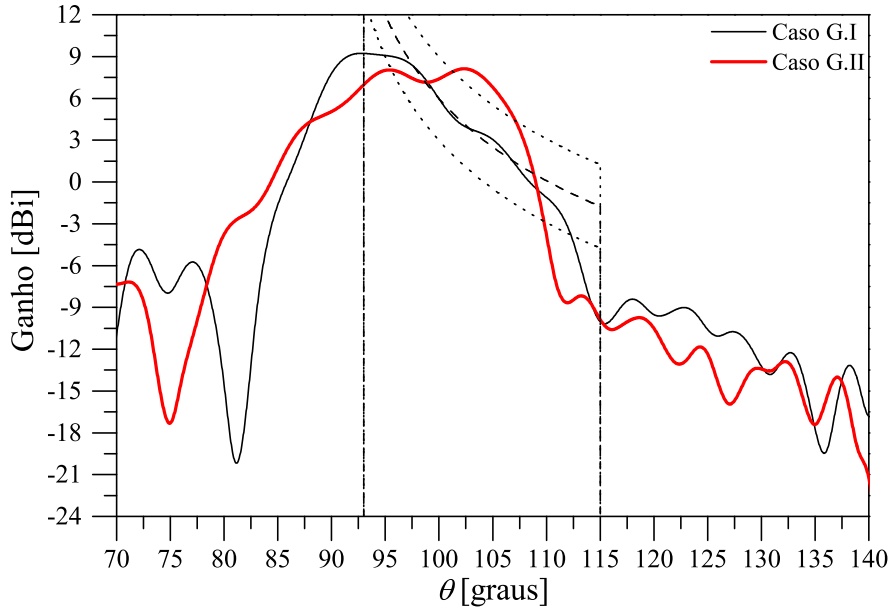


Figura 2.56: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos G.I e G.II

A Figura 2.56 apresenta os diagramas de radiação dos casos G.I e G.II obtidos através do método de análise MMT/MoM considerando na síntese as geratrizes modeladas com  $N = 25$ , a geratriz referência  $N = 10^5$  e na análise do MoM discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação  $9.3\text{GHz}$ . Como esperado, os diagramas de radiação obtidos são diferentes da função objetivo da GO. Para o Caso G.I há boa convergência entre a função objetivo e o resultado da análise rigorosa, sobretudo entre  $93^\circ$  e  $110^\circ$  onde há um nível de energia mais alto. Observando a Figura 2.54 verifica-se que a parte inferior da geratriz comporta-se como uma parábola definindo o máximo do diagrama, e a parte superior define o espalhamento da energia na forma de cossecante ao quadrado. No Caso G.II as divergências são maiores, sobretudo para as direções  $\theta > 110^\circ$ . Uma possível razão para esta divergência pode ser entendida analisando o diagrama de raios na Figura 2.55, onde os raios proveniente do alimentador entre  $0^\circ$  e  $10^\circ$  são refletidos entre  $110^\circ$  e  $115^\circ$ . Observando o diagrama do alimentador na Figura 2.11 nota-se nas direções  $0^\circ < \theta_F < 10^\circ$  a intensidade de radiação é mais baixa, explicando a acentuada queda no diagrama para  $\theta > 110^\circ$ .

Para avaliar o comportamento da convergência dos métodos de síntese, a Figura 2.57 apresenta o erro  $rms$  dos casos G.I e G.II. Confirma-se novamente um padrão de comportamento onde Método I se mostra muito mais eficiente que os métodos II e III. No Caso G.I, para  $N = 25$ , o Método I teve  $E_{rms} = 7,68 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 3,98 \times 10^{-2}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 1,05 \times 10^{-1}\lambda$ , ou seja, o erro do Método I foi mais de 50 vezes menor no que Método II e quase 140 vezes menor que o Método III. Considerando o

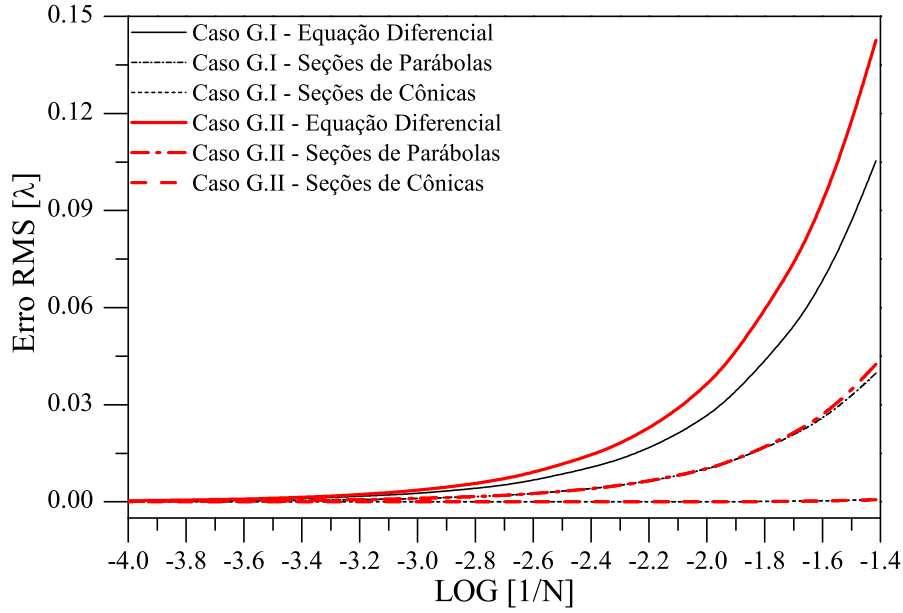


Figura 2.57: Erro *rms* em relação à  $N$  para os casos G.I e G.II

erro *rms* do Método I com  $N = 25$ , a síntese com métodos II e III precisaria ser feita com pelo menos 2000 e 3000 pontos, respectivamente, para o mesmo erro *rms*. Para Caso G.II, obteve-se  $E_{rms} = 6,40 \times 10^{-4}\lambda$ ,  $E_{rms} = 4,25 \times 10^{-2}\lambda$  e  $E_{rms} = 1,42 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. O Método I teve o erro *rms* quase 70 vezes menor que no Método II e mais de 320 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro *rms* do Método I com 25 pontos, a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita considerando, aproximadamente  $N = 2000$  e  $N = 5000$ , respectivamente. Comparando a configuração OADC (casos E.I e E.II) ilustrados na Figura 2.43, à OADE (casos G.I e G.II) o erro *rms* foi aproximadamente o mesmo.

O erro absoluto foi novamente determinado considerando as geratrizes modeladas com 25 pontos e a geratriz de referência  $N = 10^5$ . A Figura 2.58 mostra o resultado para os três métodos em função da coordenada  $z$ . O mesmo comportamento dos casos anteriores é observado, nos Método II e III o erro o cresce rapidamente em direção à borda e para no Método I ele, além de muito menor, cresce menos. No Caso G.I, no segundo ponto da síntese obteve-se  $E_{abs} = 6,44 \times 10^{-5}\lambda$  no Método I,  $E_{abs} = 2,25 \times 10^{-3}\lambda$  no Método II e  $E_{abs} = 1,89 \times 10^{-3}\lambda$  Métodos III. No último ponto,  $E_{abs} = 1,98 \times 10^{-3}\lambda$ ,  $E_{abs} = 9,0 \times 10^{-2}\lambda$  e  $E_{abs} = 2,10 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando o erro no segundo e o último ponto, houve um aumento de, aproximadamente, 30 vezes no Método I, 40 vezes no Método II e quase 110 vezes no Método III, caracterizando o comportamento mais estável do Método I. Comparando os Método II e III do caso E.II (observe a Figura e 2.44), ao G.II nota-se que a configuração OADE teve erro absoluto muito



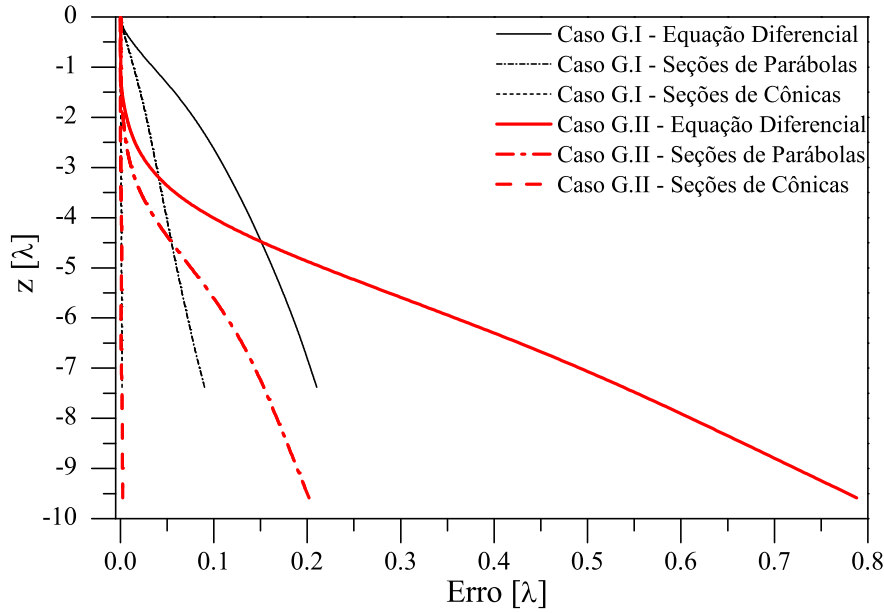


Figura 2.58: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos G.I e G.II

maior que a OADC, apesar do erro  $rms$  ter sido aproximadamente o mesmo (veja as Figuras 2.43 e 2.57). Observando o diagrama de raios na Figura 2.55 é fácil perceber que a distância entre os pontos que formam a geratriz não é uniforme e, além disto, a maior parte dos pontos está concentrada na parte superior  $-3\lambda < z < 0\lambda$  onde o erro absoluto é menor (observe a Figura 2.58. Como o erro  $rms$  é um erro médio, os poucos pontos com maior erro absoluto na parte inferior do refletor  $-9,5\lambda < z < -3\lambda$  tem menor peso no resultado final, apesar de esses poucos pontos descreverem a maior parte da geratriz.

As Figuras 2.59 e 2.60 apresentam a comparação entre os diagramas de radiação das antenas modeladas pelos três métodos de síntese. A geratriz da solução de referência foi obtida através do Método III com  $N = 10^5$  e as demais com  $N = 25$ . A análise foi realizada pelo MMT/MoM considerando as geratrizes discretizadas com 20 seg/ $\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. No Caso G.I, os diagramas associados aos métodos II e III apresentam pequenas diferenças em relação à solução de referência nas direções próximas ao máximo ( $85^\circ < \theta < 110^\circ$ ), porém, as diferenças aumentam na medida em que se afasta do lóbulo principal do diagrama. Diferente disto, a curva associada ao Método I foi praticamente igual à solução de referência, mesmo nas regiões de lóbulos secundários. No Caso G.II a solução associada ao Método III apresentou grandes diferenças em relação à solução de referência, mesmo no lóbulo principal. A razão disto é facilmente determinada ao analisar o erro absoluto ilustrado na Figura 2.58. Na região  $-2\lambda < z < 0\lambda$ , responsável pela formação do máximo do diagrama (observe a Figura 2.55), o erro de

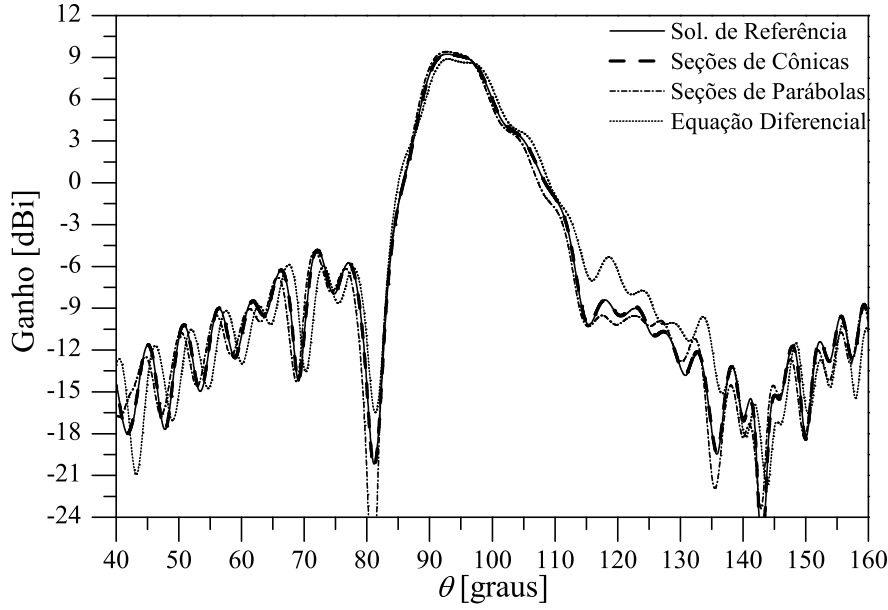


Figura 2.59: Caso G.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

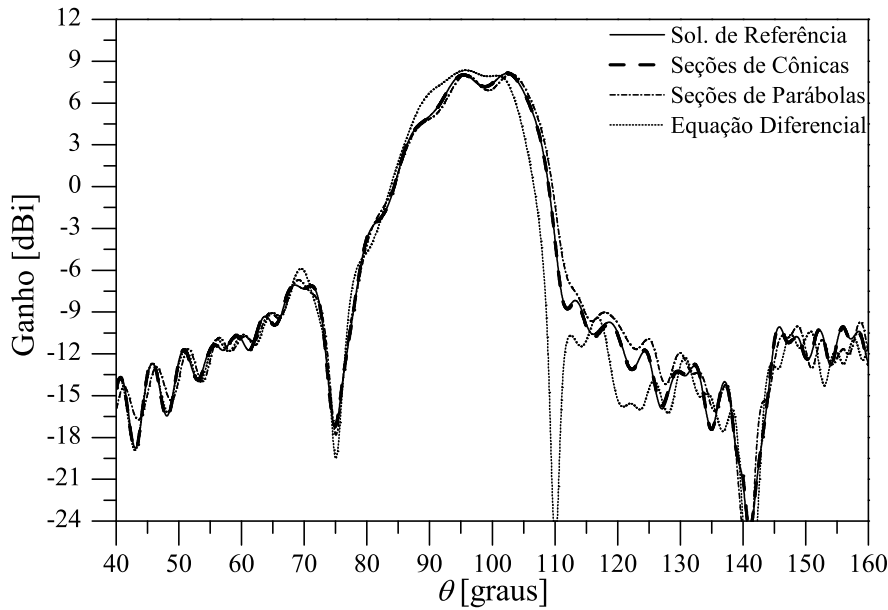


Figura 2.60: Caso G.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

síntese foi muito pequeno, enquanto que na parte inferior  $-10\lambda < z < -2\lambda$ , responsável pelo comportamento de cossecante ao quadrado, o erro absoluto cresceu rapidamente, assim como o erro no diagrama de radiação.

Assim como feito para a configuração OADC, deseja-se avaliar a síntese quando o setor angular objetivo da configuração OADE maior. Utilizando o mesmo subrefletor dos casos G.I e G.II, o refletor principal foi sintetizado para irradiar, segundo os princípios da GO, um diagrama de radiação cossecante ao quadrado no plano de elevação entre  $\theta_0 = 135^\circ$  a  $\theta_N = 93^\circ$  (Caso H.I). Como  $\theta_0 > \theta_N$  a cáustica é real ela está localizada em frente refletor principal.

As geratrizes do subrefletor e do refletor modelado e o traçado de raios são ilustrados na Figura 2.61. No último estudo de caso (Caso H.II) desta seção, mantendo subrefletor dos casos G.I e G.II e o refletor principal foi modelado com os limites angulares do campo distante invertidos, ou seja,  $\theta_0 = 93^\circ$  a  $\theta_N = 135^\circ$ . Neste caso,  $\theta_N > \theta_0$  e a cáustica é virtual está localizada atrás refletor principal, como se observa na Figura 2.62. As principais dimensões físicas e parâmetros de projeto dos dois casos estão sumarizados na Tabela 2.4.

Comparando a altura  $V_M$  e diâmetro  $D_M$  dos refletores modelados nos casos H.I e H.II (veja a Tabela 2.4) verifica-se uma diferença muito mais expressiva que nos casos anteriores, confirmando para a configuração OADE a forma de mapeamento dos raios tem grande importância para a obtenção de estruturas compactas. Observando agora os volumes, a configuração com cáustica real apresentou volume igual a  $3,057 \times 10^3 \lambda^3$  e a cáustica virtual  $8,299 \times 10^3 \lambda^3$ , ou seja, o volume foi mais que o dobro no Caso H.II. Comparando os casos H.I e H.II a G.I e G.II nota-se que ao aumentar o setor angular objetivo o volume da antenna também aumentou, sobretudo na configuração com cáustica virtual. Fazendo a comparação entre as configurações OADC e OADE, ou seja, o caso F.I ao H.I e o caso F.II ao H.II (observe as tabelas 2.3 e 2.4), constata-se que quando a cáustica é real a configuração mais compacta é a OADE e quando a cáustica é virtual é a OADC.

Os diagramas de radiação dados pela análise rigorosa do MMT/MoM são apresentados na Figura 2.63 juntamente com a função objetivo utilizada e os limites  $\pm 3\text{dB}$ . A análise foi feita considerando as geratrizes com  $N = 10^5$ , discretização do MoM de pelo menos  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação  $9.3\text{GHz}$ . Novamente fica clara a dificuldade de se controlar o diagrama nas regiões com baixo nível de energia. Em ambos os casos, há boa concordância entre  $93^\circ$  e  $110^\circ$ , e uma maior divergência entre  $110^\circ$  e  $135^\circ$ . Analisando a solução do Caso H.I e o diagrama de raios na Figura 2.61, pode se observar que a maior parte da geratriz ( $-7,8\lambda < z < -3\lambda$ ) comporta-se como uma parábola refletindo os raios na mesma direção e, conseqüentemente, definindo o máximo do diagrama. A forma de cossecante ao quadrado é definida por uma pequena parte entre  $-3\lambda < z < 0\lambda$ . No Caso H.II, observando a Figura 2.62 nota-se que a uma pequena na parte ( $-3\lambda < z < 0\lambda$ ) na borda superior do refletor modelado se comporta como uma parábola refletindo os raios em uma mesma direção e, conseqüentemente, definindo o máximo no diagrama de radiação. Na parte da região central da geratriz  $-10\lambda < z < -3\lambda$  percebe-se o espalhamento da energia refletida definindo a forma de cosecante ao quadrado no diagrama de radiação. Na parte inferior  $-17\lambda < z < -10\lambda$ , definida pelos

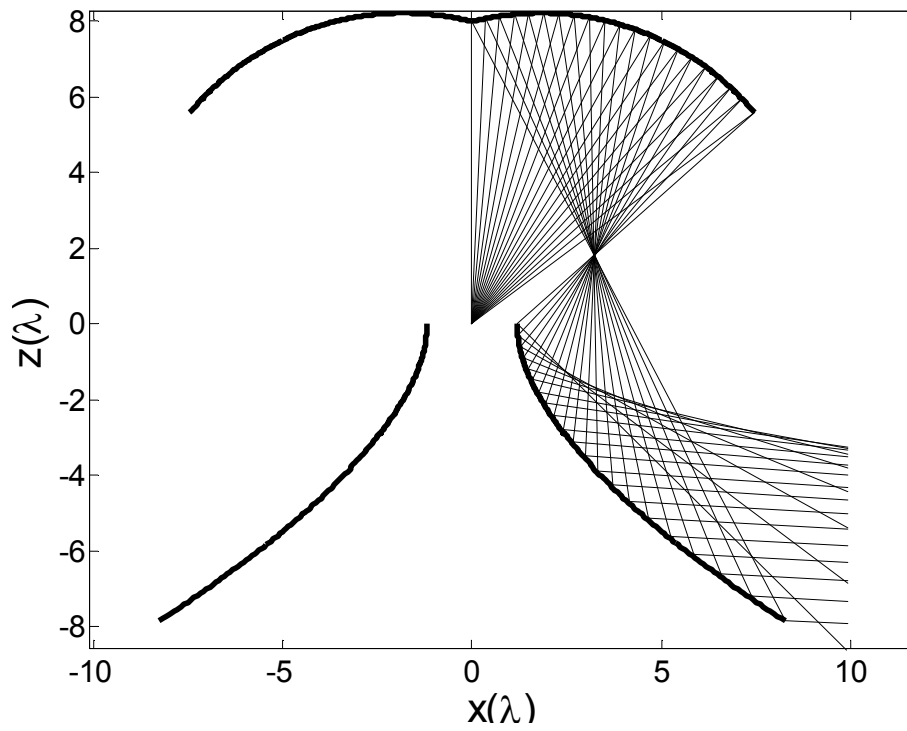


Figura 2.61: Caso H.I: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica real

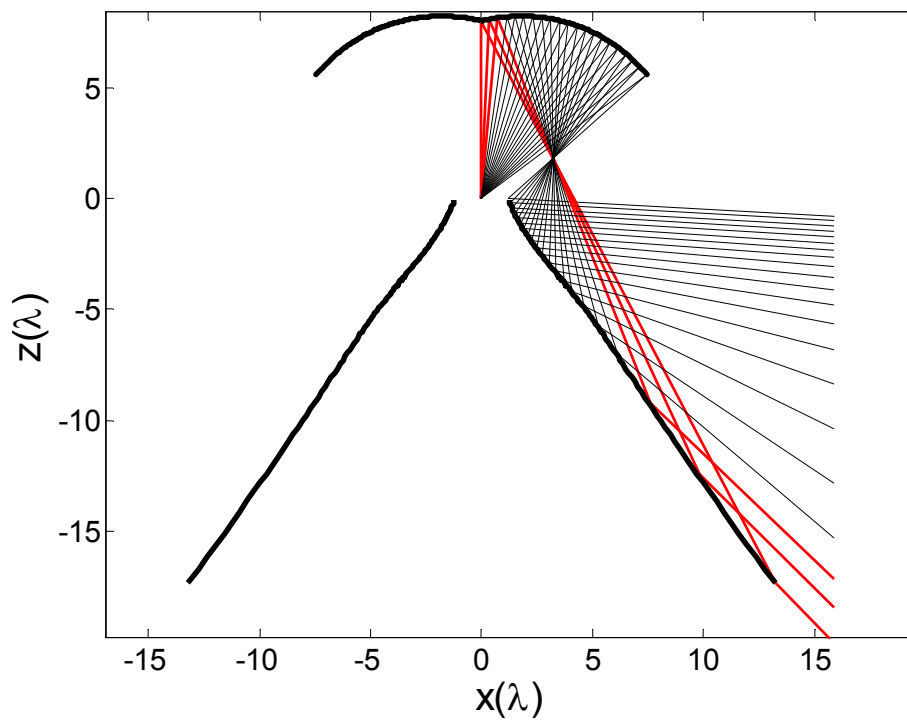


Figura 2.62: Caso H.II: Geratrizes e diagrama de raios da configuração OADE modelada com cáustica virtual

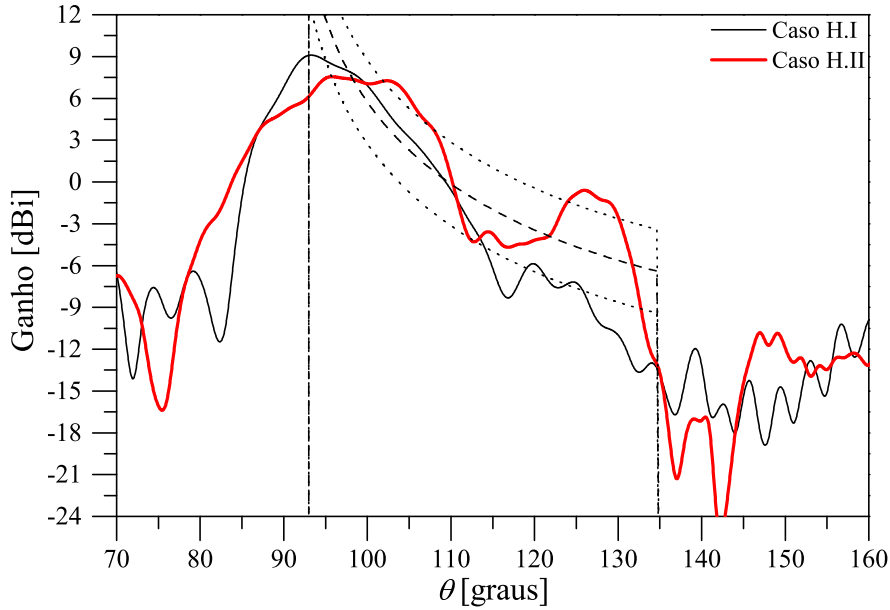


Figura 2.63: Diagrama de radiação no plano de elevação dos casos H.I e H.II

três últimos raios (observe a Figura 2.62), a incidência dos raios é mais rasante, fazendo com que a superfície modelada se prolongue. Comparando os casos G.II e H.II, verifica-se que este efeito que se torna mais intenso na medida em que o limite do campo distante  $\theta_N$  aumenta. Observando o diagrama do caso H.II mais uma vez percebe-se uma acentuada queda no diagrama nos últimos cinco graus da região de síntese. Da Figura 2.62 nota-se o diagrama do campo distante entre  $130^\circ$  e  $135^\circ$  é determinado pela energia proveniente do alimentado entre  $0^\circ$  e  $8^\circ$ , onde a intensidade de radiação é baixa.

A Figura 2.64 apresenta o erro  $rms$  em função do número de pontos adotado para a síntese. De forma análoga aos casos anteriores superfície de referência utilizada para a determinação do erro foi obtida através do Método III com um número muito grande de passos ( $N = 10^5$ ). No Caso H.I, para  $N = 25$  no Método I  $E_{rms} = 3,64 \times 10^{-3}\lambda$ , no Método II  $E_{rms} = 8,80 \times 10^{-2}\lambda$  e no Método III  $E_{rms} = 2,64 \times 10^{-1}\lambda$ . Consequentemente, o erro no Método I foi quase 25 vezes menor que no Método II e 70 vezes menor que o Método III. Para que os métodos II e III tivessem aproximadamente o mesmo erro  $rms$  do Método I com  $N = 25$  a síntese precisariam ser realizada com 625 e 2000 pontos, respectivamente. No Caso H.II, também para  $N = 25$ , o Método I apresentou  $E_{rms} = 3,49 \times 10^{-4}\lambda$ , o Método II  $E_{rms} = 1,66 \times 10^{-1}\lambda$  e Método III  $E_{rms} = 5,04 \times 10^{-1}\lambda$ . Logo, o erro no Método I foi quase 50 vezes menor que Método II e 150 vezes menor que o Método III. Para o mesmo erro  $rms$  do Método I com 25 pontos, a síntese nos métodos II e III precisaria ser feita considerando, aproximadamente  $N = 1000$  e  $N = 4000$ . Da Figura 2.64 percebe-se um comportamento muito semelhante ao dos casos de estudo já

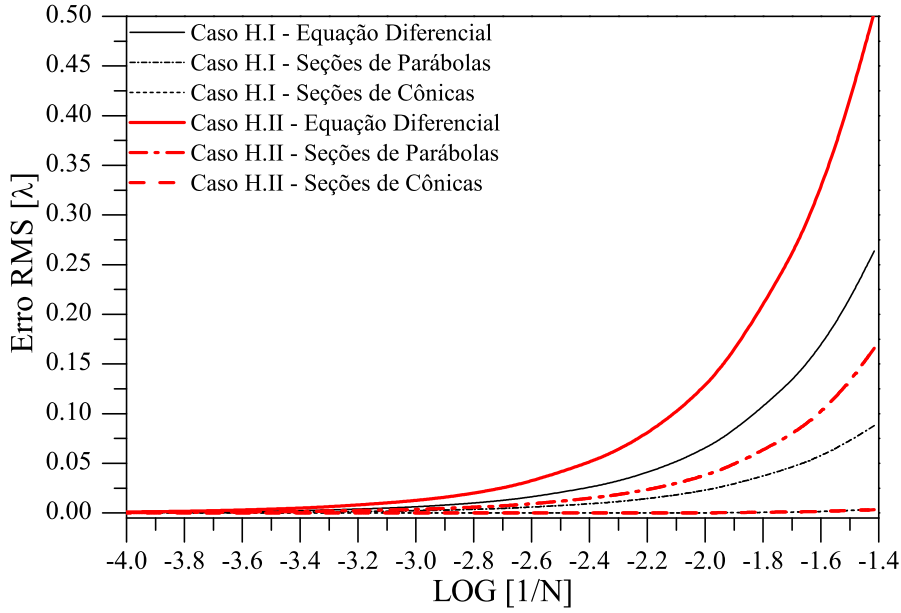


Figura 2.64: Erro *rms* em relação à  $N$  para os casos H.I e H.II

apresentados, onde o Método I mostra-se mais eficiente que os Método II e III. Comparando o erro *rms* dos casos G.I e G.II (veja a Figura 2.57) aos casos H.I e H.II nota-se que as curvas são muito semelhantes, porém, a amplitude do erro é quase 4 vezes maior. Verifica-se mais uma vez um comportamento observado em todos estudos de casos já apresentados, antenas com maior abertura angular objetivo apresentam maior erro de síntese.

A Figura 2.58 mostra o erro absoluto para os três métodos calculado em relação à uma geratriz de referência com  $10^5$  pontos. Novamente, o erro cresce rapidamente em direção à borda nos Método II e III e para no Método I é muito menor, repetindo-se o comportamento dos casos anteriores. O segundo ponto da síntese no Caso H.I apresentou  $E_{abs} = 1,90 \times 10^{-4}\lambda$  no Método I,  $E_{abs} = 9,26 \times 10^{-3}\lambda$  no Método II e  $E_{abs} = 9,46 \times 10^{-3}\lambda$  no Método III. No último ponto,  $E_{abs} = 8,12 \times 10^{-3}\lambda$ ,  $E_{abs} = 1,90 \times 10^{-1}\lambda$  e  $E_{abs} = 5,44 \times 10^{-1}\lambda$  para os métodos I, II e III, respectivamente. Comparando os erros neste dois pontos, o erro aumentou aproximadamente 40 vezes no Método I, 20 vezes no Método II e quase 60 vezes no Método III, caracterizando o comportamento mais estável do Método II. Este foi o único caso onde o erro absoluto do Método II cresceu proporcionalmente menos que no Método I. Para entender as causas disto, recorreremos novamente ao diagrama de raios na Figura 2.61. Observe que a maior parte da geratriz  $-8\lambda < z < -2\lambda$  comporta-se como uma parábola refletindo os raios em uma mesma direção. Nessa região Método II é bastante eficiente o erro absoluto cresce muito pouco, conforme se observa na Figura 2.58. Na parte superior da geratriz  $-2\lambda < z < 0\lambda$ , onde está o segundo ponto da síntese, o Método II tem maior dificuldade de representar a superfície que

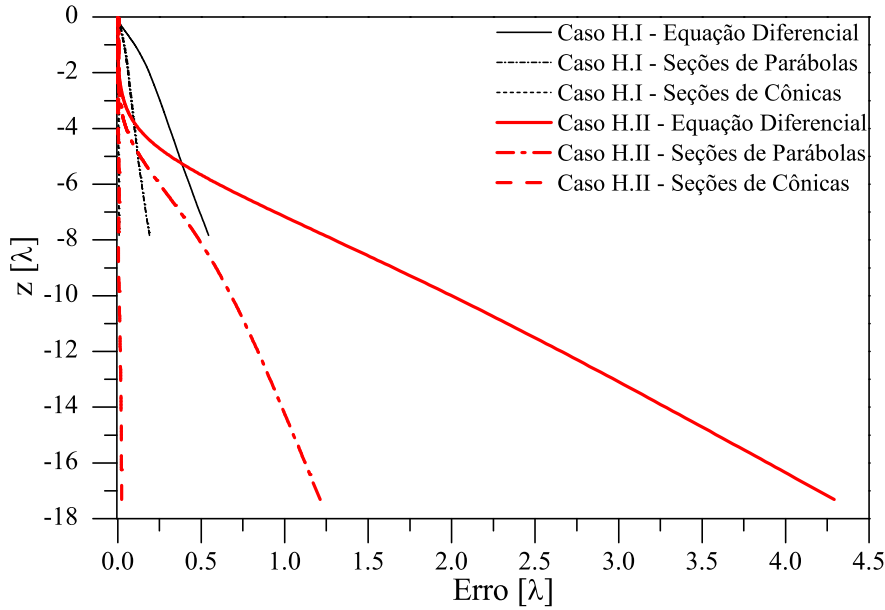


Figura 2.65: Erro absoluto na geratriz modelada com  $N = 25$  em função da coordenada  $z$  para os casos H.I e H.II

não reflete os raios em uma única direção. A consequência disso é um erro absoluto maior e a razão entre os erros no segundo e último pontos menor.

O estudo dos efeitos do erro de síntese no diagrama de radiação dos casos H.I e H.II é apresentado nas Figuras 2.66 e 2.67. A geratriz da solução de referência foi obtida através do Método III com  $N = 10^5$  e as demais com  $N = 25$ . A análise foi realizada pelo MMT/MoM considerando discretização de  $20 \text{ seg}/\lambda$  e frequência de operação 9.3GHz. Os Método II e III apresentam pequenas diferenças em relação à solução de referência nas direções próximas ao máximo ( $90 < \theta < 100$ ) que aumentam na medida em que se afasta do lóbulo principal do diagrama, enquanto que a solução do Método I é muito similar à solução de referência em todas as direções.

## 2.5

### Conclusões Parciais

O presente capítulo apresentou um estudo com três métodos de síntese utilizados para modelar o refletor principal de antenas duplo-refletores com cobertura omnidirecional. Dois destes métodos foram descritos na Seção 2.3, e o terceiro, utilizado como parâmetro de comparação, está documentado na literatura [71], [72], [75]. O objetivo no qual se fundamentou esta parte da pesquisa foi o desenvolvimento de formas mais eficientes para projetar de antenas refletoras circularmente simétricas. Baseando-se na GO, foi proposta uma metodologia alternativa para a modelagem da geratriz do refletor principal, representando-a localmente por seções de cônicas. Em um dos métodos

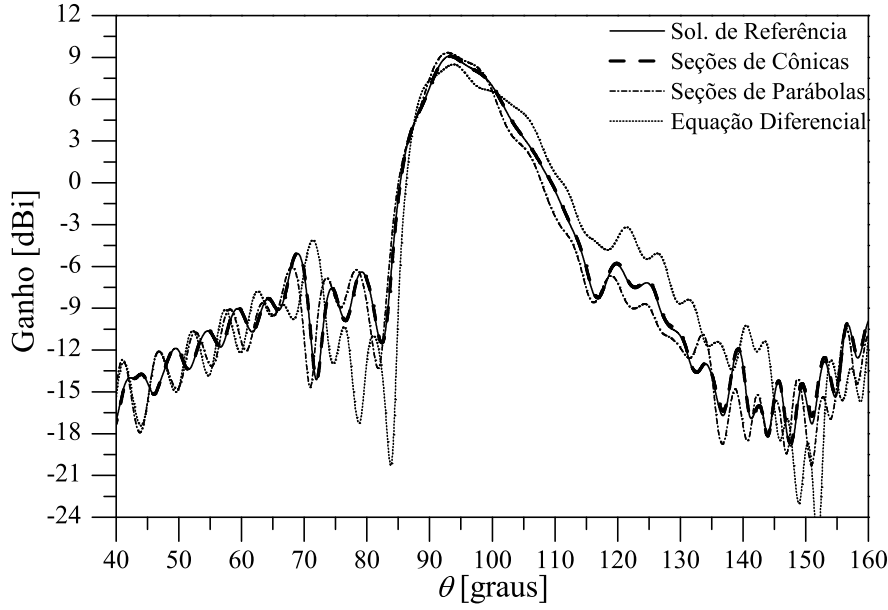


Figura 2.66: Caso H.I: Diagramas de radiação no plano de elevação

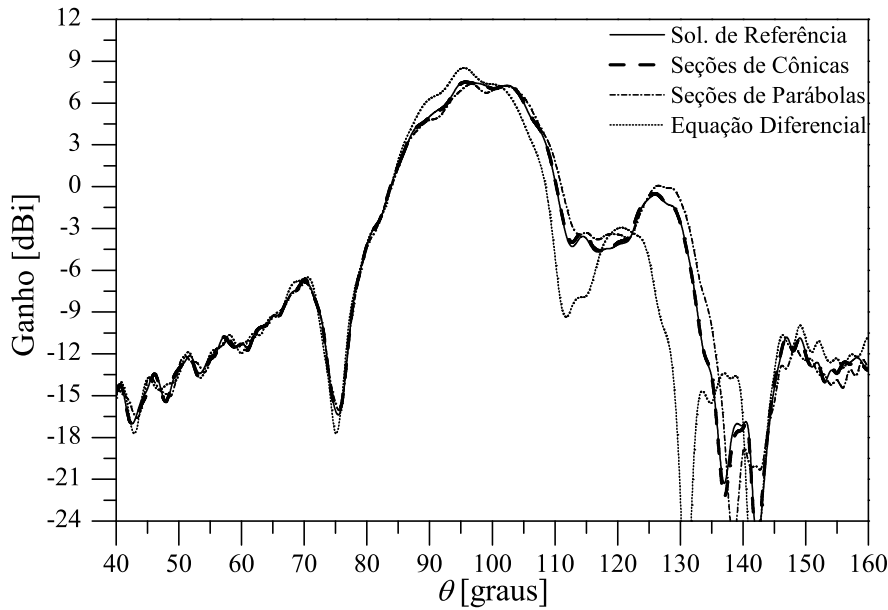


Figura 2.67: Caso H.II: Diagramas de radiação no plano de elevação

representou-se a geratriz com seções de elipses ou hipérboles e no outro seções de parábolas. Os algoritmos desenvolvidos são constituídos de dois estágios: no primeiro, foi utilizada a formulação apresentada em [65] para a obtenção do conjunto de refletores (subrefletor e refletor principal) clássicos. No segundo estágio, mantendo o subrefletor clássico, um novo refletor principal foi modelado de forma que o conjunto irradie um diagrama de radiação, no plano de elevação, cossecante ao quadrado ou uniforme num determinado setor. Diversos estudos de caso foram realizados para verificar e quantificar a eficiência das técnicas propostas comparando-as à técnica descrita em [71].



Cáustica	Método	OADC		OADE	
		$\Delta\theta = 15^\circ$	$\Delta\theta = 30^\circ$	$\Delta\theta = 15^\circ$	$\Delta\theta = 30^\circ$
Real	I	$2,30 \times 10^{-4}$	$4,66 \times 10^{-4}$	$2,43 \times 10^{-4}$	$4,79 \times 10^{-4}$
	II	$2,06 \times 10^{-2}$	$4,31 \times 10^{-2}$	$2,75 \times 10^{-2}$	$5,49 \times 10^{-2}$
	III	$5,23 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-1}$	$6,90 \times 10^{-2}$	$1,51 \times 10^{-1}$
Virtual	I	$2,27 \times 10^{-4}$	$4,62 \times 10^{-4}$	$2,66 \times 10^{-4}$	$6,00 \times 10^{-4}$
	II	$1,95 \times 10^{-2}$	$3,86 \times 10^{-2}$	$2,91 \times 10^{-2}$	$6,17 \times 10^{-2}$
	III	$7,48 \times 10^{-2}$	$1,35 \times 10^{-1}$	$1,01 \times 10^{-1}$	$2,00 \times 10^{-1}$

Tabela 2.5: Valor do  $E_{rms}(\lambda)$  considerando  $N = 25$  e diagrama de radiação objetivo uniforme (casos da Seção 2.4.1)

Cáustica	Método	OADC		OADE	
		$\Delta\theta = 22^\circ$	$\Delta\theta = 42^\circ$	$\Delta\theta = 22^\circ$	$\Delta\theta = 42^\circ$
Real	I	$5,18 \times 10^{-4}$	$2,10 \times 10^{-3}$	$7,68 \times 10^{-4}$	$3,64 \times 10^{-3}$
	II	$5,12 \times 10^{-2}$	$1,52 \times 10^{-1}$	$3,98 \times 10^{-2}$	$8,80 \times 10^{-2}$
	III	$1,48 \times 10^{-1}$	$4,71 \times 10^{-1}$	$1,05 \times 10^{-1}$	$2,64 \times 10^{-1}$
Virtual	I	$3,86 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-3}$	$6,40 \times 10^{-4}$	$3,49 \times 10^{-4}$
	II	$1,98 \times 10^{-2}$	$3,74 \times 10^{-2}$	$4,25 \times 10^{-2}$	$1,66 \times 10^{-1}$
	III	$7,79 \times 10^{-2}$	$1,38 \times 10^{-1}$	$1,42 \times 10^{-1}$	$5,04 \times 10^{-1}$

Tabela 2.6: Valor do  $E_{rms}(\lambda)$  considerando  $N = 25$  e diagrama de radiação objetivo cossecante ao quadrado (casos da Seção 2.4.2)

Os estudos comparativos buscaram avaliar o comportamento do erro na geratriz, o erro no diagrama de radiação e o volume das antenas, ao variar uma série de parâmetros de projeto, entre eles: a configuração dos raios após a reflexão no subrefletor (OADC ou OADE), a forma de mapeamento dos raios no campo distante (cáustica real ou virtual), a função objetivo (cossecante ao quadrado ou uniforme) e a largura do feixe. Foi observado, através dos estudos do erro  $rms$  e erro absoluto, que o método que utiliza seções de elipses ou hipérboles para representar a superfície é mais preciso que os demais. O quanto mais preciso depende fatores que variam de caso para caso, entretanto, pôde-se constatar alguns padrões no comportamento do erro. A Tabela 2.5 apresenta o erro  $rms$  dos estudos de caso onde a função objetivo é uniforme considerando as duas aberturas angulares objetivo,  $\pm 7,5^\circ$  ( $\Delta\theta = 15^\circ$ ) e  $\pm 15^\circ$  ( $\Delta\theta = 30^\circ$ ) em relação à linha do horizonte e a Tabela 2.6 apresenta o erro  $rms$  dos estudos de caso onde a função objetivo é cossecante ao quadrado considerando as duas aberturas angulares objetivo,  $93^\circ \leq \theta \leq 115^\circ$  ( $\Delta\theta = 22^\circ$ ) e  $93^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$  ( $\Delta\theta = 42^\circ$ ). Em todos os casos a geratrizes foram determinadas com 25 pontos. Em quase todos os casos, a configuração OADE apresentou erro ligeiramente superior à OADC com mesmo setor angular. Verificou-se também que, ao dobrar o setor angular objetivo, o erro  $rms$  aproximadamente dobra de valor.

Cobertura	Cáustica	OADC		OADE	
		Real	Virtual	Real	Virtual
Uniforme	$\Delta\theta = 20^\circ$	5,633	5,586	5,270	6,073
	$\Delta\theta = 40^\circ$	5,700	5,604	5,043	6,803
Cossecante	$\Delta\theta = 22^\circ$	4,295	4,275	2,896	3,751
	$\Delta\theta = 42^\circ$	4,574	4,461	3,057	8,299

Tabela 2.7: Volume das antenas em  $10^3\lambda^3$ 

Através do estudo de erro absoluto foi possível perceber que a eficiência dos métodos de síntese está diretamente associada à forma da geratriz modelada. Verificou-se, por exemplo, que o método que concatena parábolas tem menor erro absoluto na parte da geratriz modelada que se assemelha à uma parábola, refletindo os raios em uma mesma direção. Neste caso, o uso de seções de parábolas para descrever uma parábola gerou baixos erros de síntese. Nas partes da geratriz que refletem os raios em direções diferentes para definir um determinado padrão no diagrama de radiação, o método que concatena seções de elipses e hipérboles, com um grau de liberdade a mais (a excentricidade), apresentou erro muito menores que os demais métodos.

De forma geral, os estudos demonstram que o método que utiliza seções de elipses e hipérboles além de mais eficiente, converge para solução com um número muito menor de pontos. A consequência disto, é que com poucos pontos pode-se representar de forma muito precisa a geratriz modelada. Observações similares foram feitas em [57], indicando que o novo procedimento é significativamente mais eficiente do que o método tradicional baseado na solução de uma equação diferencial ordinária [71]. Apesar de mais simples, o método que utiliza seções de parábolas apresentou erro maior que o baseado em seções de cônicas, porém menor que aquele onde uma equação diferencial ordinária precisa ser resolvida. Além disto, é importante destacar que ao utilizar seções de elipses ou hipérboles, é assegurada a continuidade das derivadas de primeira ordem em cada ponto da síntese, enquanto que utilizando seções de parábolas é garantida apenas a continuidade da superfície.

A respeito do volume das antenas, o comportamento mais patente é verificado comparando as configurações OADC e OADE. Na OADC, a função objetivo, ângulo de abertura no campo distante ou o mapeamento dos raios tem pouca influência nas dimensões da antena, enquanto que na configuração OADE a modificação destes parâmetros altera de forma significativa o volume total, conforme se verifica na Tabela 2.7. As antenas mais compactas foram as OADE com cáustica real e, nesta configuração, observou-se que quando menor a abertura angular objetivo menor o volume.

**3.1****Introdução**

O problema de síntese abordado neste capítulo consiste em determinar, sob os princípios da Óptica Geométrica (GO - *Geometrical Optics*), uma superfície refletora capaz de produzir o diagrama de radiação arbitrário  $G(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são coordenadas esféricas da direção, na região de campo distante, quando iluminada por uma fonte pontual, conforme ilustrado na Figura 3.1.

Silver, em [14], foi um dos primeiros autores a estudar o problema, porém, considerando a função do diagrama de radiação  $G(\alpha)$  com uma única variável. Neste caso, o problema é reduzido a uma equação diferencial ordinária. Em [35], Westcott e Norris generalizam a análise para um diagrama de radiação função de duas variáveis e, utilizando geometria diferencial em coordenadas esféricas, demonstraram que a formulação rigorosa do problema resulta em uma equação diferencial parcial de segunda ordem não-linear do tipo Monge-Ampère. Em [37] e [38] Brickell e Westcott apresentam um tratamento alternativo, mas equivalente, com algumas vantagens para o estudo da existência e unicidade da solução. Nesta abordagem, o problema é formulado como um problema de valor inicial envolvendo um sistema quasi-linear de quatro equações diferenciais parciais de primeira ordem. Finalmente, em [39] Brickell, Mader e Westcott introduzem o sistema de coordenadas complexa reduzindo significativamente a complexidade das expressões envolvidas e unificando em uma única expressão as formas elíptica e hiperbólica da equação de Monge-Ampère.

Após a introdução desta notação, diversos problemas de síntese geométrica foram estudados por estes autores, sempre em termos de uma equação Monge-Ampère e, em todos eles, a solução numérica adotada baseia-se no Método de Newton com a representação local da superfície por um esquema aproximado de diferenças finitas. Neste capítulo será apresentada uma abordagem numérica alternativa utilizando a mesma formulação teórica proposta em [35]. Ao invés de representar localmente a superfície por diferenças finitas, será utilizado a função de representação de uma superfície quádrlica confocal. Desta forma, assume-se que a superfície modelada é formada por um conjunto de superfícies quádrlicas locais.

Na Seção 3.2 é apresentada a notação em coordenadas complexas empregadas na formulação. Definida uma esfera de raio unitário ( $r = 1$ ), uma

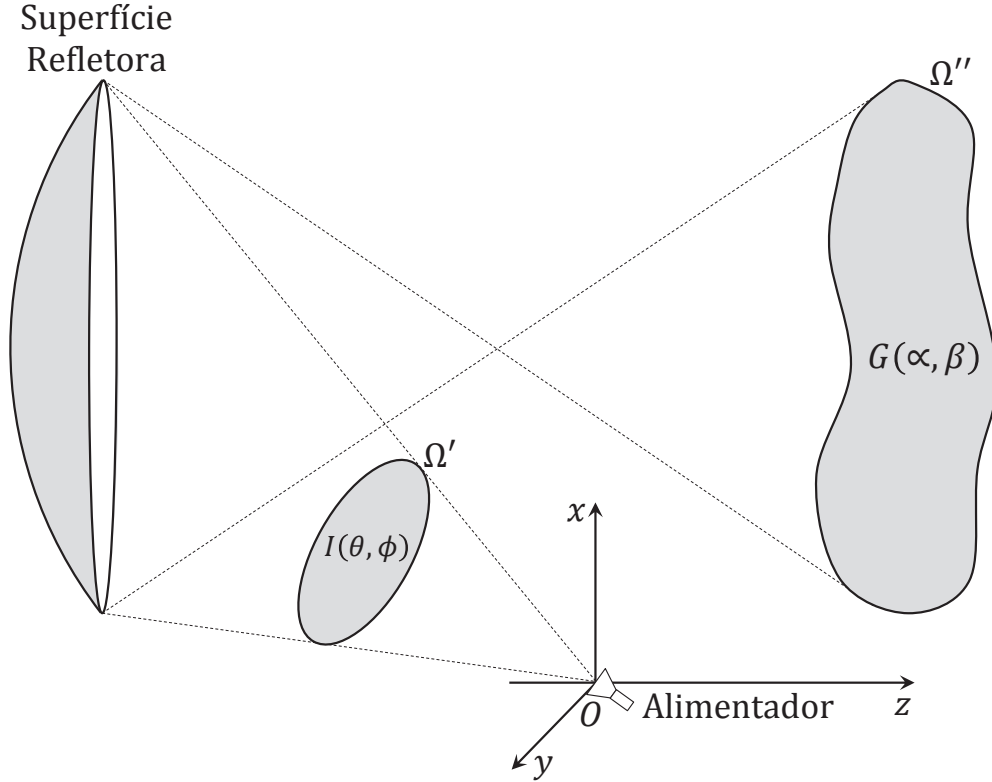


Figura 3.1: Geometria do problema de síntese

projeção estereográfica é utilizada para representar as direções de incidência ( $\eta$ ) e reflexão ( $\zeta$ ) descritas em coordenadas esféricas por  $(\theta, \phi)$  e  $(\alpha, \beta)$ , respectivamente [40]. Além disto, serão apresentadas algumas identidades relacionando os sistemas de coordenadas esféricas e complexas que serão amplamente utilizados na formulação. Os detalhes da aplicação desta projeção e o tratamento de vetores em coordenadas complexas são apresentados à parte na Seção A.2 do Apêndice A.

A formulação teórica do problema de síntese geométrica de antenas refletoras *offset* é apresentada na Seção 3.3. Inicialmente na Seção 3.3.1 vetores unitários em coordenadas complexas são utilizados para representar as direções dos raios incidente e refletido e para impor a Lei de Snell, obtendo como resultado uma equação diferencial que relaciona as direções de incidência e reflexão. Em seguida, na Seção 3.3.2 a Conservação da Energia é aplicada a um tubo elementar de raios levando a uma equação diferencial parcial que relaciona a densidade de potência proveniente do alimentador e a densidade de potência no campo distante. Por fim, utilizando as duas equações diferenciais parciais obtidas nos itens 3.3.1 e 3.3.2, determina-se uma equação diferencial parcial de segunda ordem não-linear do tipo Monge-Ampère, elíptica ou hiperbólica, a depender de um sinal, que representa fisicamente a transformação da densidade de potência no tubo de raios.

Na Seção 3.4 é apresentada uma solução particular da equação de Monge-Ampère na forma de uma superfície quádrlica confocal com eixo de simetria deslocado em elevação e azimuth, gerada a partir da revolução de uma seção cônica sobre seu próprio eixo de simetria. Além da função de representação destas quádrlicas, é obtida uma expressão analítica para a densidade de potência na região de campo distante em função dos parâmetros que definem a superfície quádrlica e da densidade de potência do alimentador. Por fim, é apresentado um estudo da relação de mapeamento de uma quádrlica, onde é demonstrado que círculos no plano complexo do alimentador serão mapeados em círculos no campo distante.

### 3.2

#### Notação em Coordenadas Complexas

Schruber em [34] foi um dos primeiros autores a aplicar a projeção estereográfica em problemas de síntese de superfícies refletoras. Em [39] Westcott, Mader e Brickell usaram uma projeção semelhante para definir um sistema de coordenadas complexas que foi amplamente empregado em diversos trabalhos sobre síntese geométrica de antenas refletoras e lentes [39]–[50], [91], [92]. A principal razão para o emprego deste formalismo é a possibilidade de representar funções trigonométricas através de funções polinomiais, simplificando consideravelmente a formulação. Para defini-las, considere que em um sistema de coordenadas esféricas, qualquer direção no espaço pode ser especificada através dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  associados a um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário, como ilustrado na Figura 3.2. Os pontos sobre esta superfície podem ser representados nas coordenadas Cartesianas  $x$  e  $y$ , obtidas a partir da projeção estereográfica do ponto  $P$  sobre a superfície esférica no plano  $xy$ . A partir desta parametrização as direções no espaço podem ser representadas pela seguinte variável complexa (veja a Seção A.2 do Apêndice A)[39]:

$$\eta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} = x + iy. \quad (3-1)$$

Manipulando a equação (3-1), pode-se mostrar que [41]:

$$\phi = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{\eta}{\bar{\eta}}\right), \quad (3-2)$$

onde a coordenada esférica  $\phi$  é expressa em função da variável complexa  $\eta$  e seu complexo conjugado  $\bar{\eta}$ . Novamente, manipulando (3-1) obtém-se expressões

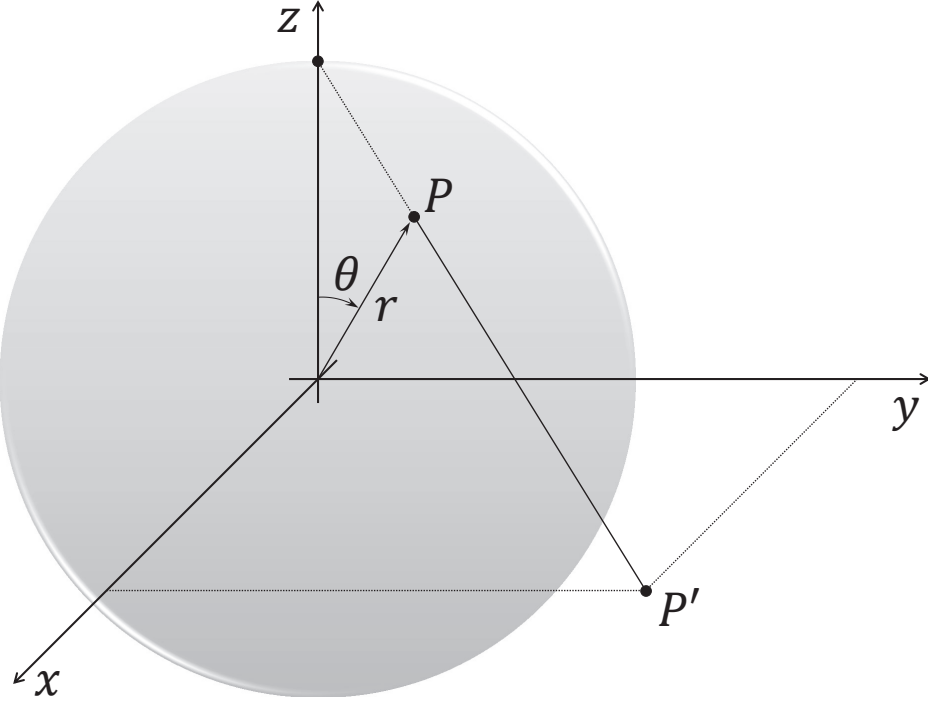


Figura 3.2: Projeção Estereográfica

relacionando coordenada esférica  $\theta$  à coordenada complexa de  $\eta$  [45].

$$\cos \theta = \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1}, \quad (3-3a)$$

$$\sin \theta = \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1}. \quad (3-3b)$$

Utilizando a fórmula de Euler, obtém-se ainda outras duas expressões amplamente utilizadas na apresentação da formulação:

$$\cos \phi = \frac{\bar{\eta} + \eta}{2|\eta|}, \quad (3-4a)$$

$$\sin \phi = \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{2|\eta|}. \quad (3-4b)$$

Neste trabalho, tratar-se-á a coordenada  $\eta$  como a direção dos raios provenientes do alimentador, e a coordenada  $\zeta$  a direção dos raios refletidos pela superfície refletora e definida como:

$$\zeta = \cot \left( \frac{\alpha}{2} \right) e^{i\beta} = u + iv, \quad (3-5)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de elevação em relação ao eixo  $z$  e  $\beta$  o ângulo de azimute em relação ao eixo  $x$ . De forma análoga, pode-se escrever a relação entre o ângulo de azimute  $\beta$  e a direção de reflexão  $\zeta$ :

$$\beta = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right). \quad (3-6)$$

As relações entre o ângulo de elevação  $\alpha$  e a coordenada complexa de  $\zeta$  são:

$$\cos \alpha = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (3-7a)$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{2|\zeta|}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (3-7b)$$

e as relações entre o ângulo  $\beta$  e  $\zeta$

$$\cos \beta = \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{2|\zeta|}, \quad (3-8a)$$

$$\text{sen} \beta = \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{2|\zeta|}. \quad (3-8b)$$

### 3.3

#### Equação de Monge-Ampère

A Figura 3.3 apresenta a geometria da antena refletora *offset*. Sob os princípios da GO, um conjunto de raios provenientes do alimentador, cujo centro de fase está na origem e com diagrama de radiação descrito pela função real  $I(\eta)$ , é refletido por uma superfície modelada em um contorno  $\Omega''$ , cujo diagrama de radiação é representado pela função real  $G(\zeta)$ . A equação de mapeamento que governa a transformação  $\tau : \eta \rightarrow \zeta$  é obtida através da imposição, simultânea, da Lei de Snell e da Conservação da Energia.

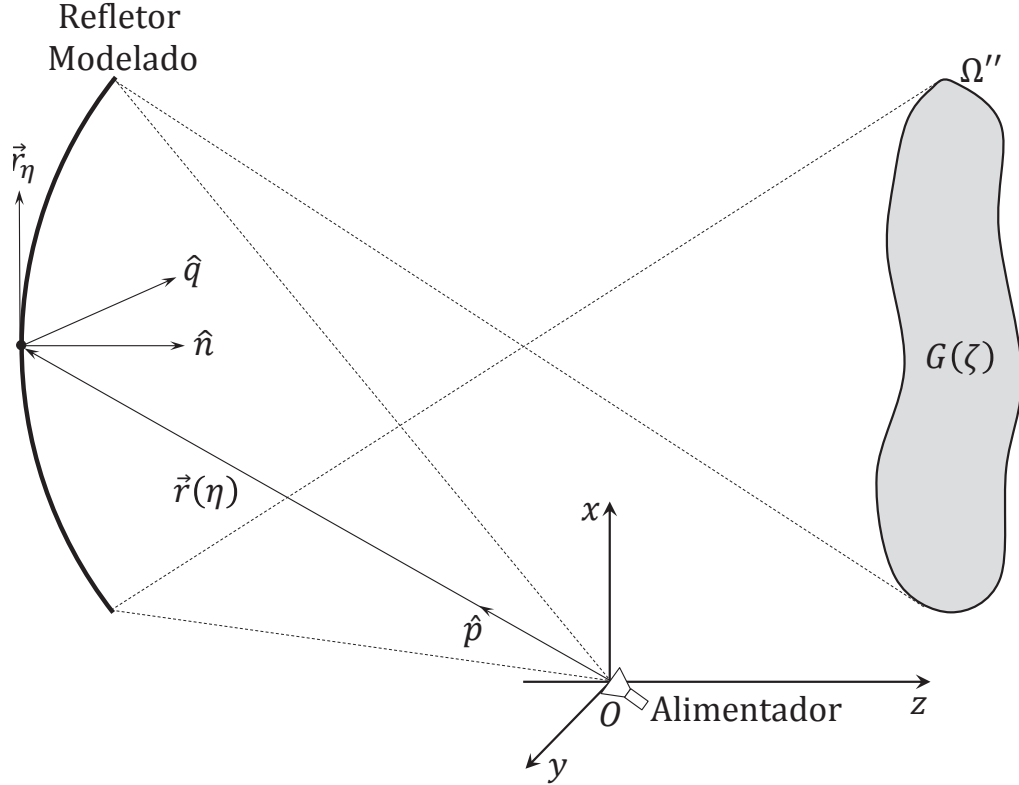
#### 3.3.1

##### Lei de Snell

A Lei de Snell de reflexão impõe duas restrições à reflexão dos raios. São elas: o raio incidente, o raio refletido e o vetor normal à superfície devem, necessariamente, pertencer ao mesmo plano; e os raios incidente e refletido fazem o mesmo ângulo com a normal. Para formular o problema, considere as direções dos raios incidentes e refletidos expressas em função dos vetores unitários  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3.3:

$$\hat{p}(\theta, \phi) = \text{sen} \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (3-9a)$$

$$\hat{q}(\alpha, \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta \hat{x} + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}. \quad (3-9b)$$

Figura 3.3: Geometria da Antena Refletora *Offset*

Substituindo as expressões (3-3a), (3-3b), (3-4a) e (3-4b) em (3-9a) e (3-7a), (3-7b), (3-8a) e (3-8b) em (3-9b) obtém-se:

$$\hat{p}(\eta) = \frac{\bar{\eta} + \eta}{|\eta|^2 + 1} \hat{x} + \frac{(\bar{\eta} - \eta)i}{|\eta|^2 + 1} \hat{y} + \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \hat{z}, \quad (3-10a)$$

$$\hat{q}(\zeta) = \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{|\zeta|^2 + 1} \hat{x} + \frac{(\bar{\zeta} - \zeta)i}{|\zeta|^2 + 1} \hat{y} + \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \hat{z}, \quad (3-10b)$$

que representam as direções de incidência e reflexão em função das coordenadas complexas. Para representar a superfície refletora ilustrada na Figura 3.3 utiliza-se o seguinte vetor posição [39]:

$$\vec{r}(\eta) = r(\eta) \hat{p} \quad (3-11)$$

onde  $r$  é uma função real da variável complexa  $\eta$  que representa a distância entre origem  $O$  e superfície refletora na direção  $(\theta, \phi)$ . A derivada de  $r(\eta)$  em relação a  $\eta$  resulta no vetor complexo  $\vec{r}_\eta$  tangente à superfície, conforme representado na Figura 3.3. A Lei de Snell de reflexão implica que um vetor  $\hat{n}$ , normal à superfície, deve ser perpendicular a derivada tangencial  $\vec{r}_\eta$ . Matematicamente, essa condição é escrita da seguinte forma:

$$(\vec{r}_\eta \cdot \hat{n}) = 0, \quad (3-12)$$



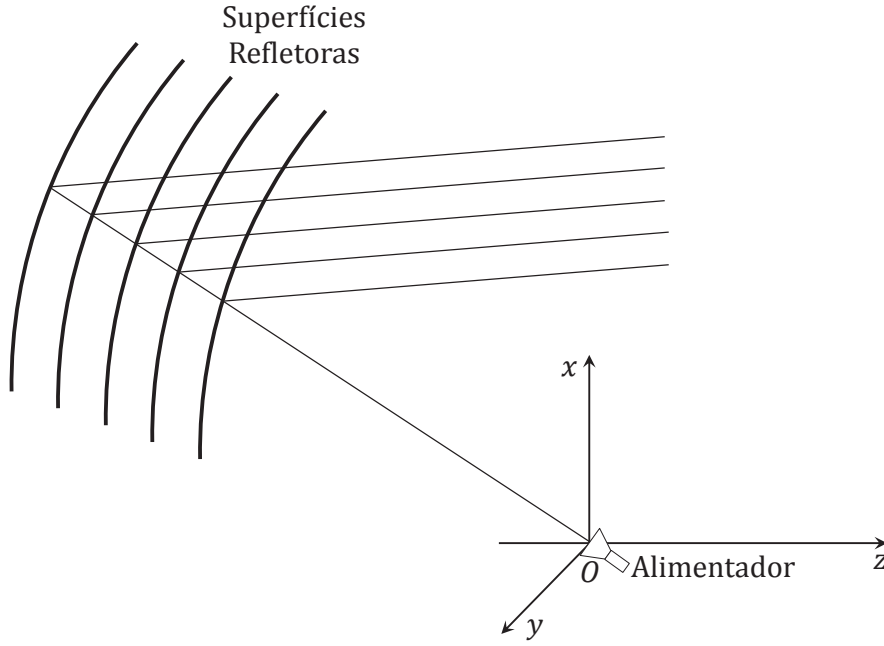


Figura 3.4: Conjunto de soluções da Lei de Snell

Após algumas manipulações (Seções A.3 e A.4 do Apêndice A) obtém-se:

$$\frac{r_\eta}{r} = \frac{1}{\zeta - \eta} + \frac{\bar{\eta}}{1 + |\eta|^2}. \quad (3-13)$$

Na seção 3.2 foi apresentada uma forma de representar as direções no espaço  $(\theta, \phi)$  através da variável complexa  $\eta$ . Com o mesmo objetivo de simplificar a formulação, é definida agora a seguinte função real  $L(\eta)$  de variável complexa relacionada a função  $r(\eta)$  através da seguinte expressão [39]:

$$r = (|\eta|^2 + 1) e^{L(\eta)}. \quad (3-14)$$

A diferenciação de (3-14) em relação à  $\eta$ , e substituindo em (3-13) obtém-se a seguinte equação diferencial de primeira ordem [39]:

$$L_\eta = \frac{1}{\zeta - \eta}, \quad (3-15)$$

relacionando a direção do raio incidente à direção do raio refletido. Esta equação diferencial complexa representa um sistema de duas equações diferenciais parciais de primeira ordem: uma relativa à parte real e a outra à parte imaginária, similares às obtidas em [19] e [20]. Integrando (3-15) encontra-se:

$$L(\eta) = \int \frac{1}{\zeta - \eta} d\eta + C, \quad (3-16)$$

onde  $C$  é uma constante que especifica uma entre as infinitas soluções de (3-15), conforme ilustrado na Figura 3.4. A condição de integrabilidade de (3-16)

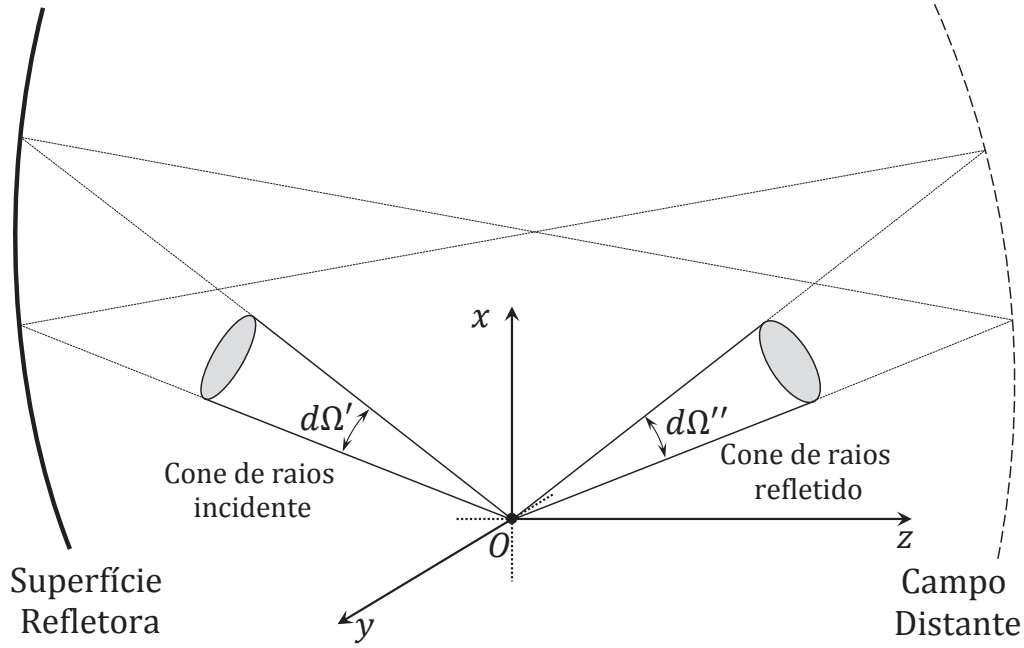


Figura 3.5: Cone de raios incidentes e refletidos

requer que

$$L_{\eta\bar{\eta}} = -\frac{\zeta_{\bar{\eta}}}{(\zeta - \eta)^2} \quad (3-17)$$

seja um número real [39].

### 3.3.2 Conservação da Energia

A Conservação da Energia requer que elementos de ângulo sólido  $d\Omega'$  sejam transformados para  $d\Omega''$  (observe a Figura 3.5) na razão  $I/G$ , ou seja:

$$\left| \frac{d\Omega'}{d\Omega''} \right| = \frac{I}{G}. \quad (3-18)$$

Essa transformação, que representa a modificação imposta ao diagrama de radiação do alimentador pela superfície refletora é dada por:

$$I(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = G(\alpha, \beta) \sin\alpha d\alpha d\beta, \quad (3-19)$$

onde  $\sin\theta d\theta d\phi$  é o elemento de ângulo sólido associado ao cone de raios provenientes do alimentador e  $\sin\alpha d\alpha d\beta$  o elemento de ângulo sólido associado ao cone de raios refletido pela superfície modelada. A relação entre os elementos de área é dada pelo módulo do jacobiano  $J(\theta, \phi; \alpha, \beta)$  da transformação  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\theta, \phi)$ . Logo:

$$\frac{I(\theta, \phi)}{G(\alpha, \beta)} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \alpha d\alpha} = |J(\theta, \phi; \alpha, \beta)|. \quad (3-20)$$

Utilizando a regra da cadeia de diferenciação, após algumas manipulações a equação (3-20) pode ser reescrita como (veja a Seção A.5 do Apêndice A) [39]:

$$|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (3-21)$$

A equação (3-21) expressa a distorção no mapeamento  $\tau : \eta \rightarrow \zeta$ , onde círculos no plano  $\eta$  são transformados em elipses no plano  $\zeta$ , cujos eixos maior e menor são dados pela seguinte relação (detalhes desta demonstração são apresentados na Seção A.6 do Apêndice A)[39]:

$$\left| \frac{d\hat{q}/dt}{d\hat{p}/dt} \right| = ||\zeta_\eta| \pm |\zeta_{\bar{\eta}}|| \left( \frac{|\eta|^2 + 1}{|\zeta|^2 + 1} \right). \quad (3-22)$$

Para garantir a condição de conservação da energia, é necessária uma constante de normalização de modo a garantir que a energia total contida no feixe proveniente do alimentador seja a mesma do feixe correspondente na região de campo distante. Logo

$$|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2 = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (3-23)$$

onde a constante de normalização é definida como

$$N = \frac{I_0}{G_0} = \frac{\iint_{\Omega'} I(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{\iint_{\Omega''} G(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta}, \quad (3-24)$$

onde  $I_0$  é a constante de normalização do alimentador, cujo domínio é representado por  $\Omega'$  e  $G_0$  é a constante de normalização do campo distante com domínio representado por  $\Omega''$ .

A equação que define o mapeamento  $\tau : \eta \rightarrow \zeta$  é obtida substituindo Lei de Snell expressa em (3-15) na equação diferencial da Conservação da Energia em (3-23). Para determiná-la é necessário inicialmente derivarmos (3-15) em relação à  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , o que resulta em:

$$L_{\eta\eta} = -\frac{\zeta_\eta}{(\zeta - \eta)^2} + \frac{1}{(\zeta - \eta)^2}, \quad (3-25a)$$

$$L_{\eta\bar{\eta}} = -\frac{\zeta_{\bar{\eta}}}{(\zeta - \eta)^2}. \quad (3-25b)$$

Substituindo (3-15) em (3-25a) e (3-25b), encontra-se:

$$\zeta_\eta = -\frac{L_{\eta\eta} - L_\eta^2}{L_\eta^2}, \quad (3-26a)$$

$$\zeta_{\bar{\eta}} = -\frac{L_{\eta\bar{\eta}}}{L_\eta^2}. \quad (3-26b)$$

Substituindo (3-26a) e (3-26b) em (3-23), encontra-se:

$$\left| -\frac{L_{\eta\eta} - L_\eta^2}{L_\eta^2} \right|^2 - \left| -\frac{L_{\eta\bar{\eta}}}{L_\eta^2} \right|^2 = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2, \quad (3-27)$$

que pode ser reescrita como [39]:

$$|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - |L_{\eta\bar{\eta}}|^2 = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 |L_\eta|^4. \quad (3-28)$$

A expressão (3-28) é uma equação diferencial parcial de segunda ordem não-linear do tipo Monge-Ampère elíptica (−) ou hiperbólica (+), dependendo do sinal escolhido. Neste trabalho, será adotada a forma elíptica da equação de Monge-Ampère, logo, usar-se-á o sinal negativo no lado esquerdo de (3-28). Assim como a equação ordinária dada pela Lei de Snell apresentada na Seção 3.3.1, a equação de Monge-Ampère é definida apenas por derivadas da função  $L(\eta)$ . Como consequência, a solução de (3-28) representa um conjunto infinito de superfícies que se diferenciam apenas por uma constante.

### 3.4

#### Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado

Um tipo de superfície muito utilizada por suas propriedades ópticas são as quádras confocais, formadas a partir da revolução de uma cônica sobre seu próprio eixo. Nesta seção será apresentada a equação que define esta classe de quádras, suas derivadas parciais e a expressão para a densidade de potência  $G(\zeta)$  produzida por estas superfícies em função dos parâmetros que as definem.

#### 3.4.1

##### Equação Generalizada de uma Quádrica Confocal

A equação polar de uma seção cônica assume formas simples quando um dos focos  $F$  está na origem  $O$  do sistema de coordenadas polar e a reta diretriz  $S$  é perpendicular ao eixo da cônica, como ilustrado Figura 3.6. Para determinar a equação polar da cônica utiliza-se a seguinte proposição: uma cônica é o lugar geométrico dos pontos do plano  $P = (r, \theta)$  tais que

$$\overline{OP} = e\overline{PS}, \quad (3-29)$$

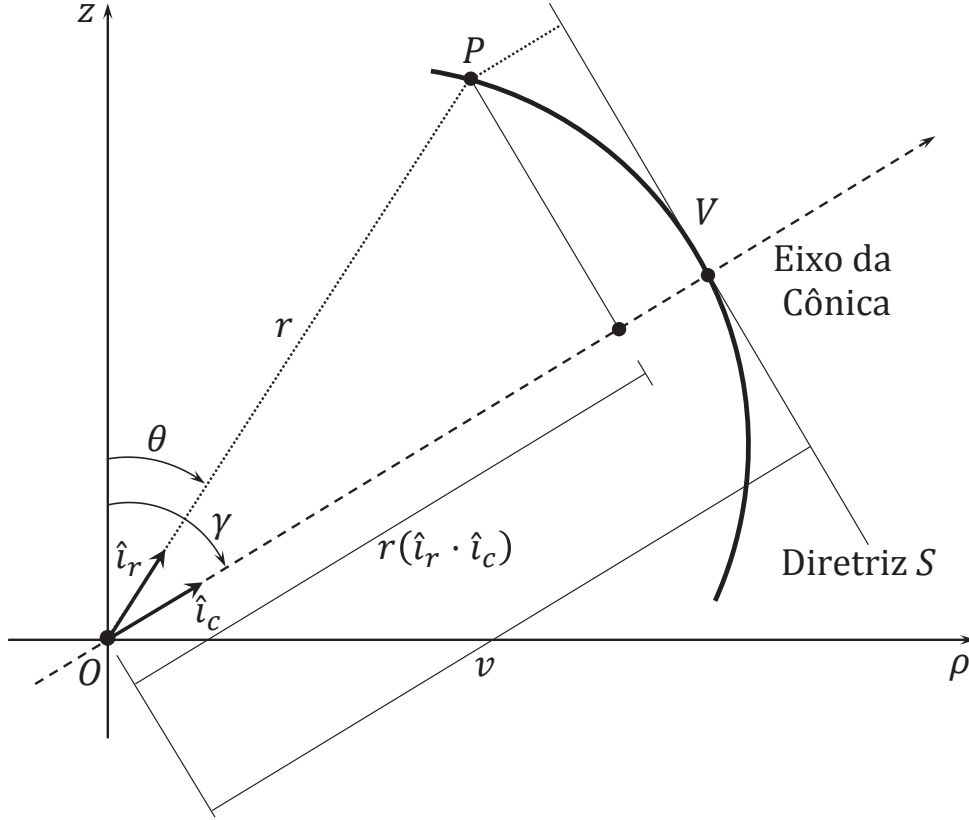


Figura 3.6: Seção de cônica com eixo deslocado

onde  $e$  é a excentricidade e

$$\overline{PS} = v \pm r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c), \quad (3-30)$$

em que  $v$  é a distância entre o foco  $O$  e a diretriz  $S$ ,  $\hat{i}_r$  é a direção unitária do vetor  $\overline{OP}$  e  $\hat{i}_c$  é a direção do eixo de simetria da cônica (direção perpendicular a reta diretriz). Se admitirmos que os vetores  $\hat{i}_r$  e  $\hat{i}_c$  estão no espaço, e não no plano, tem-se, então, uma superfície quádrlica confocal, conforme ilustra Figura 3.7 Os vetores  $\hat{i}_r$  e  $\hat{i}_c$  são definidos como:

$$\hat{i}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}, \quad (3-31a)$$

$$\hat{i}_c(\gamma, \varphi) = \sin\gamma \cos\varphi \hat{x} + \sin\gamma \sin\varphi \hat{y} + \cos\gamma \hat{z}, \quad (3-31b)$$

onde  $\gamma$  é o ângulo de elevação do eixo da cônica em relação ao eixo  $z$  e  $\varphi$  é o azimuth do eixo da cônica em relação ao eixo  $x$ , como mostra a Figura 3.7. Em (3-30) o sinal  $-$  indica que a diretriz  $S$  está à esquerda do polo e o sinal  $+$  indica que está à direita. No presente trabalho considerou-se a diretriz à esquerda e, conseqüentemente, o sinal negativo. Fazendo

$$\overline{OP} = r, \quad (3-32)$$

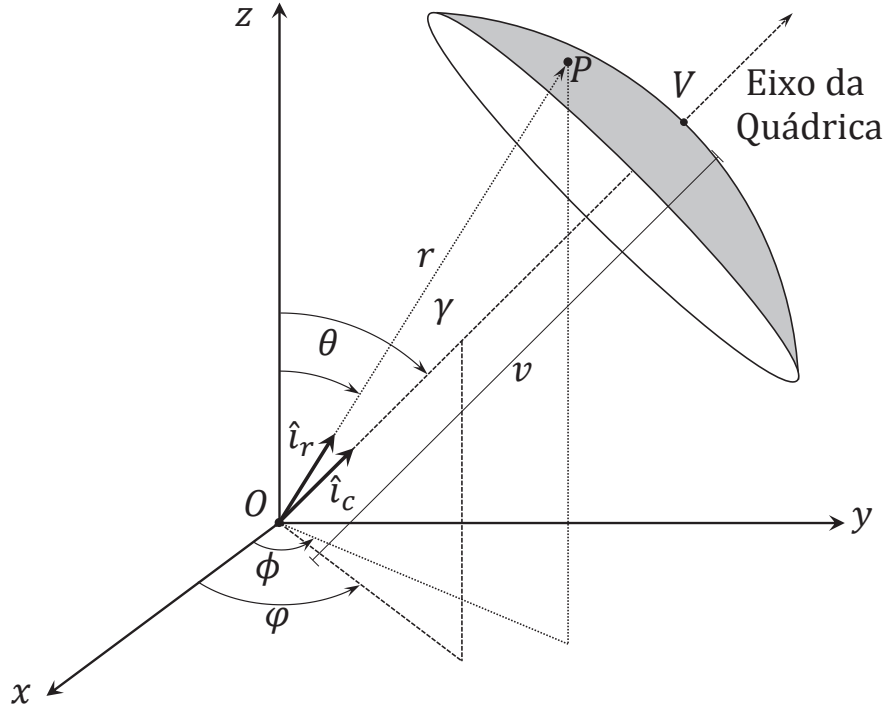


Figura 3.7: Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado

e com ajuda de (3-30), a equação (3-29) pode ser escrita como

$$r = e \left[ v + r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) \right], \quad (3-33)$$

e, após algumas manipulações, reescrita na forma

$$r = \frac{-ev}{r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) - 1}. \quad (3-34)$$

Substituindo (3-31a) e (3-31b) em (3-34) encontra-se:

$$r = \frac{a}{b \sin \theta \cos \phi + c \sin \theta \sin \phi + d \cos \theta - 1}, \quad (3-35)$$

onde os parâmetros da quádrlica são como

$$a = -ev, \quad (3-36a)$$

$$b = e \sin \gamma \cos \varphi, \quad (3-36b)$$

$$c = e \sin \gamma \sin \varphi, \text{ e } \quad (3-36c)$$

$$d = e \cos \gamma, \quad (3-36d)$$

onde  $a$  é o *semi-latus rectum*,  $e$  é a excentricidade,  $\gamma$  e  $\beta$  os ângulos do eixo de simetria em elevação e azimute, respectivamente. Conforme já mencionado, a representação das direções em coordenadas complexas simplifica a formulação do presente método de síntese. Desta forma, substituindo as identidades (3-3a)

e (3-3b) em (3-35), tem-se que

$$r = \frac{a}{b \left( \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1} \right) \cos \phi + c \left( \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1} \right) \sin \phi + d \left( \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right) - 1}, \quad (3-37)$$

e reescrito na forma

$$r = \frac{a(|\eta|^2 + 1)}{(2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sin \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1}. \quad (3-38)$$

Substituindo (3-14) em (3-38) obtém-se

$$ae^{-L(\eta)} = (2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sin \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (3-39)$$

Com o auxílio das identidades (3-4a) e (3-4b) a equação da quárica (3-39) pode ser escrita em função das coordenadas complexas como

$$ae^{-L(\eta)} = (\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (3-40)$$

Alternativamente, (3-40) pode ser expressa por

$$ae^{-L(\eta)} = (d - 1)\eta\bar{\eta} + (b - ic)\eta + (b + ic)\bar{\eta} - d - 1. \quad (3-41)$$

Além das duas formas acima representadas, pode-se obter uma expressão para a função  $L(\eta)$  em função dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  na forma

$$L(\eta) = \ln \left[ \frac{a}{(\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1} \right]. \quad (3-42)$$

### 3.4.2

#### Mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$

Conforme visto na Seção 3.3, a equação diferencial de Monge-Ampère é escrita em função das derivadas da função  $L$  em relação as variáveis  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ . Logo, é necessário obter as derivadas parciais de primeira e segunda ordem diferenciando a equação (3-41) em relação à  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [ae^{-L(\eta)}] = \frac{\partial}{\partial \eta} [(d - 1)\eta\bar{\eta} + (b - ic)\eta + (b + ic)\bar{\eta} - d - 1]. \quad (3-43)$$

Sabendo-se que, por definição

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad (3-44)$$

faz-se a derivação em (3-43), resultando em

$$-ae^{-L(\eta)} \frac{\partial L(\eta)}{\partial \eta} = [(d - 1)\bar{\eta} + (b - ic)]. \quad (3-45)$$

Substituindo (3-41) em (3-45) obtém-se:

$$L_{\eta}(\eta) = -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}. \quad (3-46)$$

onde  $L_{\eta}$  é a derivada da função real  $L$  em relação à variável complexa  $\eta$ . A derivada da função  $L$  em relação à variável  $\bar{\eta}$  é obtida de forma direta observando a condição  $\bar{L}_{\eta} = L_{\bar{\eta}}$ , válida para qualquer função real. Logo

$$L_{\bar{\eta}}(\eta) = -\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}. \quad (3-47)$$

As derivadas de segunda ordem são obtidas a partir das derivadas já obtidas. Logo, derivando novamente (3-46) em relação à  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (3-48)$$

Após algumas manipulações matemáticas, mostra-se que

$$L_{\eta\eta}(\eta) = \left[ \frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (3-49)$$

onde  $L_{\eta}$  é a derivada de segunda ordem da função real  $L$  em relação à variável complexa  $\eta$ . Comparando (3-46) e (3-49), é possível constatar que

$$L_{\eta\eta}(\eta) = [L_{\eta}(\eta)]^2, \quad (3-50)$$

levando à uma importante simplificação na equação de Monge-Ampère. Outra derivada de segunda ordem pode ser obtida derivando-se a equação (3-47) em relação à  $\bar{\eta}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} [L_{\bar{\eta}}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[ -\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (3-51)$$

Após algumas manipulações, a equação (3-51) é reduzida à

$$L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\eta) = \left[ \frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (3-52)$$

onde  $L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}$  é a derivada de segunda ordem da função  $L$  em relação à variável complexa  $\bar{\eta}$ . Por fim, a derivada cruzada de segunda ordem é obtida derivando novamente (3-46), porém, faz-se agora a diferenciação relação a variável complexa  $\bar{\eta}$ . Logo

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} [L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[ -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (3-53)$$

Reescrevendo (3-54) obtém-se

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]^2}. \quad (3-54)$$



Note que a condição de integrabilidade em (3-17), que impõe que  $L_{\eta\bar{\eta}}$  seja real, é atendida, conforme evidenciado por (3-54). Mostra-se facilmente que

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = L_{\bar{\eta}\eta}(\eta). \quad (3-55)$$

Substituindo (3-46), (3-49) e (3-54) em (3-28) obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \left| \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]^2} \right|^2 = \\ & \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \left| - \frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right|^4, \end{aligned} \quad (3-56)$$

que, após algumas manipulações, pode ser reescrita como:

$$- \left| \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)]^2} \right|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (3-57)$$

A equação (3-57) é uma particularização da equação de Monge-Ampère (3-28) válida para superfícies quádricas confocais.

A relação entre a direção de incidência  $\eta$  e a de reflexão  $\zeta$  para uma superfície quádrica confocal com eixo deslocado pode ser obtida substituindo (3-46) na Lei de Snell (3-15) tem-se:

$$\zeta = \eta - \frac{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}. \quad (3-58)$$

Manipulando (3-58), obtém-se a expressão

$$\zeta = \frac{(d+1) - (b+ic)\bar{\eta}}{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}, \quad (3-59)$$

na forma de uma transformação linear fracionária, onde

$$b^2 + c^2 + d^2 - 1 \neq 0. \quad (3-60)$$

Particularizando a Lei de Snell para uma superfície quádrica confocal expressa na equação (3-59), para o plano de simetria  $\phi = 0$ , assumindo que não há deslocamento azimutal em seu eixo de simetria  $\varphi = 0$  e, conseqüentemente,  $c = 0$ , mostra-se facilmente que:

$$\zeta_r = \frac{(d+1) - b\eta_r}{(d-1)\eta_r + b}, \quad (3-61)$$

onde  $\eta_r$  e  $\zeta_r$  são as partes reais de  $\eta$  e  $\zeta$ . Reescrevendo (3-61) tem-se

$$(\eta_r + \zeta_r)b + (\eta_r\zeta_r - 1)d = \eta_r\zeta_r + 1. \quad (3-62)$$

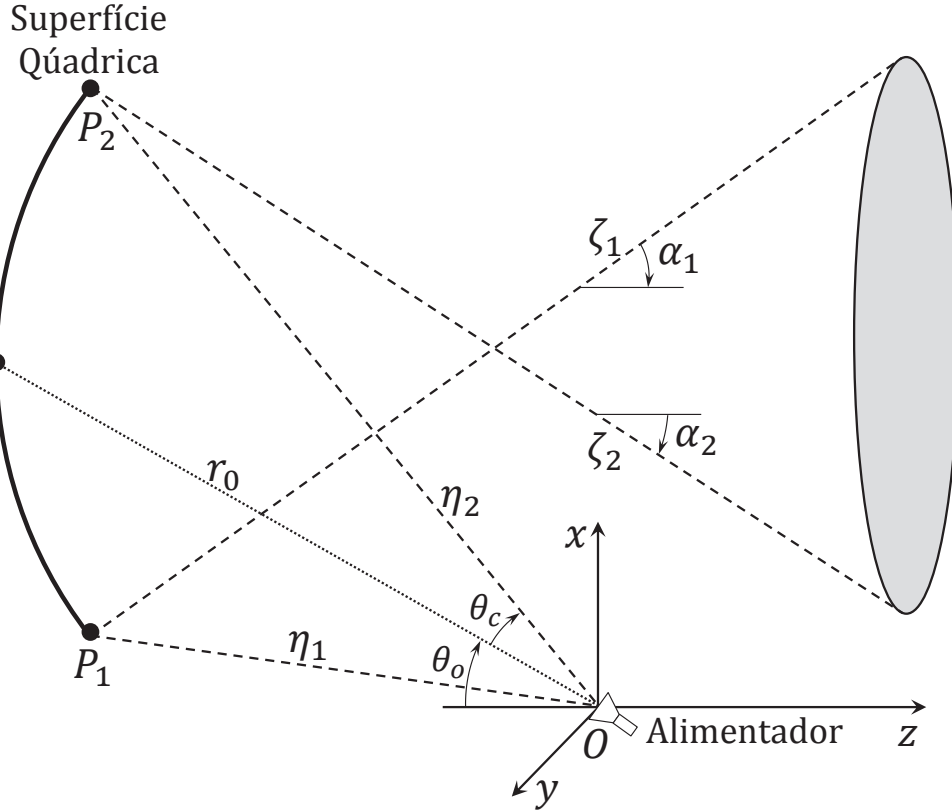


Figura 3.8: Mapeamento para obtenção de uma quádrlica solução inicial

Considere agora dois raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ), dados por

$$\eta_{r1} = \cot \left( \frac{\theta_1}{2} \right), \quad (3-63)$$

$$\eta_{r2} = \cot \left( \frac{\theta_2}{2} \right), \quad (3-64)$$

onde  $\theta_1 = \theta_0 - \theta_c$  e  $\theta_2 = \theta_0 + \theta_c$  são os ângulos de elevação em relação ao eixo  $z$  que definem as direções de incidência nas bordas do refletor e  $\theta_0$  e  $\theta_c$  são os ângulos de *offset* e abertura do alimentador, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3.8. As direções de reflexão correspondentes são definidas como

$$\zeta_{r1} = \cot \left( \frac{\alpha_1}{2} \right), \quad (3-65)$$

$$\zeta_{r2} = \cot \left( \frac{\alpha_2}{2} \right), \quad (3-66)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os ângulos de elevação em relação ao eixo  $z$  que definem as direções de reflexão na região de campo distante (observe a Figura 3.8). Substituindo (3-63), (3-64), (3-65) e (3-66) em (3-62) obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (\eta_{r1} + \zeta_{r1})b + (\eta_{r1}\zeta_{r1} - 1)d = \eta_{r1}\zeta_{r1} + 1 \\ (\eta_{r2} + \zeta_{r2})b + (\eta_{r2}\zeta_{r2} - 1)d = \eta_{r2}\zeta_{r2} + 1 \end{cases}, \quad (3-67)$$

que resolvido analiticamente resulta em

$$b = \frac{2(\eta_{r2}\zeta_{r2} - \eta_{r1}\zeta_{r1})}{(\eta_{r1} + \zeta_{r1})(\eta_{r2}\zeta_{r2} - 1) - (\eta_{r2} + \zeta_{r2})(\eta_{r1}\zeta_{r1} - 1)}, \quad (3-68)$$

$$d = \frac{(\eta_{r1} + \zeta_{r1})(\eta_{r2}\zeta_{r2} + 1) - (\eta_{r2} + \zeta_{r2})(\eta_{r1}\zeta_{r1} + 1)}{(\eta_{r1} + \zeta_{r1})(\eta_{r2}\zeta_{r2} - 1) - (\eta_{r2} + \zeta_{r2})(\eta_{r1}\zeta_{r1} - 1)}. \quad (3-69)$$

O parâmetro  $a$  é definido em função da distância  $r_0$  entre a origem e o centro do refletor (observe a Figura 3.8):

$$a = r_0(b \sin \theta_0 + d \cos \theta_0 - 1). \quad (3-70)$$

Para ajustar o valor de  $a$  em função do diâmetro do refletor  $D$ , basta determinar a superfície considerando, por exemplo,  $r_0 = 1$  e em seguida multiplicar a pela constante

$$X = \frac{D}{|\overline{P_1 P_2}|}, \quad (3-71)$$

onde  $|\overline{P_1 P_2}|$  é o diâmetro da superfície considerando  $r_0 = 1$ . Como exemplo, deseja-se obter a uma superfície quádrlica confocal cujos limites do campo distante são definidos pelos ângulos  $\alpha_1 = -5^\circ$  e  $\alpha_2 = 55^\circ$ , o ângulo de *offset* do alimentador é  $\theta_0 = 60^\circ$  e ângulo de borda  $\theta_c = 30^\circ$ . Logo

$$\theta_1 = \theta_0 - \theta_c = 30^\circ, \quad (3-72)$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \theta_c = 90^\circ, \quad (3-73)$$

e aplicando estes valores em (3-68), (3-69) e (3-70) obtém-se os seguintes parâmetros da quádrlica:

$$a = -1,012689, \quad (3-74a)$$

$$b = 0,141607, \quad (3-74b)$$

$$c = 0, \text{ e} \quad (3-74c)$$

$$d = 0,270650. \quad (3-74d)$$

Para ilustrar o resultado, a Figura 3.9 a superfície refletora e o traçado de raios no plano de simetria após a superfície ser redimensionada para ter diâmetro de 4 metros. Neste caso, a constante  $X = 537,206787$  e, conseqüentemente,  $a = -544,023548$ . Analisando a Figura 3.9 percebe-se, de imediato, que a superfície refletora é um elipsóide de revolução onde um dos focos está sobre

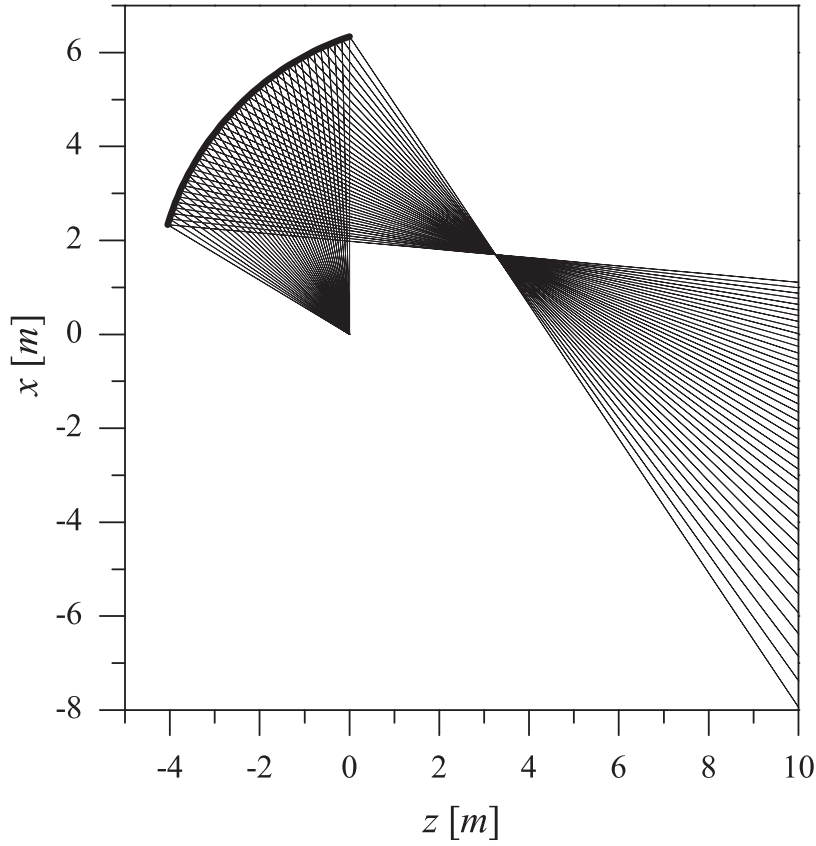


Figura 3.9: Traçado de raios da superfície quádrlica confocal

a origem e o outro à direita. Como a superfície refletora não é circular, o diagrama de raios no plano de simetria permite uma análise limitada das direções dos raios. Uma análise mais completa das direções de incidência e reflexão é obtida pela visualização das variáveis  $\eta$  e  $\zeta$  em seus respectivos planos complexos apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11.

### 3.4.3

#### Densidade de Potência Refletida

A equação de Monge-Ampère e as expressões analíticas da função  $L$  e suas derivadas podem ser utilizadas para determinar uma expressão analítica para a distribuição  $G(\zeta)$  produzida por uma quádrlica confocal, quando iluminada por uma fonte pontual com foco na origem e diagrama de radiação  $I(\eta)$ . Derivando (3-59) em relação à  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , obtém-se, respectivamente:

$$\zeta_\eta = 0, \quad (3-75a)$$

$$\zeta_{\bar{\eta}} = -\frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)]^2}. \quad (3-75b)$$

A substituição de (3-75a) e (3-75b) em (3-23) leva a

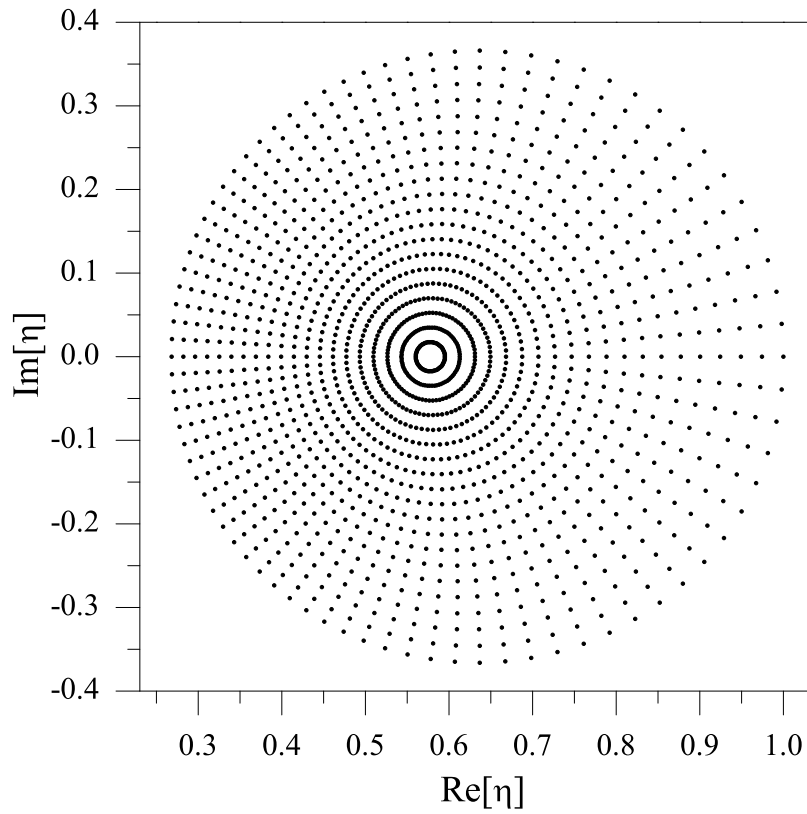


Figura 3.10: Diagrama das direções de incidência no plano complexo  $\eta$

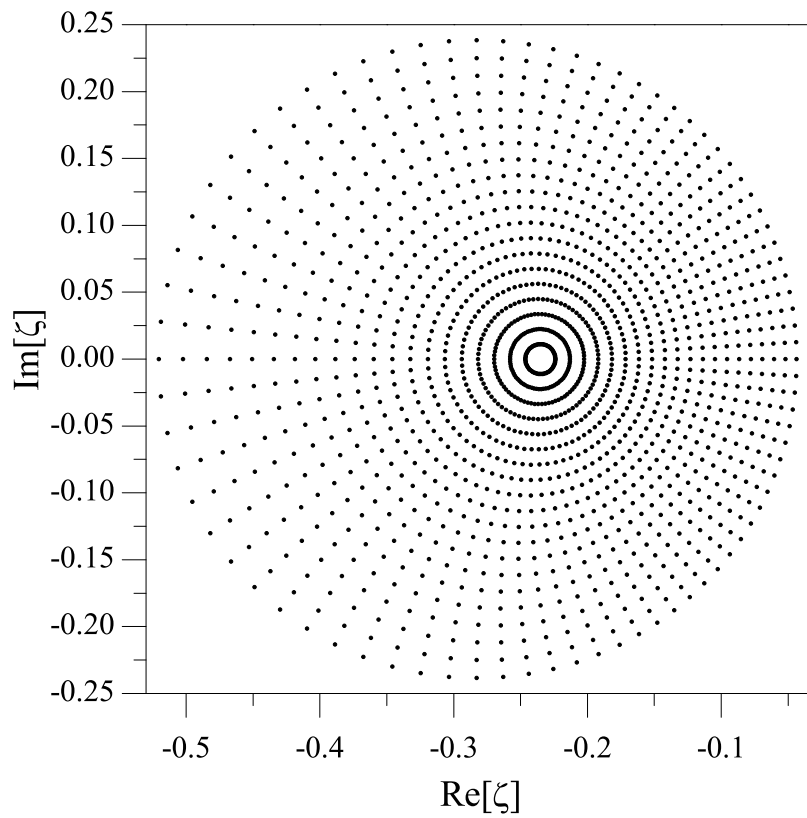


Figura 3.11: Diagrama das direções de reflexão no plano complexo  $\zeta$

$$-\left| \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)]^2} \right|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2, \quad (3-76)$$

que é reescrita na forma

$$G(\zeta) = \mp I(\eta) \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \left| \frac{[(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)]^2}{b^2 + c^2 + d^2 - 1} \right|^2. \quad (3-77)$$

Note que a função (3-77) representa o diagrama de radiação de uma família de superfícies quádricas definida pelos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $d$ . O *semi-latus rectum*  $a$ , de fato, não altera a forma do diagrama de radiação, trata-se apenas de uma constante que escala o tamanho da superfície refletora. Além disto, repare que, caso  $b^2 + c^2 + d^2 - 1 = 0$ ,  $G(\zeta) \rightarrow \infty$ . Neste caso, ter-se-ia o diagrama de radiação de um parabolóide de revolução. Considerando o diagrama de radiação do alimentador  $I(\eta)$  descrito por:

$$I(\eta) = \cos^{2n} \theta, \text{ onde } \theta < \pi/2, \quad (3-78)$$

e substituindo (3-3a) e (3-78) em (3-77) obtém-se

$$G(\zeta) = \mp \left( \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^{2n} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \left| \frac{[(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)]^2}{b^2 + c^2 + d^2 - 1} \right|^2, \quad (3-79)$$

onde  $|\eta| > 1$ . Esta expressão representa o diagrama de radiação da GO de uma superfície quádrica confocal quando iluminada por um modelo cosseno elevado. Como exemplo, considere a superfície quádrica determinada no final da Seção 3.4.2 e o diagrama de radiação do alimentador ilustrado Figura 3.12 onde  $n = 9, 6$ . O diagrama refletido é apresentado na Figura 3.13. Cumpre lembrar que, neste trabalho, está sendo utilizada a forma elíptica (sinal negativo) da equação de Monge-Ampère expressa em (3-28). Logo, nas equações (3-77) e (3-79), o sinal adotado será o positivo.

### 3.4.4

#### Análise do Mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$ para uma Quádrlica Confocal

Uma função real de variável real pode ser representada graficamente como uma curva no plano Cartesiano. No entanto, o gráfico de uma função complexa  $\zeta = f(\eta)$  reside no espaço de quatro dimensões (duas dimensões da variável de entrada  $\eta = x + iy$  e duas dimensões da variável de saída  $\zeta = u + iv$ ) e, por isto, não pode ser estudado no plano Cartesiano [93], [94]. Nesta seção, será utilizado o conceito de mapeamento complexo desenvolvido pelo matemático alemão Bernhard Riemann para dar uma representação geométrica para duas funções complexas amplamente utilizadas neste trabalho: a transformação  $\eta' \rightarrow \eta$ , que descreve o mapeamento entre o plano complexo principal e um plano complexo

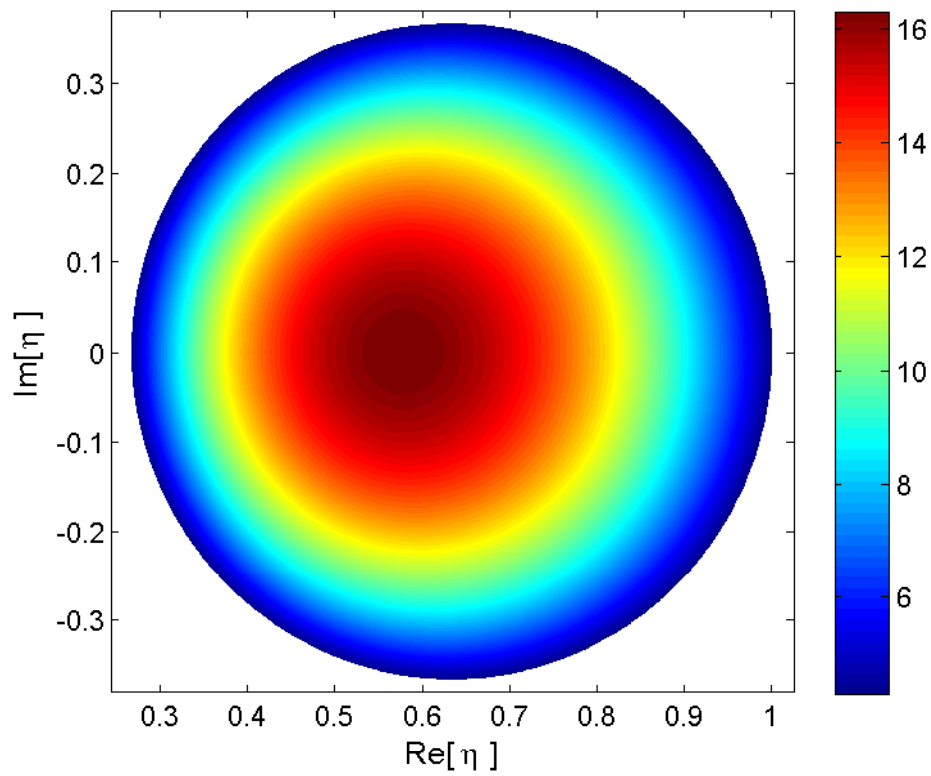


Figura 3.12: Diagrama de irradiação da função  $I(\eta)$  no plano complexo  $\eta$

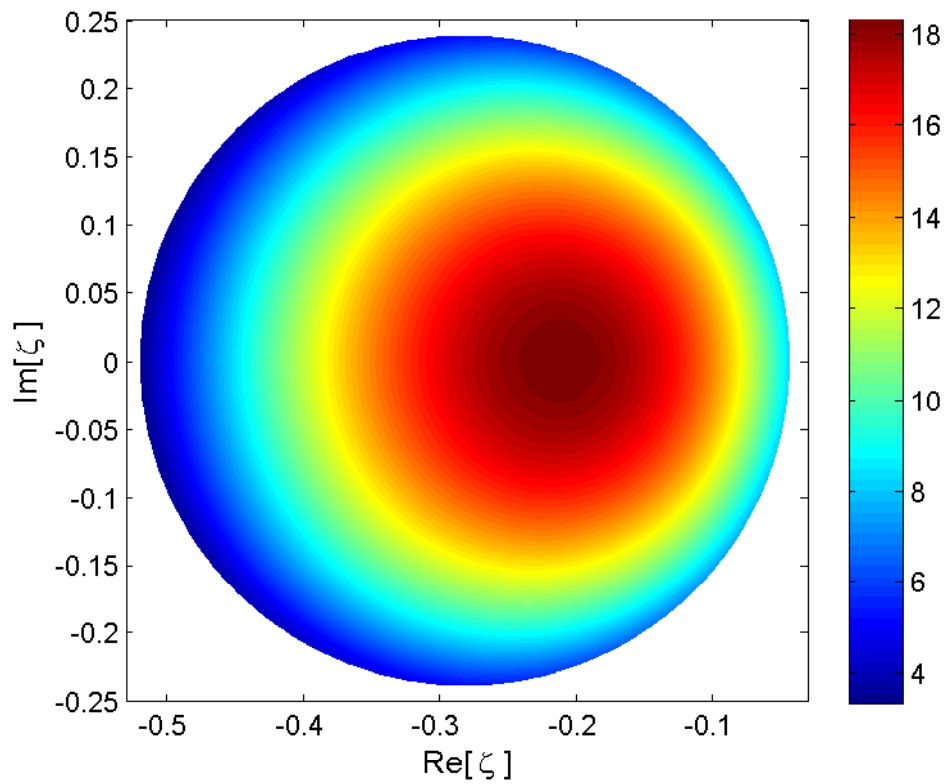


Figura 3.13: Diagrama de irradiação da função  $G(\zeta)$  plano complexo  $\zeta$

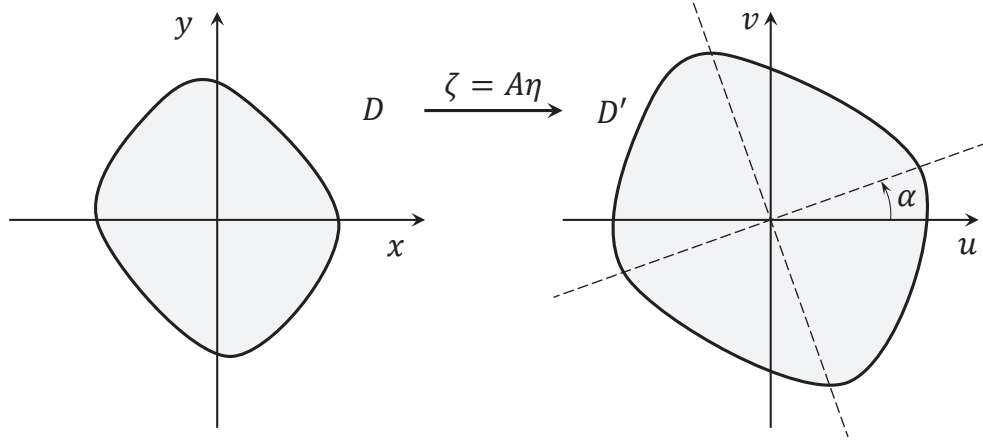


Figura 3.14: Transformação Linear: expansão ou contração e rotação

auxiliar ( $'$ ) deslocado por um ângulo de *offset* e o mapeamento  $\eta \rightarrow \zeta$  imposto por uma quádrlica confocal expresso em (3-59). Esta representação consiste em duas figuras: a primeira, um conjunto  $D$  de pontos no plano  $\eta$ , e a segunda, o conjunto  $D'$  de imagens dos pontos em  $D$  obtidas a partir de  $\zeta = f(\eta)$  no plano  $\zeta$ . Para melhor compreensão da relação de mapeamento da quádrlica confocal são apresentadas transformações mais simples que combinadas formam uma transformação linear fracionária ou transformação de Möbius semelhante à equação (3-59) [40].

### Transformações Lineares

A primeira relação de mapeamento, representada na Figura 3.14, tem a forma

$$\zeta = A\eta \quad (3-80)$$

onde  $A$  é uma constante complexa não nula e  $\eta \neq 0$ , pode-se reescrever  $A$  e  $\eta$  na forma exponencial:

$$A = ae^{i\tau} \quad (3-81a)$$

$$\eta = \rho e^{i\phi}. \quad (3-81b)$$

Logo, a transformação expressa por (3-80) pode ser reescrita como

$$\zeta = a\rho e^{i(\tau+\phi)}. \quad (3-82)$$

Nota-se a partir de (3-82) que a transformação (3-80) expande ou contrai o raio do vetor representado por  $\eta$  pelo fator  $a = |A|$  e o rotaciona pelo ângulo  $\tau = \arg A$  em relação à origem. Logo, a imagem de uma dada região  $D'$  ou curva  $C'$  do plano complexo  $\zeta$  é geometricamente similar à região  $D$  ou curva  $C$  no plano complexo  $\eta$ , conforme ilustrado na Figura 3.14.



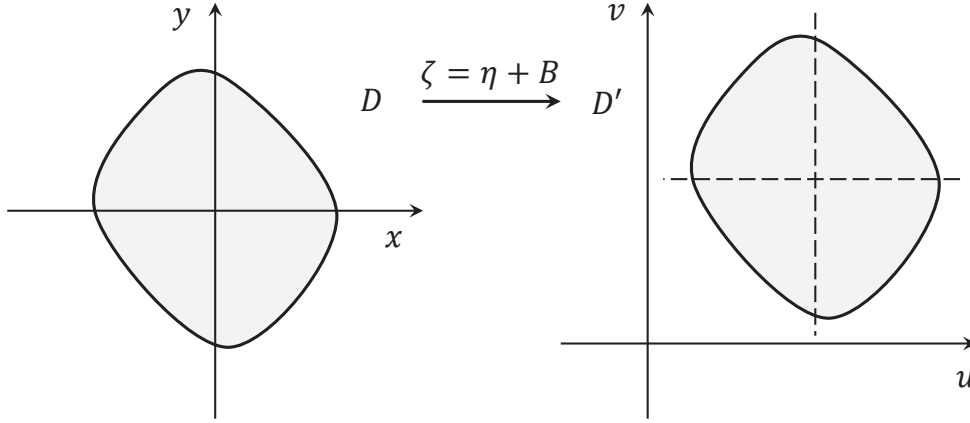


Figura 3.15: Transformação Linear: translação

O segunda relação mapeamento, ilustrada graficamente na Figura 3.15, chamada de translação e representada analiticamente por

$$\zeta = \eta + B \quad (3-83)$$

onde  $B$  é uma constante complexa. Sabendo que:

$$\eta = x + iy, \quad (3-84a)$$

$$\zeta = u + iv, \quad (3-84b)$$

$$B = b_1 + ib_2, \quad (3-84c)$$

a imagem do ponto  $(x, y)$  no plano  $\zeta$  é o ponto

$$(u, v) = (x + b_1, y + b_2), \quad (3-85)$$

no plano  $\zeta$ . Uma vez que cada ponto numa determinada região do plano  $\eta$  é mapeado para o plano  $\zeta$ , a região de imagem é geometricamente congruente à original, como mostra a Figura 3.15. A transformação linear generalizada

$$\zeta = A\eta + B \quad (3-86)$$

obtida combinando (3-80) e (3-83) é, evidentemente, uma contração ou expansão e rotação seguida de uma translação, conforme ilustrado em Figura 3.16. Como exemplo, considere o conjunto de círculos no plano complexo  $\eta$  ilustrados na Figura 3.17 sendo mapeado em círculos no plano  $\zeta$  ilustrados na Figura 3.18 através da seguinte transformação linear:

$$\zeta = 2\eta + 4 + i3 \quad (3-87)$$

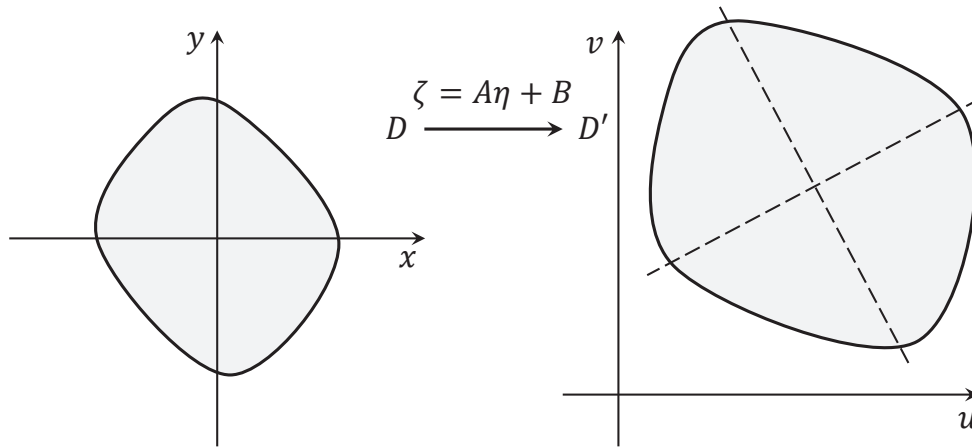


Figura 3.16: Transformação Linear: expansão, rotação e translação

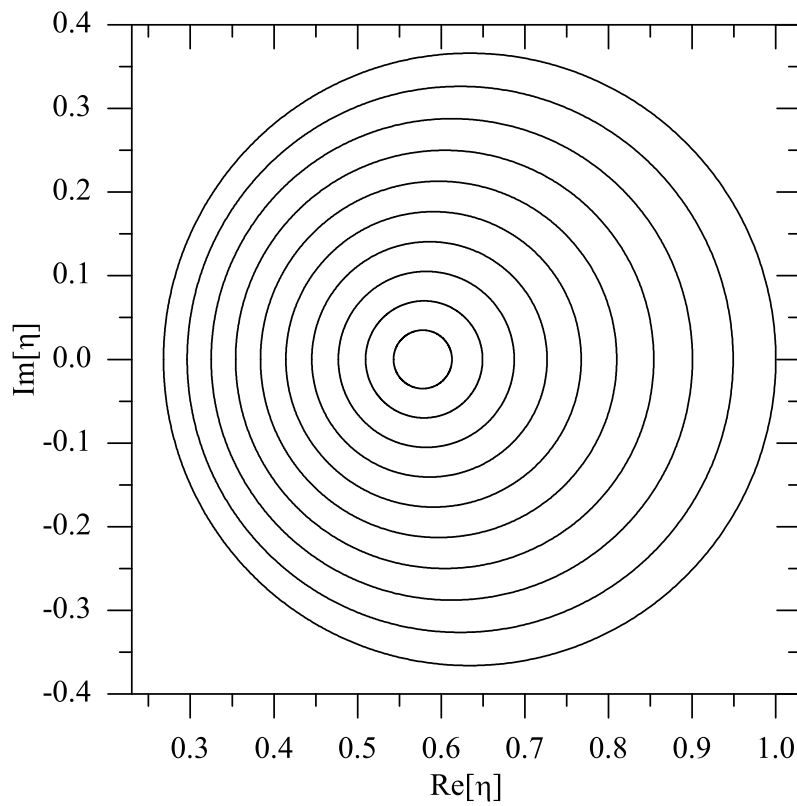


Figura 3.17: Conjunto de círculos no plano complexo  $\eta$

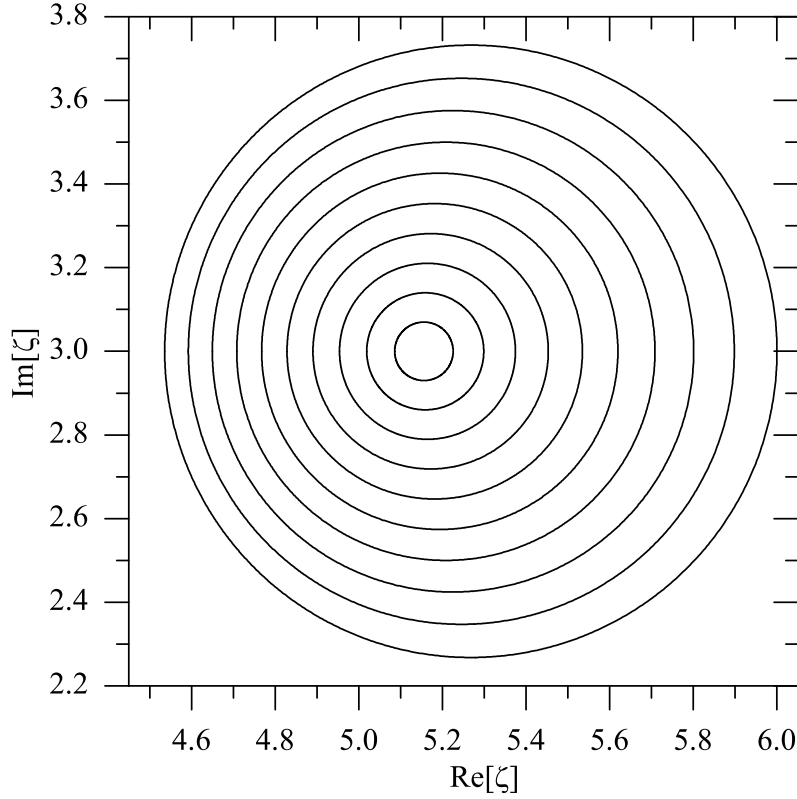


Figura 3.18: Conjunto de círculos no plano complexo  $\zeta$  após a expansão e translação

### Transformação $1/\eta$

A transformação  $\zeta = 1/\eta$  mapeia pontos próximos à origem no plano  $\eta$  em pontos afastados da origem no plano  $\zeta$  e vice-versa. Em função desta característica, este mapeamento é chamado de inversão. Se  $\eta = \rho e^{i\phi}$  então:

$$\zeta = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi}. \quad (3-88)$$

Observando os módulos de  $\eta$  e  $\zeta$  nota-se que na medida em que  $\eta$  se aproxima da origem ( $|\eta| \rightarrow 0$ ),  $\zeta$  se aproxima de um ponto no infinito ( $|\eta| \rightarrow \infty$ ). Logo, pontos no interior (exterior) de um círculo unitário serão mapeados no exterior (interior) deste círculo, conforme ilustrado na Figura 3.19. Outra característica importante deste mapeamento é inverter o sinal da parte imaginária, sendo, por isto, chamado de reflexão em relação ao disco unitário e ao eixo real. Para observar o que acontece com conjuntos no plano  $\eta$ , quando transformados em conjuntos no plano  $\zeta$ , reescreve-se (3-88) como

$$\zeta = \frac{\bar{\eta}}{|\eta|}, \quad (3-89)$$

e a sua respectiva função inversa como

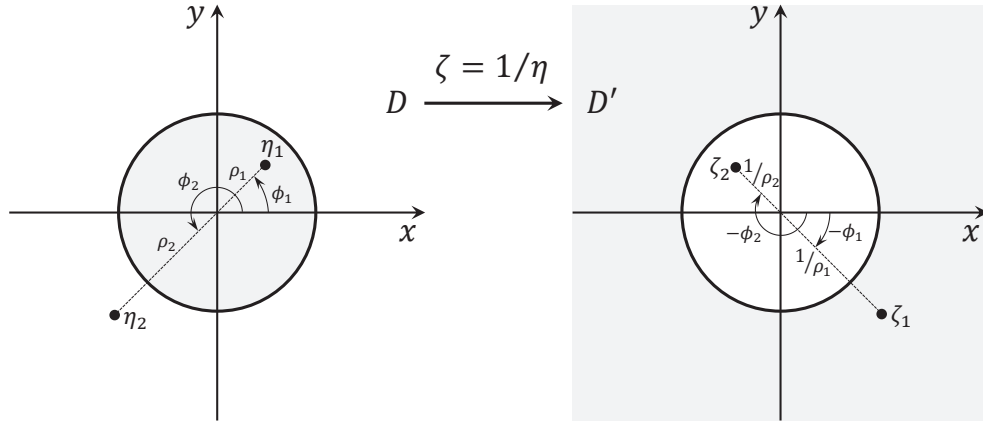


Figura 3.19: Transformação Linear: inversão e reflexão

$$\eta = \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}. \quad (3-90)$$

Lembrando que

$$|\eta|^2 = x^2 + y^2, \quad (3-91a)$$

$$|\zeta| = u^2 + v^2, \quad (3-91b)$$

como o auxílio (3-89) pode-se obter que

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (3-92a)$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (3-92b)$$

De forma análoga, utilizando (3-90) mostra-se que

$$x = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad (3-93a)$$

$$y = \frac{u}{u^2 + v^2}. \quad (3-93b)$$

Substituindo (3-93) em (3-92) encontra-se

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}. \quad (3-94)$$

Considere agora a equação

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad (3-95)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes reais. Esta equação representa um círculo se  $\alpha \neq 0$  e uma linha se  $\alpha = 0$ . Substituindo (3-93) e (3-94) em (3-95) tem-se:

$$\alpha \frac{1}{u^2 + v^2} + \beta \frac{v}{u^2 + v^2} + \gamma \frac{u}{u^2 + v^2} + \delta = 0, \quad (3-96)$$

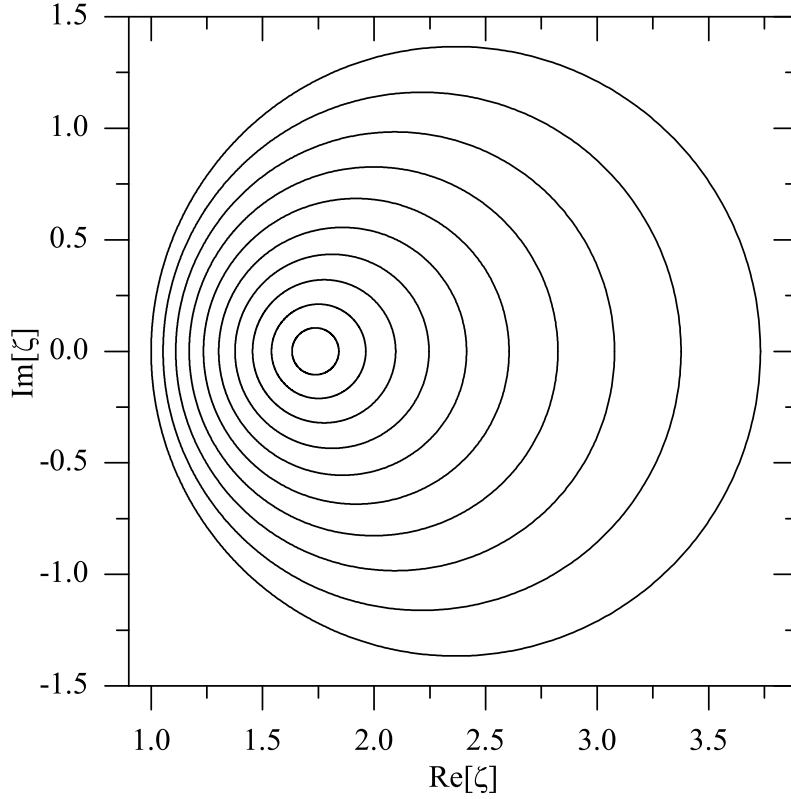


Figura 3.20: Conjunto de círculos no plano complexo  $\zeta$  após a inversão

que reescrita após algumas manipulações assume a forma

$$\gamma(u^2 + v^2) + \beta u + \gamma v + \alpha = 0. \quad (3-97)$$

Como se pode notar, a equação (3-97) também representa um círculo se  $\gamma \neq 0$  e uma linha se  $\gamma = 0$ . A partir de (3-95) e (3-97) é possível concluir que no mapeamento  $\zeta = 1/\eta$  círculos no plano complexo  $\eta$  que não passam pela origem (isto é,  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  e  $\eta \neq 0$ ) são mapeados em círculos que também não passam pela origem e círculos que passam pela origem (isto é,  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\eta \neq 0$ ) são mapeados em linhas que não passam pela origem. Além disto, linhas que não passam pela origem (isto é,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\eta \neq 0$ ) são mapeadas em círculos que passam pela origem e linhas que passam pela origem (ou seja,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) são mapeadas em linhas que passam pela origem. Como exemplo, a Figura 3.20 ilustra um conjunto de círculos no plano  $\eta$  (veja a Figura 3.10) sendo mapeado em círculos no plano  $\zeta$ , onde o círculo com menor raio no plano  $\eta$  corresponde ao de maior raio no plano  $\zeta$ .

### Transformação Linear Fracionária

A equação (3-59) representam uma relação de mapeamento entre conhecida como transformação linear fracionária ou transformação de Möbius, que

combina as transformações lineares e a inversão representada, na forma geral, pela seguinte expressão:

$$\zeta = f(\eta) = \frac{A\eta + B}{C\eta + D}, \quad (3-98)$$

onde as constantes complexas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  dadas por

$$A = -(b + ic)e^{i2\phi}, \quad (3-99a)$$

$$B = d + 1, \quad (3-99b)$$

$$C = d - 1, \quad (3-99c)$$

$$D = (b - ic)e^{i2\phi}, \quad (3-99d)$$

devem satisfazer a seguinte condição:

$$AD - BC \neq 0. \quad (3-100)$$

Caso  $C = 0$ , (3-98) é reduzida a uma transformação linear na forma

$$\zeta = f(\eta) = \frac{A}{D}\eta + \frac{B}{D}, \quad (3-101)$$

que combina contração ou expansão e translação. Para  $C \neq 0$ , (3-98) pode ser reescrita como:

$$\zeta = f(\eta) = \frac{A}{C} - \frac{AD + BC}{C^2} + \frac{1}{\eta + D/C}, \quad (3-102)$$

onde  $\eta \neq -D/C$ . Foi demonstrado que uma das propriedades das transformações lineares de inversão é mapear círculos no plano  $\eta$  em círculos no plano  $\zeta$ . Para demonstrar que a transformação linear fracionária também apresenta essa característica, a equação (3-98) é escrita na seguinte forma [93]:

$$\zeta = f(\eta) = f_3(f_2(f_1(\eta))), \quad (3-103)$$

onde

$$\zeta_1 = f_1(\eta) = \eta + \frac{D}{C}, \quad (3-104a)$$

$$\zeta_2 = f_2(\zeta_1) = \frac{1}{\zeta_1}, \quad (3-104b)$$

$$\zeta = f_3(\zeta_2) = \frac{A}{C} - \left( \frac{AD + BC}{C^2} \right) \zeta_2. \quad (3-104c)$$

Logo, o mapeamento  $\zeta = f(\eta)$  é dado pela composição

$$\eta \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \zeta_2 \rightarrow \zeta \quad (3-105)$$

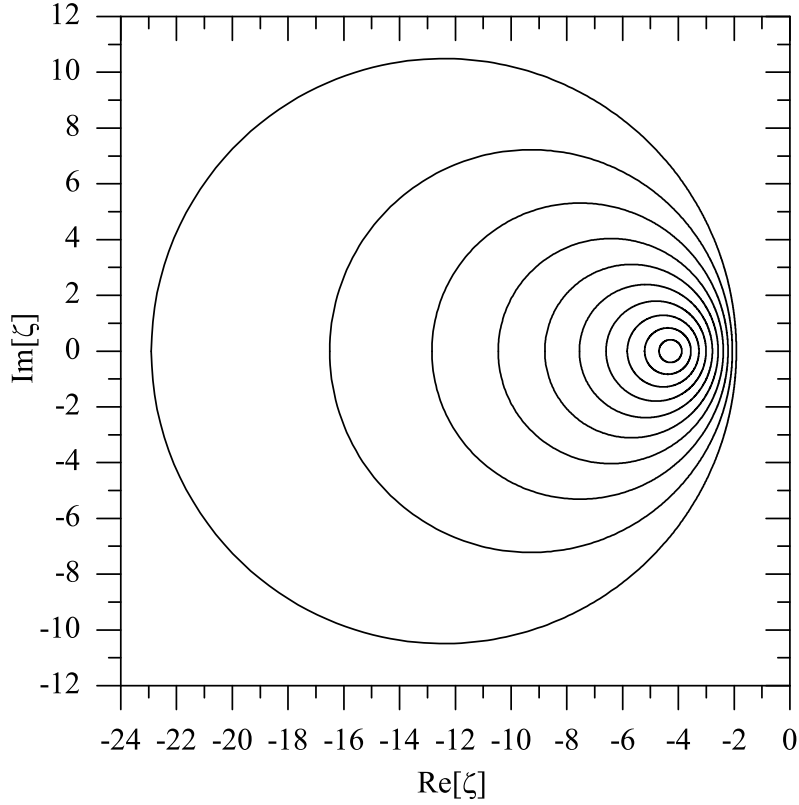


Figura 3.21: Conjunto de círculos no plano complexo  $\zeta$  dados pela transformação linear fracionária

A primeira transformação é linear (translação) e mapeia círculos (ou linhas) no plano  $\eta$  em círculos (ou linhas) no plano  $\zeta_1$ ; a segunda transformação é uma inversão que também mapeia círculos e linhas no plano  $\zeta_1$  em círculos e linhas no plano  $\zeta_2$ ; a terceira é novamente uma transformação linear (translação e expansão ou contração) mapeando círculos e linhas no plano  $\zeta_2$  em círculos e linhas no plano  $\zeta$ . Como exemplo, vamos utilizar os parâmetros da quádrlica confocal definida na Seção 3.4.1 para obter o mapeamento de círculos no plano  $\eta$  ilustrado na Figura 3.10 em círculos no plano  $\zeta$  ilustrados Figura 3.21. A transformação de Möbius, pode ser utilizadas para compor formas mais complexas de mapeamento [40]. Neste trabalhos, serão adotadas superfícies quádrlicas locais para representar a superfície refletora modelada. Isto significa, que a transformação linear fracionária de uma quádrlica confocal em 3-59 será utilizada para compor uma forma de mapeamento mais complexa dada pela equação de Monge-Ampère. Em outras palavras, dada um conjunto de círculos no plano complexo  $\eta$ , deseja-se determinar um conjunto parâmetros  $a, b, c, d$ , cada um associado à uma transformação linear fracionária, que combinados, descrevem o mapeamento da equação de Monge-Ampère.

Cumpramos descartar alguns aspectos do uso da transformação de Möbius para representar a transformação  $\tau : \eta \rightarrow \zeta$ . Conforme descrito na Seção

3.3.2, esta transformação é composta pela combinação de dois mapeamento: a Lei de Snell (3-15) e a conservação da energia (3-21). No Apêndice A.6, é demonstrado que o mapeamento da conservação da energia faz a transformação de círculos no plano  $\eta$  em elipses no plano  $\zeta$ . Entretanto, verificou-se que para as quádricas, a derivada  $\zeta_\eta = 0$ . Consequentemente, os eixos da elipse representados em (3-22) serão iguais, e o mapeamento será de círculos em círculos. Esta particularidade reduz um grau de liberdade, podendo, em alguns casos, gerar dificuldade na obtenção de formas complexas de mapeamento.



## 4

## Solução Numérica do Operador Não-Linear

### 4.1

#### Introdução

Neste capítulo será apresentada a técnica numérica adotada para resolver um sistema de equações não-lineares determinado a partir da equação de Monge-Ampère (3-28) descrita no Capítulo 3 como um problema de contorno. O estudo numérico de sistemas não-lineares tem como uma de suas principais ferramentas o Método de Newton, amplamente utilizado na solução de problemas em diversos campos da engenharia [95]. Para a síntese óptica de antenas refletoras e lentes, aplicou-se com sucesso um esquema baseado no Método de Newton para a solução de equações diferenciais do tipo Monge-Ampère como problemas de contorno [36]–[45]. Em diversos destes problemas, o contorno do alimentador  $\Omega'$  ou campo distante  $\Omega''$  é circular, o que enseja a utilização de grades polares. Entretanto, a utilização de diferenças finitas para representar as derivadas parciais na equação de Monge-Ampère em uma grade polar apresenta problemas na região central da grade, onde há uma singularidade.

A formulação apresentada neste trabalho adota o sistema de coordenadas complexas e a mesma abordagem teórica de [39]. No entanto, introduz uma modificação no procedimento numérico de solução da equação de Monge-Ampère que ocorre, essencialmente, na forma como a superfície refletora modelada é localmente representada. Na literatura constam diversos trabalhos que recorreram a um esquema aproximado de Diferenças Finitas, onde uma célula de 9 pontos (veja a Figura 4.1) é utilizada para representar as diversas derivadas de primeira e segunda ordem [45], [47], [96]. Baseado na experiência descrita no Capítulo 2 deste trabalho, alternativamente, assume-se que a superfície refletora pode ser localmente representada por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados, ou seja, cada quádrica individualmente representa apenas uma seção local do refletor. Neste caso, ao invés de células locais com nove pontos, é utilizado um esquema com células triangulares com quatro pontos, conforme ilustrado Figura 4.1. Como principal vantagem, este tratamento possibilita determinar de forma analítica as derivadas presentes na equação de Monge-Ampère.

Na Seção 4.2 é apresentada a grade polar adotada na discretização da superfície refletora. Como exemplo, é ilustrada uma grade com 100 pontos, sendo 10 anéis e 10 radiais e outra com 300 pontos sendo 10 anéis e 30

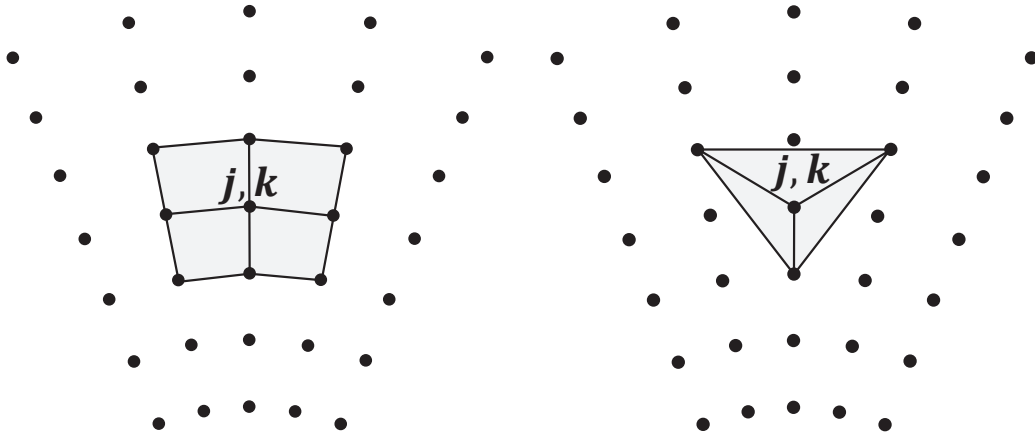


Figura 4.1: Células para a representação local da função  $L$

radiais. Também é apresentado como a grade foi definida em um sistema de coordenadas auxiliar, e sua relação com o sistema de coordenadas principal. Por fim, é apresentado os sistemas de coordenadas auxiliares do alimentador e do campo distante e suas relações com o principal.

Utilizando os resultados obtidos nas Seções 3.3 e 3.4, na Seção 4.3 a equação da quádrlica é substituída na equação de Monge-Ampère. Tem-se, então, uma forma simplificada da equação de Monge-Ampère escrita na forma de um operador em função dos parâmetros que definem a superfície quádrlica local. Mostra-se ainda como os parâmetros da quádrlica local podem ser obtidos em função de quatro pontos da superfície refletora modelada.

Na Seção 4.4 a formulação do procedimento numérico iterativo para solução do operador não-linear como um problema de contorno é apresentada. Inicialmente é feita uma breve discussão do Método de Newton e em seguida é abordada a aplicação do método ao problema em questão com o uso de superfícies quádrlicas locais na representação da superfície.

Como já destacado, a grande vantagem deste tratamento para o problema é a possibilidade de determinar de forma analítica exata as derivadas da função local de representação da superfície. Na Seção 4.5 são apresentadas as expressões para a determinação das derivadas do operador e, conseqüentemente, a matriz Jacobiana. Além da formulação, o procedimento iterativo de solução da equação de Monge-Ampère é apresentado em detalhes na Seção 4.6, sendo apresentada a sequência lógica de operações executadas pelo algoritmo de síntese.

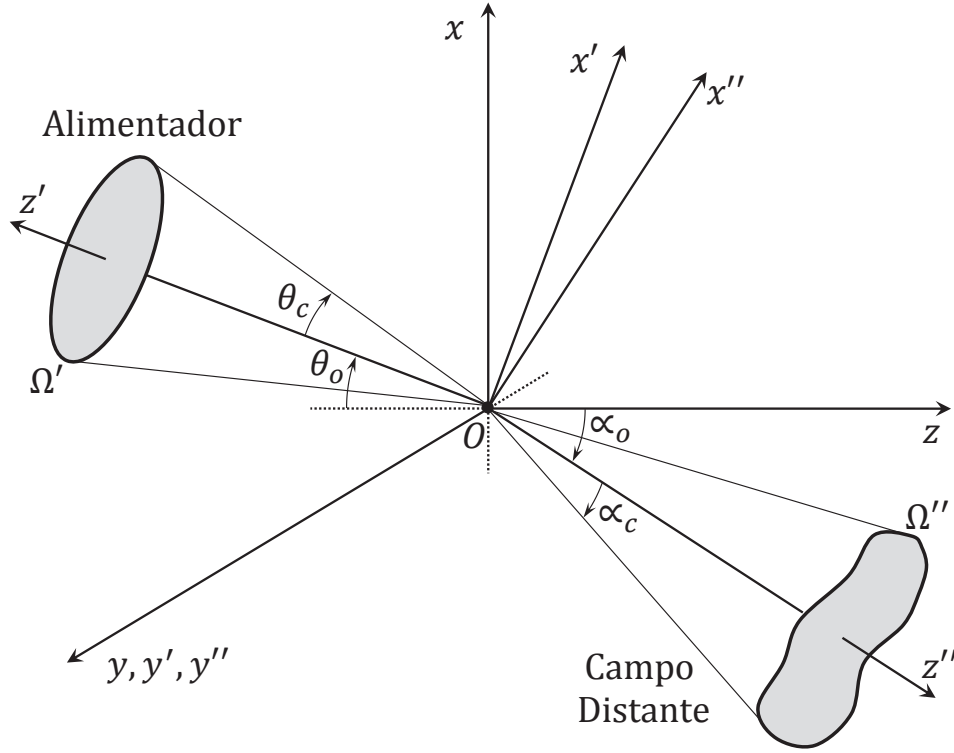


Figura 4.2: Sistemas de Coordenadas principal e auxiliares

## 4.2

### Grade Polar

A função  $L(\eta)$ , solução da equação de Monge-Ampère (3-28), é uma função real e contínua que descreve a superfície refletora modelada, solução para o problema de síntese ilustrado na Figura 3.1. Do ponto de vista numérico, a solução de (3-28) é um conjunto finito de valores representado por:

$$L[L_{1,1}, \dots, L_{j,k}, \dots, L_{J,K}], \text{ onde } j = 1 \dots J \text{ e } k = 1 \dots K. \quad (4-1)$$

Note que os índices  $j$  e  $k$  especificam um anel e uma radial, respectivamente. Já os valores  $J$  e  $K$  definem o número máximo de radiais e anéis em uma grade polar disposta em um domínio no plano  $\eta$  e associado ao cone de alimentação. Em aplicações práticas, a corneta cônica corrugada, cujo diagrama de radiação é circularmente simétrico, é frequentemente adotada como alimentador de antenas refletoras. Em função disto, o contorno  $\Omega'$  associado ao cone do alimentador, é assumido circularmente simétrico e definido por:

$$\eta' = \eta_c = \cot \left( \frac{\theta_c}{2} \right), \quad (4-2)$$

onde  $\theta_c$  é o ângulo que define o cone de iluminação do alimentador, conforme a Figura 4.2. Para discretizar a superfície refletora, será adotada uma grade regular polar definida pelas coordenadas  $\theta', \phi'$  no sistema de coordenadas

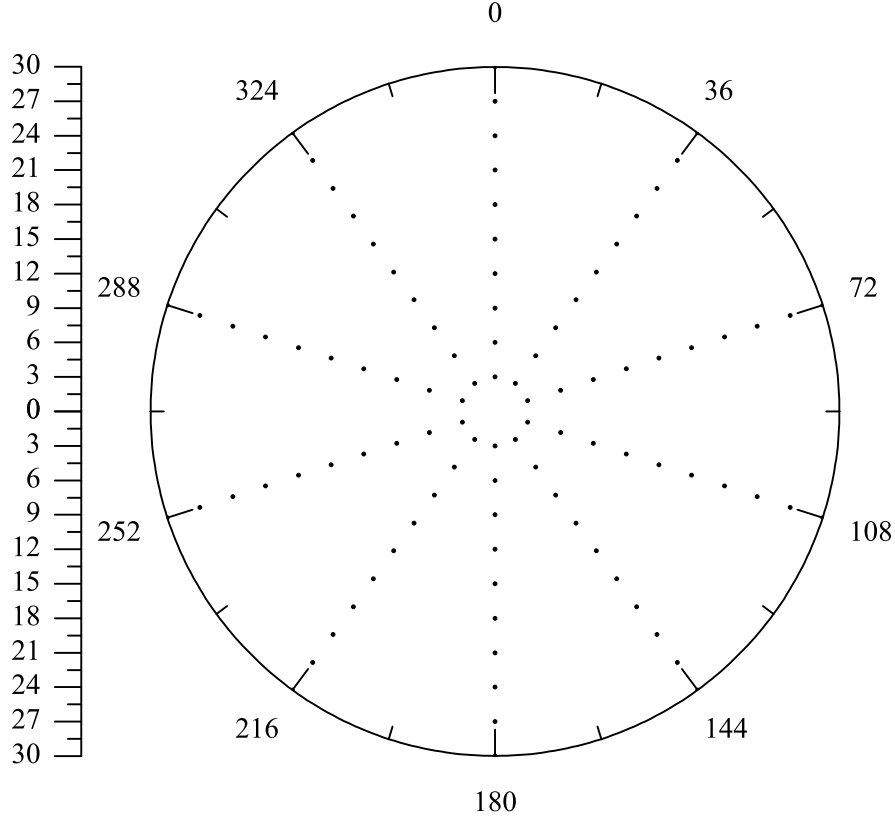


Figura 4.3: Grade regular polar  $10 \times 10$  no plano  $\theta'\phi'$

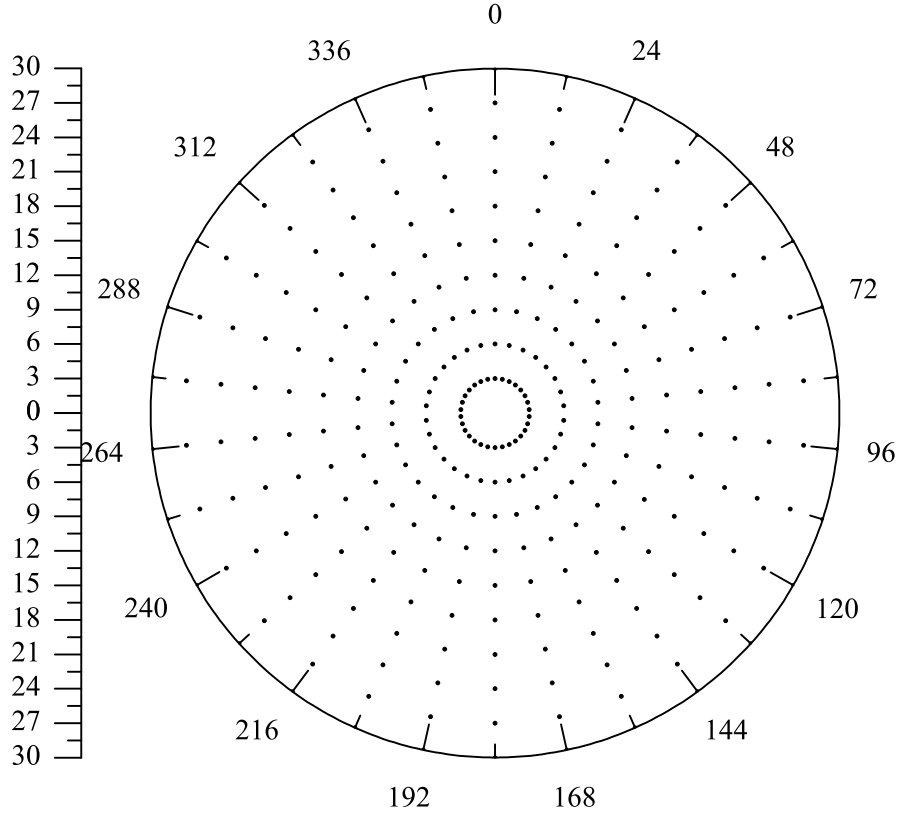
auxiliar ( $'$ ) do alimentador (observe Figura 4.2). O termo regular é empregado para indicar que a distância angular entre os anéis ( $\Delta\theta'$ ) e radiais ( $\Delta\phi'$ ) é constante. Considerando o ângulo de borda  $\theta_c$ ,  $\Delta\theta'$  é dado por:

$$\Delta\theta' = \frac{\theta_c}{J}. \quad (4-3)$$

De forma análoga,  $\Delta\phi'$  é definido como:

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi}{K}. \quad (4-4)$$

Como exemplo, considere uma grade regular polar com 100 pontos ( $N = J \times K$ ), onde  $J = 10$  e  $K = 10$  e  $\theta_c = 30^\circ$ , conforme ilustrado na Figura 4.3. Note que, como a distância entre os pontos é proporcional à  $\theta'$ , a distância entre os pontos na região central da grade é muito menor que na região próxima à borda. A grande vantagem de se trabalhar com grades polares é, evidentemente, a possibilidade de descrever com precisão contornos polares. Entretanto, o modelo trivial de discretização gera uma distribuição não uniforme dos pontos. Para melhorar a discretização na borda, pode-se aumentar o número de radiais para  $K = 30$ , como ilustra a Figura 4.4. Entretanto, essa estratégia é viável até certo limite, já que os pontos na região central ficam cada vez mais próximos, podendo ocasionar erros numéricos.

Figura 4.4: Grade regular polar  $10 \times 30$  no plano  $\theta'\phi'$ 

Os gráficos resultantes da conversão das grades polares apresentadas nas Figuras 4.3 e 4.4 para o sistema de coordenadas complexas são ilustrados nas Figuras 4.5 e 4.6. A transformação é feita através da definição da variável complexa  $\eta$  em (3-1). Pode-se verificar que a distância entre os anéis não é constante, como observado para o plano  $\theta',\phi'$ . Na região central a distância entre os anéis é menor, e aumenta na medida que se aproxima da borda. A razão desse comportamento é facilmente verificável analisando o comportamento do módulo da função (3-1):

$$|\eta'| = \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right) \approx \frac{2}{\theta'}. \quad (4-5)$$

Logo, o módulo de  $\eta'$  é inversamente proporcional a  $\theta'$  e, conseqüentemente, quanto menor o valor de  $\theta'$  (anéis mais internos no plano  $\theta'\phi'$ ) maior será o valor de  $|\eta'|$  (anéis mais externos no plano complexo). Por conta disto, é conveniente visualizar os pontos no plano complexo inverso  $1/\eta'$ , conforme ilustrado nas Figuras 4.7 e 4.8. Neste caso, há correspondência direta: o primeiro anel no plano  $\theta'\phi'$  corresponde ao primeiro anel no plano  $1/\eta'$  e o último anel em  $\theta'\phi'$  ao último anel em  $1/\eta'$ . Em razão desta conveniência, os gráficos utilizados para representar as direções incidência e reflexão serão apresentados em seus respectivos planos complexos inversos.

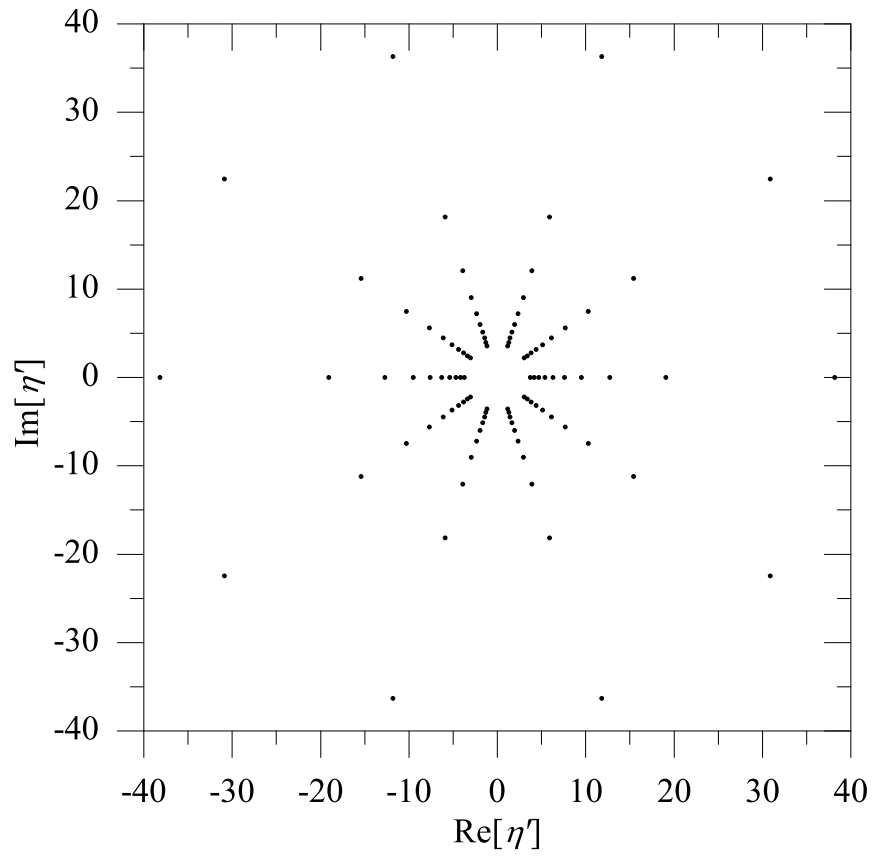


Figura 4.5: Grade regular polar  $10 \times 10$  no plano complexo  $\eta'$

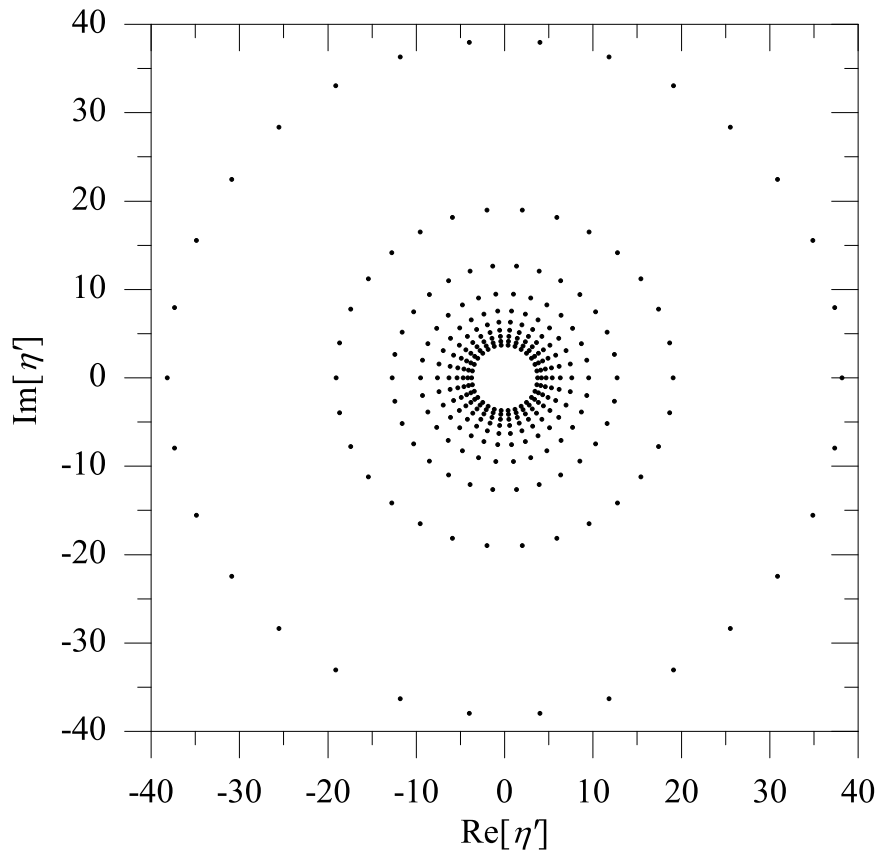


Figura 4.6: Grade regular polar  $10 \times 30$  no plano complexo  $\eta'$

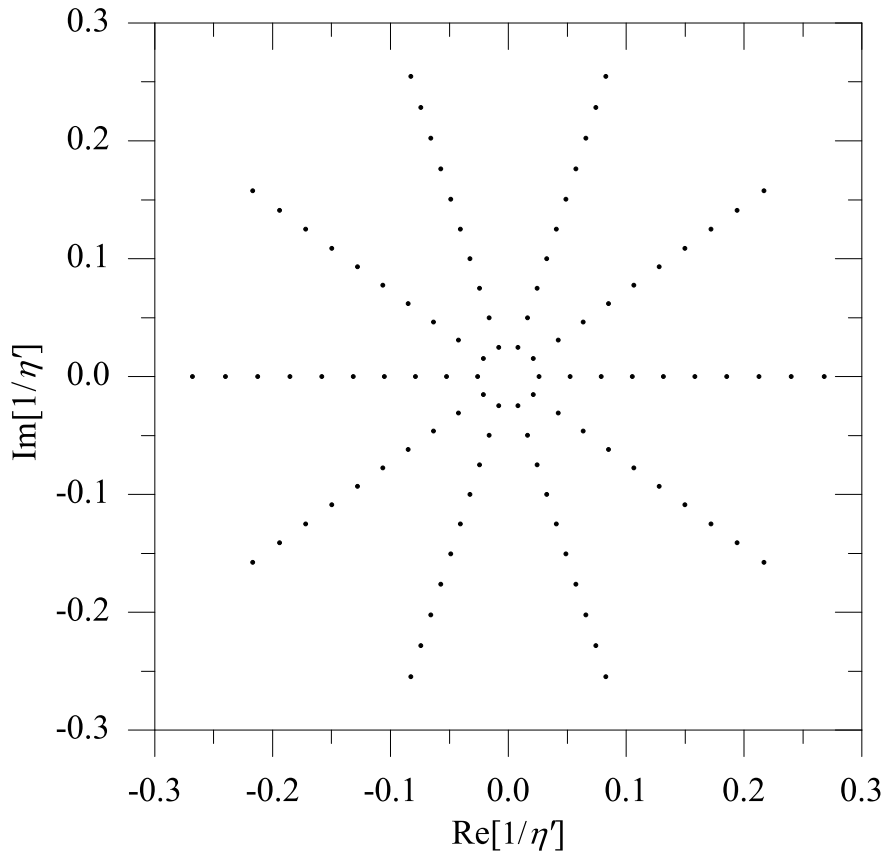


Figura 4.7: Grade regular polar  $10 \times 10$  no plano complexo invertido  $1/\eta'$

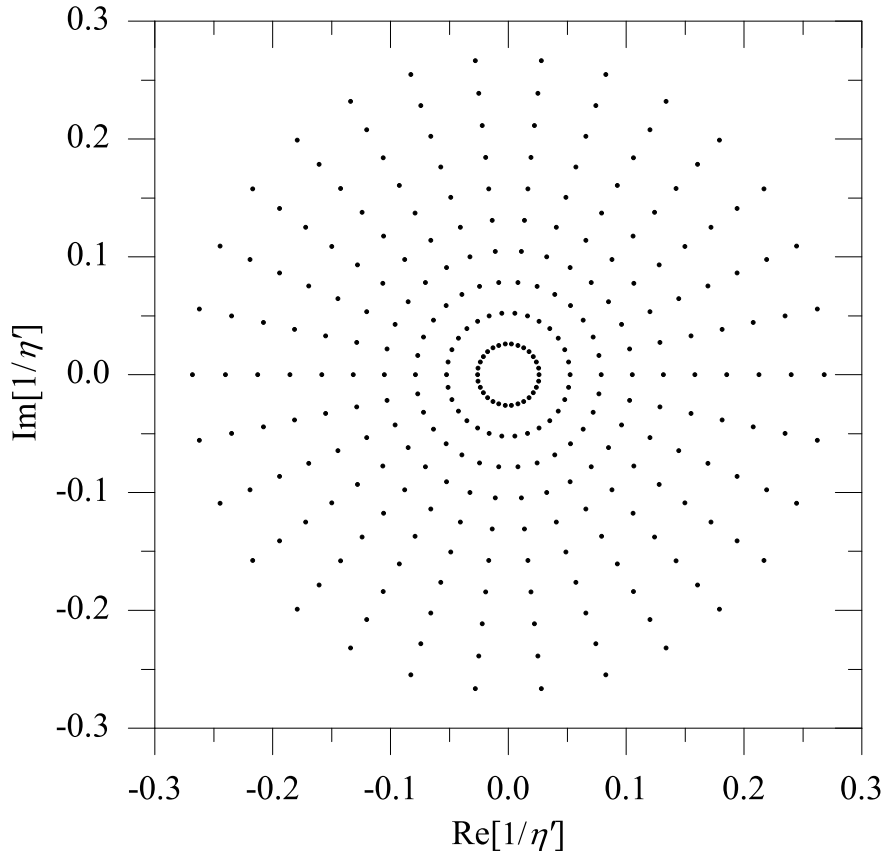


Figura 4.8: Grade regular polar  $10 \times 30$  no plano complexo invertido  $1/\eta'$

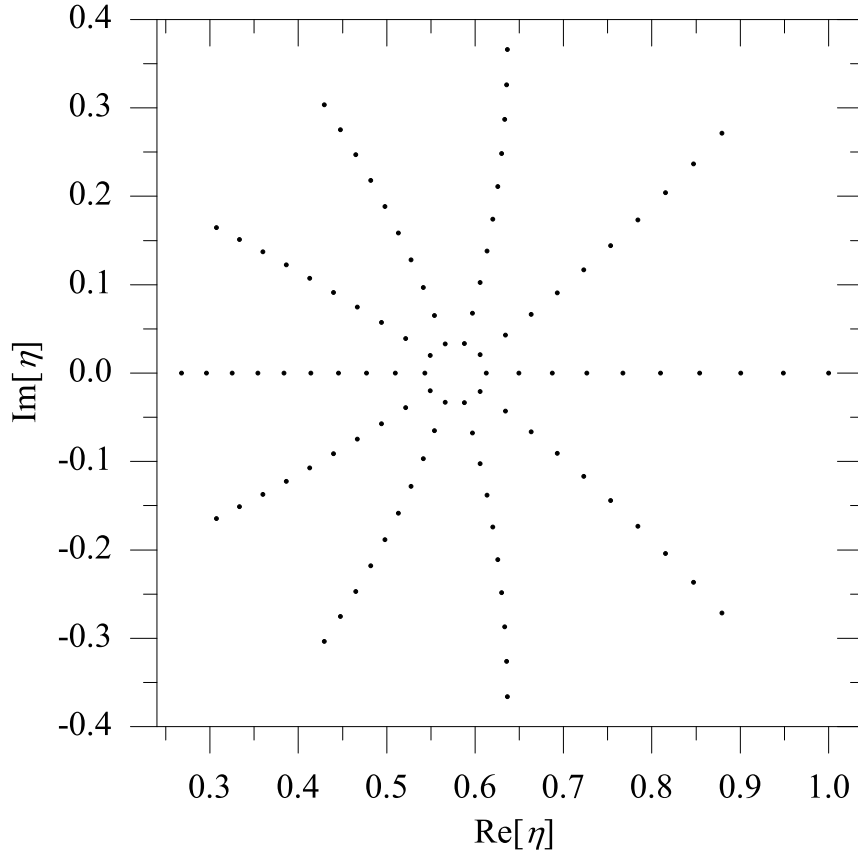


Figura 4.9: Grade regular polar  $10 \times 10$  no plano complexo  $\eta$

A relação entre os sistemas de coordenadas principal e auxiliar do alimentador ilustrados Figura 4.2 é dada pela seguinte transformação linear fracionária [45]:

$$\eta' = \frac{\eta_o \eta + 1}{\eta_o - \eta}, \quad (4-6a)$$

$$\eta = \frac{\eta_o \eta' - 1}{\eta_o + \eta'}. \quad (4-6b)$$

onde  $\eta_o$  é uma constante definida por

$$\eta_o = \cot \left( \frac{\pi - \theta_o}{2} \right). \quad (4-7)$$

e  $\theta_o$  é o ângulo de *offset* do alimentador em relação ao eixo  $z$  negativo (observe a Figura 4.2). Os resultados da aplicação da transformação (4-6) nas grades  $10 \times 10$  e  $10 \times 30$  são apresentados nas Figuras 4.9 e 4.10.

Na Figura 4.2 além do sistema de coordenadas do alimentador há o sistema de coordenadas auxiliar do campo distante ( $''$ ), cuja relação com o



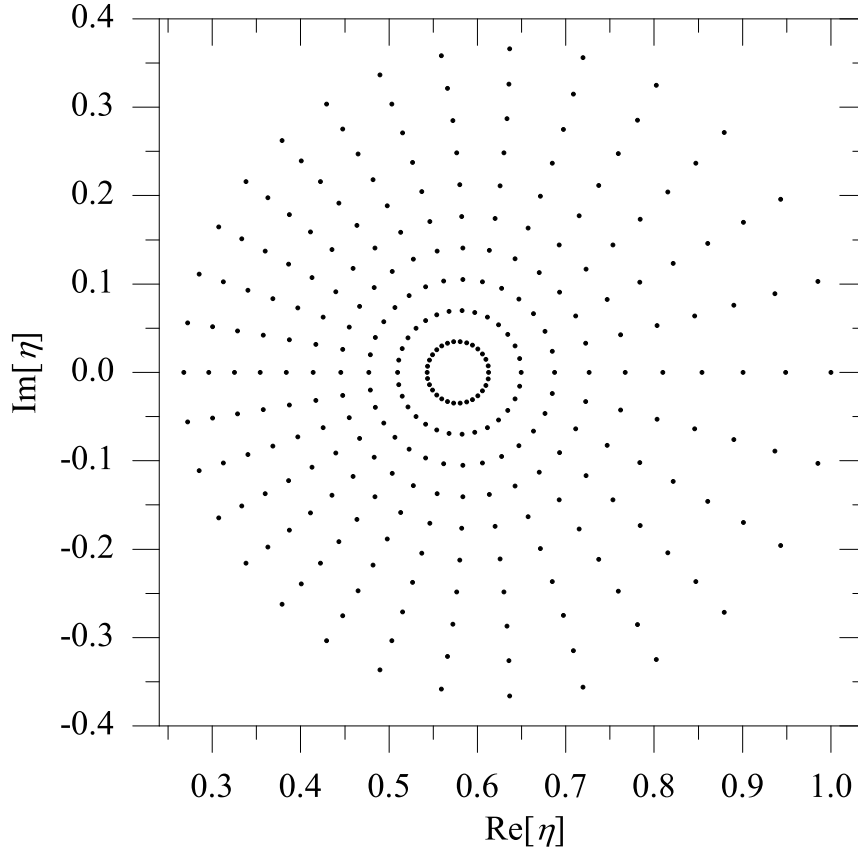


Figura 4.10: Grade regular polar  $10 \times 30$  no plano complexo  $\eta$

sistema de coordenadas principal dada por:

$$\zeta'' = \frac{\zeta_o \zeta + 1}{\zeta_o - \zeta}, \quad (4-8a)$$

$$\zeta = \frac{\zeta_o \zeta'' - 1}{\zeta_o + \zeta''}, \quad (4-8b)$$

onde  $\zeta_o$  é uma constante definida como

$$\eta_o = \cot \left( \frac{\alpha_o}{2} \right). \quad (4-9)$$

e  $\alpha_o$  o ângulo de *offset* do campo distante, como ilustrado na Figura 4.2

### 4.3

#### Operador Não-Linear

Diferentemente da técnica numérica utilizada [45], [47] e [96] que emprega um esquema de diferenças finitas para representar as derivadas de  $L$  em cada ponto da grade, neste trabalho a superfície será localmente representada por uma superfície quádrlica confocal permitindo que as derivadas locais sejam obtidas analiticamente. Semelhante à técnica de síntese descrita no Capítulo 2, onde foi utilizado um conjunto de seções cônicas para representar

localmente a geratriz modelada, na síntese de superfície *offset* será suposto que a superfície refletora modelada seja localmente composta por seções de superfícies quádricas confocais. Por outro lado, é importante ressaltar que cada quádrica confocal local que compõe a superfície refletora é circularmente simétrica em relação ao seu eixo de simetria, eixo que está deslocado do eixo  $z$  pelo ângulo de elevação  $\gamma$  e pelo ângulo de azimute  $\varphi$  em relação ao eixo  $x$ . Note-se que a possibilidade de deslocamento do eixo de simetria de cada quádrica em elevação e azimute permite a representação de superfícies assimétricas e, conseqüentemente, a obtenção de diagramas de radiação em função de duas variáveis.

Assumindo que, localmente,  $L_{j,k}$  pode ser representado pela equação de uma superfície quádrica confocal com eixo deslocado e descrita por (3-40), a equação de Monge-Ampère para a quádrica  $j, k$  pode ser reescrita na forma:

$$-\left| \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2} \right|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (4-10)$$

onde  $\zeta$  para quádrica  $j, k$  é definido a partir de (3-59):

$$\zeta = \frac{(d_{j,k} + 1) - (b_{j,k} + ic_{j,k})\bar{\eta}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (4-11)$$

Desta forma, para cada ponto da grade  $(j, k)$  é possível estabelecer um equação não linear em termos dos coeficiente  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ , dada por:

$$\pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 + \left| \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2} \right|^2 = 0. \quad (4-12)$$

A partir de (4-12) é definido um operador  $\Gamma[L]$  associado aos resíduos da Equação de Monge-Ampère:

$$\Gamma[L] = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 + \left| \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2} \right|^2 = 0. \quad (4-13)$$

O problema numérico a ser resolvido consiste em aplicar o operador (4-13) aos pontos de uma grade, e reduzir os resíduos associados a um valor menor que o critério de convergência. Em uma primeira análise, é fácil perceber que a aplicação de (4-13) nos pontos da grade leva a um sistema de equações não-lineares, cujo método de solução será apresentado na Seção 4.4.

Analizando a equação do operador (4-13) constata-se que ele é função de apenas três parâmetros da superfície quádrica confocal:  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Conforme já mencionado, o parâmetro  $a_{j,k}$  está associado a uma constante que define as dimensões da superfície. Logo, a solução do operador é, na realidade, uma família de superfícies quádricas e não uma quádrica única. Para que a

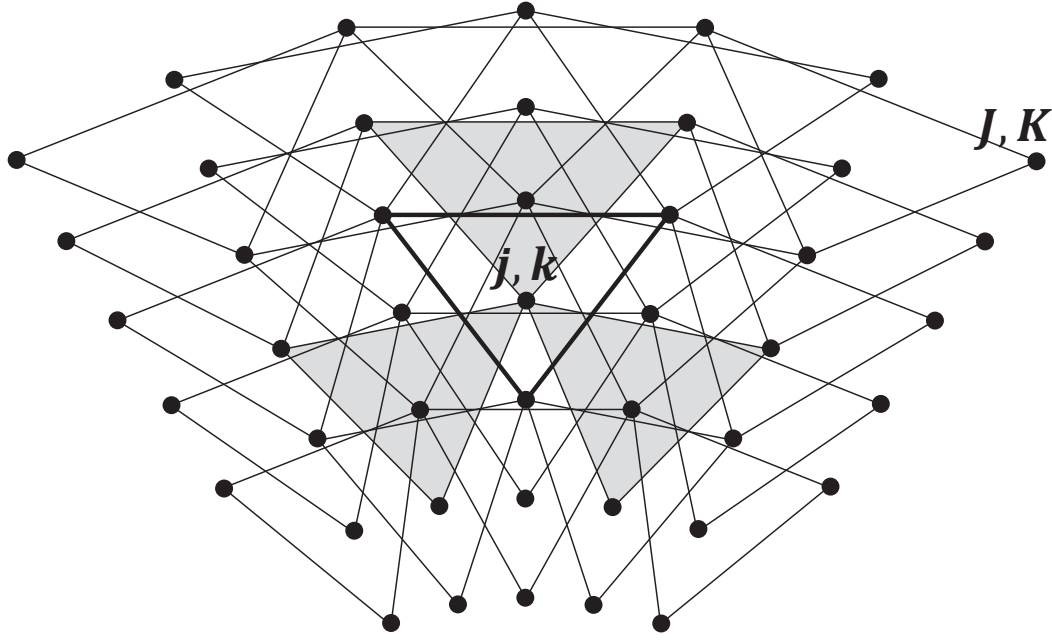


Figura 4.11: Grade polar com células triangulares

superfície quádrlica seja unicamente definida, é necessária a especificação do parâmetro  $a_{j,k}$ . Além disto, a escolha de  $a_{j,k}$  de ser feita de tal modo que haja continuidade na superfície, ou seja, as quádrlicas devem estar conectadas entre si formando uma superfície contínua. Para isto, foi definida uma grade polar composta por células triangulares em que cada ponto de uma célula está associado a outras três células, conforme ilustrado na Figura 4.11. Ao definir que cada célula triangular está associada à uma superfície quádrlica local, a continuidade da superfície será imposta e os valores de  $a_{j,k}$  serão determinados de modo que a superfície seja contínua.

A solução numérica para a equação de Monge-Ampère é baseada em um processo iterativo, semelhante ao utilizado em [45], onde é necessário uma solução inicial para que o método comece a iteragir. Partindo do pressuposto que sejam conhecidos os valores de  $L_{j,k}$  sobre a grade, cada quádrlica local  $j,k$  descrita por um conjunto de quatro coeficientes  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  conforme a definição (3-40) deve ser definida. Para determinar estes parâmetros, serão escolhidos o próprio ponto  $j,k$  e os outros três pontos adjacentes formando uma célula triangular, conforme ilustrado na Figura 4.12. Portanto, deseja-se obter os parâmetros da quádrlica que passa simultaneamente pelos quatro pontos que definem a célula triangular. Por simplicidade, cada um deles será representado pelo índice inteiro  $m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) (observe a Figura 4.12). Logo, tem-se as seguintes correspondências entre os índices:  $(j, k) \rightarrow m = 1$ ,  $(j - 1, k) \rightarrow m = 2$ ,  $(j + 1, k - 1) \rightarrow m = 3$  e  $(j + 1, k + 1) \rightarrow m = 4$ .

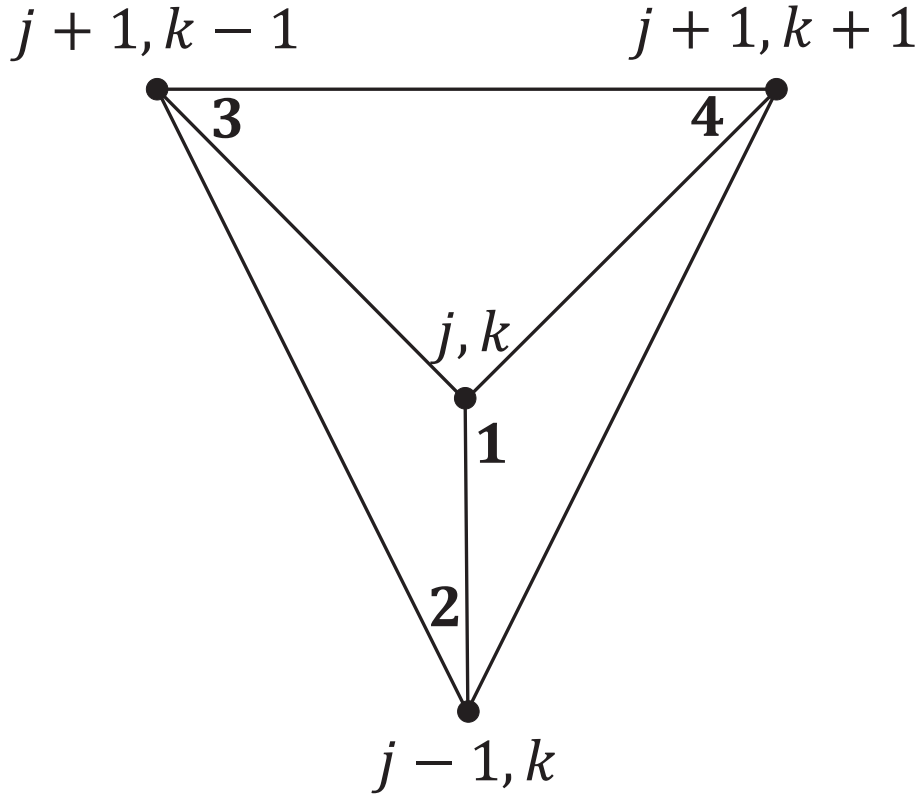


Figura 4.12: Célula triangular com quatro pontos

Supondo que a quádrica associada ao ponto  $(j, k)$  passe pelos quatro pontos

$$L_1 = L_{j,k}, \quad (4-14a)$$

$$L_2 = L_{j-1,k}, \quad (4-14b)$$

$$L_3 = L_{j+1,k-1}, \quad (4-14c)$$

$$L_4 = L_{j+1,k+1}, \quad (4-14d)$$

pode-se formar um sistema de quatro equações lineares cuja solução permite obter os valores de  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Assim, a equação (3-40) para o ponto  $m$ , resulta na seguinte equação linear:

$$\alpha_m a_{j,k} + \beta_m b_{j,k} + \gamma_m c_{j,k} + \delta_m d_{j,k} = \varepsilon_m, \quad (4-15)$$

onde  $\alpha_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\alpha_1 = -e^{L_1}, \quad (4-16a)$$

$$\alpha_2 = -e^{L_2}, \quad (4-16b)$$

$$\alpha_3 = -e^{L_3}, \quad (4-16c)$$

$$\alpha_4 = -e^{L_4}. \quad (4-16d)$$

$\beta_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\beta_1 = \eta_1 + \bar{\eta}_1, \quad (4-17a)$$

$$\beta_2 = \eta_2 + \bar{\eta}_2, \quad (4-17b)$$

$$\beta_3 = \eta_3 + \bar{\eta}_3, \quad (4-17c)$$

$$\beta_4 = \eta_4 + \bar{\eta}_4. \quad (4-17d)$$

$\gamma_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\gamma_1 = i(\bar{\eta}_1 - \eta_1), \quad (4-18a)$$

$$\gamma_2 = i(\bar{\eta}_2 - \eta_2), \quad (4-18b)$$

$$\gamma_3 = i(\bar{\eta}_3 - \eta_3), \quad (4-18c)$$

$$\gamma_4 = i(\bar{\eta}_4 - \eta_4). \quad (4-18d)$$

$\delta_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\delta_1 = |\eta_1|^2 - 1, \quad (4-19a)$$

$$\delta_2 = |\eta_2|^2 - 1, \quad (4-19b)$$

$$\delta_3 = |\eta_3|^2 - 1, \quad (4-19c)$$

$$\delta_4 = |\eta_4|^2 - 1. \quad (4-19d)$$

$\varepsilon_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\varepsilon_1 = |\eta_1|^2 + 1, \quad (4-20a)$$

$$\varepsilon_2 = |\eta_2|^2 + 1, \quad (4-20b)$$

$$\varepsilon_3 = |\eta_3|^2 + 1, \quad (4-20c)$$

$$\varepsilon_4 = |\eta_4|^2 + 1. \quad (4-20d)$$

Utilizando os valores  $\eta_m$  e  $L_m$  nos quatro pontos da célula triangular tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,k} \\ b_{j,k} \\ c_{j,k} \\ d_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \quad (4-21)$$

que pode ser resolvido analiticamente através da Regra de Crammer. Definindo

a matriz de coeficientes por  $\bar{\bar{Z}}$ , o determinante de  $\bar{\bar{Z}}$  é tal que

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \beta_1 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ & + \gamma_1 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \delta_1 \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo os determinantes das matrizes  $3 \times 3$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1(\beta_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\beta_4 + \delta_2\beta_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\delta_4 - \beta_2\delta_3\gamma_4) \\ & + \beta_1(\alpha_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\alpha_4 - \gamma_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\gamma_4) \\ & + \gamma_1(\alpha_2\beta_3\delta_4 + \beta_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\beta_4 - \delta_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\beta_4) \\ & + \delta_1(\alpha_2\beta_3\gamma_4 + \beta_2\gamma_3\alpha_4 + \gamma_2\alpha_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\gamma_4 - \alpha_2\gamma_3\beta_4), \quad (4-22) \end{aligned}$$

que pode ser reescrito na forma

$$\det(\bar{\bar{Z}}) = f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4, \quad (4-23)$$

onde as funções auxiliares  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  e  $f_4$  são dadas por:

$$f_1 = \beta_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \beta_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \beta_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (4-24a)$$

$$f_2 = \beta_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \beta_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \beta_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (4-24b)$$

$$f_3 = \beta_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \beta_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \beta_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (4-24c)$$

$$f_4 = \beta_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \beta_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \beta_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2). \quad (4-24d)$$

Definindo agora as matrizes de coeficientes

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \varepsilon_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \varepsilon_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \varepsilon_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \quad \det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \varepsilon_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \varepsilon_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \varepsilon_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \\ \det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = & \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varepsilon_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varepsilon_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \quad \det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \varepsilon_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

seus respectivos determinantes são expressos por:

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + f_4\varepsilon_4, \quad (4-25a)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4, \quad (4-25b)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 + h_4\alpha_4, \quad (4-25c)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4, \quad (4-25d)$$

onde funções auxiliares  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  e  $g_4$  são dadas por:

$$g_1 = \varepsilon_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \varepsilon_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (4-26a)$$

$$g_2 = \varepsilon_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \varepsilon_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \varepsilon_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (4-26b)$$

$$g_3 = \varepsilon_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \varepsilon_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (4-26c)$$

$$g_4 = \varepsilon_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \varepsilon_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \varepsilon_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2). \quad (4-26d)$$

As funções auxiliares  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  e  $h_4$  são dadas por:

$$h_1 = \beta_2(\varepsilon_3\delta_4 - \delta_3\varepsilon_4) + \beta_3(\delta_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_2\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3), \quad (4-27a)$$

$$h_2 = \beta_1(\delta_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\delta_4) + \beta_3(\varepsilon_1\delta_4 - \delta_1\varepsilon_4) + \beta_4(\delta_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\delta_3), \quad (4-27b)$$

$$h_3 = \beta_1(\varepsilon_2\delta_4 - \delta_2\varepsilon_4) + \beta_2(\delta_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_1\delta_2 - \delta_1\varepsilon_2), \quad (4-27c)$$

$$h_4 = \beta_1(\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\delta_3) + \beta_2(\varepsilon_1\delta_3 - \delta_1\varepsilon_3) + \beta_3(\delta_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\delta_2). \quad (4-27d)$$

As funções auxiliares  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  são dadas por:

$$k_1 = \beta_2(\gamma_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\gamma_4) + \beta_3(\varepsilon_2\gamma_4 - \gamma_2\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\gamma_3), \quad (4-28a)$$

$$k_2 = \beta_1(\varepsilon_3\gamma_4 - \gamma_3\varepsilon_4) + \beta_3(\gamma_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\gamma_4) + \beta_4(\varepsilon_1\gamma_3 - \gamma_1\varepsilon_3), \quad (4-28b)$$

$$k_3 = \beta_1(\gamma_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\gamma_4) + \beta_2(\varepsilon_1\gamma_4 - \gamma_1\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\gamma_2), \quad (4-28c)$$

$$k_4 = \beta_1(\varepsilon_2\gamma_3 - \gamma_2\varepsilon_3) + \beta_2(\gamma_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\gamma_3) + \beta_3(\varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon_2). \quad (4-28d)$$

Pela Regra de Cramer, os parâmetros da quádrlica são calculados através de:

$$a_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (4-29a)$$

$$b_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\beta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (4-29b)$$

$$c_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (4-29c)$$

$$d_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\delta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}. \quad (4-29d)$$

Logo,

$$a_{j,k} = \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4}, \quad (4-30a)$$

$$b_{j,k} = \frac{g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + g_3 \alpha_3 + g_4 \alpha_4}{f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4}, \quad (4-30b)$$

$$c_{j,k} = \frac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + h_3 \alpha_3 + h_4 \alpha_4}{f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4}, \quad (4-30c)$$

$$d_{j,k} = \frac{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 \alpha_4}{f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4}. \quad (4-30d)$$

Em cada iteração do presente método de síntese, uma nova superfície, representada por um conjunto de valores da função  $L$ , é obtida. Este processo é repetido até que ocorra a convergência para a solução. Em razão disto, em cada iteração o sistema de equações lineares (4-21) é resolvido  $N$  vezes para que as  $N$  superfícies quádricas que representam a superfície modelada sejam obtidas e, conseqüentemente, para que o resíduo dado pelo operador (4-13) possa ser calculado nos pontos da grade.

#### 4.4

##### Método Iterativo de Newton

Aplicando o operador (4-13) aos pontos que definem a superfície refletora em (4-1), obtém-se um sistema de equações não-lineares representado por

$$\Gamma[L] = 0. \quad (4-31)$$

Nesta seção será apresentada a formulação para a aplicação do Método de Newton na solução deste sistema. Assumindo que o operador  $\Gamma$  seja diferenciável, a equação (4-13) pode ser expandida em Série de Taylor na forma:

$$\Gamma[L] = \Gamma[L^{(n)}] + \Gamma'[L^{(n)}](L^* - L^{(n)}) + \epsilon(\Delta L^2), \quad (4-32)$$

onde  $L^*$  é uma solução na vizinhança de  $L$ ,  $\Gamma'[L^{(n)}]$  são as derivadas do operador em relação à  $L^{(n)}$ ,  $n$  representa a  $n$ -ésima iteração e  $\epsilon$  o erro de truncamento da série onde foram suprimidos os termos de alta ordem. Definindo uma solução  $L^* = L^{(n+1)}$  e desprezando  $\epsilon$ , tem-se:

$$L^{(n+1)} = L^{(n)} - \Gamma'[L^{(n)}]^{-1} \Gamma[L^{(n)}]. \quad (4-33)$$

Observe que a equação (4-33) tem a mesma forma da utilizada no Método de Newton para encontrar as raízes de uma equação  $f(x) = 0$  [97].

Para aplicar o método em (4-13) deve-se, inicialmente, expandir o operador em série observando que ele é função de quatro valores de  $L$  definidos



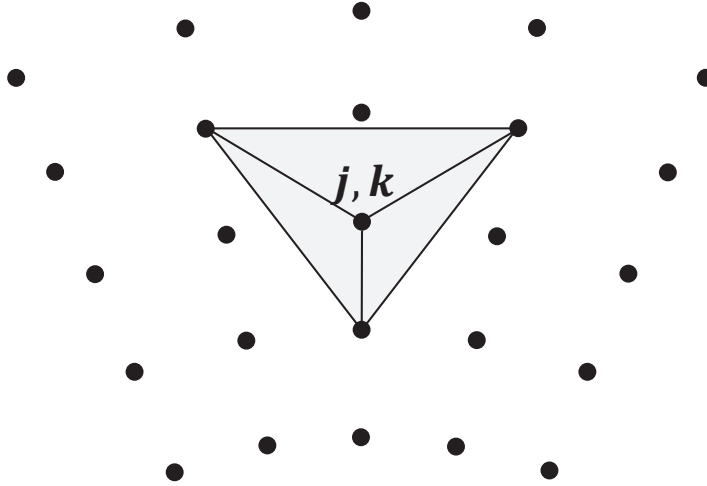


Figura 4.13: Célula triangular no centro da grade

pela célula triangular (observe a Figura 4.13). Logo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}[L] &\approx \Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}} \left( L_{j,k}^{(n+1)} - L_{j,k}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}} \left( L_{j-1,k}^{(n+1)} - L_{j-1,k}^{(n)} \right) \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}} \left( L_{j+1,k-1}^{(n+1)} - L_{j+1,k-1}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}} \left( L_{j+1,k+1}^{(n+1)} - L_{j+1,k+1}^{(n)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4-34)$$

Definindo

$$D_1^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}}, \quad (4-35a)$$

$$D_2^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}}, \quad (4-35b)$$

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}}, \quad (4-35c)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}}, \quad (4-35d)$$

utilizando as definições em (4-14) e desprezando o erro de truncando da série, encontra-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}[L] + D_1^{(n)} \left( L_1^{(n+1)} - L_1^{(n)} \right) + D_2^{(n)} \left( L_2^{(n+1)} - L_2^{(n)} \right) \\ + D_3^{(n)} \left( L_3^{(n+1)} - L_3^{(n)} \right) + D_4^{(n)} \left( L_4^{(n+1)} - L_4^{(n)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4-36)$$

Reescrevendo (4-36), obtém-se:

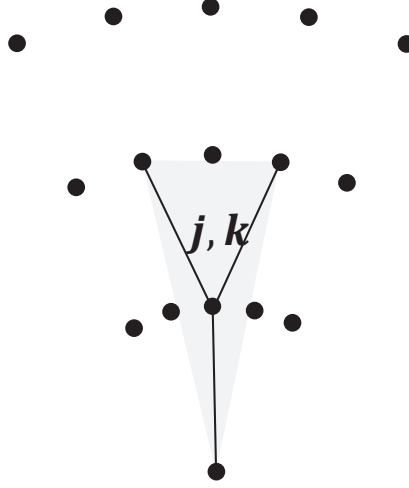


Figura 4.14: Célula triangular no primeiro anel da grade

$$D_1^{(n)} \left( L_1^{(n+1)} \right) + D_2^{(n)} \left( L_2^{(n+1)} \right) + D_3^{(n)} \left( L_3^{(n+1)} \right) + D_4^{(n)} \left( L_4^{(n+1)} \right) = V_{j,k}^{(n)}, \quad (4-37)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_2^{(n)} L_2^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (4-38)$$

A equação (4-37) representa um sistema de equações lineares da forma

$$D^{(n)} L^{(n+1)} = V^{(n)}, \quad (4-39)$$

onde os termos da iteração  $(n+1)$  são desconhecidos. Para os pontos que compõem o primeiro anel ( $j=1$ ) e, conseqüentemente, utilizam o valor da função  $L$  no ponto central da grade (observe a Figura 4.14), é necessário um cuidado especial na determinação dos coeficientes da matriz  $D^{(n)}$ . É assumido que neste ponto a solução do mapeamento é conhecida, ou seja:

$$L_0^{(n+1)} = L_0^{(n)}. \quad (4-40)$$

Logo, a equação (4-37) deve ser reescrita como:

$$D_1^{(n)} \left( L_1^{(n+1)} \right) + D_3^{(n)} \left( L_3^{(n+1)} \right) + D_4^{(n)} \left( L_4^{(n+1)} \right) = V_{j,k}^{(n)}, \quad (4-41)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (4-42)$$

Para o último anel ( $j=J$ ), serão adotados os pontos laterais e, conseqüentemente, o índice  $j+1$  deve ser alterado para  $j$  (observe a Figura 4.15). Logo em (4-14) e (4-35) deve-se adotar a seguinte notação para a função  $L$ :

$$L_3 = L_{j,k-1}, \quad (4-43a)$$

$$L_4 = L_{j,k+1}, \quad (4-43b)$$

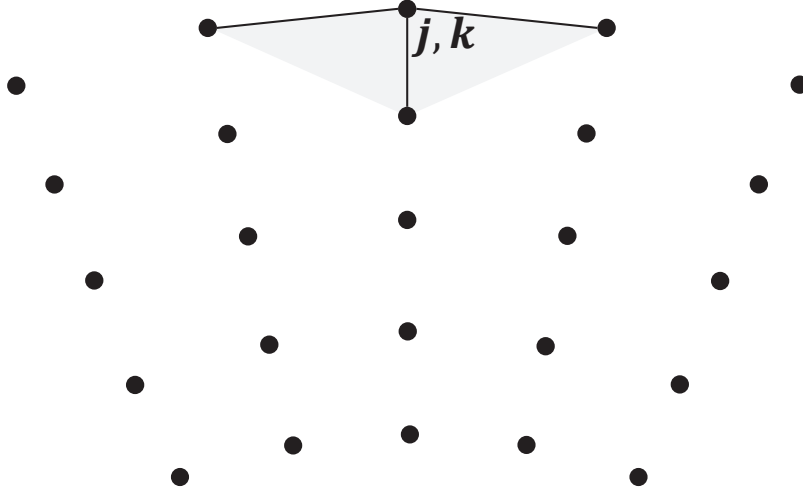


Figura 4.15: Célula triangular nas bordas da grade

e para as derivadas

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k-1}}, \quad (4-44a)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k+1}}, \quad (4-44b)$$

Para qualquer ponto  $(j, k)$ , os elementos discretos do operador  $\Gamma_{j,k}^{(n)}$  envolvem somente pontos de sua vizinhança e, conseqüentemente, a matriz Jacobiana é uma matriz esparsa, conforme ilustrada a Figura 4.16.

## 4.5

### Matriz Jacobiana do Operador

A solução numérica do operador não linear através do Método de Newton requer, necessariamente, que se conheçam as derivadas do operador. Fazendo

$$H(\eta, \zeta) = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2, \quad (4-45)$$

o operador (4-13) é reescrito como

$$\Gamma[L] = H(\eta, \zeta) + \left| \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2} \right|^2. \quad (4-46)$$

Derivando (4-46) em relação à  $L_1, L_2, L_3, L_4$ :

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1}, \quad (4-47a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2}, \quad (4-47b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3}, \quad (4-47c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4}. \quad (4-47d)$$

Derivando (4-46) em relação à  $a_{j,k}$ :

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} = 0. \quad (4-48)$$

Fazendo

$$w = (d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k}) \quad (4-49)$$

e derivando (4-46) em relação à  $b_{j,k}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} = & \frac{\partial H(\eta, \zeta)}{\partial b_{j,k}} + \frac{4b_{j,k}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^4} \\ & - \frac{\frac{\partial |w|^4}{\partial b_{j,k}}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^8}. \end{aligned} \quad (4-50)$$

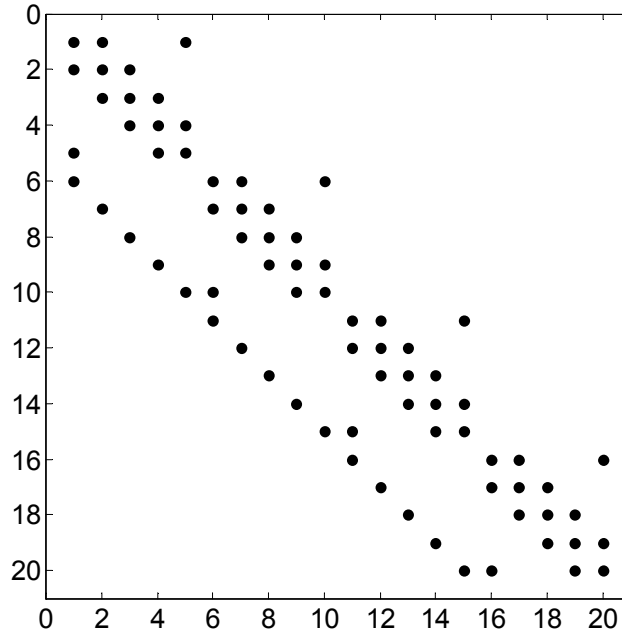


Figura 4.16: Matriz jacobiana para uma grade com 20 pontos

Derivando (4-46) em relação à  $c_{j,k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} &= \frac{\partial H(\eta, \zeta)}{\partial c_{j,k}} + \frac{4c_{j,k}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^4} \\ &\quad - \frac{\frac{\partial |w|^4}{\partial c_{j,k}}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^8}. \end{aligned} \quad (4-51)$$

Derivando (4-46) em relação à  $d_{j,k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} &= \frac{\partial H(\eta, \zeta)}{\partial d_{j,k}} + \frac{4d_{j,k}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^4} \\ &\quad - \frac{\frac{\partial |w|^4}{\partial d_{j,k}}(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)}{|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^8}. \end{aligned} \quad (4-52)$$

A derivação do operador requer que tomemos alguns cuidados especiais por envolver a diferenciação de funções complexas e, desta forma, é conveniente fazê-la por etapas. A derivada da função complexa  $|w|^4$  definida em (4-49) em relação à  $b_{j,k}$  é dada por:

$$\frac{\partial |w|^4}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial}{\partial b_{j,k}} [|w|^2 |w|^2]. \quad (4-53)$$

Manipulando (4-53), mostra-se que:

$$\frac{\partial}{\partial d_{j,k}} [|w|^2 |w|^2] = 2|w|^2 \frac{\partial |w|^2}{\partial b_{j,k}}. \quad (4-54)$$

Para fazer a derivada em (4-54), deve-se observar que:

$$\frac{\partial |w|^2}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial}{\partial b_{j,k}} [w\bar{w}] = \frac{\partial w}{\partial b_{j,k}} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial b_{j,k}} w. \quad (4-55)$$

Substituindo (4-49) e (4-55) em (4-54) e fazendo as devidas manipulações, encontra-se que:

$$\frac{\partial |w|^4}{\partial b_{j,k}} = 2|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^2 [2b_{j,k} + (\bar{\eta} + \eta)(d_{j,k} - 1)]. \quad (4-56)$$

Derivando  $|w|^4$  em relação à  $c_{j,k}$ :

$$\frac{\partial |w|^4}{\partial c_{j,k}} = 2|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^2 [2c_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)(d_{j,k} - 1)]. \quad (4-57)$$

Por fim, derivando  $|w|^4$  em relação à  $d_{j,k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |w|^4}{\partial d_{j,k}} = & 2|(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})|^2[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} \\ & + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + 2(d_{j,k} - 1)|\eta|^2]. \end{aligned} \quad (4-58)$$

Analisando a equação (4-45) verifica-se a que função  $H(\eta, \zeta)$  não é constante em relação aos parâmetros  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  e, conseqüentemente, é necessário que suas derivadas sejam determinadas utilizando a regra de cadeia. Derivando (4-45) em relação à  $b_{j,k}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b_{j,k}}. \quad (4-59)$$

Derivando (4-45) em relação à  $c_{j,k}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial c_{j,k}}. \quad (4-60)$$

Derivando (4-45) em relação à  $d_{j,k}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial d_{j,k}}. \quad (4-61)$$

Para determinar (4-59), (4-60) e (4-61) é necessário obter as derivadas da função  $H$  em relação à  $\zeta$  e  $\bar{\zeta}$ . Derivando (4-45) em relação  $\zeta$ , mostra-se que:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \pm \frac{I(\eta)}{[G(\zeta)]^2} \frac{|\zeta|^2 + 1}{(|\eta|^2 + 1)^2} [2\bar{\zeta}G - G_{\bar{\zeta}}(|\zeta|^2 + 1)], \quad (4-62)$$

onde  $G_{\bar{\zeta}}$  é a derivada do função  $G(\zeta)$  em relação à  $\bar{\zeta}$ . Derivando agora a (4-45) em relação  $\bar{\zeta}$ , obtém-se

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}} = \pm \frac{I(\eta)}{[G(\zeta)]^2} \frac{|\zeta|^2 + 1}{(|\eta|^2 + 1)^2} [2\zeta G - G_{\zeta}(|\zeta|^2 + 1)], \quad (4-63)$$

onde  $G_{\zeta}$  é a derivada do função  $G(\zeta)$  em relação à  $\zeta$ . O próximo passo é obter as derivadas de  $\zeta$ , expresso na equação (4-11), em relação aos parâmetros da quádrlica. Fazendo a diferenciação em relação à  $b_{j,k}$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} = -\frac{1}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} \left[ (\bar{\eta} + \eta) + \frac{1}{L_{\eta}} \right]. \quad (4-64)$$

Derivando (4-11) em relação à  $c_{j,k}$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} = -\frac{1}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} \left[ i(\bar{\eta} - \eta) - \frac{i}{L_{\eta}} \right]. \quad (4-65)$$

Derivando (4-11) em relação à  $d_{j,k}$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} = -\frac{1}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} \left[ (|\eta|^2 - 1) + \frac{\bar{\eta}}{L_{\eta}} \right]. \quad (4-66)$$

Por fim, é necessário obter as derivadas de  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ . A derivada  $a_{j,k}$  em relação a função  $L$  nos quatro pontos da célula é dada por:

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (4-67a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (4-67b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (4-67c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (4-67d)$$

Derivando (4-16) em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1} = -\alpha_1, \quad (4-68a)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2} = -\alpha_2, \quad (4-68b)$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3} = -\alpha_3, \quad (4-68c)$$

$$\frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4} = -\alpha_4. \quad (4-68d)$$

Utilizando os resultados em (4-68), observando que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (4-69a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (4-69b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (4-69c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (4-69d)$$

e derivando (4-30a), é fácil demonstrar que

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 f_1 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-70a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 f_2 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-70b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 f_3 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-70c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 f_4 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}. \quad (4-70d)$$

A derivada  $b_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  dada por:

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (4-71a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (4-71b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (4-71c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (4-71d)$$

Analisando (4-30b) pode-se verificar que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (4-72a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (4-72b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (4-72c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (4-72d)$$

Utilizando os resultados em (4-68) e (4-72) mostra-se que:

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1g_2 - f_2g_1) + \alpha_3(f_1g_3 - f_3g_1) + \alpha_4(f_1g_4 - f_4g_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (4-73a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2g_1 - f_1g_2) + \alpha_3(f_2g_3 - f_3g_2) + \alpha_4(f_2g_4 - f_4g_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (4-73b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3g_1 - f_1g_3) + \alpha_2(f_3g_2 - f_2g_3) + \alpha_4(f_3g_4 - f_4g_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (4-73c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4g_1 - f_1g_4) + \alpha_2(f_4g_2 - f_2g_4) + \alpha_3(f_4g_3 - f_3g_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (4-73d)$$

Derivando  $c_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , tem-se que:

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (4-74a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (4-74b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (4-74c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (4-74d)$$



Da equação (4-30c) pode-se demonstrar que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [h_1, h_2, h_3, g_4] = 0, \quad (4-75a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (4-75b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (4-75c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [h_1, h_2, h_3, h_4] = 0. \quad (4-75d)$$

Com o auxílio de (4-68) e (4-75) mostra-se que a derivada de (4-30c) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1 h_2 - f_2 h_1) + \alpha_3(f_1 h_3 - f_3 h_1) + \alpha_4(f_1 h_4 - f_4 h_1)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-76a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2 h_1 - h_2 f_1) + \alpha_3(f_2 h_3 - f_3 h_2) + \alpha_4(f_2 h_4 - f_4 h_2)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-76b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3 h_1 - h_3 f_1) + \alpha_2(f_3 h_2 - f_2 h_3) + \alpha_4(f_3 h_4 - f_4 h_3)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-76c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4 h_1 - h_4 f_1) + \alpha_2(f_4 h_2 - f_2 h_4) + \alpha_3(f_4 h_3 - f_3 h_4)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}. \quad (4-76d)$$

Por fim, deriva-se  $d_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ :

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (4-77a)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (4-77b)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (4-77c)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (4-77d)$$

Verifica-se através de (4-30d) que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (4-78a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (4-78b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (4-78c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0. \quad (4-78d)$$

Observando (4-68) e (4-78) mostra-se que a derivada de (4-30d) pode ser escrita

como:

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1 k_2 - f_2 k_1) + \alpha_3(f_1 k_3 - f_3 k_1) + \alpha_4(f_1 k_4 - f_4 k_1)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-79a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2 k_1 - f_1 k_2) + \alpha_3(f_2 k_3 - f_3 k_2) + \alpha_4(f_2 k_4 - f_4 k_2)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-79b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3 k_1 - f_1 k_3) + \alpha_2(f_3 k_2 - f_2 k_3) + \alpha_4(f_3 k_4 - f_4 k_3)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (4-79c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4 k_1 - f_1 k_4) + \alpha_2(f_4 k_2 - f_2 k_4) + \alpha_3(f_4 k_3 - f_3 k_4)}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}. \quad (4-79d)$$

## 4.6

### Processo Iterativo de Síntese

O processo iterativo de síntese, ilustrado na Figura 4.17, é inicializado com uma superfície inicial, representada por  $L^{(0)}$ , que deve ser tão próxima quanto possível da solução objetivo. Esta condição decorre do próprio Método de Newton, que utiliza apenas termos de primeira ordem para construir um sistema de equações lineares como aproximação para o sistema de equações não-lineares que se deseja resolver. O método para obter esta solução foi apresentado na Seção 3.4, onde se obteve uma superfície que satisfaz a Lei de Snell em dois pontos no plano de simetria. No presente trabalho, a superfície inicial adotada é uma quádrlica definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)}$ ,  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$  e  $d^{(0)}$ . Note que, ao definir uma quádrlica como superfície inicial, as quádrlicas locais que representam a superfície modelada terão os mesmo parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  na iteração inicial. Logo:

$$a_{j,k}^{(0)} = a^{(0)}, \quad (4-80a)$$

$$b_{j,k}^{(0)} = b^{(0)}, \quad (4-80b)$$

$$c_{j,k}^{(0)} = c^{(0)}, \quad (4-80c)$$

$$d_{j,k}^{(0)} = d^{(0)}. \quad (4-80d)$$

Definida a superfície inicial, o próximo passo é aplicar os parâmetros de cada quádrlica ao operador  $\Gamma_{j,k}^{(0)}$ . Caso o valor do operador, que representa o resíduo da equação de Monge-Ampère, seja maior que o critério de convergência, tem início a primeira iteração do processo de síntese. Nesta primeira iteração, são determinados a matriz jacobiana com as derivadas parciais do operador  $D^{(0)}$ ,  $V^{(0)}$  que leva em conta o valor do operador  $\Gamma^{(0)}$  e a solução inicial  $L^{(0)}$  para então resolver o sistema de equações lineares (4-39), que tem como resultado a solução  $L^{(1)}$ . A partir de  $L^{(1)}$ , os parâmetros de cada quádrlica

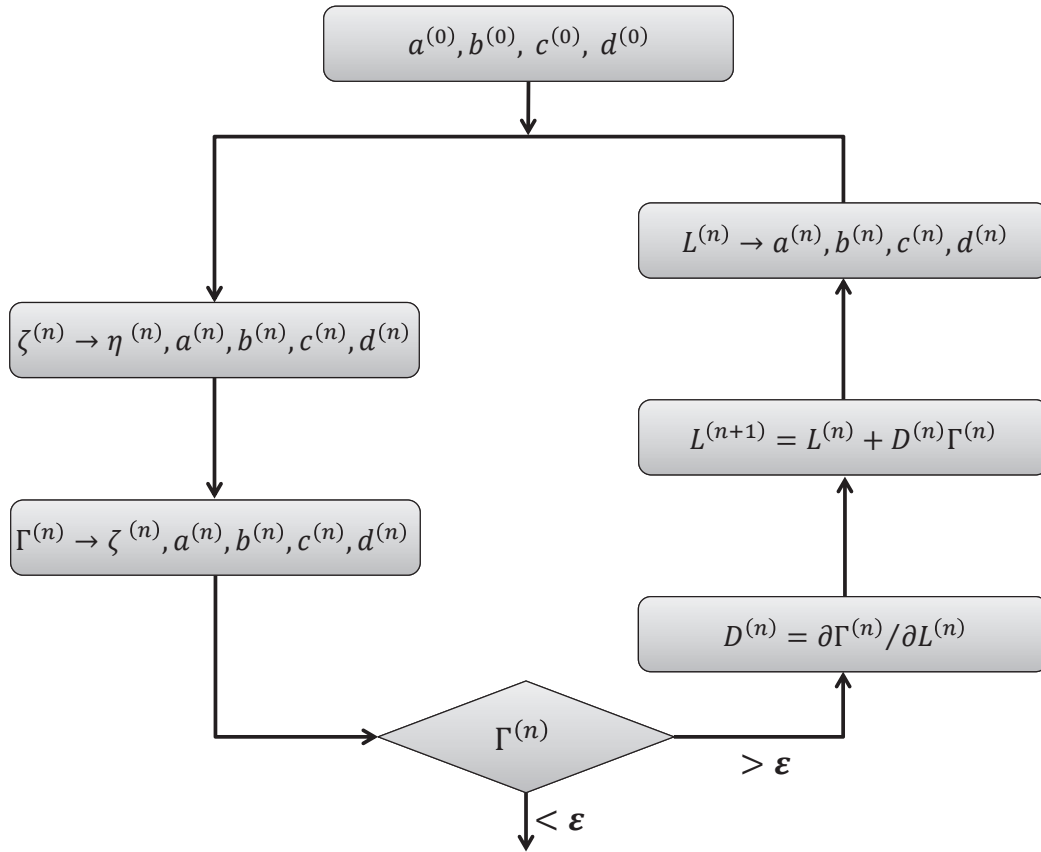


Figura 4.17: Processo iterativo do algoritmo de síntese

$a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  são determinados resolvendo o sistema de equações lineares (4-21) obtido ao aplicar os valores de célula triangular na equações da quádrlica. Novamente, os parâmetros da quádrlica são aplicados ao operador  $\Gamma^{(1)}$ . Se o valor do operador for menor que o critério de convergência, tem-se uma solução convergida, caso contrário, inicia-se outra iteração e o processo se repete até que o critério de convergência seja alcançado.

## 5

### Projetos de Antenas Refletoras Offset

#### 5.1

##### Introdução

Neste capítulo serão apresentados diversos estudos de casos para avaliar o algoritmo de síntese apresentado no Capítulo 4. O objetivo é verificar se os resultados gerados pelo método numérico de solução da equação de Monge-Ampère são os esperados e validá-los através das aproximações da Óptica Física (PO–*Physical Optics*) com correção das correntes de borda [80], [81], [82].

Nas Seções 5.2 e 5.3 são apresentados os modelos de alimentador e campo distante utilizados nos estudos de caso apresentados. É assumido que o alimentador irradia uma frente de onda esférica com centro de fase na origem do sistema de coordenadas e a densidade de potência irradiada aproximada pelo modelo cosseno elevado a um expoente. Para o campo distante, é definida uma função Gaussiana cujo fator de decaimento é escolhido em função da atenuação na borda do contorno em relação ao máximo no centro do contorno. Além disto, são determinadas as constantes de normalização para garantir a conservação da potência total irradiada.

Para resolver a equação de Monge-Ampère como um problema de contorno é apresentada na Seção 5.4 o contorno  $\Omega''$  para o campo distante. Nesta seção são apresentadas duas condições de contorno: na primeira, o contorno é circular, definido através da equação de um círculo no plano complexo  $\zeta''$  e escrito na forma de um operador não linear; o segundo e mais geral é obtido através da equação da super-elipse também no plano complexo  $\zeta''$  e escrito como um operador não-linear. A principal vantagem de representar o contorno por uma super-elipse é que a formulação é suficientemente geral para representar as geometrias circular, elíptica e super-elíptica, modificando-se apenas algumas constantes.

Na Seção 5.5 são apresentados estudos de caso considerando o contorno objetivo circular e a função que descreve a densidade de potência na região de campo distante uma Gaussiana. O primeiro exemplo é apresentado com o intuito de validar o algoritmo de síntese. Neste exemplo, são definidos os parâmetros do alimentador e do campo distante objetivo e, a partir destes dados, uma superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial do algoritmo. A superfície refletora obtida é escalada para ter quatro metros de diâmetro e analisada via aproximações da Ótica Física mais correntes de

borda. A análise é feita considerando que a antena opera em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e, conseqüentemente, considerando antenas com diâmetros de  $12\lambda$ ,  $24\lambda$  e  $96\lambda$ . As frequências 0.9GHz e 1.8GHz foram escolhidas como o objetivo de verificar o comportamento das antenas em aplicação dos sistemas de telefonia móvel GSM 900 e GSM 1800 e 7.2GHz analisar com comportamento quando os efeitos difrativos tem menor influência no diagrama de radiação. Os diagramas de radiação são apresentados no plano de simetria  $\phi = 0$  acompanhados do diagrama objetivo da GO e seus limites de  $\pm 3dB$  no plano  $uv$ , onde  $u = \sin\theta \cos\phi$  e  $v = \sin\theta \sin\phi$  e em três dimensões ( $u$ ,  $v$  e diretividade).

Ainda na Seção 5.5 é apresentada uma série de estudos de caso (Casos B.I a B.VI), todos eles com os mesmos parâmetros para o alimentador e contorno de cobertura, que é circular, diferenciando-se apenas no fator de atenuação da função Gaussiana que descreve a densidade de potência na região de campo distante. O objetivo é avaliar o algoritmo em diversas situações, desde as de mais fácil convergência em que a diferença entre a função  $G(\zeta)$  inicial e objetivo é pequena, até as de maior dificuldade em que essa diferença é grande. Este grau de dificuldade é determinado pela diferença entre a atenuação de borda na superfície refletora (mantida fixa em  $L_I = -12dB$ ) e a atenuação de borda do contorno objetivo (variada de  $L_G = 0dB$  a  $-20dB$ ). Todos os resultados são analisados através da PO considerando as antenas operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz, e os respectivos diagramas de radiação são apresentados no plano de simetria juntamente com o diagrama objetivo da GO e seus limites de  $\pm 3dB$ .

Por fim, nas Seções 5.6 e 5.7 são apresentadas antenas refletoras *offset* modeladas para prover cobertura em contornos elípticos e super-elípticos considerando o diagrama de radiação objetivo gaussiano. A principal motivação para a escolha destes dois tipos de contorno é avaliar o comportamento do método em situações onde a convergência é ainda mais difícil. Nos casos abordados na Seção 5.5 a dificuldade é determinada apenas pela função Gaussiana objetivo. Nos casos apresentados nas Seções 5.6 e 5.7 é inserido um novo grau de dificuldade, fazendo-se necessário também alterar o contorno, já que o inicial dado pela superfície quádrlica confocal é circular. Na Seção 3.4.4 foi visto que a transformação linear fracionária dada por uma quádrlica confocal mapeia círculos em círculos. Porém, como o contorno objetivo não é mais circular, é preciso avaliar se o algoritmo é capaz de gerar coberturas em outros tipos de contorno. Além disto, é feita a análise através da PO considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e os diagramas de radiação são apresentados no plano de simetria  $\phi = 0$  acompanhados do diagrama objetivo da GO e seus limites de  $\pm 3dB$  no plano  $uv$  em 3D.

## 5.2

### Modelo para o Alimentador

A formulação apresentada no Capítulo 3 assume que uma fonte pontual irradia uma frente de onda esférica TEM com centro de fase na origem do sistema de coordenadas e com intensidade de radiação  $I(\eta)$ . Neste estudo, o campo elétrico desta onda TEM será analiticamente representado por:

$$E_p(r') = \left[ \cos^e \theta' \cos \phi' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \sin \phi' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \text{ para } \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5-1)$$

$$E_c(r') = \sin \phi' \cos \phi' \left[ \cos^e \theta' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \text{ para } \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5-2)$$

onde  $E_p$  e  $E_c$  representam as polarizações principal e cruzada, segundo a terceira definição de Ludwig [98],  $\cos^e \theta'$  e  $\cos^h \theta'$  representam os diagrama nos planos principais de polarização e os parâmetros  $e$  e  $h$  são escolhidos para fornecer a atenuação na borda do refletor. Este tipo de modelo é válido para o semi-espaco  $z'$ -positivo e é largamente utilizado para caracterizar a radiação de cornetas corrugadas. A intensidade de radiação, obtida a partir da polarização principal (5-1) é dada por:

$$I(\theta', \phi) = I_0 \left[ \cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi' \right] \quad (5-3)$$

Se considerarmos  $n = e = h$ , os campos não terão polarização cruzada e a intensidade de radiação será circularmente simétrica na forma:

$$I(\theta', \phi) = I_0 \cos^{2n} \theta' \quad (5-4)$$

Uma expressão útil para se obter o valor  $n$ , dado o ângulo  $\theta_c$  e a atenuação de borda  $L_e$ , pode ser obtida a partir de (5-4):

$$2n = \frac{\log_{10} L_e}{\log_{10} \cos \theta_c} \quad (5-5)$$

A constante  $I_0$  é determinada através da normalização da potência total irradiada. Desta forma, para o modelo descritos pode-se utilizar:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} I(\theta', \phi) \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad} \quad (5-6)$$

Substituindo (5-3) em (5-6) tem-se:

$$I_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} \left[ \cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi' \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad}. \quad (5-7)$$

Fazendo  $P_{rad} = 4\pi$  e resolvendo a integral em (5-7), mostra-se que:

$$I_0 = 4 \left[ \frac{1}{2e+1} (1 - \cos^{2e+1} \theta_c) + \frac{1}{2h+1} (1 - \cos^{2h+1} \theta_c) \right] \quad (5-8)$$

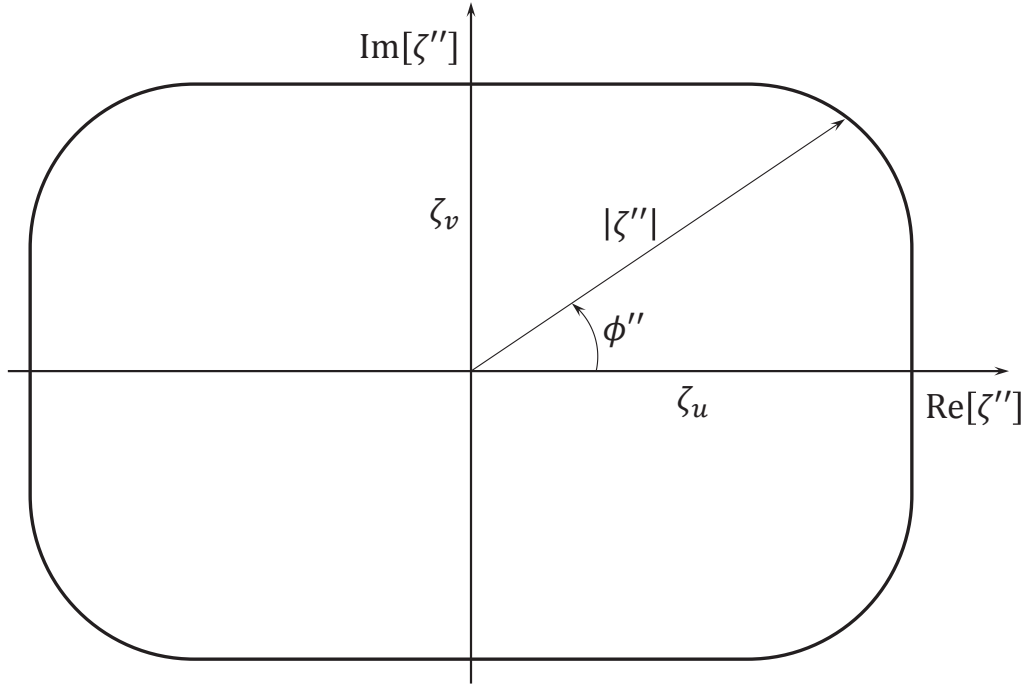


Figura 5.1: Contorno Super-Elíptico

Para  $n = e = h$ , a expressão (5-8) é reduzida a

$$I_0 = \frac{8}{2n+1} (1 - \cos^{2n+1} \theta_c). \quad (5-9)$$

### 5.3

#### Modelo para o Campo Distante

Nesta seção será apresentado o modelo para a densidade de potência por ângulo sólido na região de campo distante que é descrito por uma função Gaussiana cujo contorno pode ser circular, elíptico ou super-elíptico. Também será apresentada a estratégia de convergência que combina a função Gaussiana com a densidade de potência fornecida por uma quádrlica confocal. A função que descreve o diagrama de radiação Gaussiano tem a seguinte forma:

$$I(\alpha'', \beta'') = G_0 e^{-\psi |\cot(\alpha''/2)|} \quad (5-10)$$

onde  $\psi$  é uma constante que determina o fator de atenuação. Uma forma prática para determinar  $\psi$  é especificar a atenuação na borda  $L_G$  do contorno em relação ao ponto de máximo. Considerando

$$|\cot(\alpha''/2)| = |\zeta''| = 1 \quad (5-11)$$

na borda do contorno (observe a Figura 5.1), tem-se que

$$L_G(\text{dB}) = -10\psi \log_{10} e, \quad (5-12)$$

que pode ser reescrita como

$$\psi = -\frac{L_G(\text{dB})}{10 \log_{10} e}. \quad (5-13)$$

Novamente, a constante  $G_0$  é obtida a partir da normalização da potência total irradiada. Logo:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha''(\beta'')} G(\alpha'', \beta'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta'' = P_{rad} \quad (5-14)$$

onde  $\alpha''(\beta'')$  é uma função que descreve o contorno. Para obtê-la, parte-se da equação da super-elipse que, definida no sistema de coordenadas polares (observe a Figura 5.1) tem a seguinte forma:

$$|\zeta''| = \frac{\zeta_u \zeta_v}{\sqrt[2\sigma]{|\zeta_u \sin \beta''|^{2\sigma} + |\zeta_v \cos \beta''|^{2\sigma}}} \quad (5-15)$$

onde

$$\zeta_u = \cot \left( \frac{\alpha_u}{2} \right), \quad (5-16)$$

$$\zeta_v = \cot \left( \frac{\alpha_v}{2} \right). \quad (5-17)$$

$\zeta_u$  é a abertura angular do feixe no plano vertical,  $\zeta_v$  a abertura angular do feixe no plano horizontal e  $\sigma$  é a constante que define o quão super-elíptico o contorno deve ser. Para  $\sigma = 1$ , o contorno é elíptico e para  $\sigma \rightarrow \infty$  o contorno é retangular. Manipulando (5-15) obtém-se:

$$\alpha''(\beta'') = 2 \arctan \left[ \frac{\sqrt[2\sigma]{|\zeta_u \sin \beta''|^{2\sigma} + |\zeta_v \cos \beta''|^{2\sigma}}}{\zeta_u \zeta_v} \right] \quad (5-18)$$

No caso particular onde o diagrama de radiação da antena é constante e o contorno circular, a integral tem solução analítica. Logo, assumindo que o diagrama de radiação é

$$G(\zeta) = G_0, \quad (5-19)$$

e que o contorno circular é definido por  $\alpha''(\beta'') = \alpha_c$  e, conseqüentemente,  $\zeta_u = \zeta_v = \zeta_c$ , a potência total é dada por:

$$G_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_c} \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta'' = P_{rad} \quad (5-20)$$

Definindo-se  $P_{rad} = 4\pi$  e fazendo a integração obtém-se:

$$G_0 = \frac{2}{1 - \cos \theta_c} \quad (5-21)$$

A Seção 3.4 apresenta a solução particular da equação de Monge-Ampere para uma superfície representada por uma quádrlica confocal. Nesta seção será mostrado como essa função pode ser utilizada em uma estratégia para obter a



convergência da solução numérica da equação de Monge-Ampère para os casos onde a solução inicial é muito diferente da solução final. Reescrevendo (3-77) tem-se:

$$G(\zeta) = \mp I(\eta) \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \left| \frac{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2}{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1} \right|^2 \quad (5-22)$$

Derivando (5-22) em relação à  $\zeta$  obtém-se:

$$G_\zeta(\zeta) = \mp I(\eta) \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right) \left( \frac{2\bar{\zeta}}{|\eta|^2 + 1} \right) \left| \frac{[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})]^2}{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1} \right|^2 \quad (5-23)$$

Esta derivada  $G_\zeta$  é utilizada no processo numérico apresentado no Capítulo 4, na obtenção da matriz Jacobiana do operador (equações (4-62) e 4-63)). Uma das formas de avaliar o algoritmo de síntese consiste em, dada uma solução inicial qualquer, utilizar a função (5-22) como objetivo da síntese e verificar se a solução obtida é a superfície quádrlica definida pelos parâmetros  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Além disto, o modelo das quádrlicas é utilizado para permitir a convergência para a solução. O mecanismo consiste em utilizar como solução inicial uma superfície quádrlica e como função do campo distante uma combinação do diagrama de radiação de uma superfície quádrlica (5-22) com o diagrama objetivo dado por:

$$G(\zeta) = (1 - \mu)G_{sq}(\zeta) + \mu G_{ob}(\zeta) \quad (5-24)$$

onde  $G_{sq}$  é o diagrama dado por superfícies quádrlicas confocais e  $G_{ob}$  o diagrama objetivo, que no presente trabalho é uma função gaussiana. O processo de síntese tem-se início com  $\mu = 0$ , ou seja, o diagrama dado pela quádrlicas e, neste caso, o operador  $\Gamma$  é nulo. Nos estágios intermediários,  $\mu$  assume valores entre zero e um e no estágio final  $\mu = 1$ , que é a função objetivo.

## 5.4

### Condição de Contorno

Para a solução do problema de síntese abordado no Capítulo 3 é necessário que o contorno fechado  $\Omega''$  associado ao campo distante seja representado por uma função contínua e com derivadas de primeira ordem contínuas. Neste estudo serão considerados três tipos de contornos: circular, elíptico e super-elíptico, onde a equação da super-elipse é suficientemente geral para representar estes os três tipos de contorno. Da equação da super-elipse no plano complexo auxiliar  $\zeta''$ , tem-se:

$$\left| \frac{\text{Re}[\zeta'']}{\zeta_u} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\text{Im}[\zeta'']}{\zeta_v} \right|^{2\sigma} = 1 \quad (5-25)$$

Sabendo-se que

$$\operatorname{Re}[\zeta''] = \frac{\zeta'' + \bar{\zeta}''}{2\zeta_u}, \quad (5-26)$$

$$\operatorname{Im}[\zeta''] = \frac{\zeta'' - \bar{\zeta}''}{i2\zeta_v}. \quad (5-27)$$

a equação (5-25) pode ser reescrita como

$$\left| \frac{1}{2\zeta_u} (\zeta'' + \bar{\zeta}'') \right|^{2\sigma} + \left| \frac{1}{i2\zeta_v} (\zeta'' - \bar{\zeta}'') \right|^{2\sigma} = 1. \quad (5-28)$$

Substituindo (4-8) em (5-25) resulta em

$$\left| \frac{1}{2\zeta_u} \left( \frac{\zeta_o\zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} + \frac{\zeta_o\bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} + \left| \frac{1}{i2\zeta_v} \left( \frac{\zeta_o\zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} - \frac{\zeta_o\bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} = 1, \quad (5-29)$$

que pode ser reescrita na forma do operador

$$\Gamma_c = \left| \frac{1}{2\zeta_u} \left( \frac{\zeta_o\zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} + \frac{\zeta_o\bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} + \left| \frac{1}{i2\zeta_v} \left( \frac{\zeta_o\zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} - \frac{\zeta_o\bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} - 1 = 0 \quad (5-30)$$

a ser aplicado nos pontos do contorno na solução numérica do problema. Conforme descrito no Capítulo 4, para determinar a matriz Jacobiana deve-se obter as derivadas do operador sobre o contorno em relação aos parâmetros da cônica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Desta forma, derivando (5-30) tem-se:

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (5-31)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b_{j,k}} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (5-32)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial c_{j,k}} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (5-33)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial d_{j,k}} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} \right]. \quad (5-34)$$

As derivadas de  $\zeta$  em relação aos parâmetros da quádrlica em  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  já foram determinadas em (4-64), (4-65) e (4-66), respectivamente. Logo, é necessário obter apenas a derivada do operador em relação à  $\zeta$ . Mostra-se que

diferenciando (5-30) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} = \frac{\sigma}{\zeta_u} \left[ \frac{1}{2\zeta_u} \left( \frac{\zeta_o \zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} + \frac{\zeta_o \bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right]^{2\sigma-1} \left[ \frac{\zeta_o^2 + 1}{(\zeta_o + \zeta)^2} \right] \\ + \frac{\sigma}{i\zeta_v} \left[ \frac{1}{i2\zeta_v} \left( \frac{\zeta_o \zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} - \frac{\zeta_o \bar{\zeta} + 1}{\zeta_o - \bar{\zeta}} \right) \right]^{2\sigma-1} \left[ \frac{\zeta_o^2 + 1}{(\zeta_o + \zeta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5-35)$$

Para o caso particular onde o contorno é um círculo, ou seja,  $\zeta_u = \zeta_v = \zeta_c$  e  $\sigma = 1$  o operador sobre o contorno é reduzido a

$$\Gamma_c = \left| \frac{1}{\zeta_c} \left( \frac{\zeta_o \zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} \right) \right|^2 - 1 = 0, \quad (5-36)$$

e sua derivada em relação a  $\zeta$  é dada por

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} = \frac{1}{\zeta_c^2} \left( \frac{\zeta_o \zeta + 1}{\zeta_o - \zeta} \right) \left[ \frac{\zeta_o^2 + 1}{(\zeta_o + \zeta)^2} \right] \quad (5-37)$$

Estas derivadas são utilizadas na determinação da matriz Jacobiana nos pontos referentes ao contorno, as derivadas do operador para os pontos internos foram apresentadas na Seção 4.5.

## 5.5

### Cobertura Gaussiana em Contorno Circular

Nos estudos de casos apresentados nesta seção, as antenas refletoras *offset* foram sintetizadas para gerar, segundo os princípios da GO, diagramas de radiação Gaussianos em contornos circulares. Nos estudos de caso analisados, as características do alimentador serão mantidas, variando as dimensões do contorno de cobertura na região de campo distante e a função Gaussiana que descreve o diagrama de radiação. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado considerando  $n = 9,6$ , onde esta constante foi determinada para que o diagrama apresente uma atenuação  $L_I = -12\text{dB}$  em  $\theta_c = 30^\circ$ , que corresponde ao ângulo de incidência na borda do refletor. O ângulo de *offset* definido foi  $\theta_o = 60^\circ$ . O diagrama de radiação do modelo de alimentador no plano  $uv$  é ilustrado nas Figuras 5.2 e 5.3. Para representação do refletor foi escolhida uma grade polar no plano complexo  $1/\eta'$  e definida com 12 anéis ( $J = 12$ ) e 54 radiais ( $K = 54$ ), onde cada ponto da grade está associado à direção de um raio proveniente do alimentador, conforme ilustrado na Figura 5.4.

No primeiro estudo de caso (Caso A) o diagrama de radiação da antena é uma função Gaussiana com atenuação na borda da região de cobertura  $L_G = -3\text{dB}$  para o ângulo  $\alpha_c = 8^\circ$  sobre a borda, que corresponde ao expoente  $\psi = 0,690775$ . O eixo do cone de irradiação do campo distante está

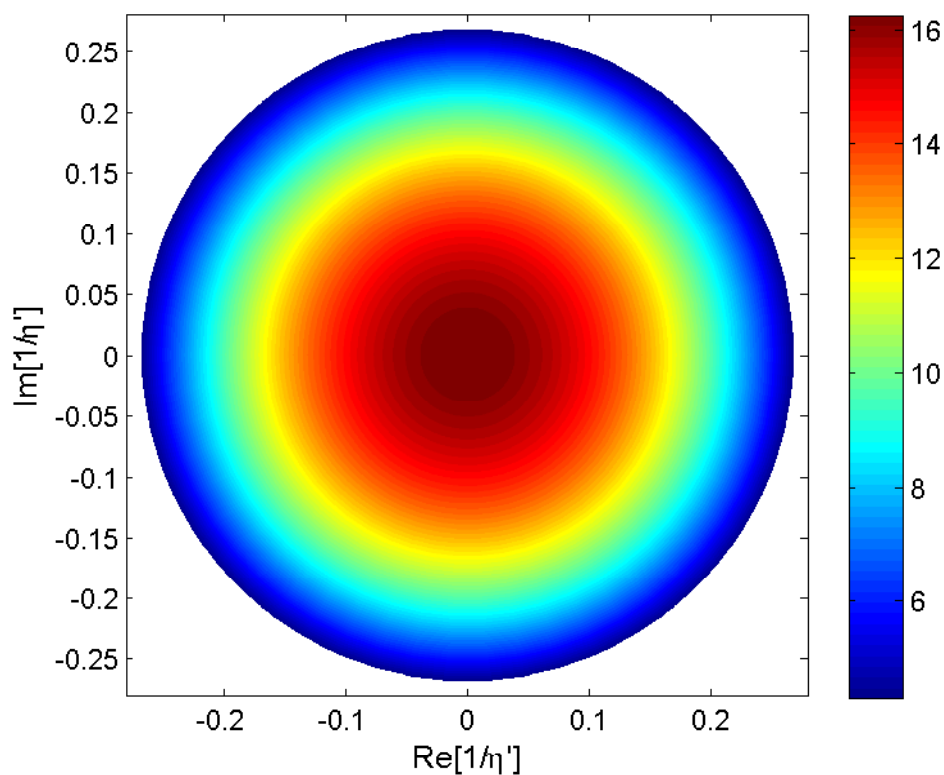


Figura 5.2: Diagrama de radiação do alimentador no plano  $1/\eta'$

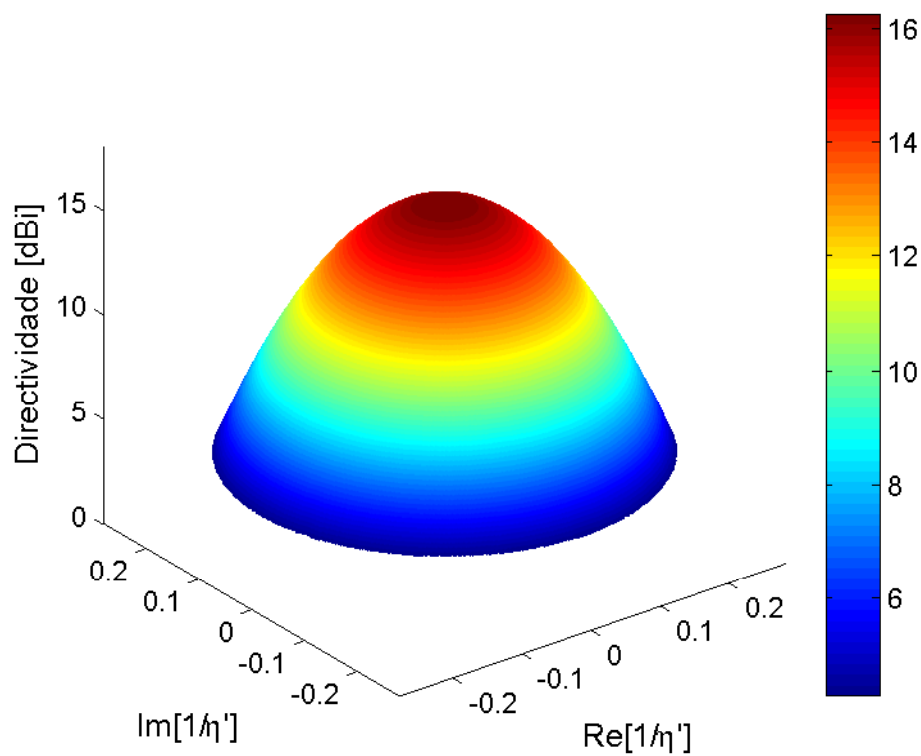


Figura 5.3: Diagrama de radiação do alimentador em 3D

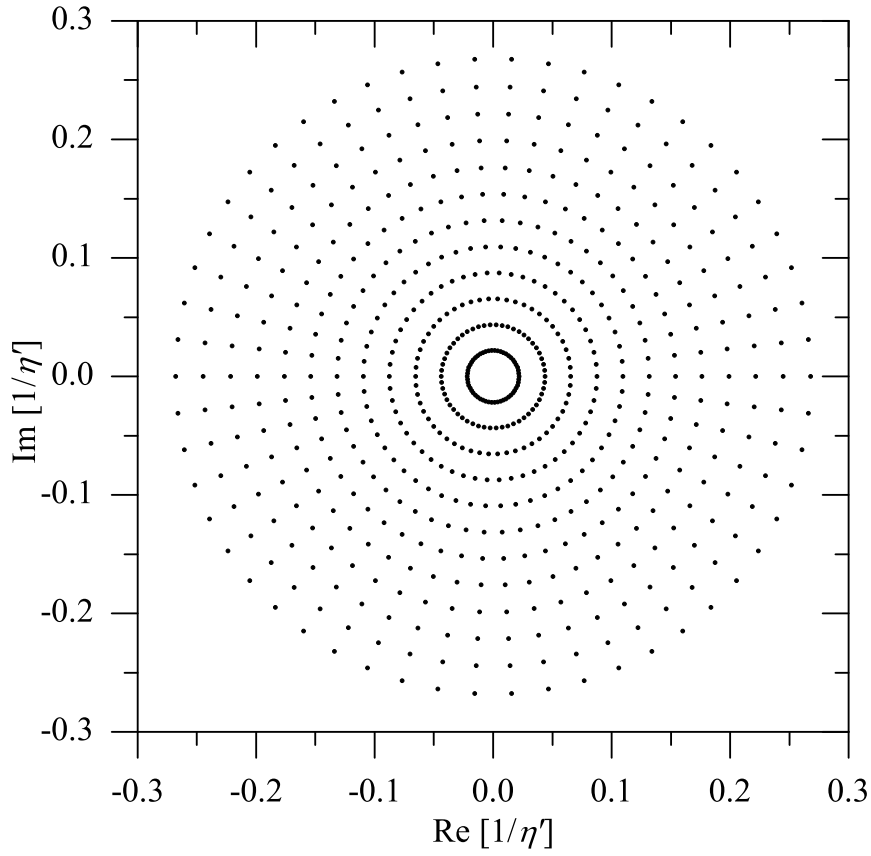


Figura 5.4: Caso A: Direções de incidência da solução inicial no plano  $1/\eta'$

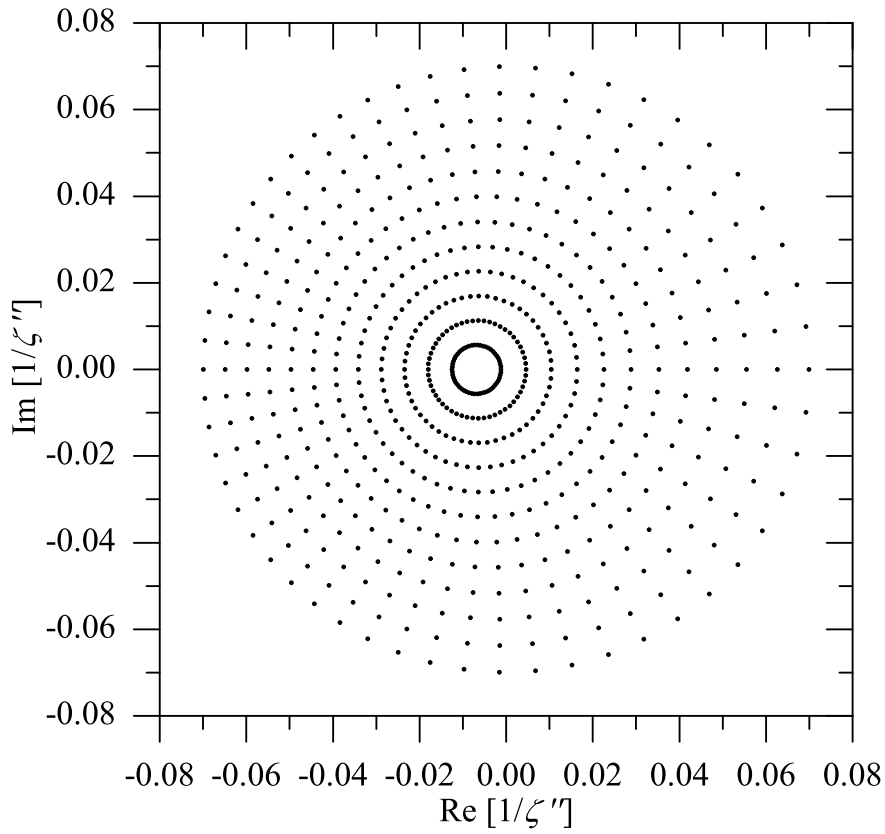


Figura 5.5: Caso A: Direções de reflexão da solução inicial no plano  $1/\zeta''$

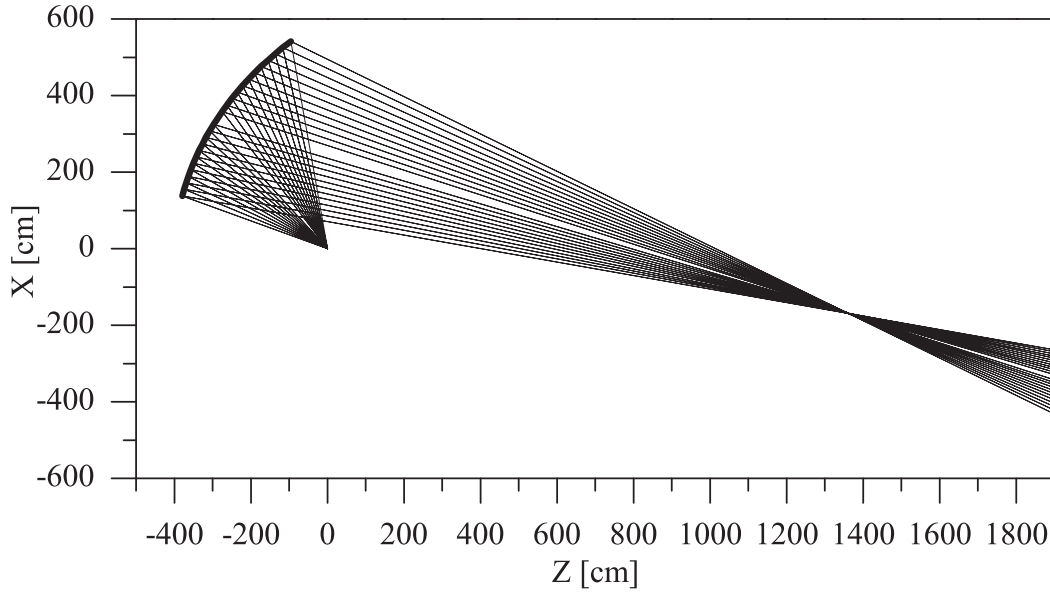


Figura 5.6: Caso A: Traçado de raios da solução inicial no plano  $xz$

deslocado de um ângulo de *offset*  $\alpha_o = -18^\circ$  em relação ao eixo  $z$ . Utilizando estes parâmetros e a formulação apresentada na Seção 3.4.2, determinou-se a superfície quádrlica adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -652,105696$ ,  $b^{(0)} = -0,077795$ ,  $c^{(0)} = 0,0$  e  $d^{(0)} = 0,627081$ . A análise das direções dos raios refletidos pode ser feita observando as direções de reflexão no plano complexo  $1/\zeta''$  ilustrado na Figura 5.5. O diagrama de raios e a superfície no plano  $\phi = 0$  é ilustrados na Figura 5.6. Pode-se notar que a superfície inicial é um elipsóide de revolução, onde um dos focos está na origem do sistema de coordenadas e o outro à direita. Como esperado, a superfície quádrlica confocal obtida mapeou círculos concêntricos no plano  $1/\eta'$  em círculos com o centros deslocados no plano  $1/\zeta''$ , descrevendo um comportamento bastante típico da Transformação de Möbius estudada na Seção 3.4.2. Além disto, é possível verificar que, de fato, a superfície inicial é simétrica em relação ao plano de simetria  $zx$ .

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.7, onde estão ilustradas as direções dos raios refletidos pela superfície modelada no plano complexo  $1/\zeta''$ , e na Figura 5.8 o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ). Observando as Figuras 5.7 e 5.8 é fácil perceber que a distância entre os anéis diminui a medida que se aproxima da borda, caracterizando o deslocamento dos raios refletidos para as bordas do contorno na região de campo distante. Este comportamento, que de fato era esperado, é determinado pela conservação da energia implícita na equação de Monge-Ampère, que compensa a baixa iluminação do alimentador nas bordas do refletor ( $L_I = -12\text{dB}$ ) direcionando os raios no contorno, já que se busca uma cobertura uniforme ( $L_G = 0\text{dB}$ ).

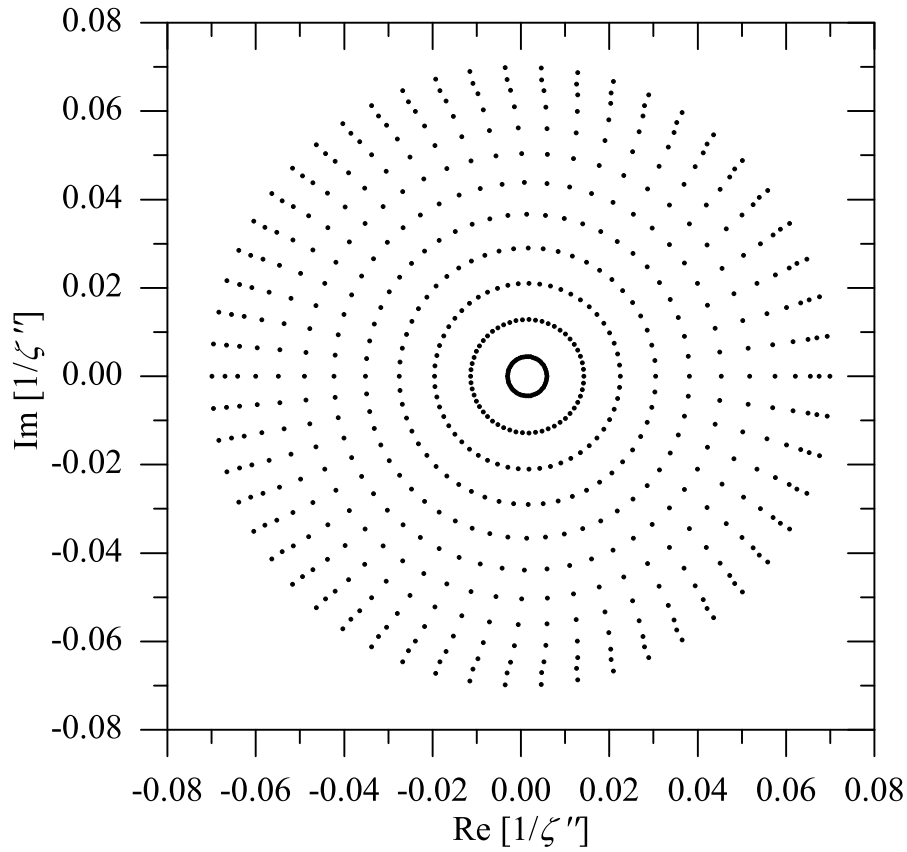


Figura 5.7: Caso A: Direções de reflexão da superfície modelada plano  $1/\zeta''$

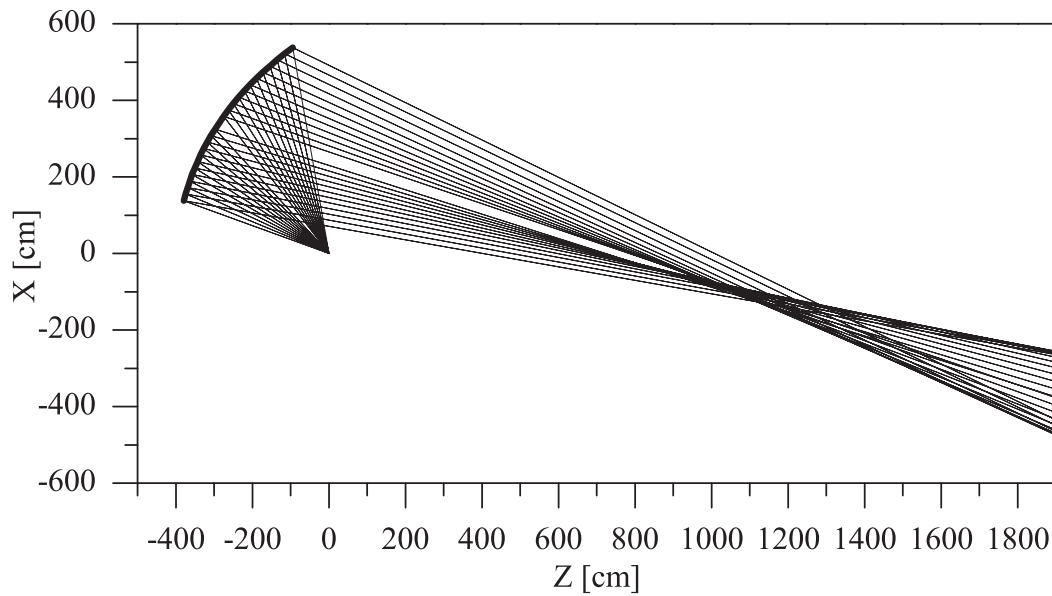


Figura 5.8: Caso A: Traçado de raios da superfície modelada plano  $zx$

Antes de analisar a superfície, é necessário interpolar os pontos dados pelo método de síntese geométrica e obter uma superfície contínua. Para representar a superfície refletora foi utilizada uma função composta por um polinômio de segundo grau e uma Série de Fourier expressa por [99], [100]:

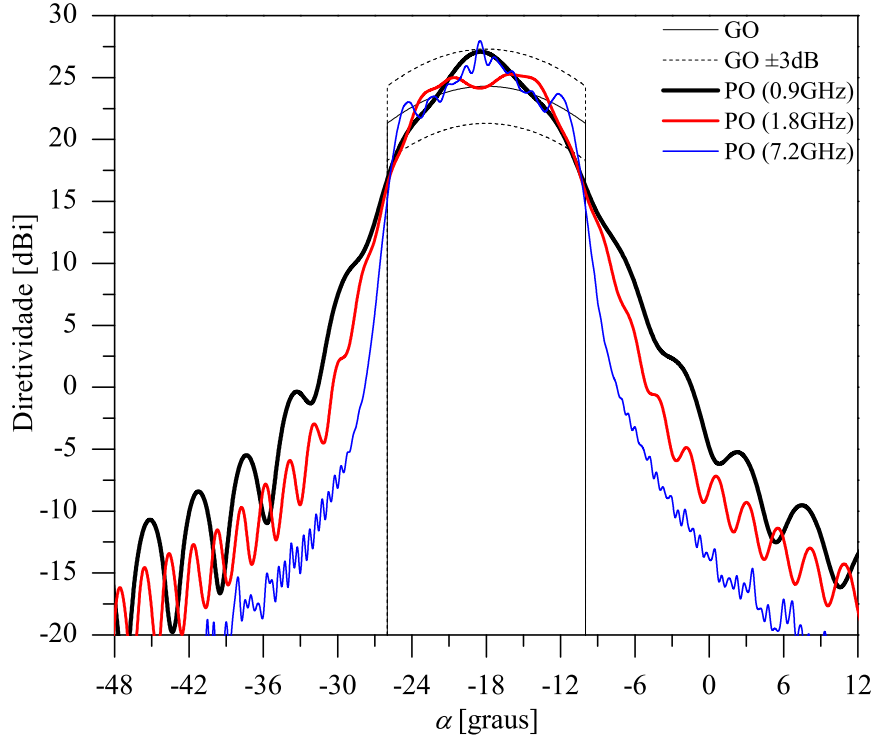


Figura 5.9: Caso A: Diagrama de radiação no plano de simetria

$$z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3y^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn}f_m(x)f_n(y) \quad (5-38)$$

onde  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as constantes que definem o polinômio e  $b_{mn}$  os coeficientes da Série de Fourier. O método de interpolação determina estas constantes associadas ao polinômio e os coeficientes da série de forma que a diferença entre cada ponto dado pela síntese e o correspondente obtido através de (5-38) seja mínima.

A validação da síntese é feita através de análise da superfície interpolada via aproximações da PO mais correntes de borda [80], [81], [82]. A análise foi feita considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e, consequentemente, com diâmetros de  $12\lambda$ ,  $24\lambda$  e  $96\lambda$ . A Figura 5.9 apresenta os diagramas de radiação no plano de simetria. As diferenças observadas entre o objetivo e o obtido podem ser atribuídas a uma série de fatores, entre eles: erros numérico da síntese uma vez que a superfície é descrita por um conjunto finito de pontos; erros de interpolação; e efeitos difrativos não levados em conta pelo método de síntese. As Figuras 5.10, 5.11, 5.12 apresentam os diagramas de radiação no plano  $uv$  determinados novamente através da PO, para as três frequências de operação consideradas. Nota-se que a energia refletida fica concentrada na região circular definida pelo contorno, sobretudo para 1,8GHz e 7,2GHz onde os efeitos difrativos são menos relevantes.



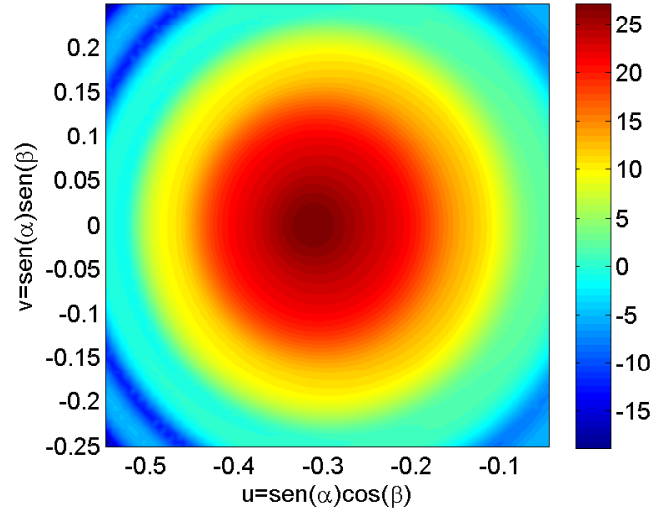


Figura 5.10: Caso A: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 0,9GHz

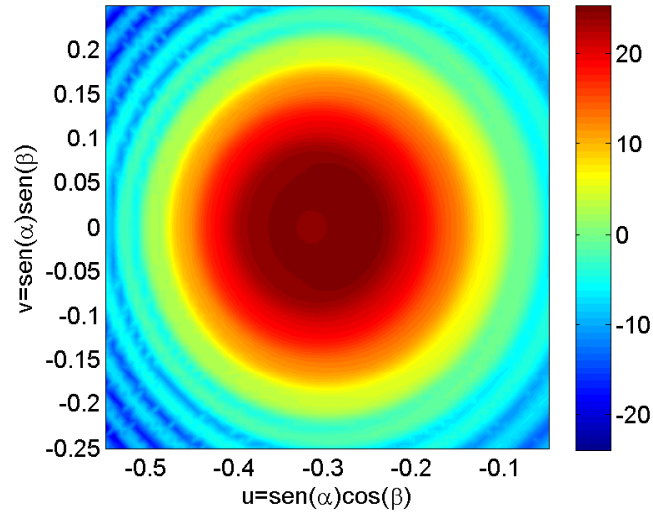


Figura 5.11: Caso A: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 1,8GHz

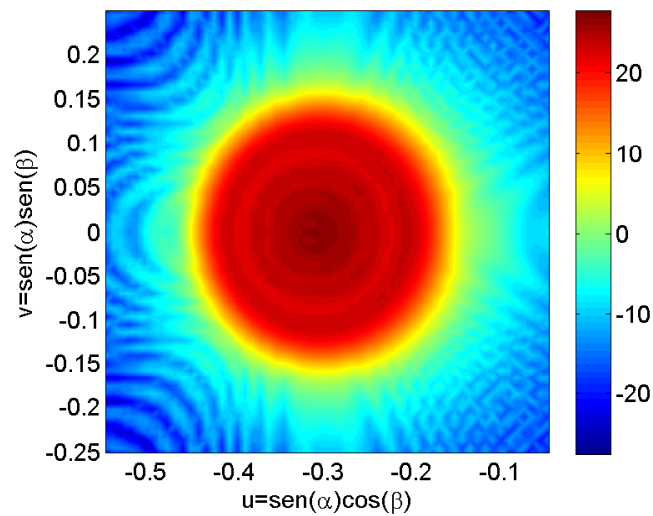


Figura 5.12: Caso A: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 7,2GHz

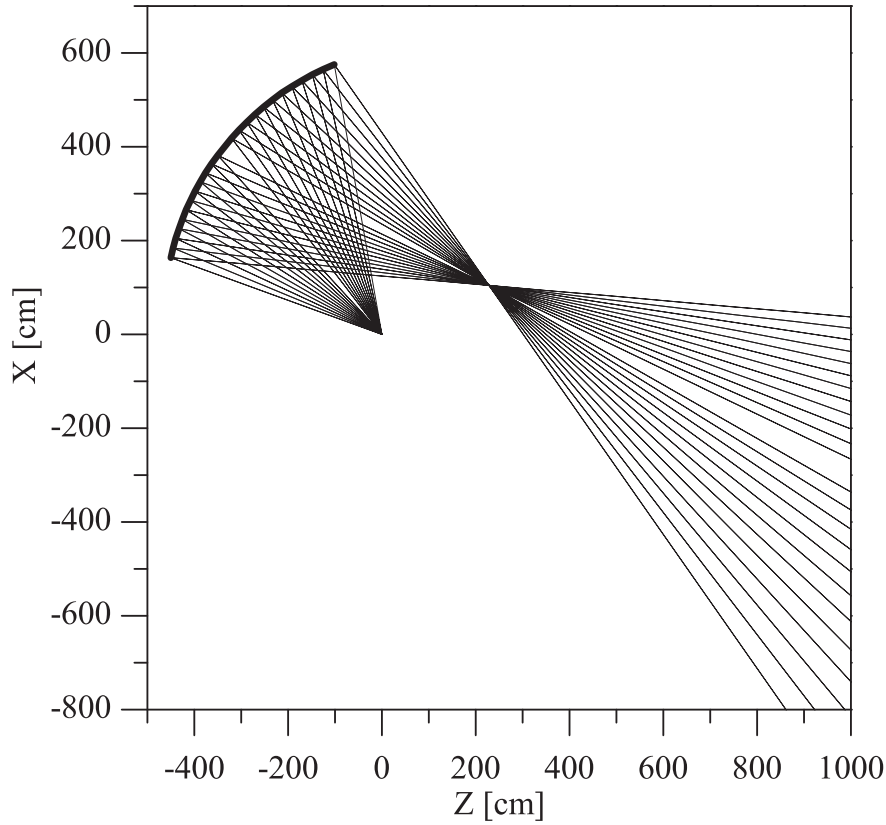


Figura 5.13: Caso B: Traçado de raios da solução inicial no plano de simetria

Nota-se que a energia refletida fica concentrada na região circular definida pelo contorno. Em 0,9GHz, esse comportamento já é evidente, mas fica ainda mais claro para 1,8GHz e 7,2GHz, onde as dimensões elétricas da antena são maiores e, conseqüentemente, os efeitos difrativos são menos relevantes.

A seguir, será apresentada uma série de estudos de caso (Casos B.I a B.VI) com mesmo contorno de cobertura circular, diferenciando-se apenas no fator de atenuação da função de Gaussiana objetivo. A ideia é analisar em detalhes o comportamento do algoritmo de síntese em diversas situações.

No primeiro caso (Caso B.I) foi adotada como função objetivo a constante  $G_0$  dada por (5-21), sendo o ângulo de borda do cone de irradiação do campo distante  $\theta_c = 25^\circ$ , com ângulo de *offset* em relação ao eixo  $z$   $\alpha_o = -50^\circ$  correspondendo a uma cobertura uniforme no contorno objetivo e, conseqüentemente, a atenuação de borda é  $L_G = 0\text{dB}$ . Utilizando os mesmos parâmetros definidos para o alimentador no Caso A e a formulação da Seção 3.4.2, determinou-se uma superfície quádrlica confocal que foi adotada como solução inicial do algoritmo de síntese em todos os casos da série (Casos B.I a B.VI) sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -552,811073$ ,  $b^{(0)} = 0,009002$ ,  $c^{(0)} = 0$  e  $d^{(0)} = 0,196983$ . A Figura 5.13 apresenta o traçado de raios no plano de simetria e a Figura 5.14 ilustra as direções dos raios

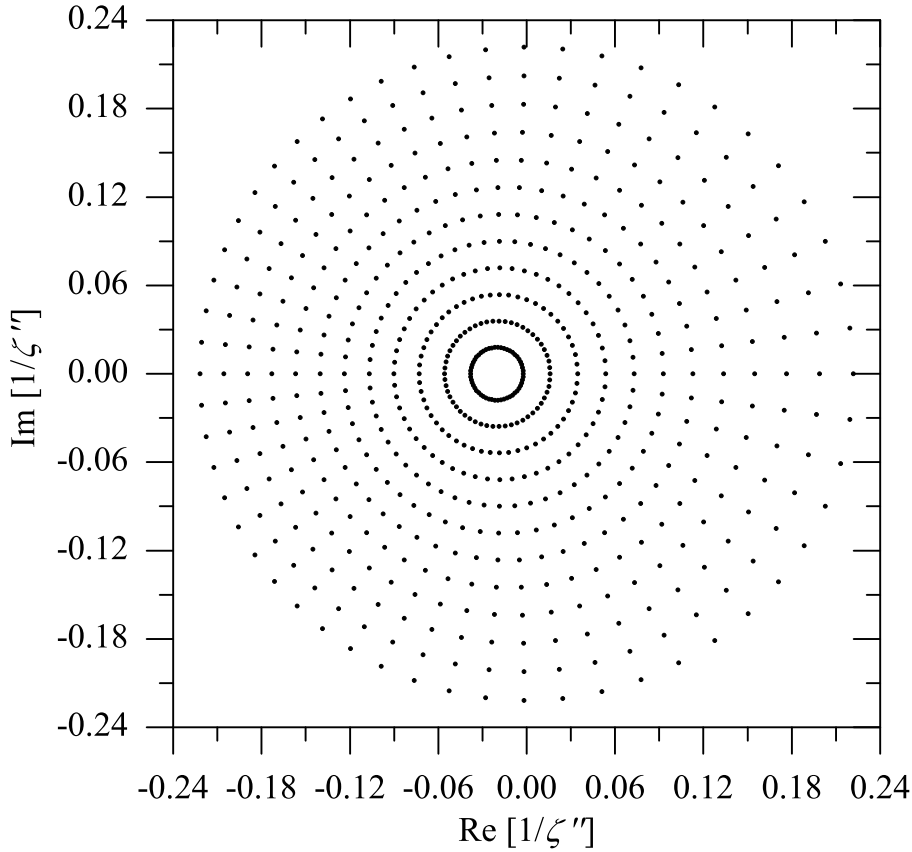


Figura 5.14: Caso B: Direções de reflexão da superfície inicial plano  $1/\zeta''$

refletidos pela superfície inicial no plano complexo  $1/\zeta''$ . Novamente verifica-se o comportamento típico das transformações lineares fracionárias, ou seja, um conjunto de círculos definidos no plano  $1/\eta'$  são mapeados em um conjunto de círculos com centros deslocados no plano  $1/\zeta''$ .

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.15, onde estão ilustradas as direções dos raios refletidos pela superfície modelada no plano complexo  $1/\zeta''$ , e na Figura 5.16 a superfície refletora e o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ). Observando as Figuras 5.15 e 5.16, nota-se um comportamento muito semelhante ao do estudo de caso anterior, onde há maior concentração dos raios refletidos nas bordas do contorno da região de campo distante. Como já relatado, este comportamento é determinado pela conservação da energia implícita na equação de Monge-Ampère, que compensa a baixa iluminação nas bordas da superfície refletora ( $L_I = -12\text{dB}$ ) concentrando os raios no contorno de cobertura objetivo ( $L_G = 0\text{dB}$ ) a fim de uniformizar a densidade de potência. Neste caso, o efeito de compensação da baixa atenuação de borda do alimentador é ainda mais proeminente uma vez que a diferença entre a atuação de borda no contorno objetivo e na borda do alimentador aumentou para 12dB.

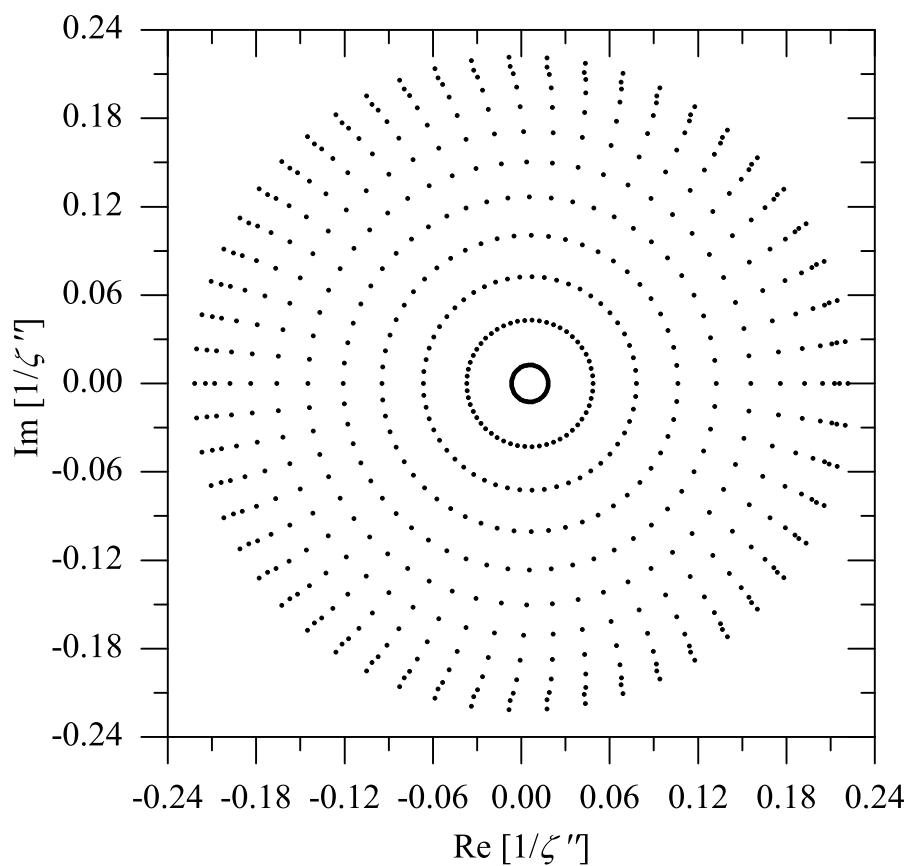


Figura 5.15: Caso B.I: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

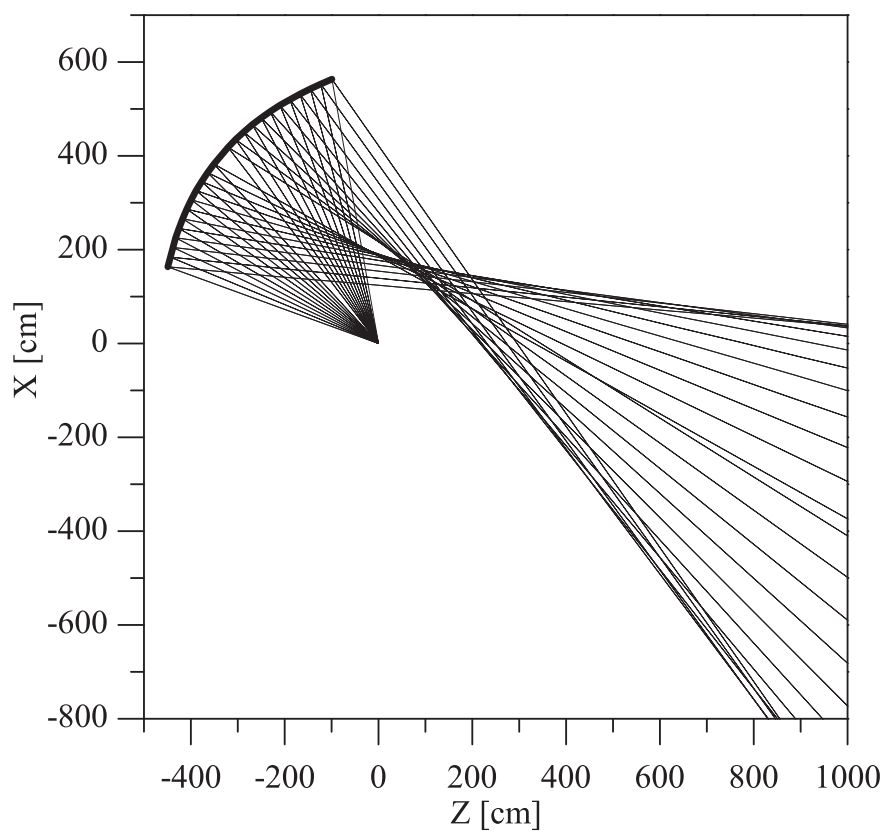


Figura 5.16: Caso B.I: Traçado de raios no plano de simetria

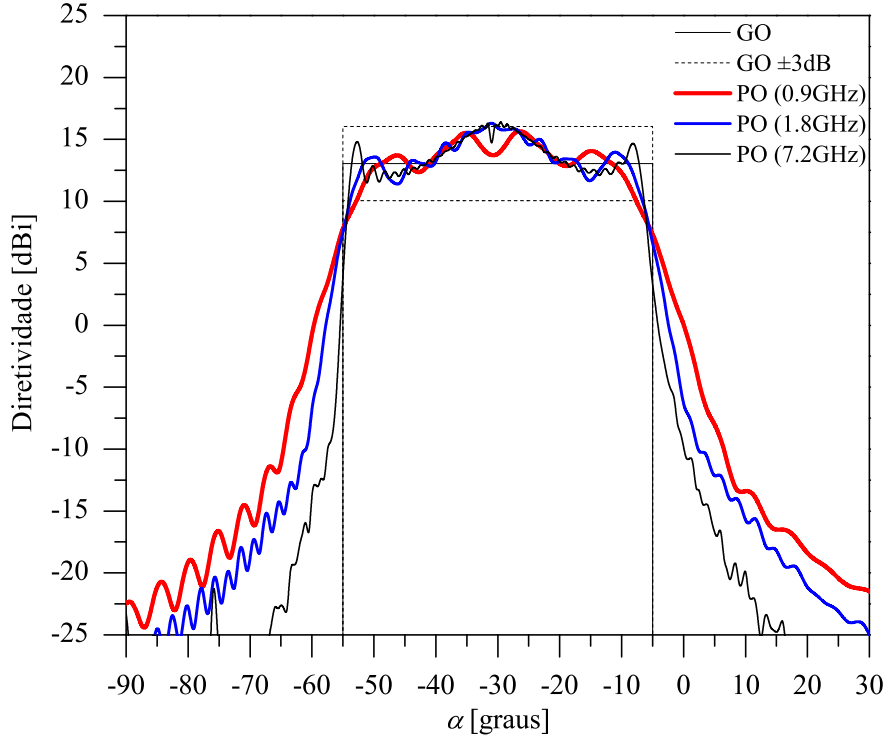


Figura 5.17: Caso B.I: Diagrama de radiação da plano de simetria

Novamente, a validação do resultado da síntese é feita através da análise da PO considerando que a antena esteja operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz, correspondendo a diâmetros da superfície refletora de  $12\lambda$ ,  $24\lambda$  e  $96\lambda$ , respectivamente. A Figura 5.17 apresenta os diagramas de radiação no plano de simetria dados pela PO, pela GO e os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Conforme se observa, o ângulo definido pela área de cobertura aumentou de  $16^\circ$  (Caso A) para  $50^\circ$ , e os diagramas de radiação da PO aproximam-se das especificações com variações de  $\pm 3\text{dB}$ . As diferenças observadas entre os diagramas de radiação especificado e obtido podem ser atribuídas, a erros de discretização, interpolação e aos efeitos difrativos não contabilizados na síntese.

No segundo projeto (Caso B.II) foram adotados os mesmos parâmetros do Caso B.I, com exceção do diagrama de radiação objetivo, que neste caso é uma função gaussiana com atenuação de borda  $L_G = -3\text{dB}$  correspondendo ao expoente  $\psi = 0,690775$ . O resultado da síntese é ilustrado Figura 5.18, com as direções de reflexão no plano complexo  $1/\zeta''$ , e na Figura 5.19 com o traçado de raios no plano de simetria. Fica claro que a concentração de raios no contorno é menor que no Caso B.I. Isto ocorre porque a diferença entre a iluminação nas bordas do refletor e no contorno diminuiu de  $12\text{dB}$  (Caso B.I) para  $9\text{dB}$ . A análise da PO foi feita considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e os respectivos diagramas de radiação são apresentados na Figura 5.20 juntamente com o diagrama objetivo da GO.

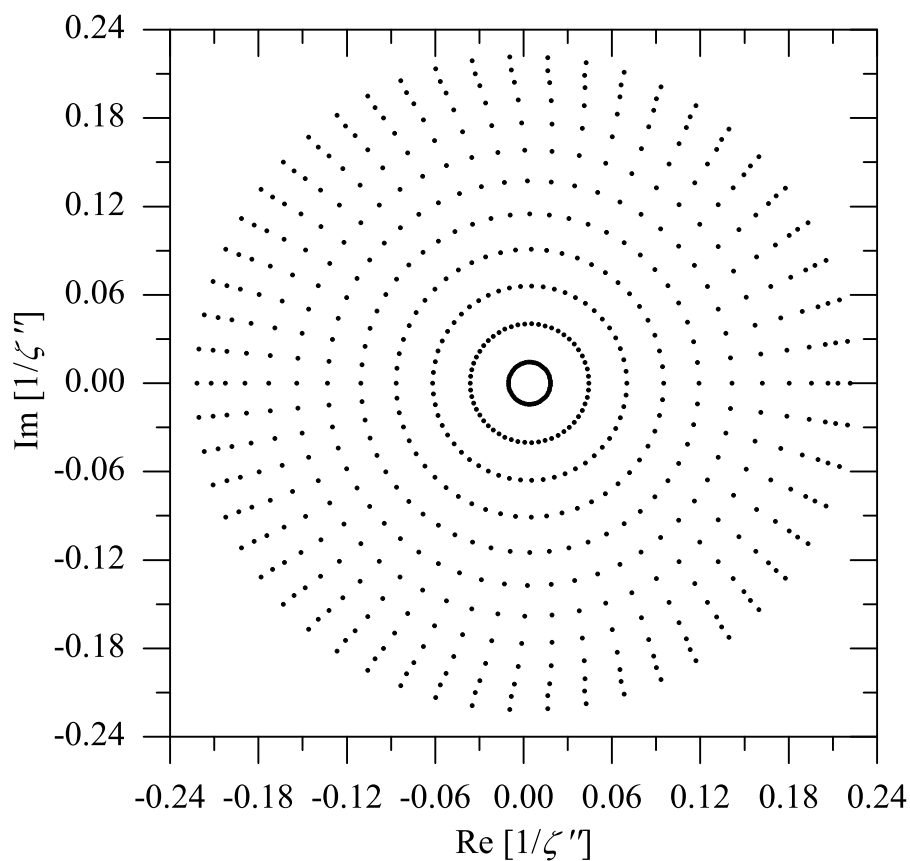


Figura 5.18: Caso B.II: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

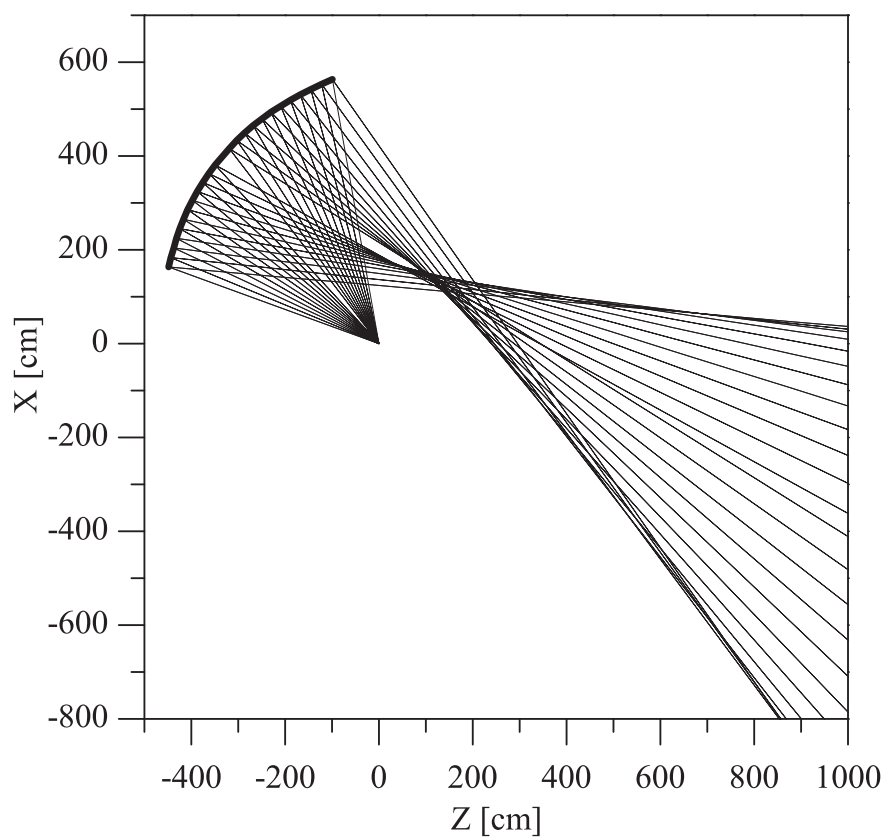


Figura 5.19: Caso B.II: Traçado de raios no plano de simetria

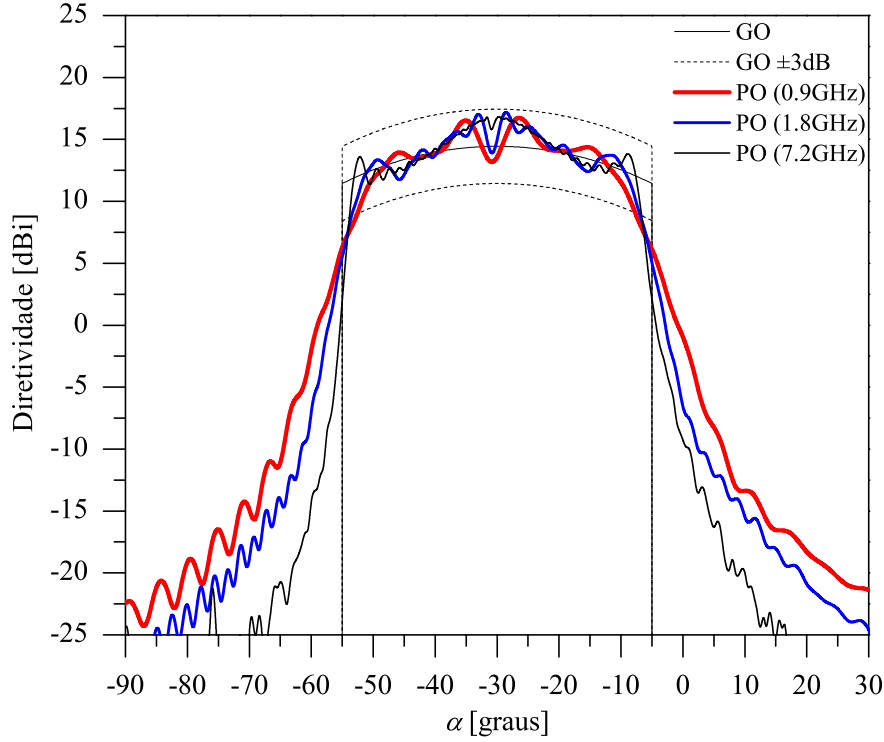


Figura 5.20: Caso B.II: Diagrama de radiação da plano de simetria

Analisando os diagramas de radiação na Figura 5.20 verifica-se boa concordância entre a solução objetivo da GO e a obtida através da PO. Comparando os casos B.I e B.II, percebe-se que no caso B.II a proximidade com a função objetivo foi maior, em particular na região central da cobertura objetivo, onde o Caso B.I apresentou diferença de 3,3 dB. Nos limites do campo objetivo da GO os dois estudos de casos apresentaram um comportamento bastante semelhante, forte queda no diagrama de radiação nos últimos 3°. Além dos efeitos difrativos mais intensos nessa região é importante ressaltar que o último anel da síntese ( $j = J$ ) não atende a condição de conservação da energia. Neste pontos é aplicado um operador que define o contorno e atende a Lei de reflexão de Snell. A principal consequência disto, é a falta de controle da síntese geométrica sobre o diagrama de radiação nestas direções.

No terceiro estudo de caso (Caso B.III) foram adotados os mesmos parâmetros dos casos B.I e B.II, com exceção da atenuação de borda da função objetivo, que neste caso será  $L_G = -6\text{dB}$  correspondendo a  $\psi = 1,38$ . O resultado da síntese é apresentado nas Figuras 5.21 e 5.22, onde estão representadas as direções de reflexão no plano complexo  $1/\zeta''$  e o traçado de raios no plano de simetria. Com essa alteração na função objetivo, a concentração de raios no contorno é menor quando comparado ao Caso B.II. Isso ocorre porque a diferença entre a iluminação nas bordas do refletor e do contorno de objetivo foi reduzida de 9dB (Caso B.II) para 6dB.

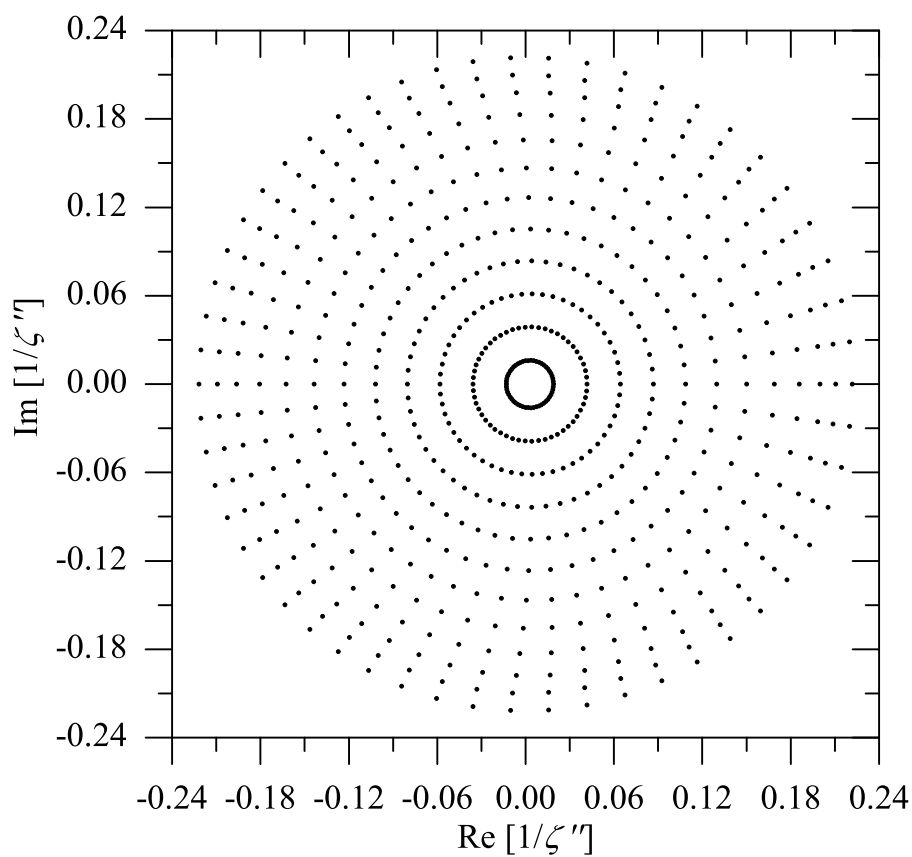


Figura 5.21: Caso B.III: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

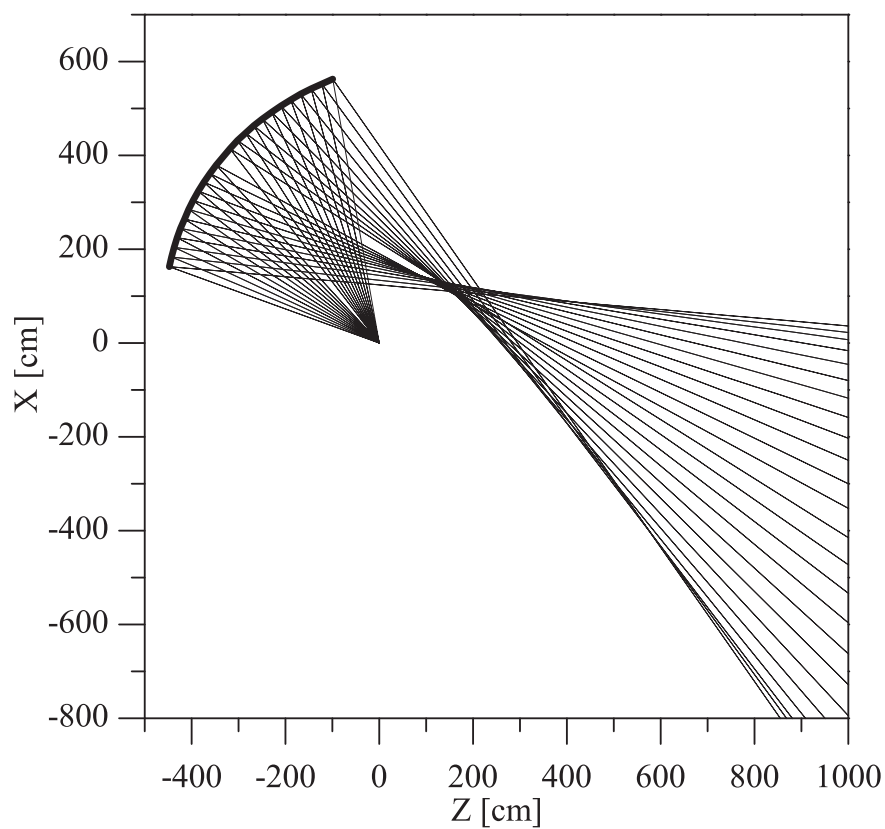


Figura 5.22: Caso B.III: Traçado de raios no plano de simetria



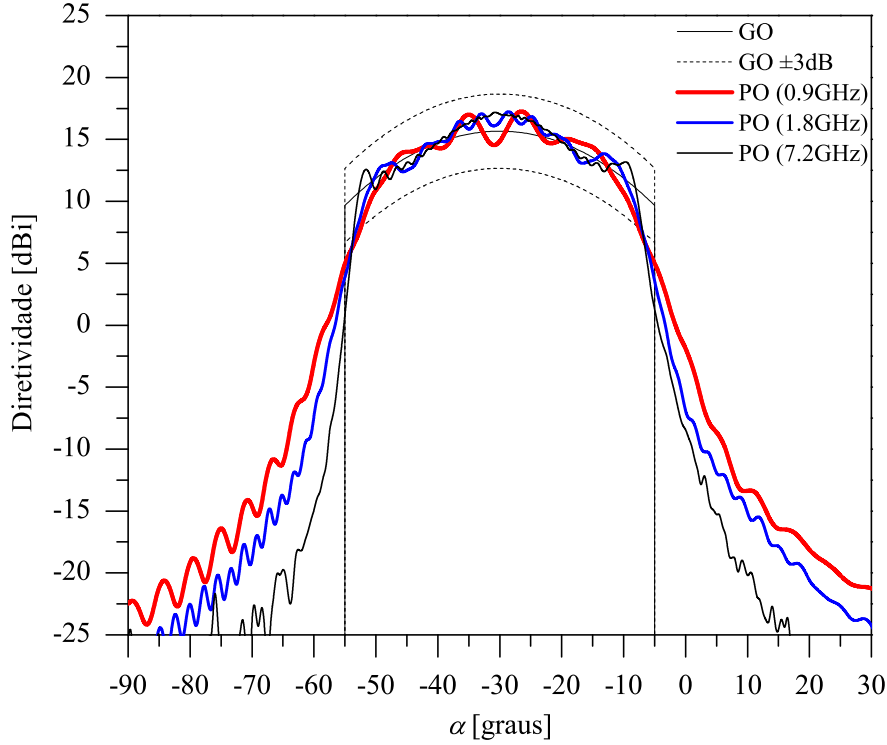


Figura 5.23: Caso B.III: Diagrama de radiação da plano de simetria

A análise da síntese através PO é feita novamente considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e os diagramas de radiação são apresentados na Figura 5.23 juntamente com o diagrama objetivo da GO os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Comparado aos casos anteriores (casos B.I e B.II), percebe-se que no caso B.III a proximidade com a função objetivo foi ainda maior, sobretudo na região central da cobertura objetivo, onde os demais apresentaram maiores diferenças em relação a função objetivo. Nas bordas, mais uma vez se verifica o padrão de comportamento observado nos diagramas de radiação dos estudos de caso anteriores.

No quarto (Caso B.IV) foram adotados os mesmos parâmetros dos casos anteriores, alterando-se apenas a atenuação de borda da função Gaussiana objetivo, que neste caso será  $L_G = -12\text{dB}$  correspondendo a  $\psi = 2,763102$ . O resultado da síntese é ilustrado Figura 5.24, com as direções de reflexão no plano complexo  $1/\zeta''$ , e na Figura 5.25 com o traçado de raios no plano de simetria. Note que, neste caso, não houve deslocamento dos raios para a borda do contorno objetivo. Diferente dos casos B.I, B.II e B.III, a distância entre os anéis na Figura 5.24 é aproximadamente constante, assim como no diagrama de raios das direções de incidência na Figura 5.4. Obviamente, este comportamento está diretamente associado à diferença entre iluminação nas bordas do refletor e do contorno da cobertura especificada, que no presente caso é 0dB.

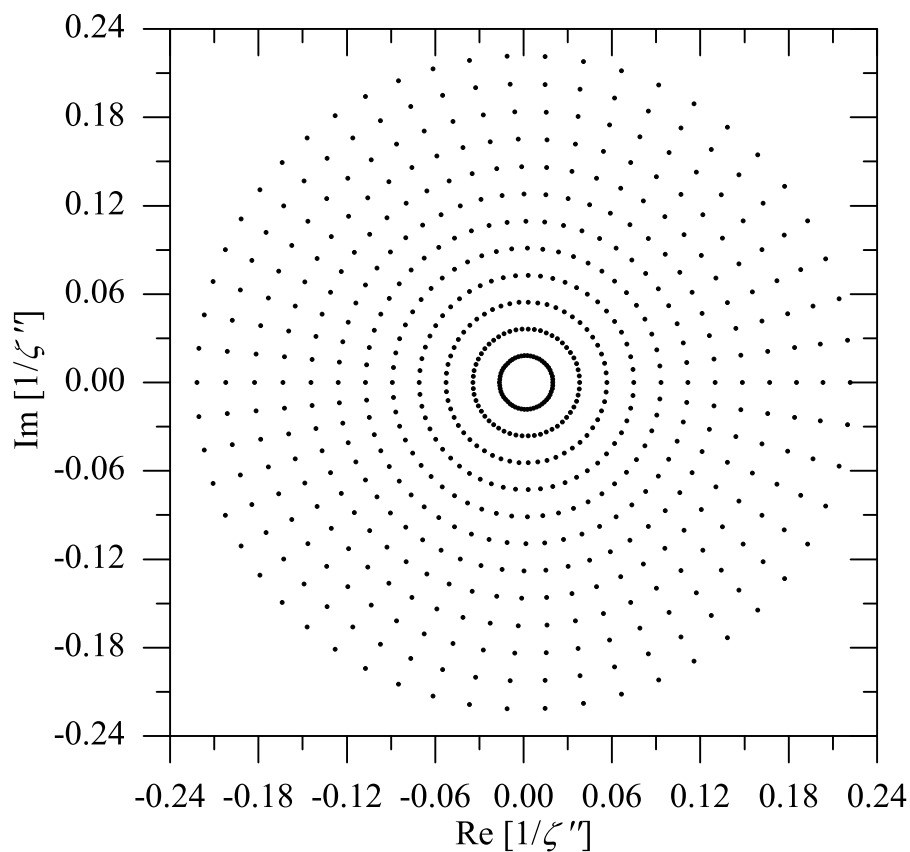


Figura 5.24: Caso B.IV: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

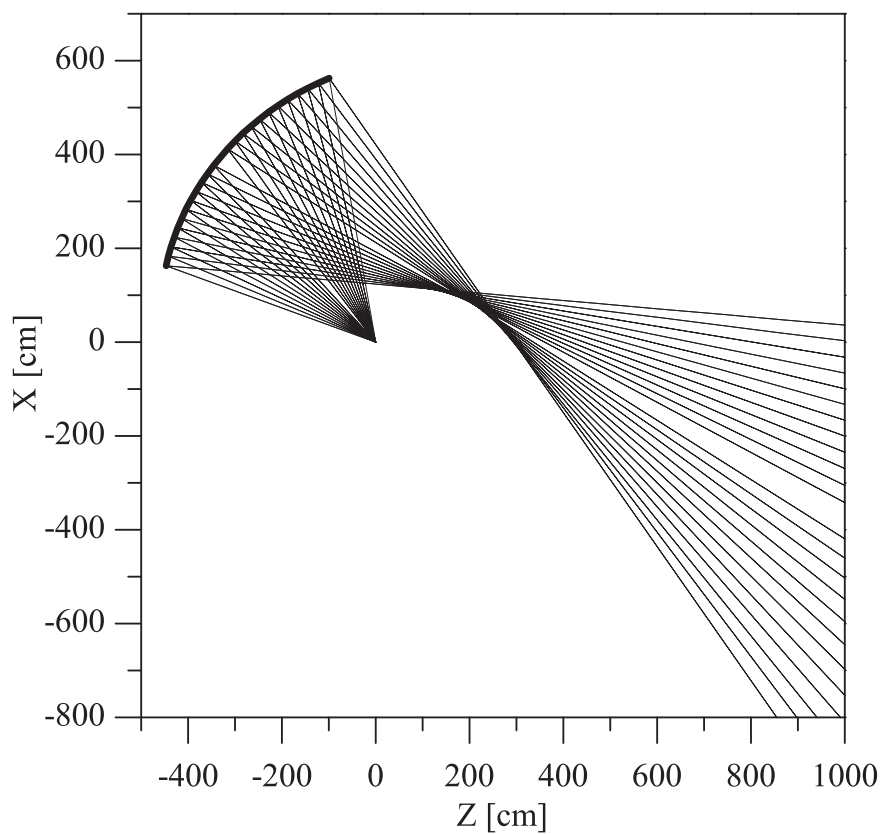


Figura 5.25: Caso B.IV: Traçado de raios no plano de simetria

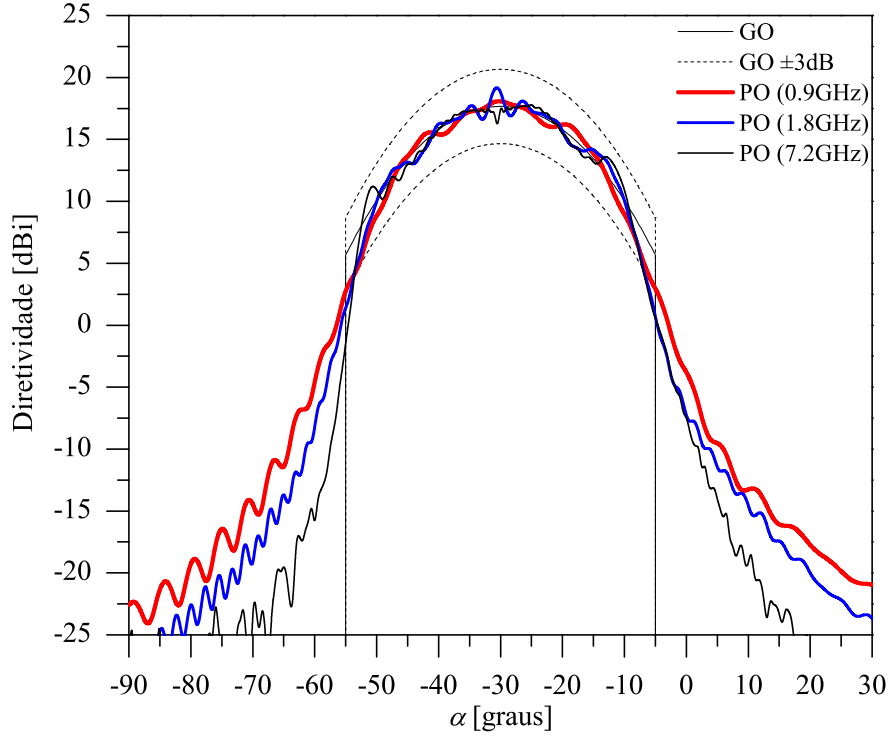


Figura 5.26: Caso B.IV: Diagrama de radiação da plano de simetria

A análise da síntese através da PO é feita novamente considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz e os respectivos diagramas de radiação são apresentados na Figura 5.26 juntamente com o diagrama objetivo da GO e os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Nota-se com facilidade que, comparado aos casos anteriores (casos B.I e B.II), este projeto foi o que se apresentou diagrama da PO mais próximo da função objetivo, especialmente nas direções próximas a direção de máximo na parte central da cobertura objetivo. Mais uma vez, se encontra nas bordas as maiores diferenças entre o projeto e obtido, evidenciando que nestas direções a síntese geométrica não tem pouco controle do diagrama de radiação.

No quinto caso (Caso B.V) foram adotados os mesmos parâmetros dos casos anteriores, com exceção da atenuação de borda da função objetivo, que passa a ser  $L_G = -15\text{dB}$ , correspondendo a  $\psi = 3,453878$ . O resultado da síntese é apresentado Figura 5.27 e 5.28 onde são ilustradas as direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$  e o traçado de raios no plano de simetria, respectivamente. Observe que o comportamento é inverso ao dos casos B.I, B.II e B.III, onde os raios foram concentrados nas bordas do contorno. Neste exemplo, os raios são concentrados no centro da grade, onde a distância entre os anéis é menor. A diferença entre a iluminação nas bordas do refletor e do contorno da cobertura é  $-3\text{dB}$ , ou seja, a densidade de potência na borda do contorno é menor que na borda do refletor.

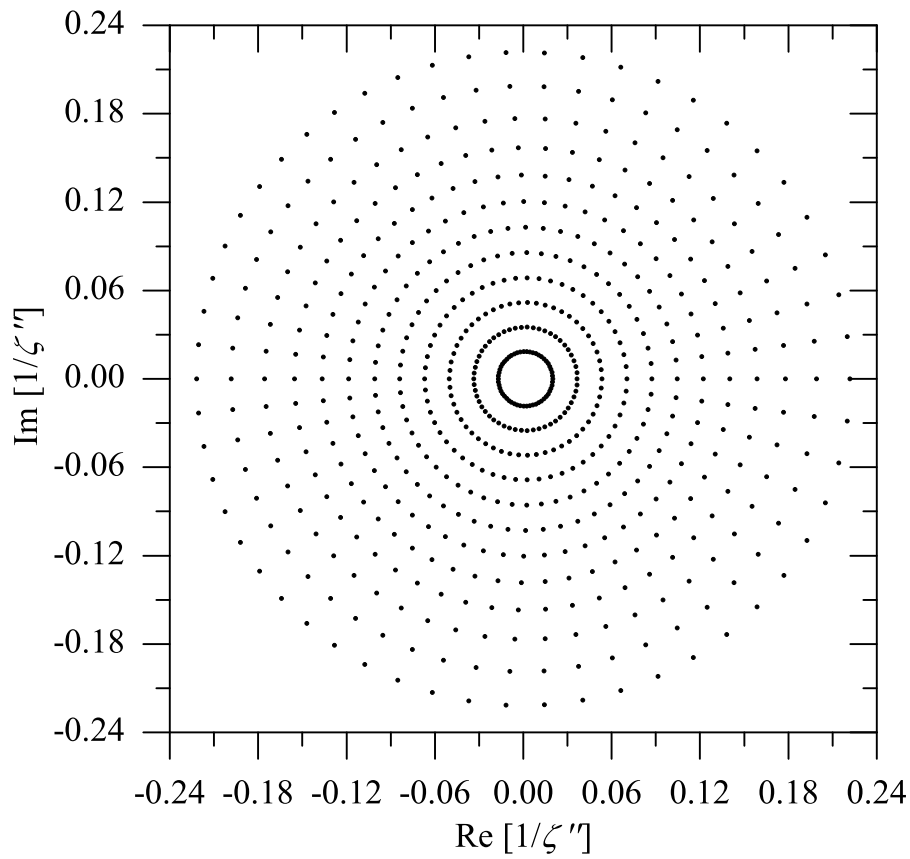


Figura 5.27: Caso B.V: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

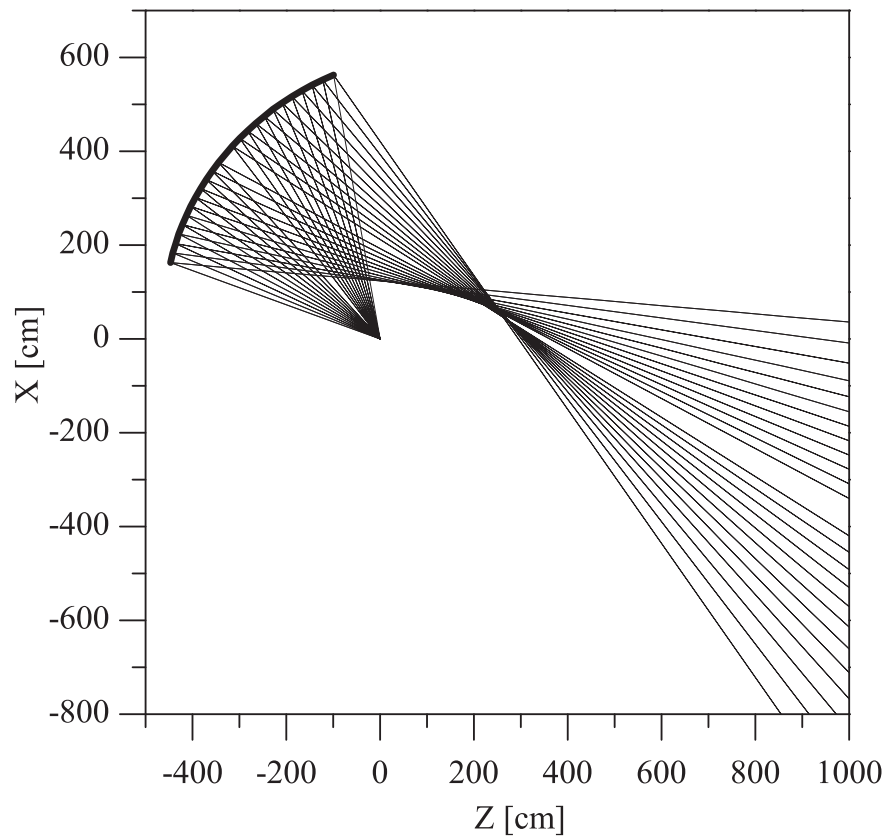


Figura 5.28: Caso B.V: Traçado de raios no plano de simetria

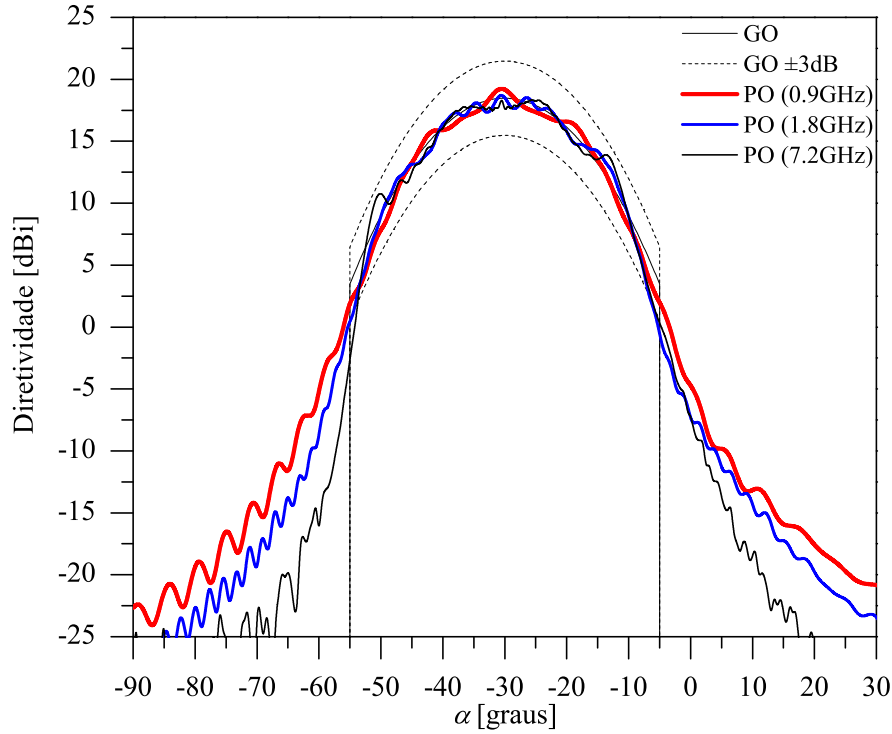


Figura 5.29: Caso B.V: Diagrama de radiação da plano de simetria

Assim como nos casos anteriores, a análise da superfície modelada foi realizada através da PO considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz. Os diagramas de radiação dados pela análise são apresentados na Figura 5.29 juntamente com o diagrama objetivo da GO e os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Pode-se notar que há excelente concordância entre o diagrama projetado e o obtido nas direções centrais do lóbulo principal, assim como observado no estudo de caso anterior (Caso B.IV). Analisando agora as direções próximas aos limites objetivo da GO verifica-se que as diferenças em relação ao diagrama projetado são maiores, porém, menores que nos casos anteriores.

No último caso desta série, (Caso B.VI) foram adotados os mesmos parâmetros dos casos anteriores alterando-se apenas a atenuação de borda da função gaussiana objetivo, que neste caso será  $L_G = -20\text{dB}$ , correspondendo a  $\psi = 4,605170$ . O resultado da síntese é ilustrado na Figura 5.30, com as direções de reflexão no plano complexo  $1/\zeta''$ , e na Figura 5.31 com o traçado de raios no plano de simetria. Assim como no caso B.V, o comportamento observado neste caso é inverso ao dos casos B.I, B.II e B.III. Entretanto, comparado ao Caso B.V a concentração dos raios no centro da grade é maior, ou seja, distância entre os anéis fica ainda menor na região próxima ao centro e ainda maior na região próxima a borda. Analisando a diferença entre a iluminação nas bordas do refletor e do contorno verifica-se que a diferença é de  $-6\text{dB}$ .

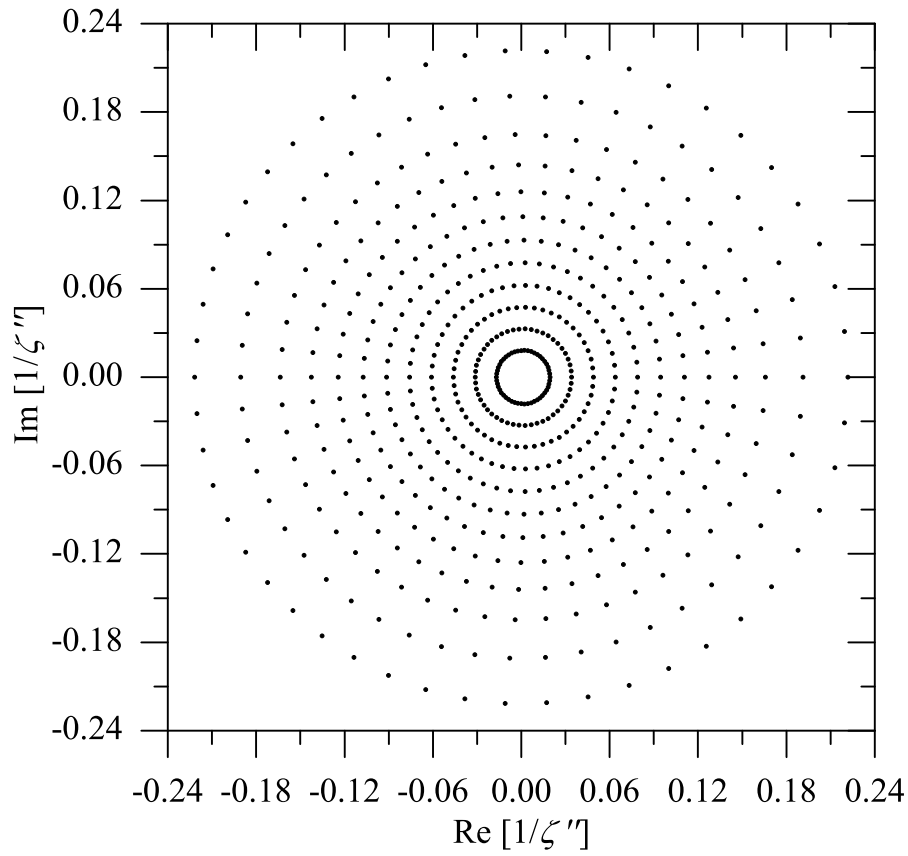


Figura 5.30: Caso B.VI: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

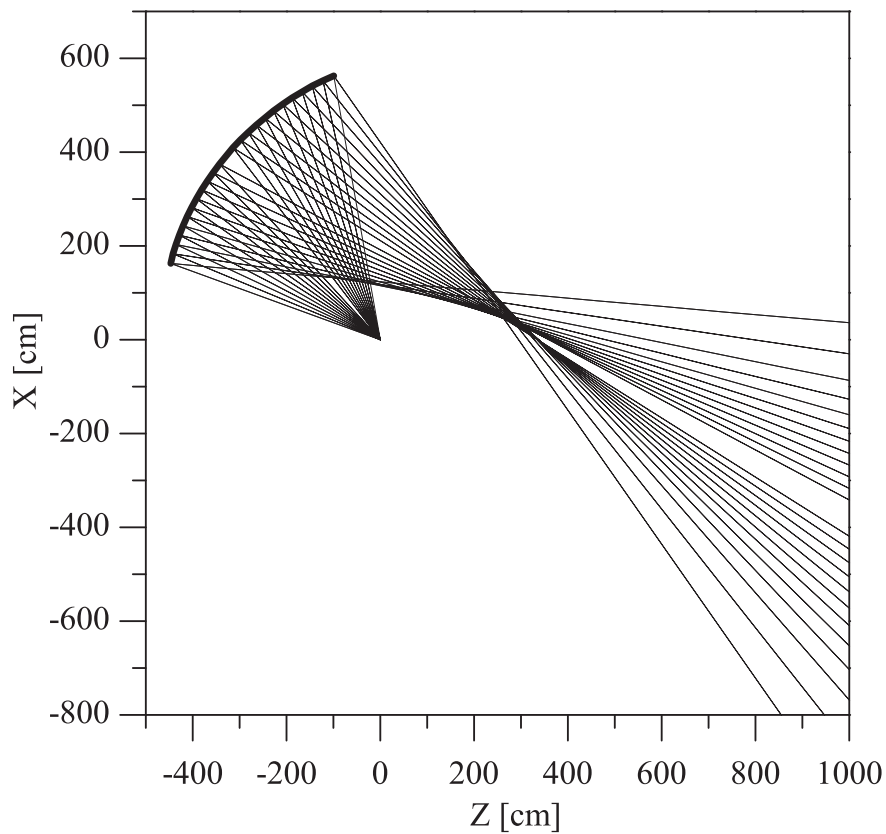


Figura 5.31: Caso B.VI: Traçado de raios no plano de simetria

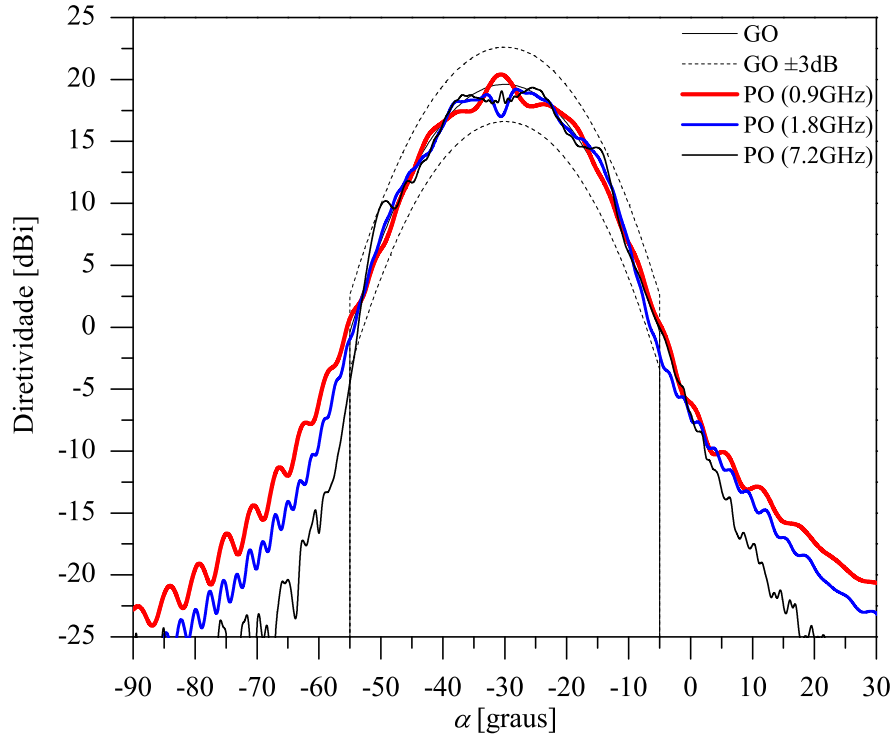
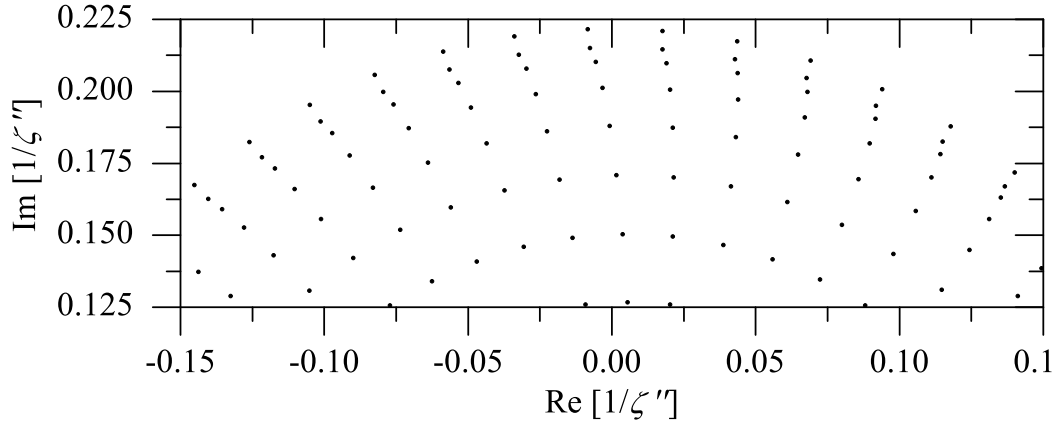
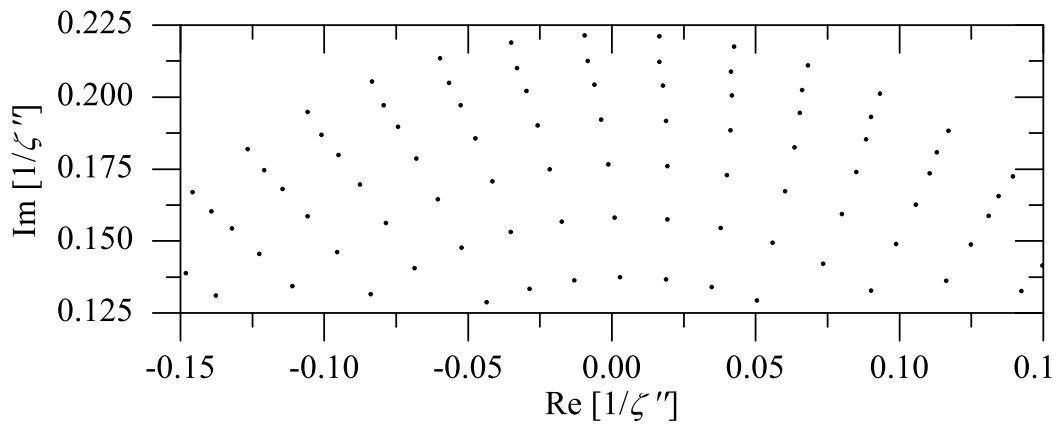
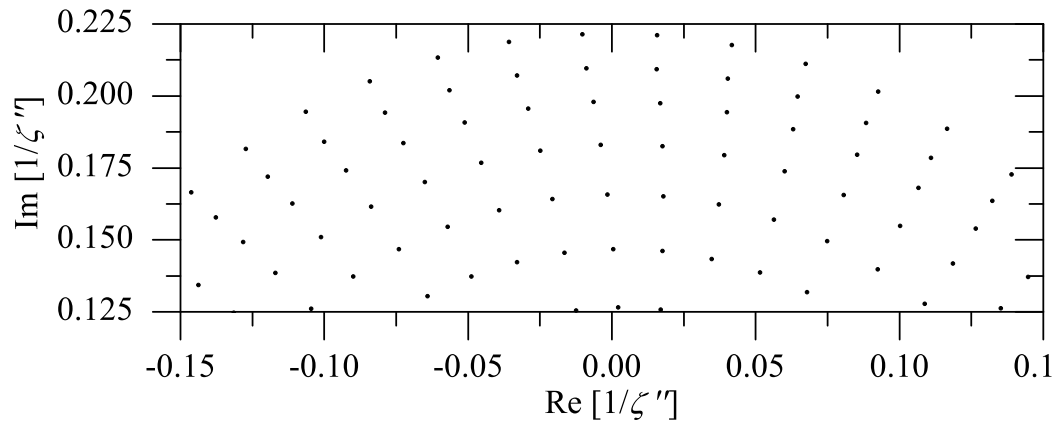


Figura 5.32: Caso B.VI: Diagrama de radiação da plano de simetria

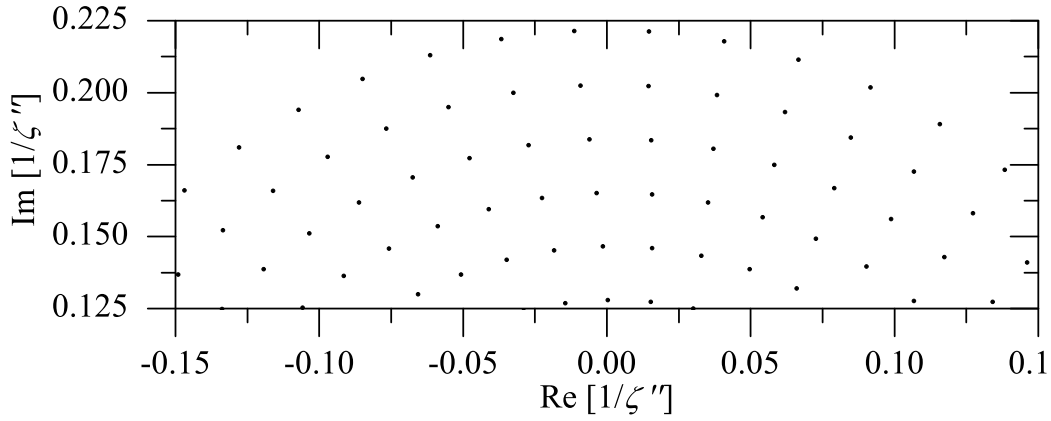
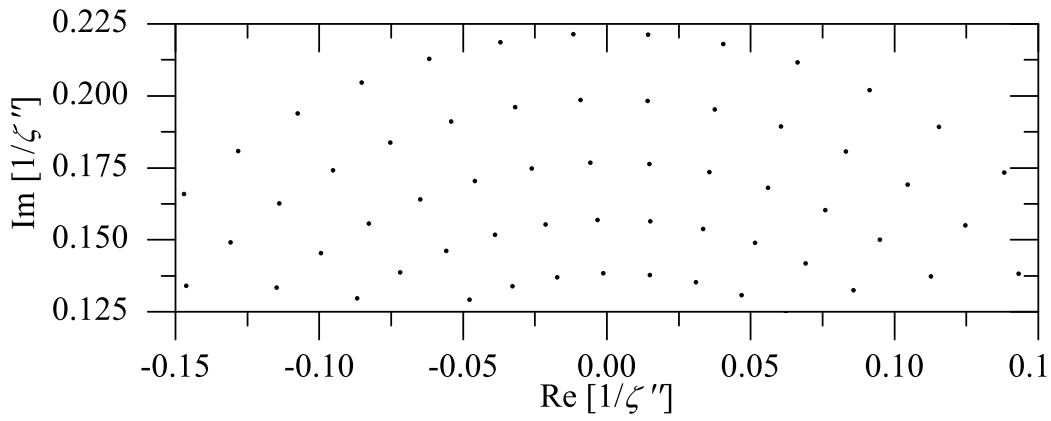
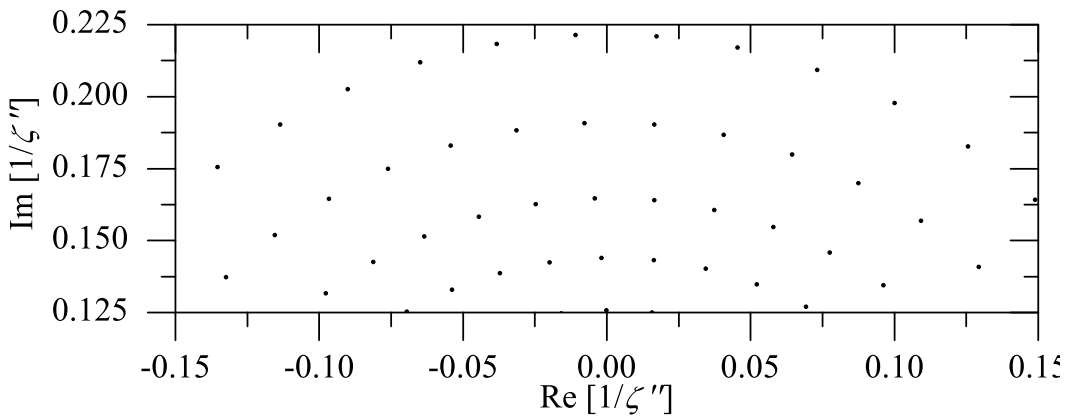
A análise difrativa da superfície modelada é novamente feita através da PO considerando a antena operando em 0,9GHz, 1,8GHz e 7,2GHz. Os diagramas de radiação obtidos são apresentados na Figura 5.32 juntamente com o diagrama objetivo da GO e os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Analisando os resultados nota-se que há boa convergência entre o projetado e o dado pela PO em toda região de cobertura objetivo, mesmo nas regiões próximas à borda. De forma geral, pode-se perceber nessa série de estudos de caso que houve boa convergência entre o que foi projetado e o obtido pela análise da PO, validando a solução numérica proposta no Capítulo 4. Verificou-se que quanto menor diferença entre a atenuação de borda do refletor e a atenuação de borda do contorno objetivo mais próximos são os diagramas da GO e da PO.

Para avaliar detalhadamente os resultados das sínteses apresentadas nesta seção (casos B.I a B.VI), as direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$  dos seis estudos de caso são novamente apresentados com destaque na borda do contorno de cobertura objetivo. Observando inicialmente o Caso B.I na Figura 5.33, nota-se que o penúltimo anel tem um comportamento um pouco diferente do que é esperado. Espera-se que, na medida em que se aproxime da borda, a distância entre os anéis seja cada vez menor e, neste caso, o que se percebe é o contrário, a distância entre o antepenúltimo e o penúltimo é menor que entre o penúltimo e o último. Além disto, verifica-se também uma pequena distorção em  $\phi''$  no sentido anti-horário. Nos casos B.II e B.III (Figuras 5.34

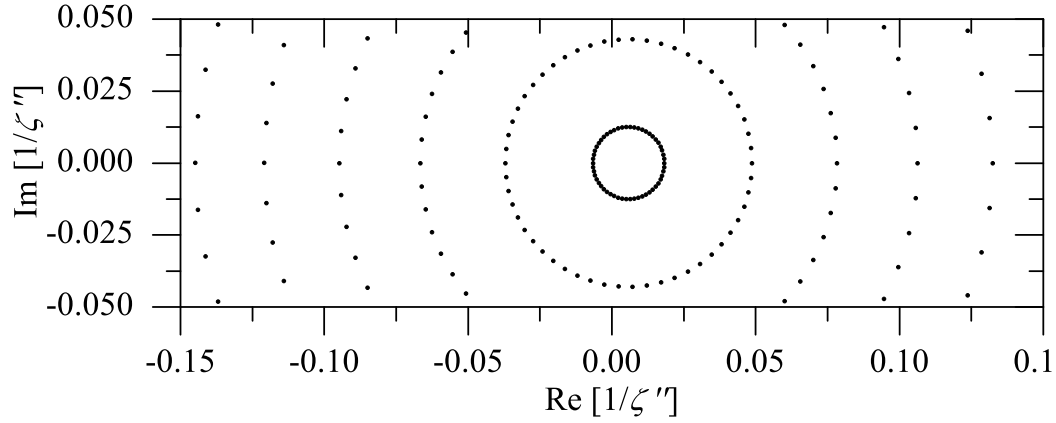
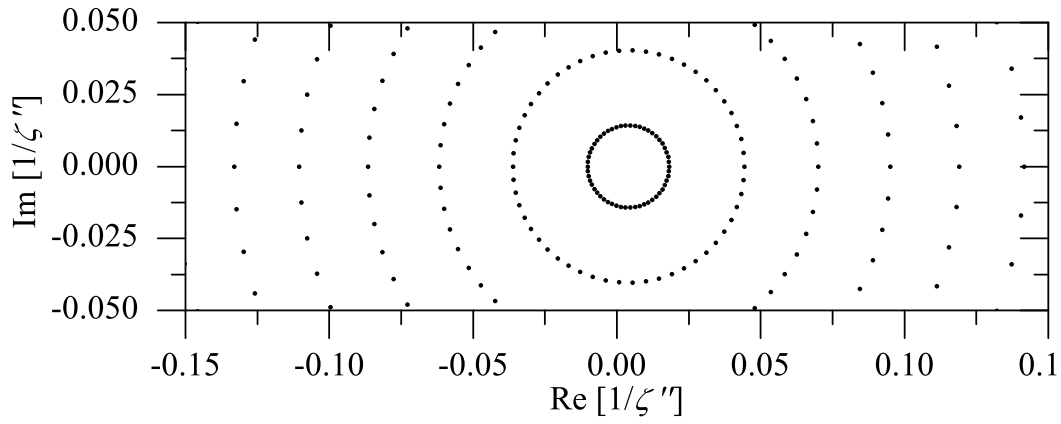
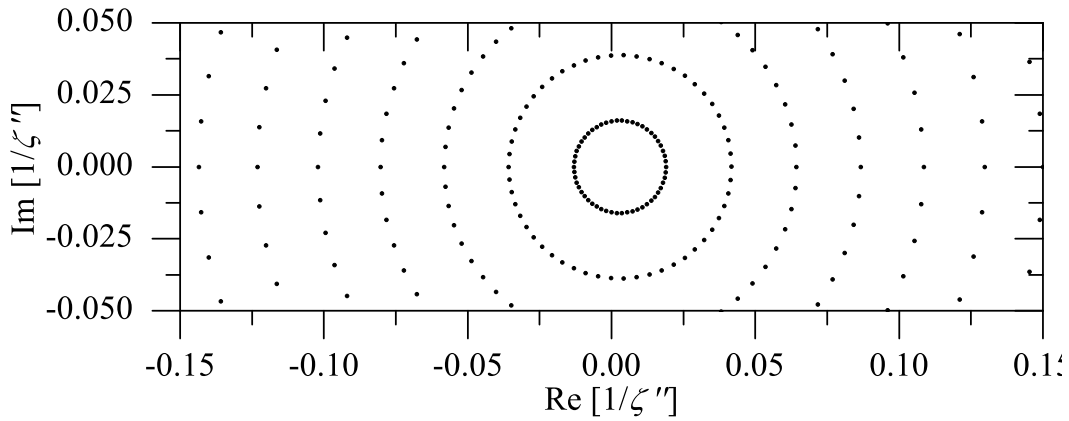
Figura 5.33: Caso B.I: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na bordaFigura 5.34: Caso B.II: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na bordaFigura 5.35: Caso B.III: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na borda

e 5.35), o problema foi significativamente reduzido, apresentando distorção em  $\phi''$  praticamente nula e a distância entre o penúltimo anel e o último é aproximadamente a mesma que entre o antepenúltimo e o penúltimo. No Caso B.IV (Figura 5.36), o comportamento é exatamente o esperado. Como as atenuações de borda do alimentador e da função objetivo são iguais, a

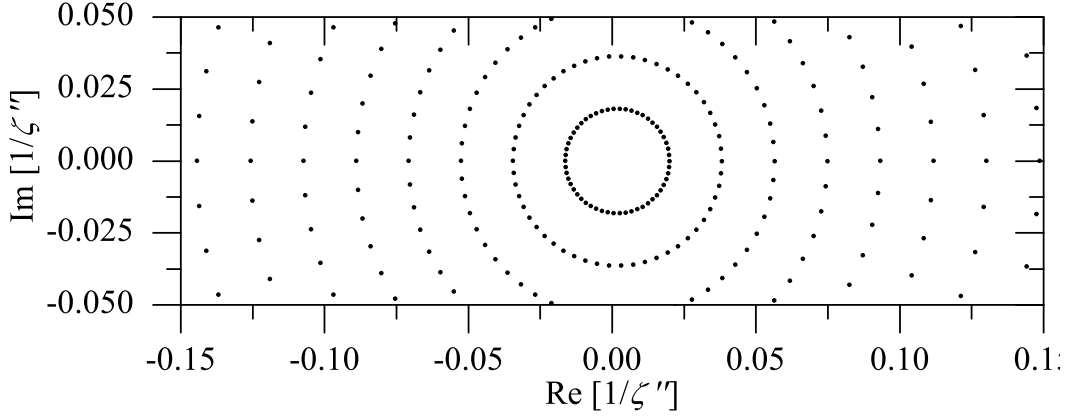
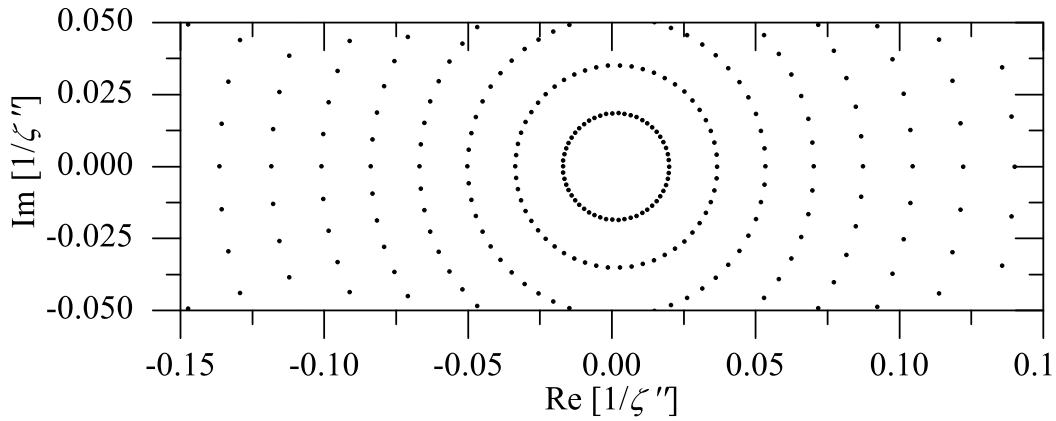
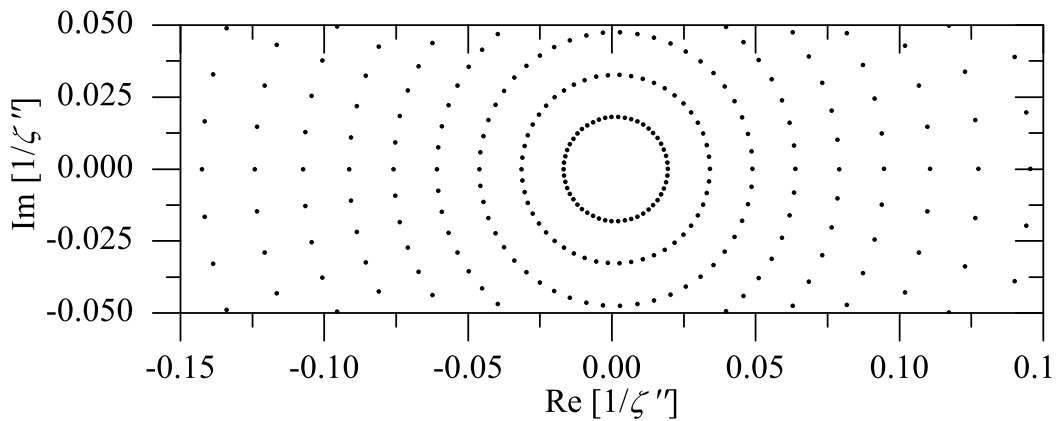


Figura 5.36: Caso B.IV: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na bordaFigura 5.37: Caso B.V: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na bordaFigura 5.38: Caso B.VI: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na borda

distância entre os anéis é constante. Nos casos B.V e B.VI (Figuras 5.37 e 5.38) novamente tem-se o comportamento esperado, nenhuma distorção em  $\phi''$  e anéis próximos à borda cada vez mais espaçados uns dos outros. Neste último Caso B.VI, a distância entre os anéis é ainda maior por conta da atenuação de borda da função objetivo ser menor que no caso anterior (Caso B.V).

Figura 5.39: Caso B.I: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centroFigura 5.40: Caso B.II: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centroFigura 5.41: Caso B.III: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centro

Prosseguindo com a análise detalhada, o destaque agora é dado á região central do plano  $1/\zeta''$ . Analisando os casos B.I e B.II nas Figuras 5.39 e 5.40, percebe-se que o primeiro anel está deslocado da origem para o lado positivo do eixo real de  $1/\zeta''$ . Como a função objetivo é simétrica, a distribuição dos raios também deveria ser. No Caso B.III (Figura 5.41), a assimetria constatada

Figura 5.42: Caso B.IV: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centroFigura 5.43: Caso B.V: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centroFigura 5.44: Caso B.VI: Direções no plano  $1/\zeta''$  com destaque na centro

nos casos B.I e B.II é significativamente reduzida. Analisando os casos B.IV, B.V e B.VI ilustrados nas Figuras 5.42, 5.43 e 5.44 é fácil perceber que não se apresentam as assimetrias ocorridas nos casos anteriores e, conseqüentemente, verifica-se o comportamento esperado onde os anéis estão centrados na origem do plano complexo  $1/\zeta''$ .

Para entender as causas dos problemas relatados em alguns dos casos estudados nesta seção, será feito um estudo quantitativo de alguns termos da equação de Monge-Ampère. Conforme destacado na Seção 3.4, a utilização da função de representação de uma quádrlica confocal com eixo deslocado leva a uma simplificação ( $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2 = 0$ ) na equação de Monge-Ampère. Essa particularidade pode implicar em erros na síntese nos casos onde a distorção imposta pelo mapeamento  $\tau$  e, conseqüentemente, a equação de Monge-Ampère tiver maior dependência deste termo. Nestes casos, a representação local por superfícies quádrlicas será inadequada e poderá haver erros na síntese. Para verificar se os erros discutidos no parágrafo anterior são decorrentes desta simplificação, foi definida a seguinte relação entre as derivadas no lado direito da equação Monge-Ampère (3-28):

$$F(\eta) = \frac{|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2}{|L_{\eta\bar{\eta}}|^2}. \quad (5-39)$$

O objetivo é identificar as condições e as regiões do refletor em que a simplificação decorrente do uso de quádrlicas pode gerar imprecisões na síntese. A determinação do fator  $F$  foi feita utilizando o método que adota diferenças finitas. Logo,  $F$  não será necessariamente nulo e, além disto, quanto maior for o valor de  $F$  pior será a representação através de superfícies quádrlicas confocais.

A seguir, é apresentada a relação entre as derivadas definidas em (5-39) no plano complexo  $\eta$  para os seis casos analisados nesta seção. No Caso B.I ilustrado na Figura 5.45 na região central e na região próxima à borda o fator  $F$  é maior e, portanto, nestas regiões o método que utiliza quádrlica terá maior dificuldade para representar a superfície modelada. Nota-se próximo ao centro do refletor e nas bordas que a relação  $F \approx 0,35$ , ou seja, o termo  $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2$  vale pouco mais de  $1/3$  de  $|L_{\eta\bar{\eta}}|^2$ . Na medida em que se afasta da borda em direção ao centro, a razão entre as derivadas dada por  $F$  fica menor, chegando a ser menor que  $10^{-4}$ . Nos locais onde  $F$  é maior é importante avaliar o resultado da síntese com cuidado, já que a representação por quádrlicas pode não ser adequada. Comparando as análises feitas para as direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$  na Figuras 5.33 e 5.39 com a Figura 5.45 constata-se que os erros ocorrem exatamente nas regiões onde  $F$  é maior.

No Caso B.II ilustrado na Figura 5.46, observa-se um comportamento semelhante ao Caso B.I, porém com menor intensidade. Nas bordas o valor máximo de  $F \approx 0,262$  enquanto no centro  $F \approx 0,087$ . Novamente, há a coincidência dos erros destacados nas Figuras 5.34 e 5.40 com as regiões onde a relação entre as derivadas  $F$  é maior na Figura 5.46. Comparando os valores de  $F$  e os erros na síntese destes dois estudos de caso (B.I e B.II) nota-se uma relação direta de proporcionalidade: quanto maior o valor de  $F$  maior o erro.

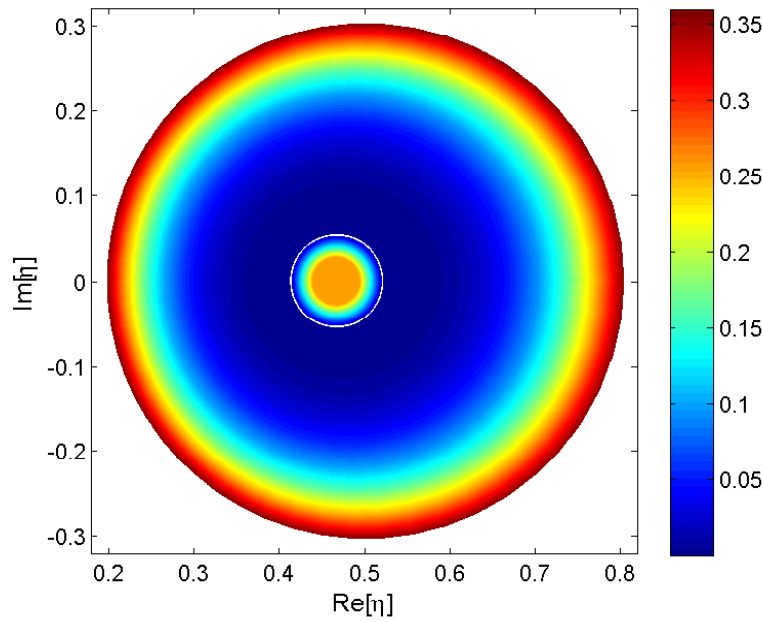


Figura 5.45: Caso B.I: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

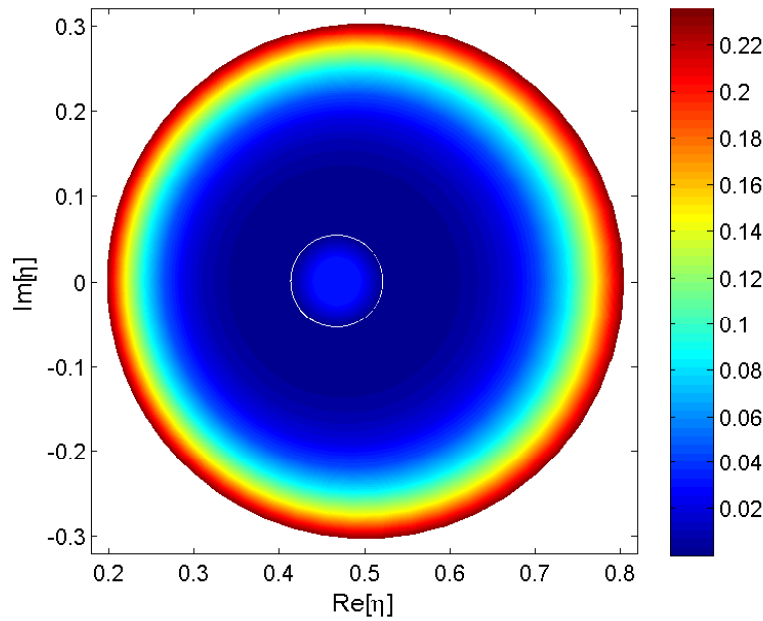


Figura 5.46: Caso B.II: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

O valor da razão  $F$  para Caso B.III é ilustrada na Figura 5.47, onde se observa uma redução expressiva, sobretudo, na região central da grade. Verifica-se que a região que apresenta os maiores valores de  $F$ , entre 0,08 e 0,13, está concentrada em uma estreita faixa na borda do contorno. Comparando este resultado com os observados nas Figuras 5.35 e 5.41 percebe-se novamente a relação de proporcionalidade entre o valor de  $F$  e o comportamento irregular

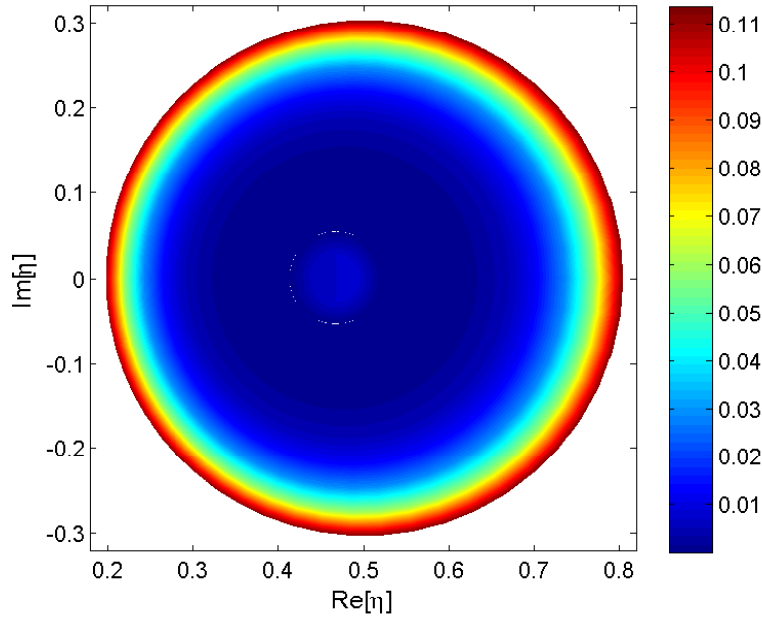


Figura 5.47: Caso B.III: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

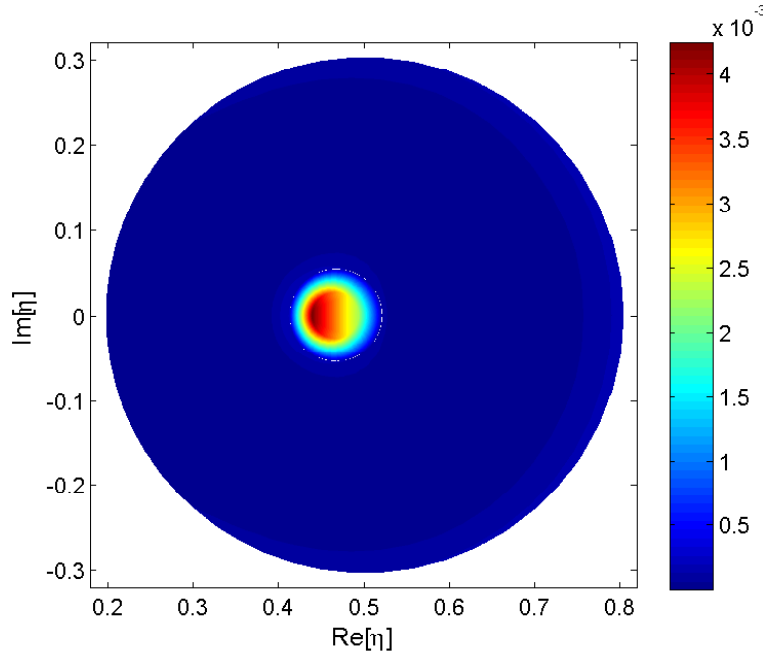


Figura 5.48: Caso B.IV: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

das direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$ .

A relação entre as derivadas referentes aos casos B.IV, B.V e B.VI são apresentadas nas Figuras 5.48, 5.49 e 5.50, respectivamente. Constata-se que o termo  $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2$  na equação de Monge-Ampère tem menor relevância ( $F < 0,01$  na maior parte do refletor) é, conseqüentemente, a simplificação decorrente do uso de superfícies quádricas é mais adequada. Para confirmar

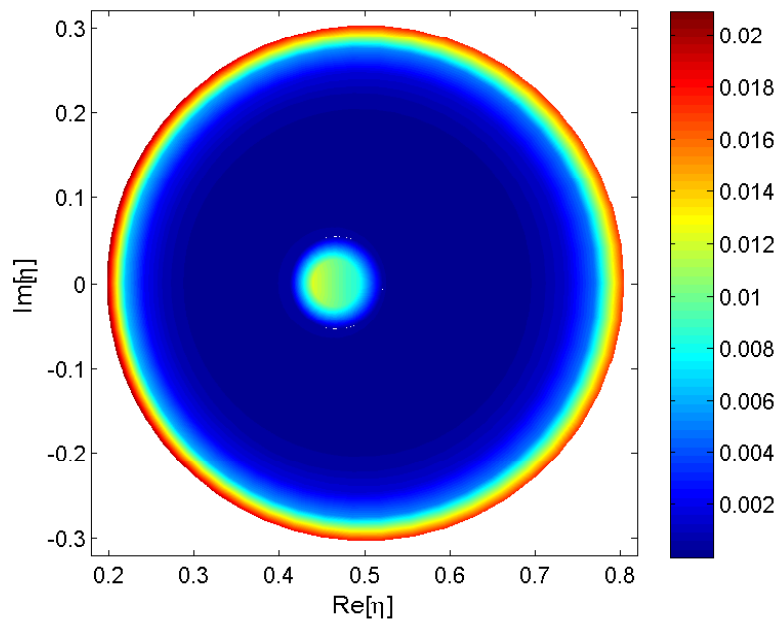


Figura 5.49: Caso B.V: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

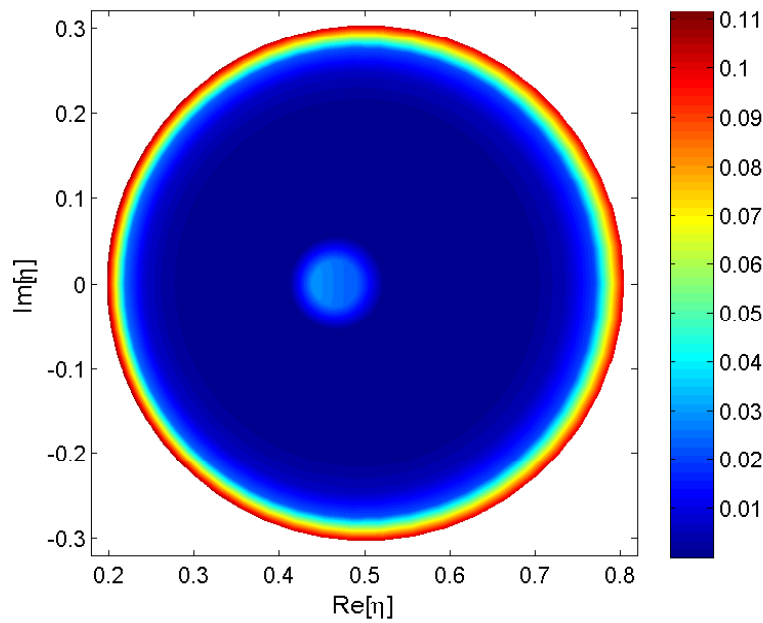


Figura 5.50: Caso B.VI: Relação entre as derivas na Equação de Monge-Ampère

isto, pode-se observar que nas análises das direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$  feitas para estes três casos (B.IV, B.V e B.VI) não apresentaram problemas.

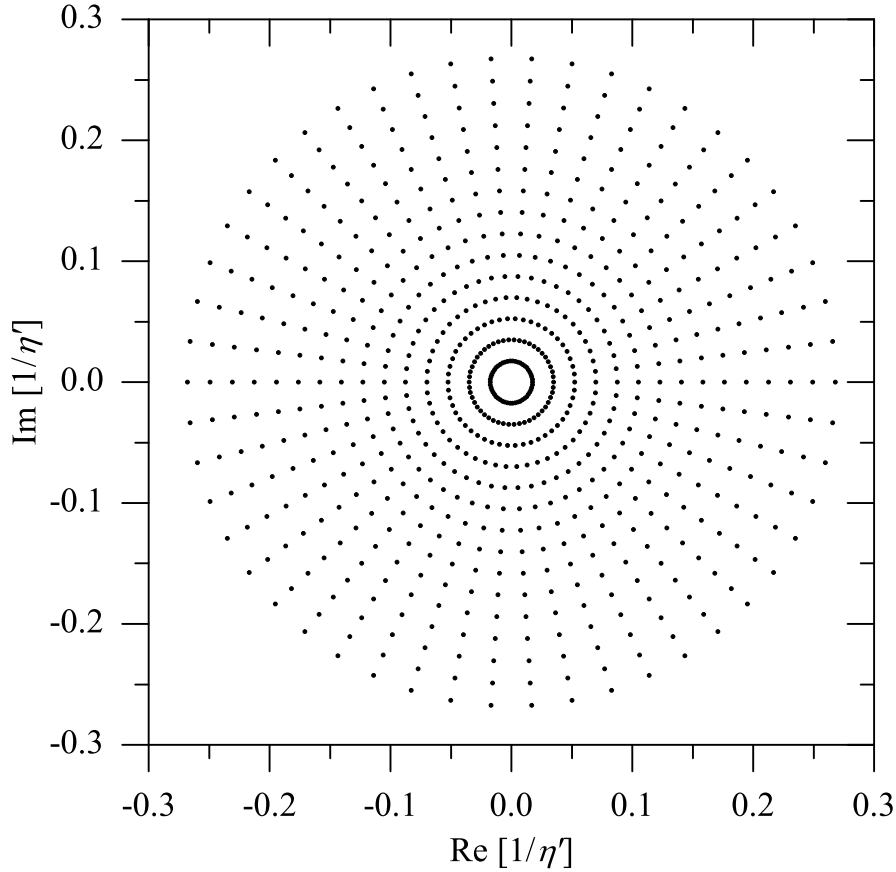


Figura 5.51: Direções de incidência da solução inicial no plano  $1/\eta'$

## 5.6

### Cobertura Gaussiana em Contorno Elíptico

Para avaliar o algoritmo de síntese em casos onde a convergência é ainda mais difícil, é inserido nesta seção outro grau de dificuldade modificando-se o contorno objetivo. Nos casos abordados na Seção 5.5 a dificuldade foi imposta apenas pela função objetivo, já que o contorno das soluções inicial e objetivo são circulares. Nesta seção uma antena refletora *offset* foi sintetizada para gerar um diagrama de radiação Gaussiano em um contorno elíptico. O alimentador é representado pelo modelo cosseno elevado com mesmos parâmetros dos casos A e B, ou seja, ângulo de borda  $\theta_c = 30^\circ$  e atenuação de borda  $L_I = -12\text{dB}$  provendo o expoente do cosseno  $n = 9,60$  e ângulo de *offset*  $\theta_o = 50^\circ$ . A Figura 5.51 apresenta a grade polar com as direções dos raios incidentes no plano complexo  $1/\eta'$  definida com 15 anéis ( $J = 15$ ) e 50 radiais ( $K = 50$ ).

No primeiro estudo de caso desta seção (Caso C.I) o contorno do campo distante é definido por uma elipse cujos eixos nos planos vertical ( $\zeta_u$ ) e horizontal ( $\zeta_v$ ) são definidos pelos ângulos  $\alpha_u = 8^\circ$  e  $\alpha_v = 10^\circ$ , respectivamente, e pelo ângulo de *offset* do feixe elíptico  $\alpha_o = -18^\circ$ . O



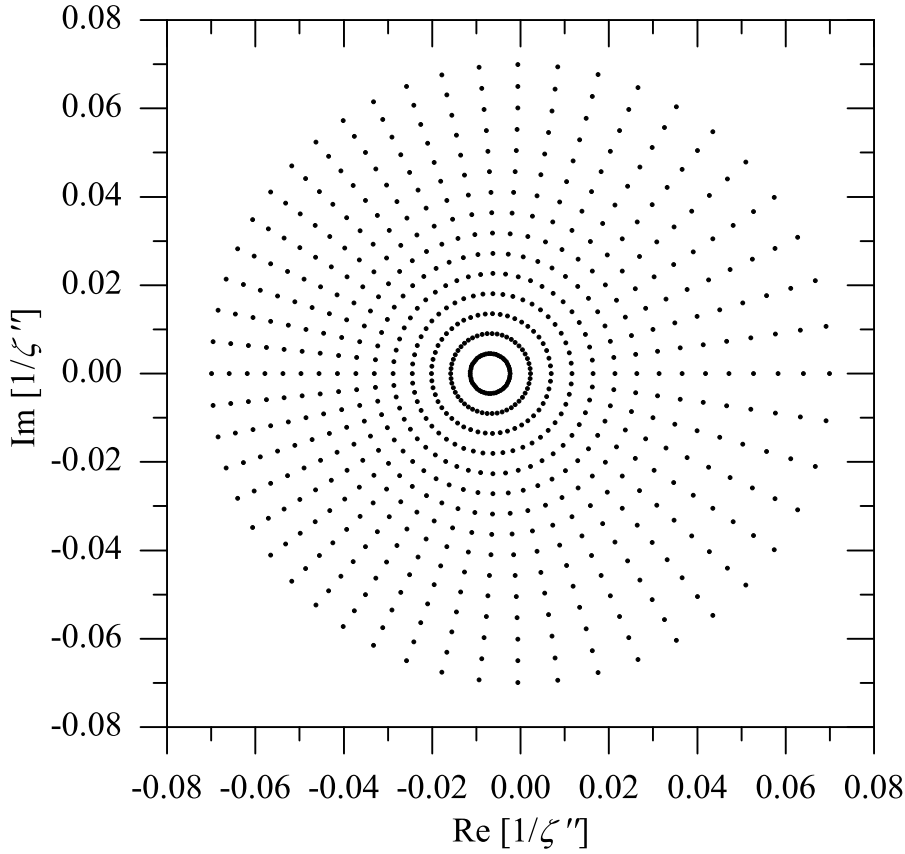


Figura 5.52: Caso C: Direções de reflexão da solução inicial no plano  $1/\zeta''$

diagrama de radiação objetivo é a função Gaussiana com contorno elíptico e atenuação de borda  $L_G = -6\text{dB}$  correspondendo ao expoente  $\psi = 1,38155$ . Utilizando os parâmetros definidos no parágrafo anterior e a formulação apresentada na Seção 3.4.2, determinou-se uma superfície quádrlica que foi adotada como solução inicial sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -1,462674$ ,  $b^{(0)} = -0,077795$ ,  $c^{(0)} = 0,0$  e  $d^{(0)} = 0,627081$  considerando  $r_o = 1$ . As direções dos raios refletidos pela superfície inicial são ilustradas na Figura 5.52 no plano complexo  $1/\zeta''$  e na Figura 5.53 o traçado de raios no plano  $zx$ .

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.54 onde está ilustrado o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ) e na Figura 5.55 as direções dos raios refletidos no plano complexo  $1/\zeta''$ . A superfície modelada foi dimensionada para ter 25cm de diâmetro. A validação da síntese é feita através de análise da superfície modelada via aproximações da PO mais correntes de borda. A análise foi feita considerando que a antena esteja operando em 28GHz, 38GHz e 60GHz e, conseqüentemente, com diâmetros de  $23,33\lambda$ ,  $31,66\lambda$  e  $50\lambda$ .

A Figura 5.56 apresenta os diagramas de radiação no plano de simetria dados pela PO, o diagrama especificado e os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Analisando o

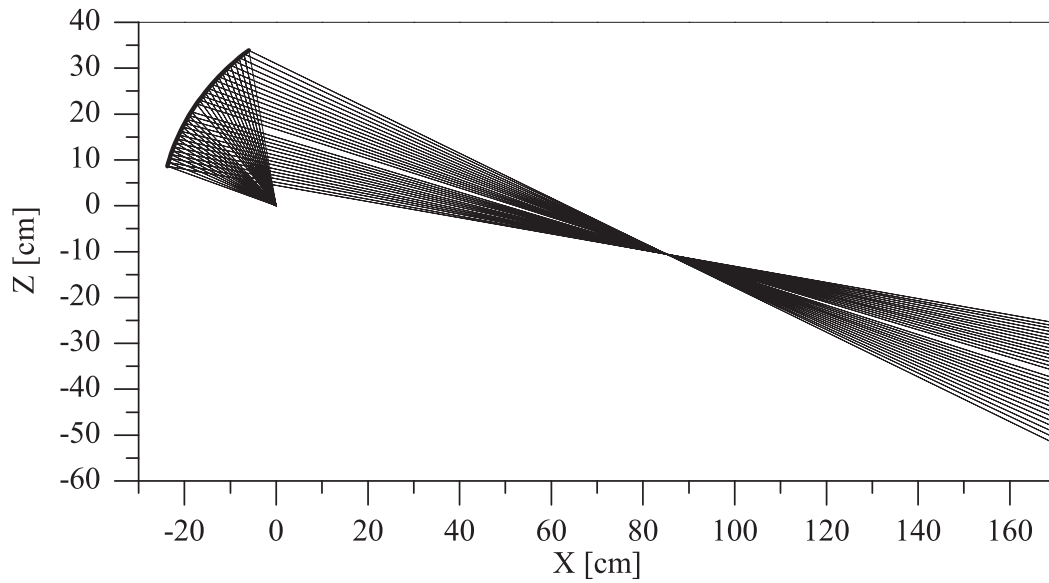


Figura 5.53: Caso C: Traçado de raios na solução inicial no plano de simetria

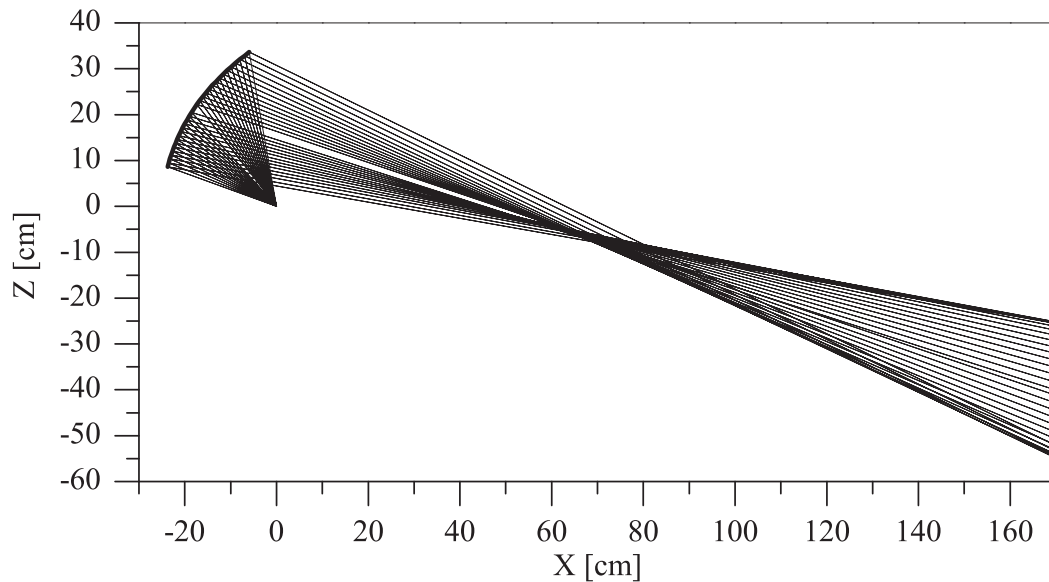


Figura 5.54: Caso C.I: Traçado de raios no plano de simetria

diagrama pode-se notar que há boa concordância entre o diagrama projetado e o obtido nas direções centrais do lóbulo principal. Nas direções próximas aos limites objetivo da GO verifica-se que as diferenças em relação ao diagrama projetado são maiores, repetindo um comportamento observado nos casos anteriores. Nas Figuras 5.57, 5.58, 5.59 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ . Nota-se que a energia refletida fica concentrada na região elíptica definida pelo contorno. Para as frequências 28GHz e 38GHz esse comportamento já é bastante claro, entretanto, fica ainda mais evidente para 60GHz, onde as dimensões elétricas da antena são maiores e, conseqüentemente, os efeitos difrativos são menos relevantes.

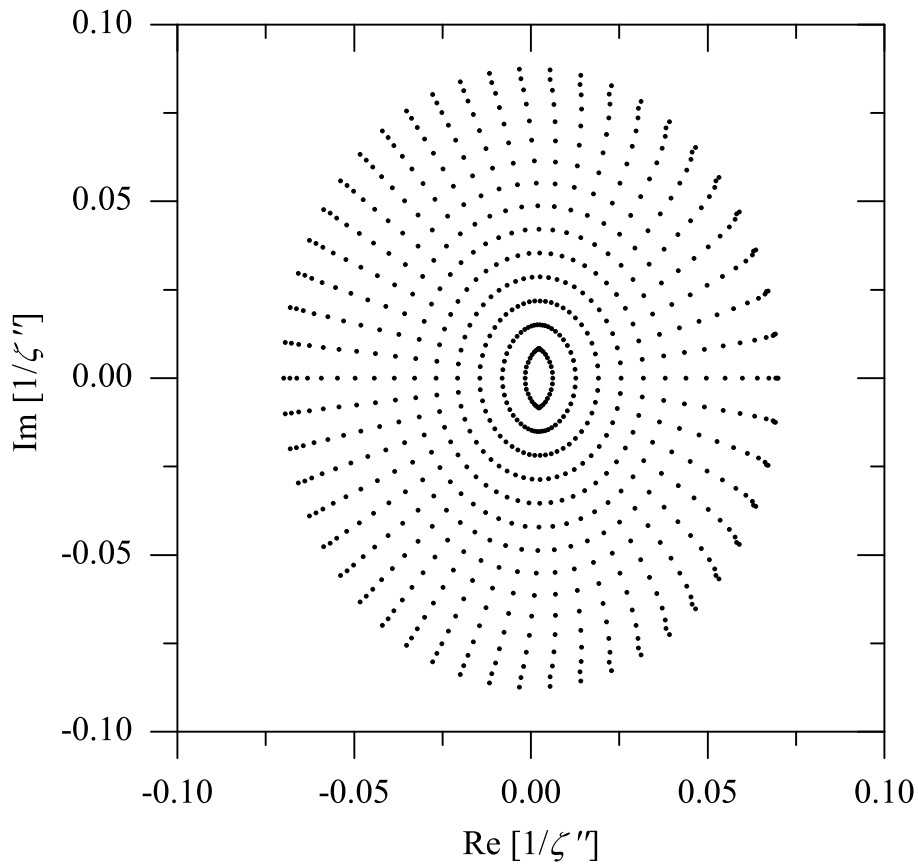


Figura 5.55: Caso C.I: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

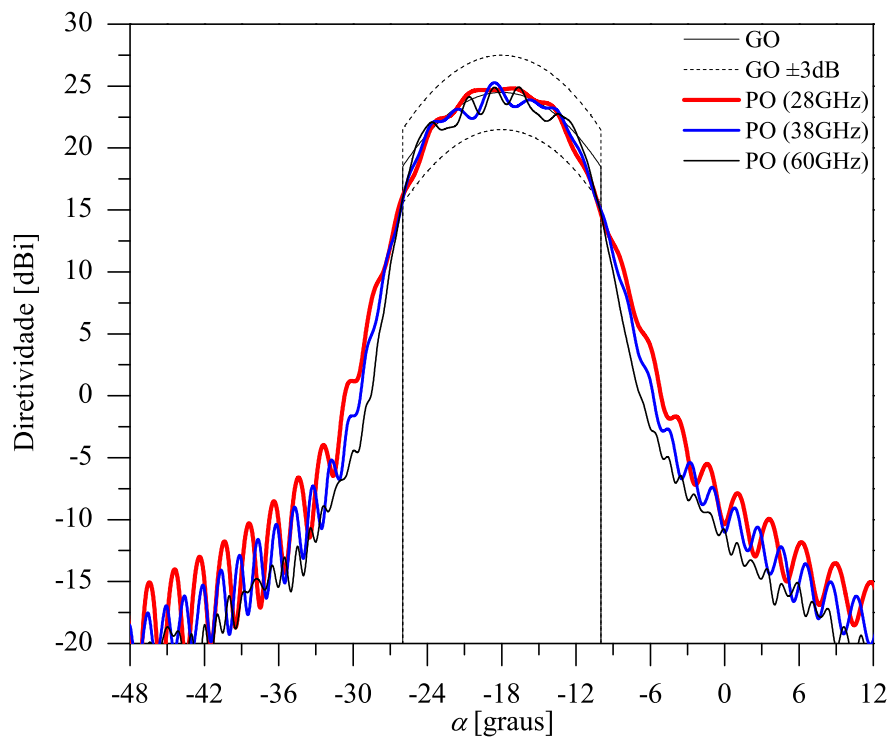
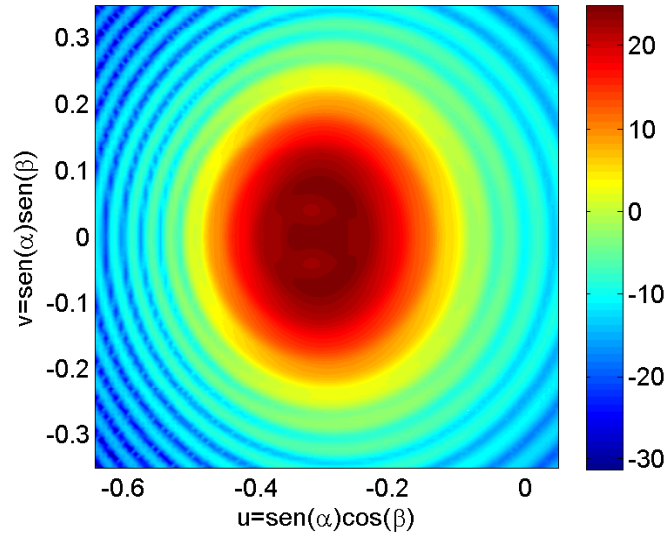
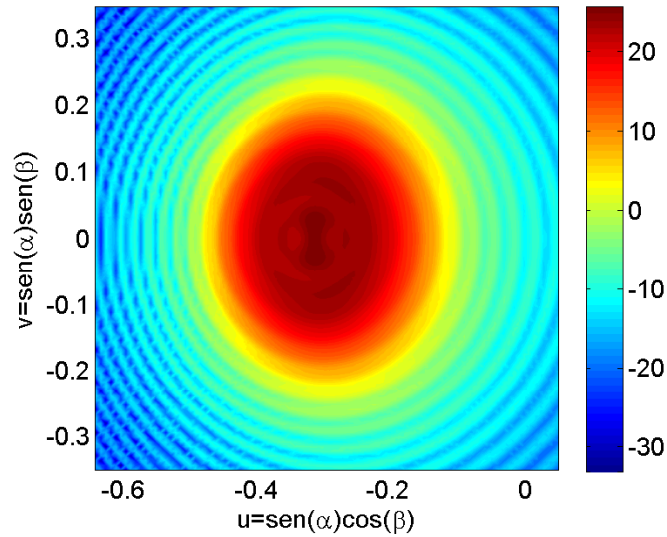
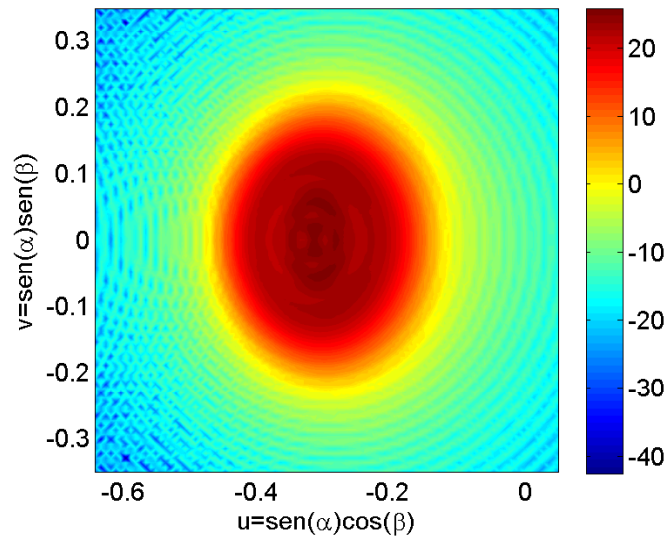


Figura 5.56: Caso C.I: Diagrama de radiação da plano de simetria

Figura 5.57: Caso C.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHzFigura 5.58: Caso C.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHzFigura 5.59: Caso C.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

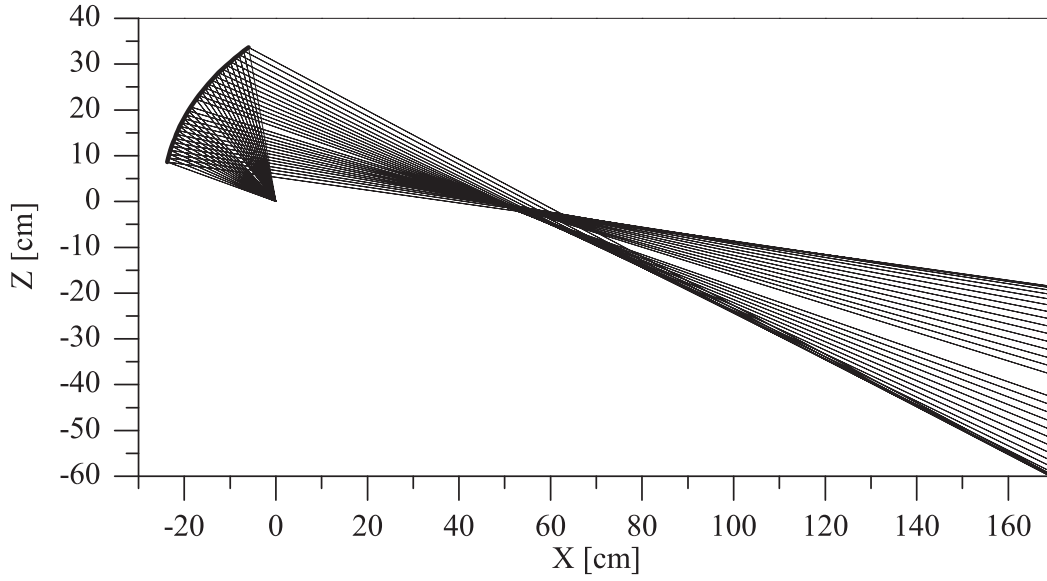


Figura 5.60: Caso C.II: Traçado de raios no plano de simetria

No segundo estudo de caso desta seção (Caso C.II) o contorno do campo distante também é definido por uma elipse, porém, eixos nos planos vertical ( $\zeta_u$ ) e horizontal ( $\zeta_v$ ) são definidos pelos ângulos  $\alpha_u = 10^\circ$  e  $\alpha_v = 8^\circ$ , respectivamente, e pelo ângulo de *offset* do feixe elíptico  $\alpha_o = -18^\circ$ . Esta é basicamente a mesma configuração do exemplo anterior, mas invertendo a posição do eixo maior da elipse. O diagrama de radiação objetivo é a função Gaussiana com contorno elíptico e atenuação de borda  $L_G = -6\text{dB}$ . Utilizando os parâmetros definidos no parágrafo anterior e a formulação apresentada na Seção 3.4.2 determinou-se uma superfície quádrlica que foi adotada como solução inicial sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -1,389515$ ,  $b^{(0)} = -0,0334267$ ,  $c^{(0)} = 0,0$  e  $d^{(0)} = 0.566142$  considerando  $r_o = 1$ .

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.60 onde está ilustrado o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ) e na Figura 5.61 as direções dos raios refletidos no plano complexo  $1/\zeta''$ . A superfície modelada foi dimensionada para ter 25cm de diâmetro. A validação da síntese é feita através de análise da superfície modelada via aproximações da PO mais correntes de borda. A análise foi feita considerando que a antena esteja operando em 28GHz, 38GHz e 60GHz. A Figura 5.62 apresenta os diagramas de radiação no plano de simetria dados pela PO com correntes de borda. Assim como no caso anterior há boa convergência entre o diagrama de radiação projetado e o obtido. Nas Figuras 5.63, 5.64, 5.65 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ , onde nota-se que a energia refletida fica concentrada na região elíptica definida pelo contorno, sobretudo para 60GHz onde as dimensões elétricas da antena são maiores e, conseqüentemente, os efeitos difrativos são menos relevantes.

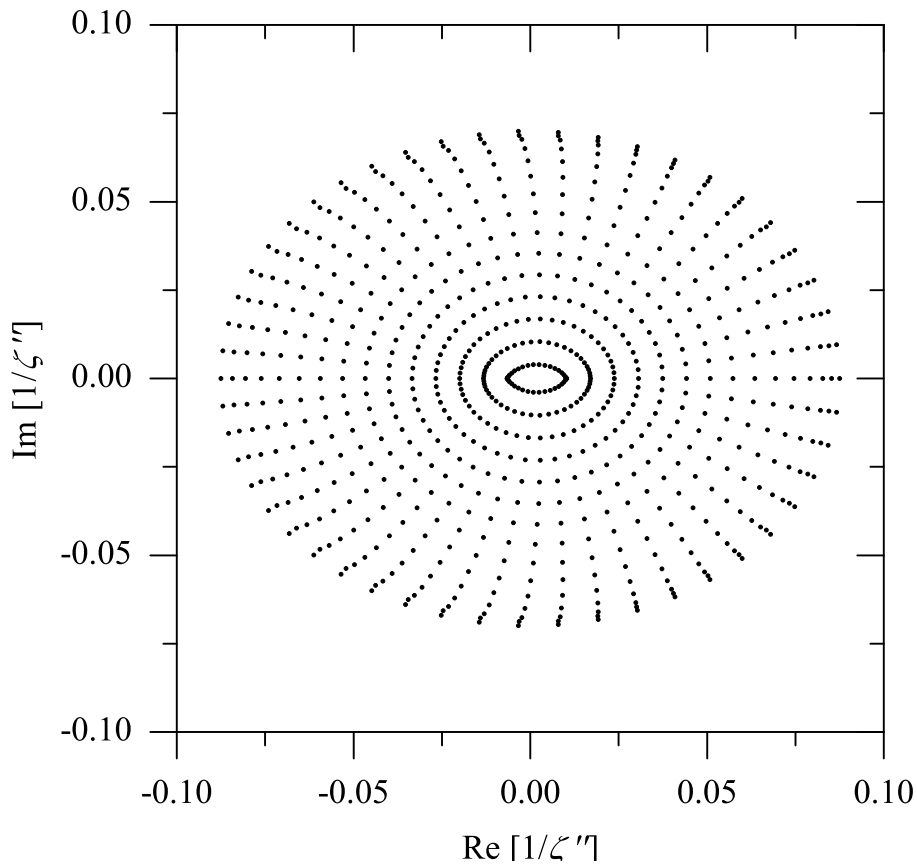


Figura 5.61: Caso C.II: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

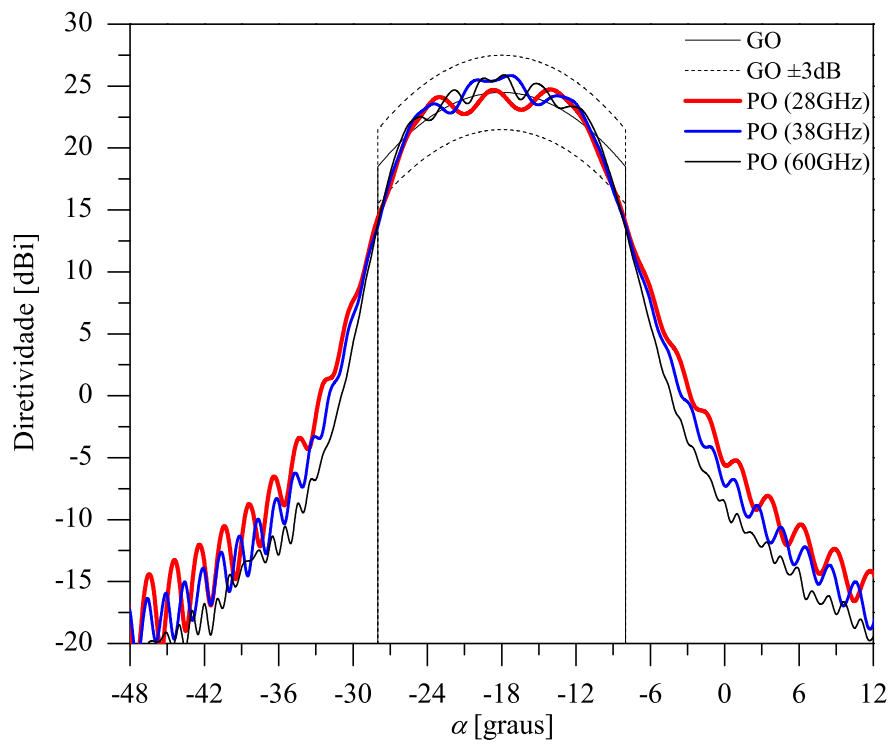
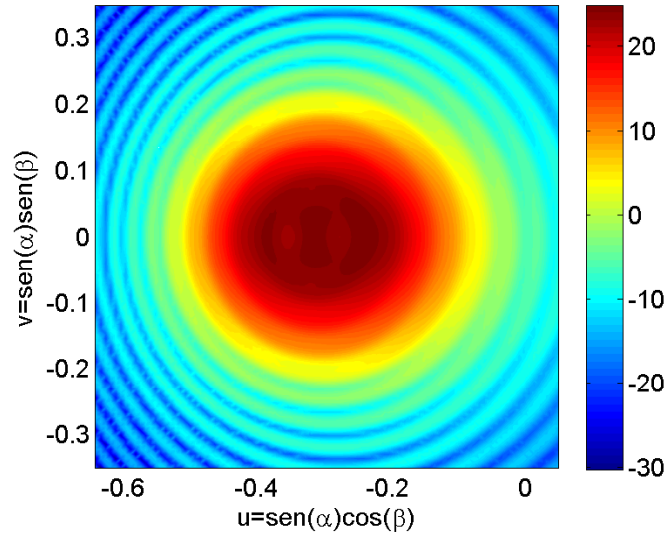
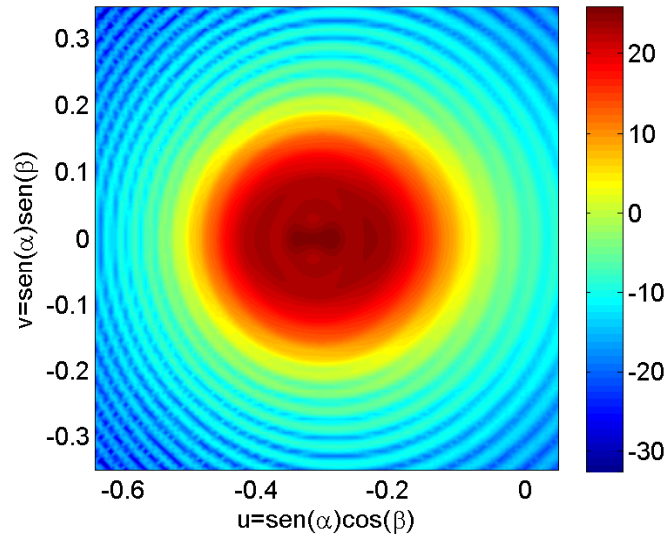
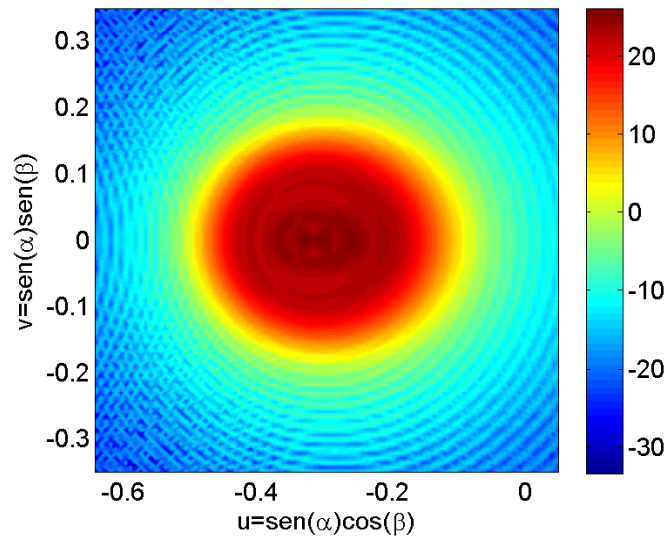


Figura 5.62: Caso C.II: Diagrama de radiação da plano de simetria

Figura 5.63: Caso C.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHzFigura 5.64: Caso C.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHzFigura 5.65: Caso C.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

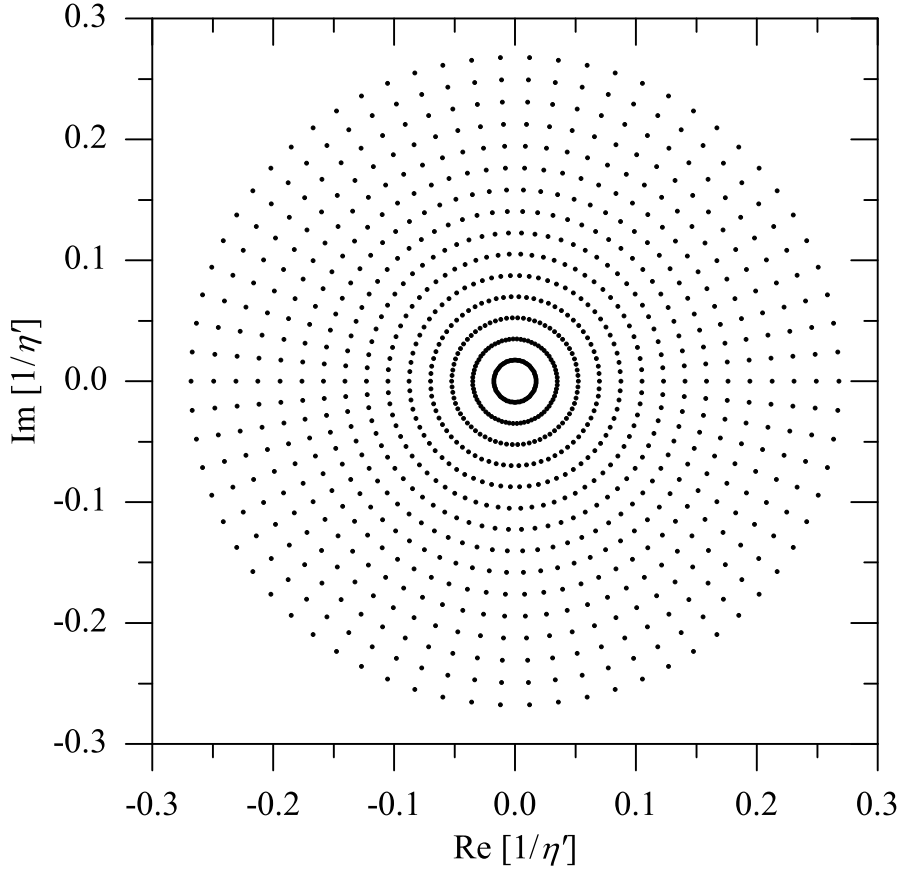


Figura 5.66: Caso D: Direções de incidência da solução inicial no plano  $1/\eta'$

## 5.7

### Cobertura Gaussiana em Contorno Super-Elíptico

Assim como na Seção 5.6 deseja-se avaliar o algoritmo de síntese em situações onde o contorno não é circular e, conseqüentemente, a convergência é mais difícil. Nesta última seção as antenas refletoras *offset* serão sintetizada para prover diagramas de radiação gaussianos em um contornos super-elípticos. Novamente, o diagrama de radiação do alimentador é o modelo cosseno elevado e os mesmos parâmetros dos casos anteriores: ângulo de borda  $\theta_c = 30^\circ$  e atenuação de borda  $L_I = -12\text{dB}$  ( $n = 9, 60$ ). A Figura 5.66 apresenta a grade polar com as direções dos raios provenientes do alimentador no plano complexo  $1/\eta'$  definida com 15 anéis ( $J = 15$ ) e 70 radiais ( $K = 70$ ).

Neste estudo de caso (Caso D.I) o contorno do campo distante foi definido por uma super-elipse cujos semi-eixos nos planos vertical ( $\zeta_u$ ) e horizontal ( $\zeta_v$ ) são definidos pelos ângulos  $\alpha_u = 8^\circ$ ,  $\alpha_v = 8^\circ$ ,  $\sigma = 1,5$  e pelo ângulo de *offset* do feixe super-elíptico  $\alpha_o = -18^\circ$ . O diagrama de radiação objetivo é a função Gaussiana com contorno super-elíptico e atenuação de borda  $L_G = -6\text{dB}$  correspondendo ao expoente  $\psi = 1,38155$ .



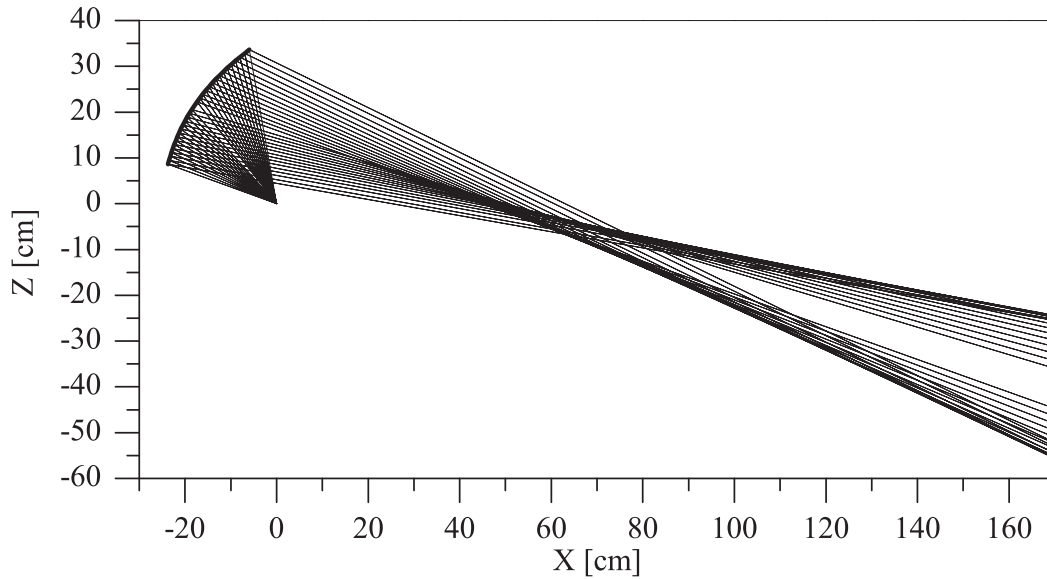


Figura 5.67: Caso D.I: Traçado de raios no plano de simetria

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.67 onde está ilustrado o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ) e na Figura 5.68 as direções dos raios refletidos no plano complexo  $1/\zeta''$ . Analisando o traçado de raios, fica claro o deslocamento da energia refletida para as regiões próximas à borda e na região central um afastamento maior. Neste caso, a conservação da energia executa a redistribuição da energia em amplitude e também no contorno. Observando a Figura 5.68 constata-se que a distância entre os anéis diminui a medida que se aproxima da borda. Nos contornos super-elípticos o deslocamento da energia da parte central para as bordas é maior que no caso circular, como pode ser verificado comparando o primeiro anel dos casos A e D.I. Ao impor uma modificação no contorno, parte considerável da energia foi deslocada para as regiões  $\phi'' = \pm 45^\circ$ ,  $\phi'' = \pm 135^\circ$ , definindo as bordas da super-elipse.

Após a síntese, a superfície modelada foi dimensionada para ter 25cm de diâmetro, interpolada e analisada através da PO considerando as frequências de operação 28GHz, 38GHz e 60GHz. Os resultados da análise são apresentados na Figura 5.69 onde está exposto os diagramas de radiação no plano de simetria juntamente com o diagrama objetivo da GO os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Verifica-se que há boa convergência entre o diagrama de radiação projetado e o obtido, sobretudo na parte central do setor objetivo. Nas Figuras 5.70, 5.71, 5.72 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ , onde nota-se que a energia refletida fica concentrada na região super-elíptica definida pelo contorno. Em 60GHz, as dimensões elétricas da antena são maiores, os efeitos difrativos são menos relevantes e a definição do contorno fica mais clara.

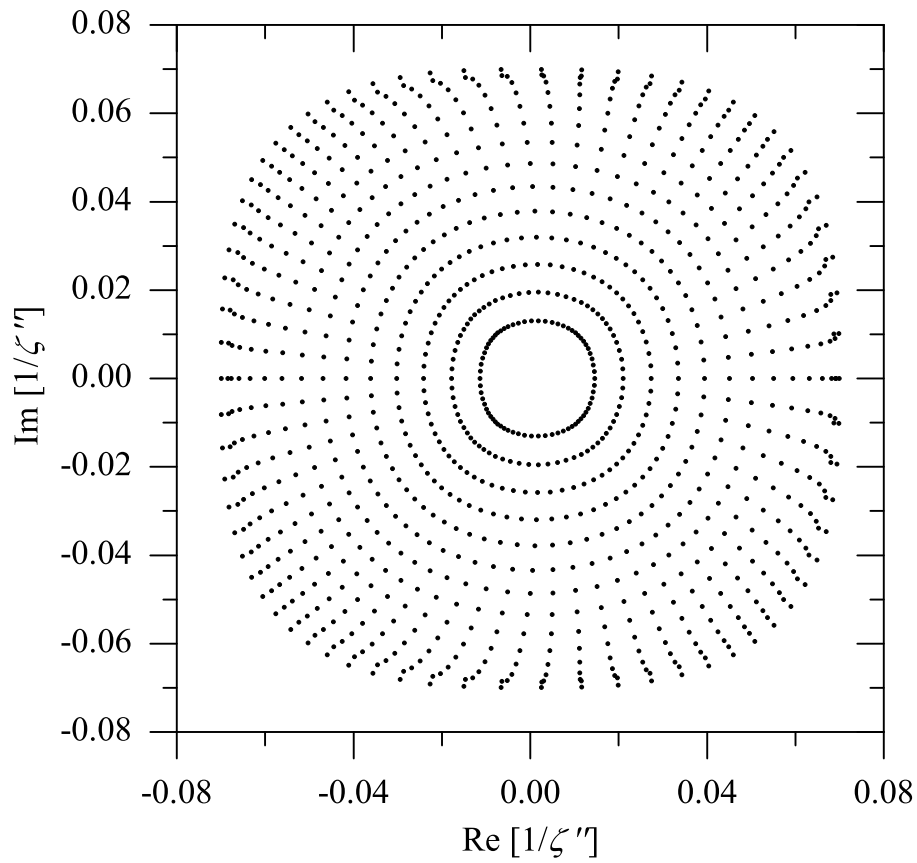


Figura 5.68: Caso D.I: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

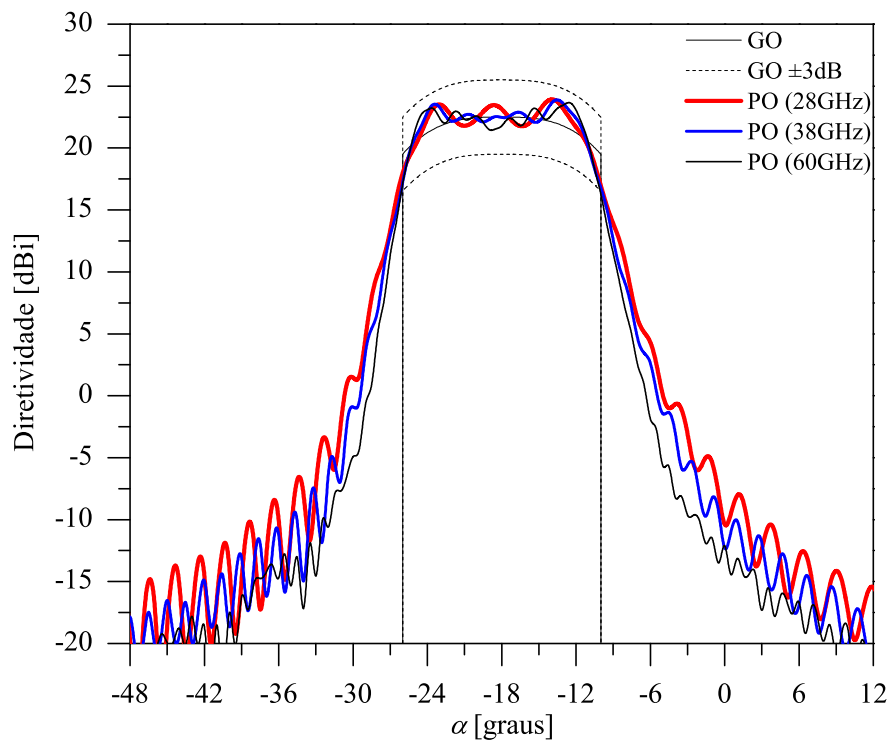


Figura 5.69: Caso D.I: Diagrama de radiação da plano de simetria

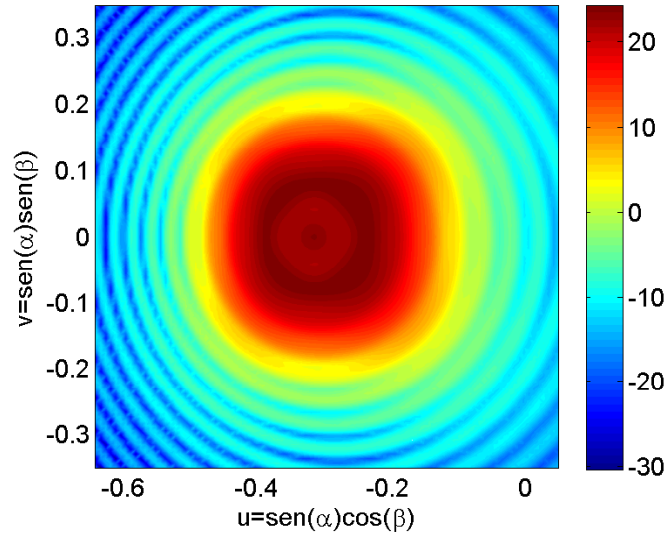


Figura 5.70: Caso D.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHz

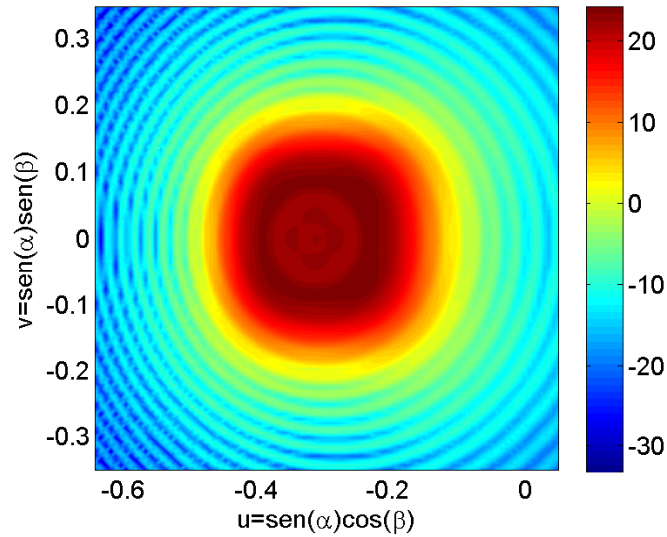


Figura 5.71: Caso D.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHz

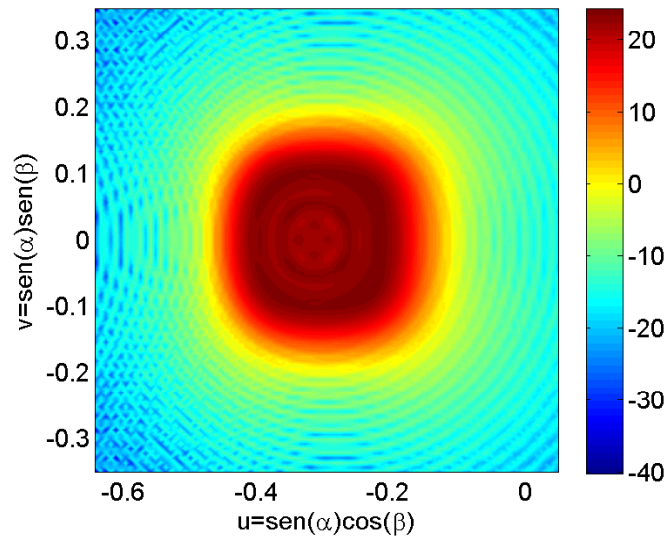


Figura 5.72: Caso D.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

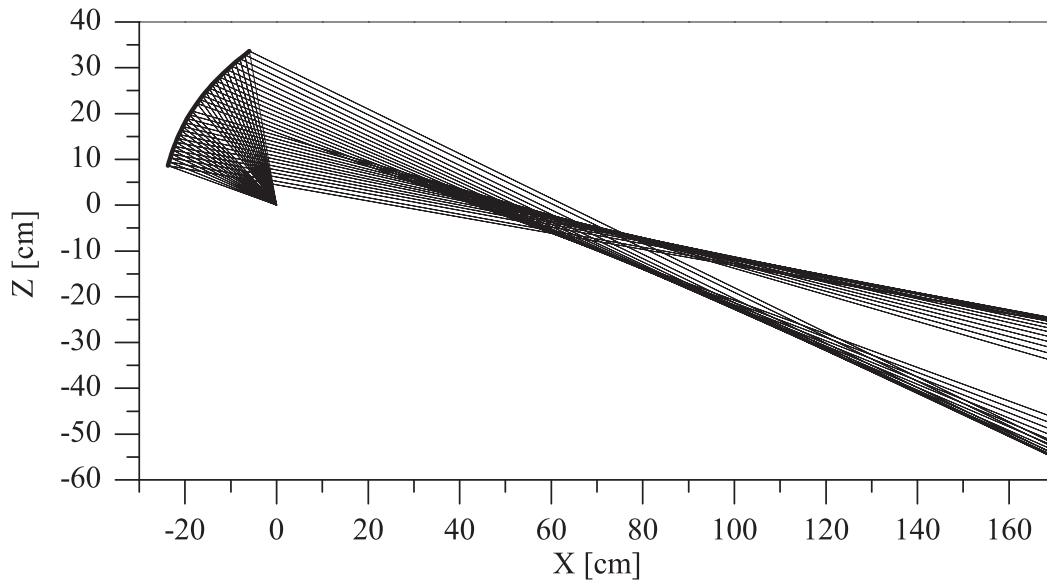


Figura 5.73: Caso D.II: Traçado de raios no plano de simetria

No segundo estudo (Caso D.II) o contorno do campo distante foi novamente definido por uma super-elipse com os mesmo parâmetros do Caso C.I, porém com  $\sigma = 2, 2$ . O objetivo deste exemplo é verificar o comportamento do algoritmo em um caso onde a convergência é ainda mais difícil. Para iniciar o processo iterativo de síntese foi utilizada a mesma solução inicial definida no caso Caso C.I. Analisando o traçado de raios na Figura 5.73, nota-se que o deslocamento da energia refletida para as regiões próximas à borda foi maior que no Caso C.I, assim como o afastamento do primeiro anel na região central. Observando a Figura 5.74 percebe-se que a distância entre os anéis tem o mesmo comportamento do Caso C.I, entretanto, o afastamento no primeiro anel é maior. Isso ocorre porque parte da energia foi deslocada para as regiões  $\phi'' = \pm 45^\circ$ ,  $\phi'' = \pm 135^\circ$ , definindo as bordas da super-elipse.

A análise da síntese foi realizada através da PO considerando as frequências de operação 28GHz, 38GHz e 60GHz e o refletor modelado com diâmetro com 25cm. Os resultados são apresentados na Figura 5.75 onde está exposto os diagramas de radiação no plano de simetria juntamente com o diagrama objetivo da GO os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Verifica-se excelente convergência entre o diagrama de radiação projetado e o obtido através da análise da PO, mesmo nos extremos da região objetivo da GO onde o controle sobre diagrama é menor. Nas Figuras 5.76, 5.77, 5.78 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ , onde nota-se que a energia refletida fica concentrada na região super-elíptica definida pelo contorno. Em 60GHz, as dimensões elétricas da antena são maiores, os efeitos difrativos são menos relevantes e a definição do contorno fica mais clara.

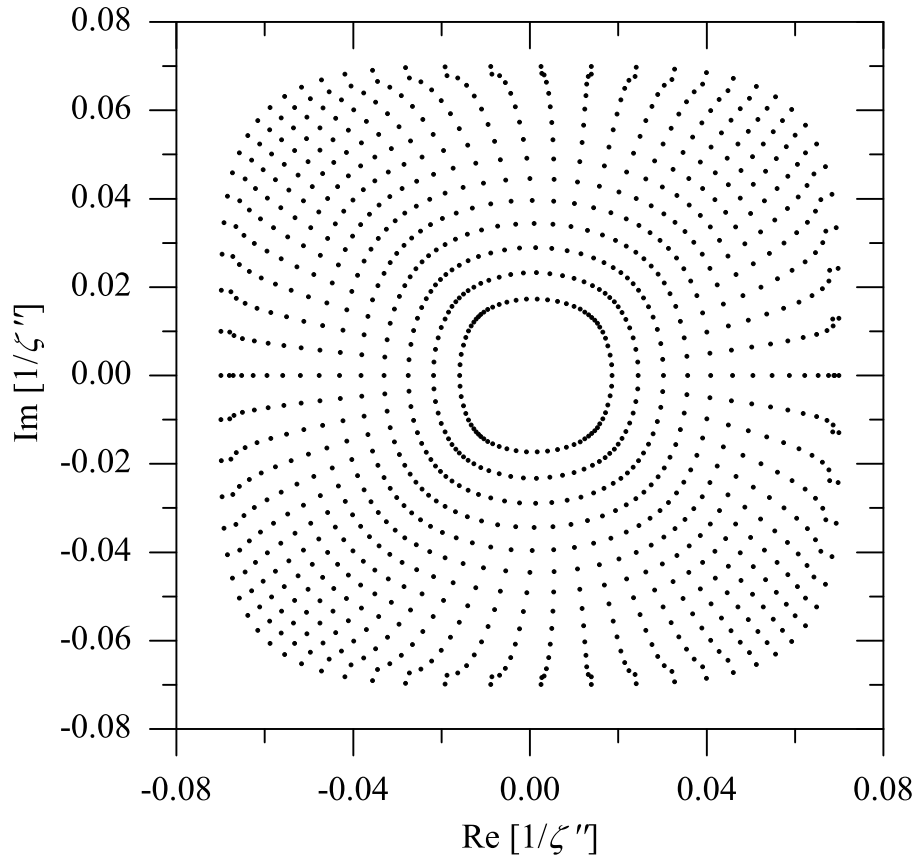


Figura 5.74: Caso D.II: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

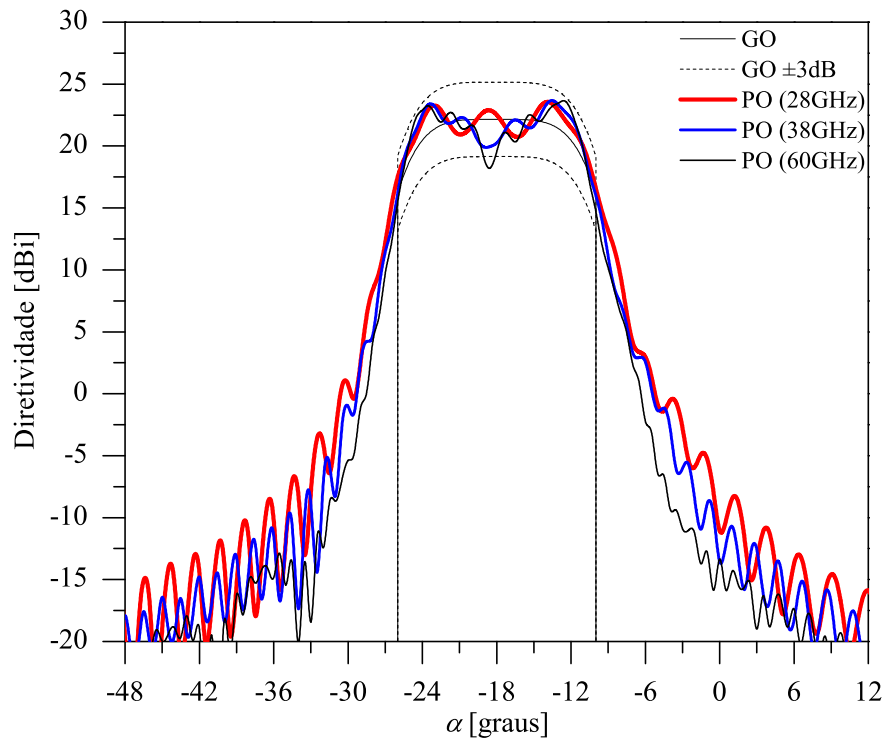
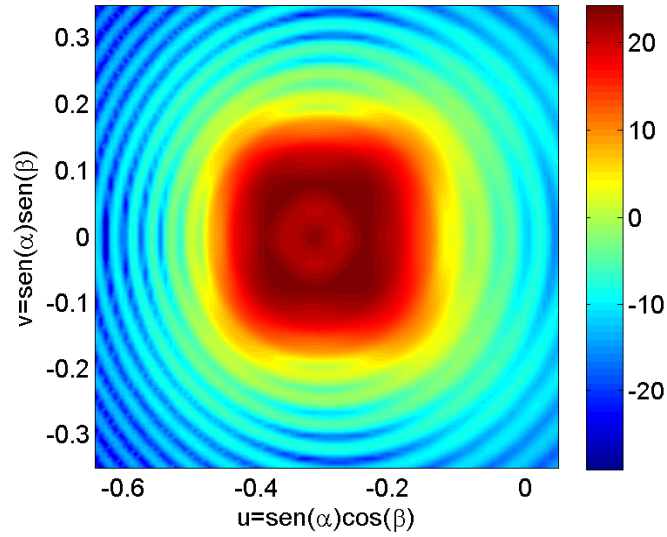
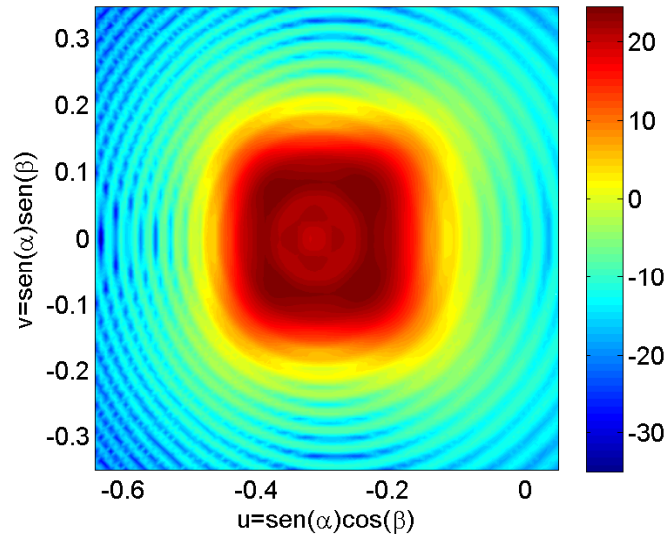
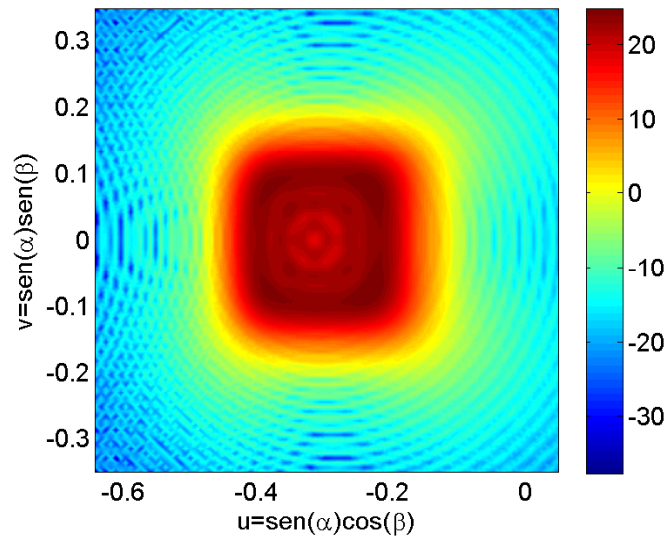


Figura 5.75: Caso D.II: Diagrama de radiação da plano de simetria

Figura 5.76: Caso D.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHzFigura 5.77: Caso D.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHzFigura 5.78: Caso D.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

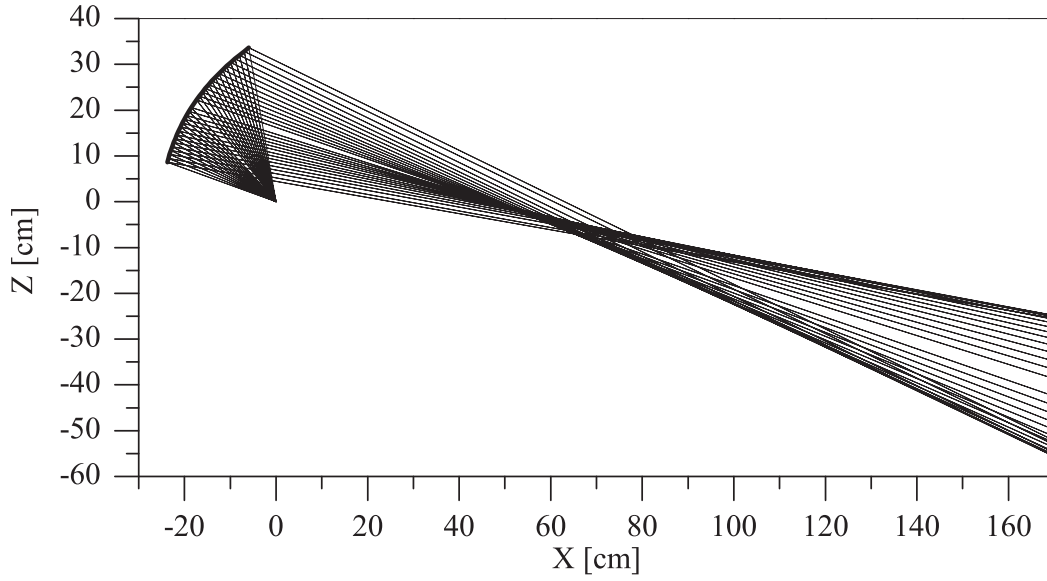


Figura 5.79: Caso E.I: Traçado de raios no plano de simetria

No próximo projeto analisado (Casos E.I) o contorno do campo distante foi definido por uma super-elipse cujos semi-eixos nos planos vertical ( $\zeta_u$ ) e horizontal ( $\zeta_v$ ) são definidos pelos ângulos  $\alpha_u = 8^\circ$ ,  $\alpha_v = 12^\circ$ , respectivamente,  $\sigma = 1.6$  e ângulo de *offset* do feixe super-elíptico  $\alpha_o = -18^\circ$ . O diagrama de radiação objetivo é a função Gaussiana com contorno super-elíptico e atenuação de borda  $L_G = -6\text{dB}$  correspondendo ao expoente  $\psi = 1,38155$ . Para iniciar o processo iterativo foi adotada a quádrlica dos casos D.I e D.II.

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.79 onde está ilustrado o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ) e na Figura 5.80 as direções dos raios refletidos no plano complexo  $1/\zeta''$ . Do traçado de raios na Figura 5.79, fica claro o deslocamento da energia refletida para as regiões próximas à borda e da Figura 5.80 constata-se que a distância entre os anéis diminui a medida que se aproxima da borda definindo um contorno super-elíptico similar à um retângulo.

A análise através da PO considerou a antena operando em 28GHz, 38GHz e 60GHz e o refletor modelado com diâmetro com 25cm. Os resultados são apresentados na Figura 5.81 onde está exposto os diagramas de radiação no plano de simetria e a função objetivo da GO com os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Verifica-se excelente convergência entre o diagrama de radiação projetado e o obtido através da PO. Nas Figuras 5.82, 5.83, 5.84 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ , onde nota-se que a energia refletida fica concentrada na região super-elíptica definida pelo contorno. Em 60GHz, as dimensões elétricas da antena são maiores, os efeitos difrativos são menos relevantes e a definição do contorno fica mais clara.



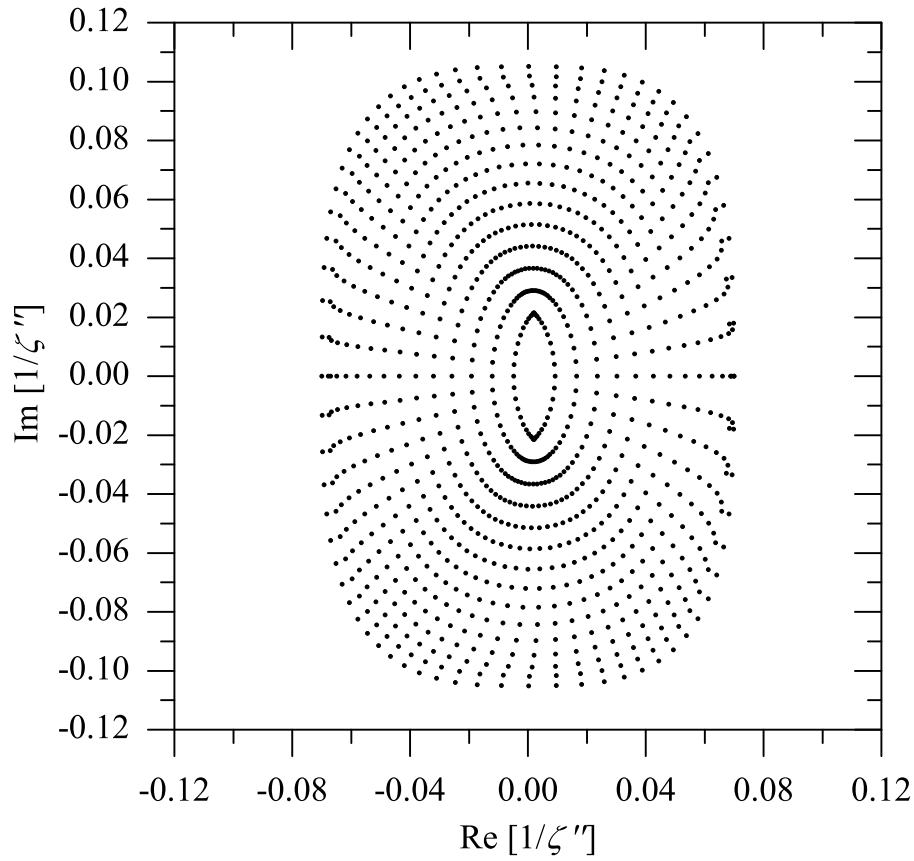


Figura 5.80: Caso E.I: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

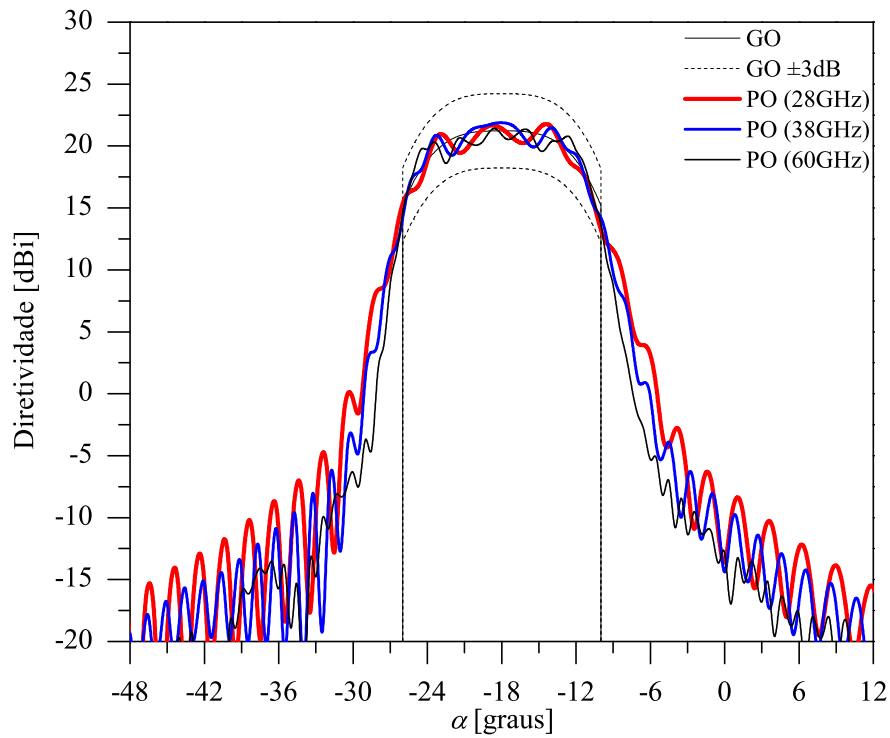


Figura 5.81: Caso E.I: Diagrama de radiação da plano de simetria



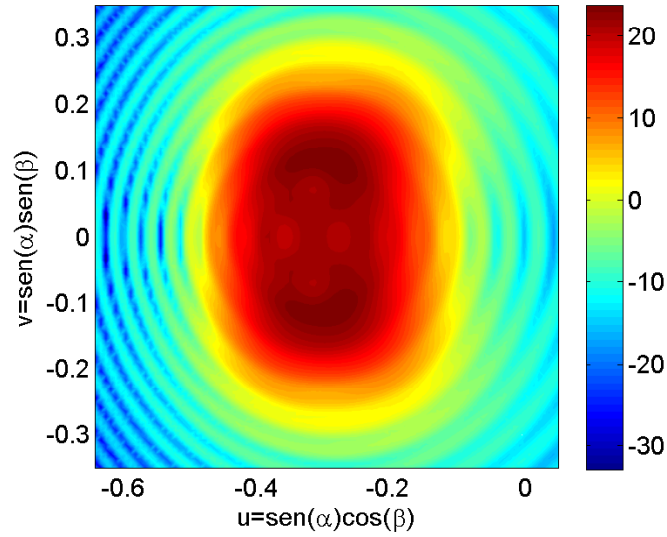


Figura 5.82: Caso E.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHz

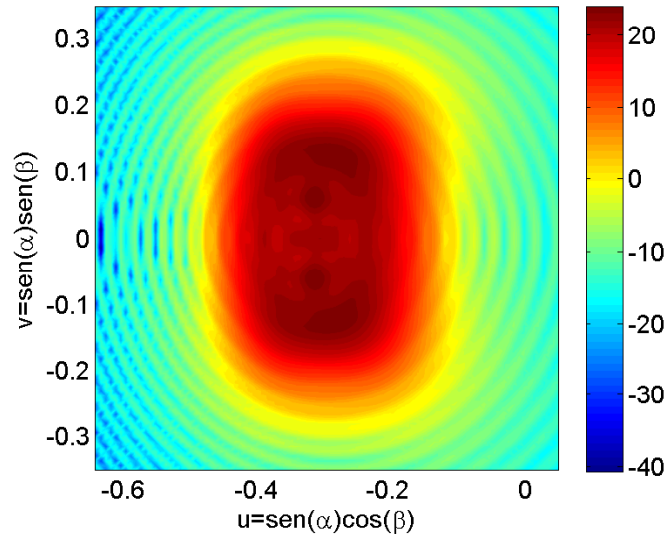


Figura 5.83: Caso E.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHz

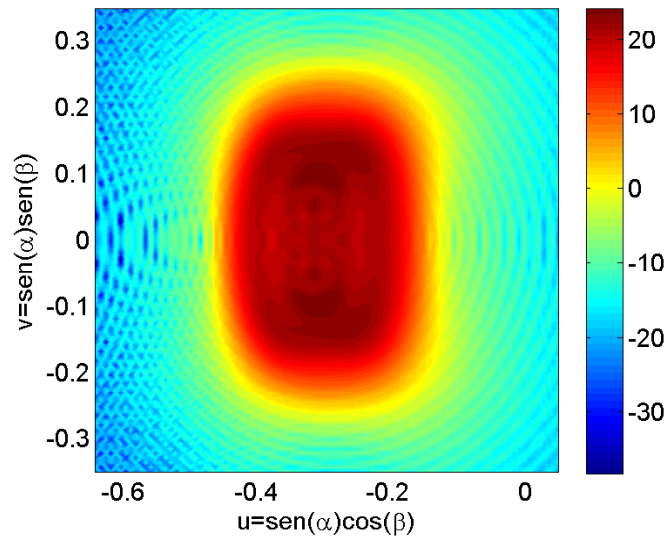


Figura 5.84: Caso E.I: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

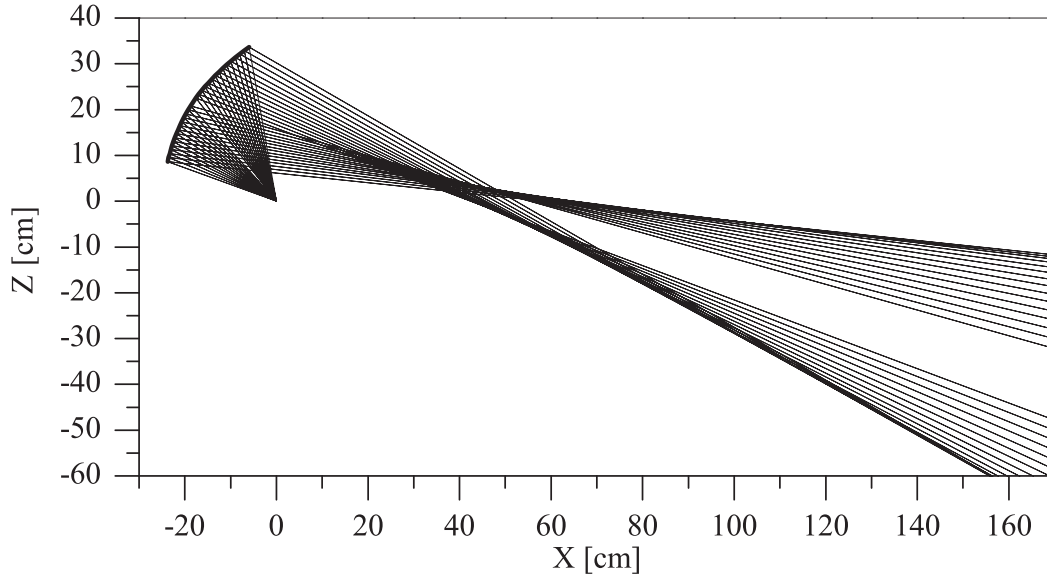


Figura 5.85: Caso E.II: Traçado de raios no plano de simetria

Neste último estudo de caso (Casos E.II) tem-se basicamente os mesmos parâmetros do Caso E.I porém com inversão dos eixos da super-elipse, logo os semi-eixos nos planos vertical ( $\zeta_u$ ) e horizontal ( $\zeta_v$ ) são os ângulos  $\alpha_u = 12^\circ$ ,  $\alpha_v = 8^\circ$ , respectivamente,  $\sigma = 1.6$  e ângulo de *offset* do feixe super-elíptico  $\alpha_o = -18^\circ$ . O diagrama de radiação objetivo é novamente uma função Gaussiana com contorno super-elíptico e atenuação de borda  $L_G = -6\text{dB}$ . Para iniciar o processo iterativo foi adotada a quádrica dos casos D.I e D.II.

O resultado da síntese é apresentado na Figura 5.85 onde está ilustrado o traçado de raios no plano de simetria ( $\phi = 0$ ) e na Figura 5.86 as direções dos raios refletidos no plano complexo  $1/\zeta''$ . Do traçado de raios na Figura 5.85, fica claro o deslocamento da energia refletida para as regiões próximas à borda e da Figura 5.86 constata-se que a distância entre os anéis diminui à medida que se aproxima da borda definindo um contorno super-elíptico similar à um retângulo.

A análise através da PO considerou a antena operando em operação 28GHz, 38GHz e 60GHz e o refletor modelado com diâmetro com 25cm. Os resultados são apresentados na Figura 5.87 onde está exposto os diagramas de radiação no plano de simetria são apresentados na juntamente com o diagrama objetivo da GO os limites de  $\pm 3\text{dB}$ . Verifica-se excelente convergência entre o diagrama de radiação projetado e o obtido através da PO. Nas Figuras 5.88, 5.89, 5.90 são apresentados os diagramas no plano  $uv$ , onde nota-se que a energia refletida fica concentrada na região super-elíptica definida pelo contorno. Em 60GHz, as dimensões elétricas da antena são maiores, os efeitos difrativos são menos relevantes e a definição do contorno fica mais clara.

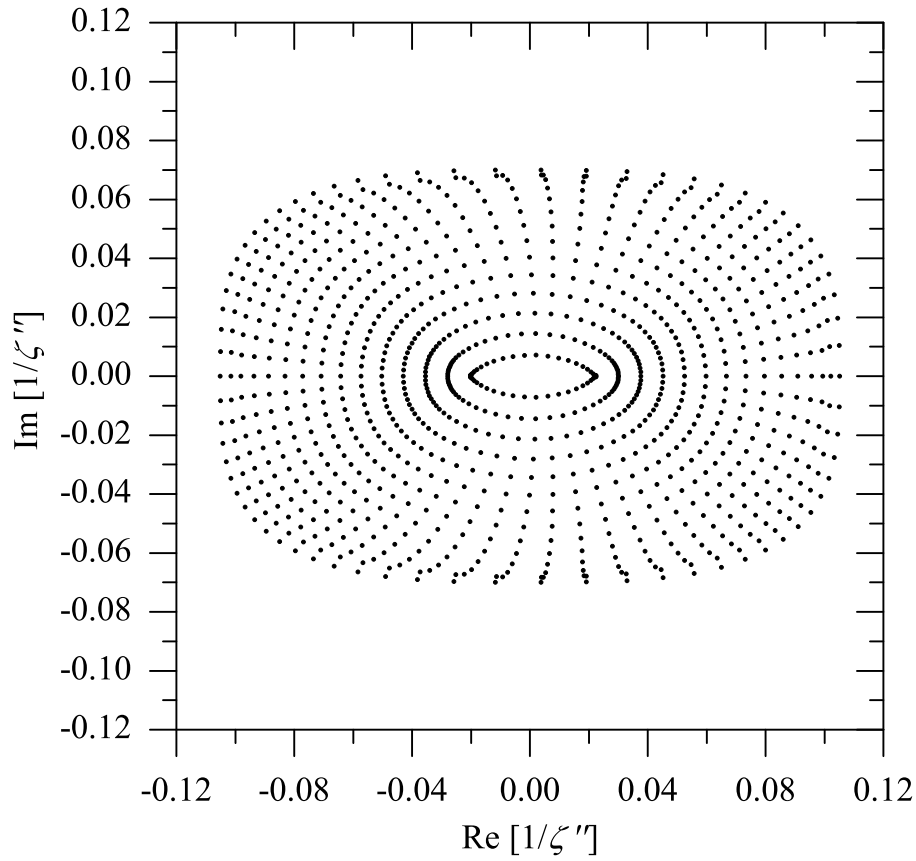


Figura 5.86: Caso E.II: Direções de reflexão no plano  $1/\zeta''$

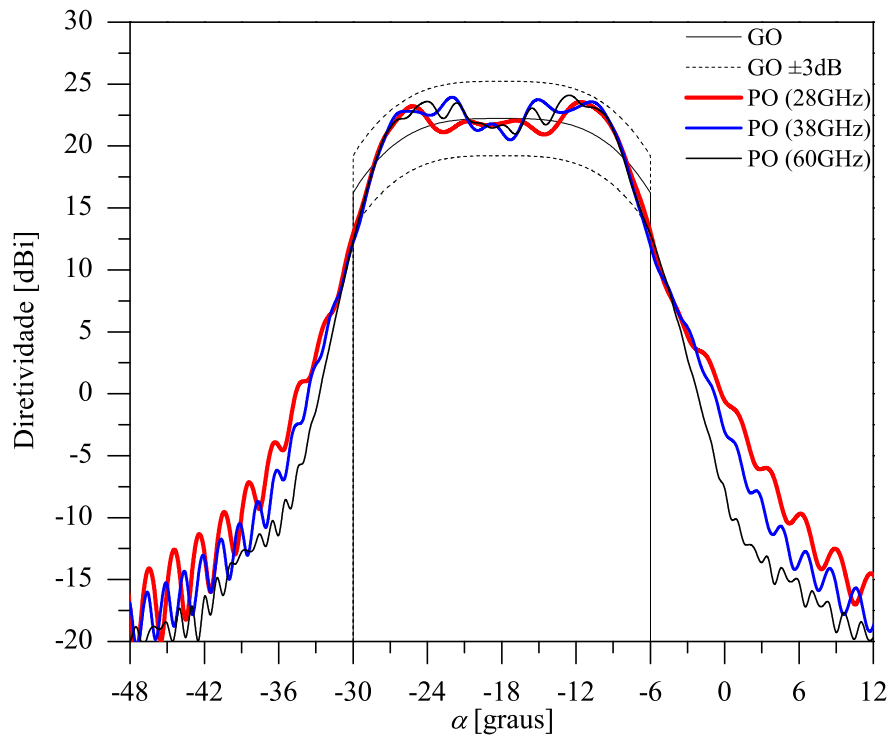
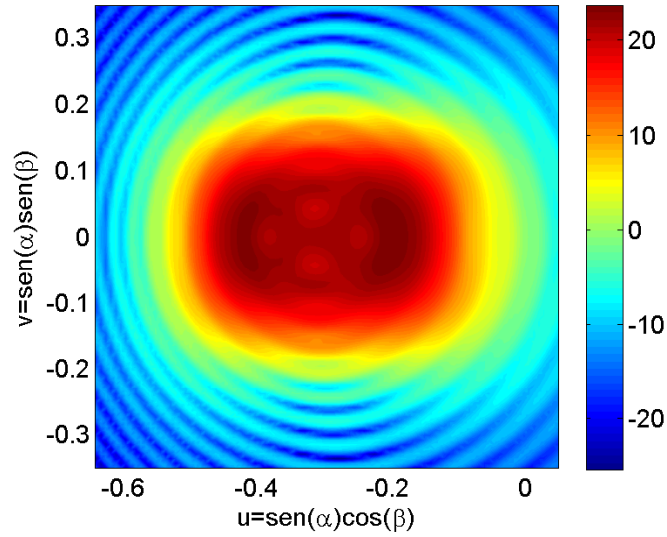
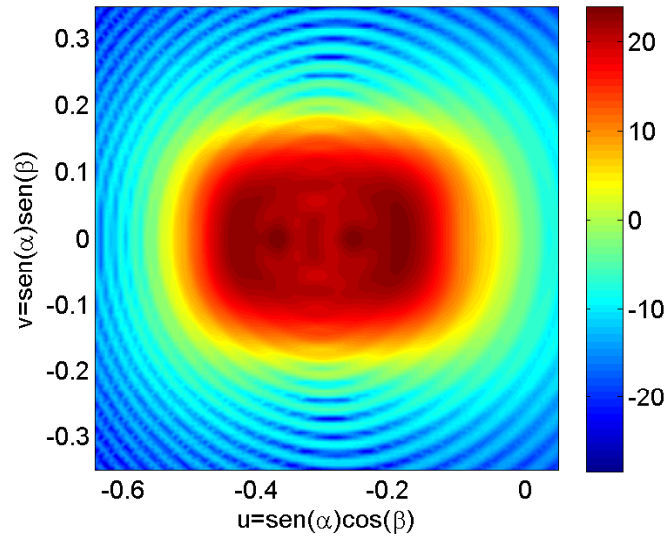
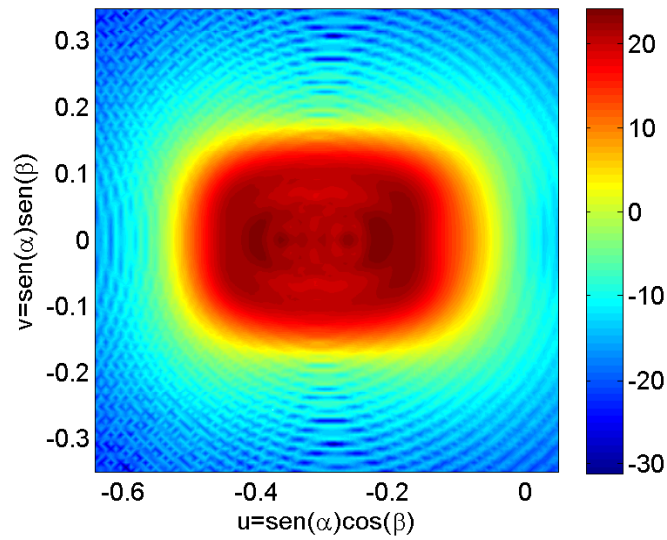


Figura 5.87: Caso E.II: Diagrama de radiação da plano de simetria

Figura 5.88: Caso E.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 28GHzFigura 5.89: Caso E.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 38GHzFigura 5.90: Caso E.II: Diagrama de radiação no plano  $uv$  em 60GHz

## 6

## Conclusões

### 6.1

#### Síntese de Antenas Refletoras Circularmente Simétricas

Foi apresentado no presente trabalho uma nova abordagem para a síntese de antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional. Comparada a método presente na literatura, a nova técnica baseada na concatenação de seções de cônicas apresenta menor erro de síntese e sua convergência para a solução ocorre com um número muito menor de iterações. Observou-se ainda que, o método que utiliza seções de elipses ou hipérboles apresentou menor erro de síntese que o baseado em seções de parábolas, e este por sua vez menor que aquele onde uma equação diferencial é resolvida. Além disto, pôde-se verificar que utilização de seções de elipses ou hipérboles, assegura a continuidade das derivadas de primeira ordem da função que descreve a superfície em cada ponto da síntese, enquanto que utilizando seções de parábolas há continuidade apenas da superfície. As mesmas constatações sobre a eficiência de utilizar seções de cônicas foram feitas em [57] para outras geometrias também circularmente simétricas, corroborando a tese de que esta nova forma de síntese, em geral, é mais eficiente do que método baseado em equação diferencial.

Através do estudo de erro absoluto foi possível perceber que a eficiência dos métodos de síntese está associada à forma da geratriz modelada. Percebeu-se que, nas partes da geratriz que se assemelham à uma parábola, o método que utiliza seções de parábolas é mais eficiente. Nas partes onde os raios são refletidos em direções diferentes para definir o diagrama de radiação objetivo, o método que concatena seções de elipses e hipérboles, com um grau de liberdade a mais, tem erro de síntese muito menor.

Uma característica importante, sobretudo para a geometria duplo-refletora com cobertura omnidirecional, são as dimensões da antena. Para otimizar o custo, busca-se as configurações que, além de bom desempenho eletromagnético, sejam mais compactas. Neste sentido, verificou-se que as antenas com menor volume foram as OADE com cáustica real e, nesta configuração, observou-se que quando menor a abertura angular objetivo menor o volume. Também foi observado que na OADC, a função objetivo, tamanho da abertura no campo distante e o mapeamento dos raios tem pouca influência nas dimensões, enquanto que na configuração OADE a modificação deste parâmetros altera de forma significativa o volume total.

## 6.2

### Síntese de Antenas Refletoras Offset

Baseando-se no conceito aplicado no Capítulo 2 para as antenas refletoras circularmente simétricas, foi apresentado no capítulo 4 um método numérico alternativo para a solução da equação de Monge-Ampère associada ao problema de síntese geométrica de antenas refletoras *offset*. Um dos principais objetivos desta nova abordagem foi evitar o problema de aumento exponencial do erro de discretização na região central de grades polares descrito na Seção 1.3. No Capítulo 3 foi apresentada uma extensa formulação em que, diferente do método tradicional que utiliza diferenças finitas para aproximar localmente a função de mapeamento, adotou-se a função de uma superfície quádrlica confocal para representar localmente a superfície refletora. Através desta representação, de fato, não há erro de discretização das derivadas, uma vez que as expressões analíticas exatas das derivadas parciais da função de mapeamento são conhecidas. O algoritmo de solução da equação de Monge-Ampère baseado no método iterativo Newton-Raphson foi apresentado no Capítulo 4 e os resultados da aplicação do método no Capítulo 5.

A formulação, implementação e aplicação do método nos permitiu concluir que a utilização de uma expressão analítica exata, ao invés de numérica aproximada, para representar localmente a superfície modelada mostrou-se como uma estratégia eficiente para solucionar o problema de erro de discretização das derivadas no centro da grade. Em particular, o uso da função de representação de uma superfície quádrlica confocal levou a duas grandes alterações em relação ao método baseado em diferenças finitas. Uma delas é diretamente na equação de Monge-Ampère, que passou a ter o termo  $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2$  é nulo. As consequências desta simplificação foram discutidas no Capítulo 4, onde se mostrou que em casos onde há maior dependência deste termo a representação por quádrlicas confocais é inadequada, podendo haver erros.

Do ponto de vista do mapeamento com variáveis complexas, verificou-se que este termo nulo na equação de Monge-Ampère ocorre porque a derivada  $\zeta_{\eta}$  é nula para as superfícies quádrlicas confocais. Como consequência, o mapeamento da conservação da energia para estas quádrlicas mapeia círculos em círculos, e não de círculos em elipses como na forma geral da equação de Monge-Ampère. As implicações desta particularidade manifestaram-se nos estudos de casos onde o mapeamento buscado requeria à função de mapeamento distorções mais complexas. Além disto, o método apresentado neste trabalho utilizou uma célula triangular com 4 pontos, diferente do método tradicional cuja célula tem nove pontos. Essa menor quantidade de pontos tem como consequência menor acoplamento entre os elementos.

### 6.3

#### Trabalhos Futuros

O uso de uma expressão analítica exata, ao invés de numérica aproximada, como feito neste trabalho para representar localmente a superfície modelada mostrou-se como uma estratégia eficiente para solucionar o problema de erro de discretização das derivadas no centro da grade, porém, a função escolhida apresentou algumas limitações em casos onde o mapeamento tem maior dependência do termo  $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2$ . Como proposta para trabalhos futuros pretende-se utilizar quádricas, ao invés de quádricas confocais para representar localmente a superfície. Para essa classe de superfícies, o termo  $|L_{\eta\eta} - L_{\eta}^2|^2$  não é nulo, resolvendo os problemas observados neste trabalho. Além disto, a equação da quádrica é um polinômio definido por nove constantes (e não quatro como no caso da superfície quádrica concocal com eixo deslocado) e, consequentemente, a célula utilizada para representar localmente a superfície deverá ter nove pontos da grade. Neste caso, haverá maior acoplamento entre os elementos que compõe a superfícies, tornando a solução mais estável.

## Referências Bibliográficas

- [1] H. Hertz, *Electric Waves*. Macmillan and co. and New York, 1893.
- [2] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. vol. I e II, London: Oxford University Press, 1881.
- [3] T. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall Comm. Eng. and Emerging Tech. Series, Prentice-Hall, 2002.
- [4] Z. Pi and F. Khan, “An introduction to millimeter-wave mobile broadband systems,” *Communications Magazine, IEEE*, vol. 49, pp. 101–107, June 2011.
- [5] T. Rappaport, E. Ben-Dor, J. Murdock, and Y. Qiao, “38 ghz and 60 ghz angle-dependent propagation for cellular and peer-to-peer wireless communications,” in *Communications (ICC), 2012 IEEE International Conference on*, pp. 4568–4573, June 2012.
- [6] T. Rappaport, S. Sun, R. Mayzus, H. Zhao, Y. Azar, K. Wang, G. Wong, J. Schulz, M. Samimi, and F. Gutierrez, “Millimeter wave mobile communications for 5g cellular: It will work!,” *Access, IEEE*, vol. 1, pp. 335–349, May 2013.
- [7] Y. Azar, G. Wong, K. Wang, R. Mayzus, J. Schulz, H. Zhao, F. Gutierrez, D. Hwang, and T. Rappaport, “28 ghz propagation measurements for outdoor cellular communications using steerable beam antennas in new york city,” in *Communications (ICC), 2013 IEEE International Conference on*, pp. 5143–5147, June 2013.
- [8] F. Rusek, D. Persson, B. K. Lau, E. Larsson, T. Marzetta, O. Edfors, and F. Tufvesson, “Scaling up mimo: Opportunities and challenges with very large arrays,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 30, pp. 40–60, Jan 2013.
- [9] Z. Qingling, “Rain attenuation in millimeter wave ranges,” in *Antennas, Propagation EM Theory, 2006. ISAPE '06. 7th International Symposium on*, pp. 1–4, Oct 2006.
- [10] T. Rappaport, J. Murdock, and F. Gutierrez, “State of the art in 60-ghz integrated circuits and systems for wireless communications,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 99, pp. 1390–1436, Aug 2011.



- [11] C. C. Cutler, “Parabolic-antenna design for microwaves,” *Proceedings of the IRE*, vol. 35, no. 11, pp. 1284–1294, 1947.
- [12] L. J. Chu, “Microwave beam-shaping antennas,” Technical Report No. 40, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Jun. 1947.
- [13] A. S. Dunbar, “Calculation of doubly curved reflectors for shaped beams,” *Proceedings of the IRE*, vol. 36, no. 10, pp. 1289–1296, 1948.
- [14] S. Silver, *Microwave Antenna Theory and Design*. IEE electromagnetic waves series, P. Peregrinus, 1949.
- [15] P. Hannan, “Microwave antennas derived from the cassegrain telescope,” *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 9, no. 2, pp. 140–153, 1961.
- [16] P. Clarricoats and G. Poulton, “High-efficiency microwave reflector antennas – a review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, pp. 1470–1504, Oct 1977.
- [17] S. Morgan, “Some examples of generalized cassegrainian and gregorian antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 12, no. 6, pp. 685–691, 1964.
- [18] F. J. S. Moreira and A. Prata Jr., “Generalized classical axially symmetric dual-reflector antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, pp. 547–554, Apr 2001.
- [19] B. Y. Kinber, “On two reflector antennas,” *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 6, pp. 914–921, June 1962.
- [20] V. Galindo, “Design of dual reflector antennas with arbitrary phase and amplitude distributions,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1963*, vol. 1, pp. 91–95, July 1963.
- [21] A. W. Rudge and N. A. Adatia, “Offset-parabolic-reflector antennas: A review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, pp. 1592–1618, Dec 1978.
- [22] J. Cook, E. Elam, and H. Zucker, “The open cassegrain antenna: Part i. electromagnetic design and analysis,” *Bell System Technical Journal, The*, vol. 44, pp. 1255–1300, Sept 1965.

- [23] W. Denkmann, F. Geyling, D. Pope, and A. Schwarz, “The open cassegrain antenna: Part ii. structural and mechanical evaluation,” *Bell System Technical Journal*, The, vol. 44, pp. 1301–1319, Sept 1965.
- [24] T.-S. Chu and R. Turrin, “Depolarization properties of offset reflector antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 339–345, May 1973.
- [25] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. AMS Chelsea Publishing Series, AMS Chelsea Pub., 1999.
- [26] H. Tanaka and M. Mizusawa, “Elimination of cross polarization in offset dual-reflector antennas,” *Electronics Communications of Japan*, vol. 58, pp. 71–78, December 1975.
- [27] Y. Mizugutch, M. Akagawa, and H. Yokoi, “Offset dual reflector antenna,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1976*, vol. 14, pp. 2–5, Oct 1976.
- [28] C. Dragone, “Offset multireflector antennas with perfect pattern symmetry and polarization discrimination,” *Bell System Technical Journal*, The, vol. 57, pp. 2663–2684, Sept 1978.
- [29] V. Galindo-Israel, R. Mittra, and A. Cha, “Aperture amplitude and phase control of offset dual reflectors,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, pp. 154–164, Mar 1979.
- [30] R. Mittra, F. Hyjazie, and V. Galindo-Israel, “Synthesis of offset dual reflector antennas transforming a given feed illumination pattern into a specified aperture distribution,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 251–259, Mar 1982.
- [31] K. Green, “Modified cassegrain antenna for arbitrary aperture illumination,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 11, pp. 589–590, Sep 1963.
- [32] A. Cha, “An offset dual shaped reflector with 84.5 percent efficiency,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, pp. 896–902, Nov 1983.
- [33] J. Lee, L. Parad, and R. Chu, “A shaped offset-fed dual-reflector antenna,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, pp. 165–171, Mar 1979.

- [34] J. S. Schruben, "Formulation of a reflector-design problem for a lighting fixture," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 62, pp. 1498–1501, Dec 1972.
- [35] B. S. Westcott and A. P. Norris, "Reflector synthesis for generalized far-fields," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 8, pp. 521–523, April 1975.
- [36] A. P. Norris and B. S. Westcott, "Computation of reflector surfaces for bivariate beamshaping in the elliptic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1976.
- [37] F. Brickell and B. S. Westcott, "Reflector design for two-variable beam shaping in the hyperbolic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 113–128, January 1976.
- [38] B. S. Westcott and F. Brickell, "Computation of reflector surfaces for two-variable beam shaping in the hyperbolic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 611–625, April 1976.
- [39] F. Brickell, L. Marder, and B. S. Westcott, "The geometrical optics design of reflectors using complex coordinates," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 10, pp. 245–260, February 1977.
- [40] H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-euclidean Geometry*. Dover Books on Mathematics Series, Dover, 1979.
- [41] F. Brickell and B. S. Westcott, "Phase and power density distributions on plane apertures of reflector antennas," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1978.
- [42] B. S. Westcott and F. Brickell, "Dual offset reflectors shaped for zero cross-polarisation and prescribed aperture illumination," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 12, pp. 169–186, February 1979.
- [43] N. C. Albertsen, "Shaped-beam antenna with low cross polarization," in *7th European Microwave Conference*, pp. 339–342, 1978.
- [44] B. S. Westcott and F. Brickell, "Dual offset reflectors shaped for zero crosspolarisation with asymmetric feed pattern," *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 129, pp. 307–314, December 1982.

- [45] B. Westcott, F. Stevens, and F. Brickell, "Go synthesis of offset dual reflectors," *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 128, pp. 11–18, February 1981.
- [46] B. Westcott, R. Graham, and F. Brickell, "Systematic design of a dual offset reflector antenna with an elliptical aperture," *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 131, pp. 365–370, December 1984.
- [47] M. Mehler, S. Tun, and N. Adatia, "Direct far-field go synthesis of shaped beam reflector antennas," *IEE Proceedings H, Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 133, pp. 213–220, June 1986.
- [48] J. Bergmann, R. Brown, and P. Clarricoats, "Dual reflector synthesis for specified aperture power and phase," *Electronics Letters*, vol. 21, pp. 820–821, August 1985.
- [49] J. Bergmann, R. Brown, P. Clarricoats, and H. Zhou, "Synthesis of shaped-beam reflector antenna patterns," *IEE Proceedings H, Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 135, pp. 48–53, February 1988.
- [50] J. R. Bergmann, *The Geometrical Optics Design of Dual Reflector Antennas*. Phd thesis, Queen Mary University of London, London, UK, 1986.
- [51] L. Caffarelli and V. Oliker, "Weak solutions of one inverse problem in geometric optics," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 154, no. 1, pp. 39–49, 2008.
- [52] V. I. Oliker, "A rigorous method for synthesis of offset shaped reflector antennas," *Computing Letters*, vol. 2, pp. 29–49, March 2006.
- [53] T. Glimm and V. Oliker, "Optical design of single reflector systems and the monge-kantorovich mass transfer problem," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 117, pp. 4096–4108, September 2003.
- [54] T. Glimm and V. Oliker, "Optical design of two-reflector systems, the monge-kantorovich mass transfer problem and fermat's principle," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 53, pp. 1255–1278, May 2004.
- [55] Y. Kim and T. hong Lee, "Shaped circularly symmetric dual reflector antennas by combining local conventional dual reflector systems," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 57, pp. 47–56, Jan 2009.

- [56] F. Moreira and J. Bergmann, “Shaping axis-symmetric dual-reflector antennas by consecutively concatenating conic sections,” in *Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2009 SBMO/IEEE MTT-S International*, (Belém, PA, Brazil), pp. 359–362, Nov 2009.
- [57] F. Moreira and J. Bergmann, “Shaping axis-symmetric dual-reflector antennas by combining conic sections,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 1042–1046, March 2011.
- [58] F. Moreira and J. Bergmann, “Omnidirectional dual-reflector shaping by concatenating conic sections,” in *Antennas and Propagation (EuCAP), 2010 Proceedings of the Fourth European Conference on*, pp. 1–3, April 2010.
- [59] E. Willoughby and E. Heider, “Laboratory development notes - omnidirectional vertically polarized paraboloid antenna,” *Antennas and Propagation, IRE Transactions on*, vol. 7, pp. 201–203, April 1959.
- [60] Y. Takeichi and T. Katagi, “The omnidirectional horn-reflector antenna,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1970*, vol. 8, pp. 40–47, Sep 1970.
- [61] A. P. Norris and W. D. Waddoup, “A millimetric wave omnidirectional antenna with prescribed elevation shaping,” in *4th International Conference on Antennas and Propagation (ICAP 85)*, pp. 141–145, May 1985.
- [62] R. F. Harrington, “On scattering by large conducting bodies,” *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 7, pp. 150–153, April 1959.
- [63] M. Orefice and P. Pirinoli, “A dual reflector antenna for omnidirectional coverage,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1993. AP-S. Digest*, pp. 274–277, vol.1, June 1993.
- [64] F. da Silva Moreira and J. Bergmann, “Classical axis-displaced dual-reflector antennas for omnidirectional coverage,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, pp. 2799–2808, Sept 2005.
- [65] F. da Silva Moreira and J. Bergmann, “Axis-displaced dual-reflector antennas for omnidirectional coverage with arbitrary main-beam direction in the elevation plane,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, pp. 2854–2861, Oct 2006.

- [66] F. da Silva Moreira, A. Prata, and J. Bergmann, “Go shaping of omnidirectional dual-reflector antennas for a prescribed equi-phase aperture field distribution,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 99–106, Jan 2007.
- [67] J. R. Mautz and R. F. Harrington, “An improved e-field solution for a conducting body of revolution,” technical report tr-80-1, Syracuse University, 1980.
- [68] R. Harrington, I. Antennas, and P. Society, *Field Computation by Moment Methods*. An IEEE / OUP classic reissue, Wiley, 1993.
- [69] F. Teixeira and J. Bergmann, “Moment-method analysis of circularly symmetric reflectors using bandlimited basis functions,” *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, vol. 144, pp. 179–183, Jun 1997.
- [70] C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley, 2012.
- [71] J. Bergmann and F. Moreira, “Omnidirectional ade antenna with a go-shaped main reflector for an arbitrary far-field pattern in the elevation plane,” *Microwaves, Antennas Propagation, IET*, vol. 3, pp. 1028–1035, October 2009.
- [72] R. Penchel, “Modelagem geométrica de antenas duplo-refletoras para cobertura omnidirecional,” dissertação de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, Dezembro 2009.
- [73] P. Besso, R. Bills, P. Brachat, and R. Vallauri, “A millimetric wave omnidirectional antenna with cosecant squared elevation pattern,” in *Antennas and Propagation, Tenth International Conference on (Conf. Publ. No. 436)*, vol. 1, pp. 448–451 vol.1, Apr 1997.
- [74] A. Kezuka, Y. Kazama, and Y. Yamada, “Antennas with cosecant square radiation pattern both upward and downward for fwa,” in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2003. IEEE*, vol. 2, pp. 782–785 vol.2, June 2003.
- [75] J. Bergmann and F. Moreira, “Bandwidth behavior of omnidirectional dual-reflector antennas synthesized for uniform coverage,” *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, vol. 8, pp. 1–8, June 2009.

- [76] J. Bergmann and F. Moreira, “Omnidirectional dual-reflector antenna with go shaped main reflector for pattern control in the elevation plane: Oadc case,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2012, no. Article ID 326925, pp. 1–6, 2012.
- [77] L. C. da Silva, “Estruturas de acoplamento entre guias lisos e alimentadores corrugados circulares,” tech. rep., CETUC, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Feb. 1986.
- [78] A. Orfanidis, G. Kyriacou, and J. Sahalos, “A mode-matching technique for the study of circular and coaxial waveguide discontinuities based on closed-form coupling integrals,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 880–883, May 2000.
- [79] S. Zang, “Aplicação do método do casamento de modos na análise e no projeto de estruturas coaxiais,” dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Sep. 2005.
- [80] A. Michaeli, “Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, pp. 252–258, Mar 1984.
- [81] A. Michaeli, “Elimination of infinities in equivalent edge currents, part i: Fringe current components,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, pp. 912–918, Jul 1986.
- [82] M. Canabarro, “Análise e síntese de refletores circularmente simétricos pelos métodos da Ótica física e correntes de franja,” dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Maio 2009.
- [83] S. Zang, *Síntese e Análise Rigorosa de Antenas Omnidirecionais de Duplo-Refletores: O Caso do Refletor Principal com Geratriz Circular*. Tese de doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Fev. 2010.
- [84] R. A. Penchel, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “Main-reflector shaping of omnidirectional dual reflectors using local conic sections,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, pp. 4379–4383, Aug 2013.
- [85] R. A. Penchel, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “An omnidirectional dual-reflector antenna with a shaped main reflector described by local conic sections,” in *Antennas and Propagation (EUCAP), Proceedings of the 5th European Conference on*, pp. 1162–1165, April 2011.

- [86] R. A. Penchel, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “Omnidirectional ade antennas with shaped main reflector described by local conic sections sequentially concatenated,” in *Microwave Optoelectronics Conference (IMOC), 2011 SBMO/IEEE MTT-S International*, pp. 412–415, Oct 2011.
- [87] R. A. Penchel, S. R. Zang, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “Use of parabolic sections to shape the main reflector of omnidirectional dual-reflector antennas,” in *Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2013 International Conference on*, pp. 1382–1385, Sept 2013.
- [88] R. A. Penchel, S. R. Zang, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “Synthesis and rigorous analysis of omnidirectional ade antenna with shaped main reflector described by local conic sections,” in *Antennas and Propagation (EUCAP), 2012 6th European Conference on*, pp. 3110–3114, March 2012.
- [89] R. A. Penchel, S. R. Zang, J. R. Bergmann, and F. J. S. Moreira, “Synthesis and rigorous analysis of omnidirectional dual-reflector antennas with shaped main reflector described by local conic sections,” in *Antennas and Propagation Conference (LAPC), 2011 Loughborough*, pp. 1–4, Nov 2011.
- [90] M. Spiegel, *Mathematical handbook of formulas and tables*. Schaum’s outline series, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [91] B. S. Westcott and F. Brickell, “General dielectric-lens shaping using complex co-ordinates,” *IEE Proceedings H: Microwaves Antennas and Propagation*, vol. 133, pp. 122–126, Apr. 1986.
- [92] B. S. Westcott, “On the Synthesis of a Single Offset Reflector with Dielectric Cone Feed,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, pp. 1161–1173, June 1993.
- [93] J. Brown and R. Churchill, *Complex Variables and Applications*. Churchill-Brown series, McGraw-Hill Education, 2014.
- [94] D. Zill and P. Shanahan, *A First Course in Complex Analysis with Applications*. The Jones and Bartlett Publishers series in mathematics. Complex analysis, Jones& Bartlett Learning, 2009.
- [95] P. Deufhard, *Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2011.



- [96] B. Chantraine-Bares, R. Sauleau, L. Le Coq, and K. Mahdjoubi, “A new accurate design method for millimeter-wave homogeneous dielectric substrate lens antennas of arbitrary shape,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 1069–1082, March 2005.
- [97] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series, New York: Dover Publications, 1964.
- [98] A. Ludwig, “The definition of cross polarization,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 116–119, Jan 1973.
- [99] J. Bergmann and F. Hasselmann, “On the implementation of global interpolating functions for shaped reflector antennas,” in *Antennas and Propagation, 1993., Eighth International Conference on*, pp. 84–87 vol.1, 1993.
- [100] J. Bergmann, F. Hasselmann, F. Teixeira, and C. Rego, “A comparison between techniques for global surface interpolation in shaped reflector analysis,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 47–53, Jan 1994.

## A

# Princípios da Óptica Geométrica em Coordenadas Complexas

### A.1

#### Introdução

Neste Apêndice serão apresentados detalhes da formulação do problema de síntese geométrica de antenas refletoras *offset* que por conveniência não foram inseridos no texto. Parte da formulação contida neste Apêndice também pode ser encontrada em [39].

### A.2

#### Coordenadas Complexas

Seja um ponto  $P$  sobre uma esfera de raio unitário (observe a Figura A.1), definido em coordenadas esféricas pelas variáveis  $\theta$  e  $\phi$  com relação à origem  $O$  do sistema de coordenadas. Através da projeção estereográfica, a partir do ponto  $N$ , o ponto  $P$  da superfície esférica projeta o ponto  $P'$  no plano  $z = 0$ , como ilustra a Figura A.1. A coordenada complexa  $\eta$  do ponto  $P'$ , associada à direção do vetor  $\hat{p}$  é definida como:

$$\eta = x + iy, \quad (\text{A-1})$$

onde  $(x, y, z = 0)$  são as coordenadas cartesianas do ponto  $P'$ . Em coordenadas polares, a definição (A-1) é escrita como:

$$\eta = \rho e^{i\phi}. \quad (\text{A-2})$$

Da Figura A.1 pode-se obter através de semelhança de triângulos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{MP}}. \quad (\text{A-3})$$

Como, por definição  $\overline{OP} = 1$ , os catetos do triângulo  $OMP$  são:

$$\overline{MP} = \sin\theta, \quad (\text{A-4a})$$

$$\overline{OM} = \cos\theta. \quad (\text{A-4b})$$

Substituindo (A-4a) em (A-3) e observando que  $\overline{ON} = 1$ , encontra-se:

$$\overline{OP'} = \frac{\sin\theta}{\overline{MN}}. \quad (\text{A-5})$$

Da Figura A.1 observa-se também que

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = 1 - \overline{OM}, \quad (\text{A-6})$$

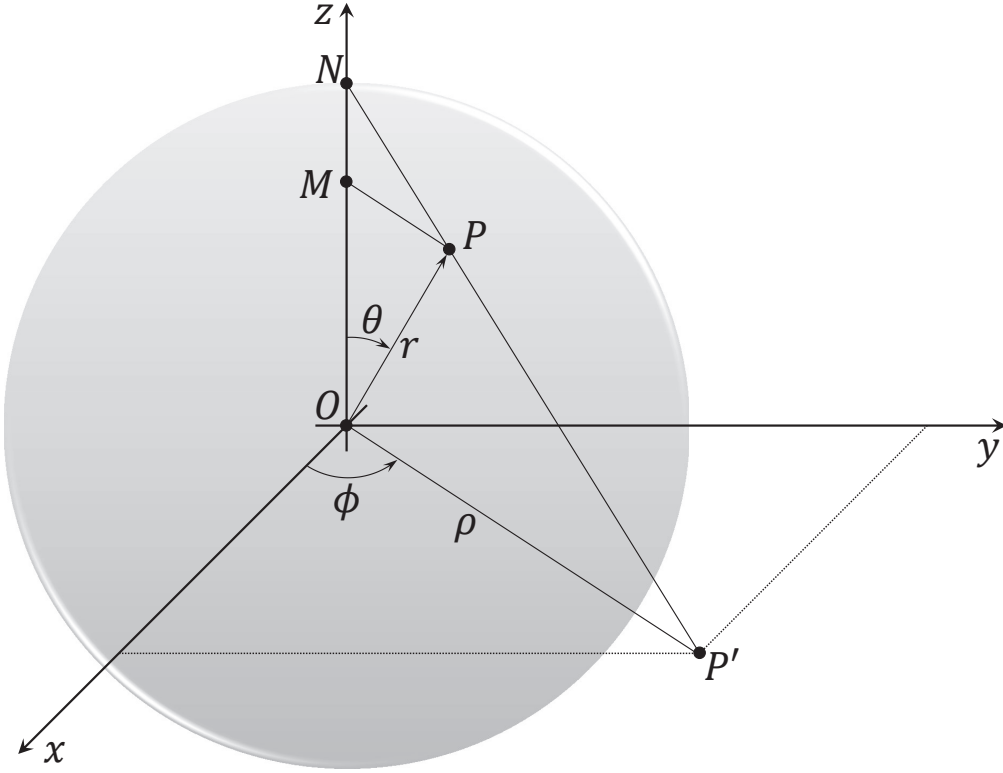


Figura A.1: Projeção Estereográfica

e, substituindo em (A-5) encontra-se

$$\overline{OP'} = \frac{\sin \theta}{1 - \overline{OM}}. \quad (\text{A-7})$$

Substituindo (A-4b) em (A-7) mostra-se que:

$$\overline{OP'} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (\text{A-8})$$

e com auxílio algumas identidades trigonométricas reescreve-se:

$$\rho = |\overline{OP'}| = \cot \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A-9})$$

Utilizando (A-2), a coordenada complexa  $\eta$  pode ser escrita em função das coordenadas esféricas como:

$$\eta = \cot \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi}. \quad (\text{A-10})$$

Manipulando a equação (A-10), pode-se mostrar que:

$$\phi = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{\eta}{\bar{\eta}} \right), \quad (\text{A-11})$$

onde a coordenada esférica  $\phi$  é expressa em função da variável complexa  $\eta$  e seu complexo conjugado  $\bar{\eta}$ . Novamente, manipulando (A-10) obtém-se as seguintes

expressões relacionando coordenada esférica  $\theta$  à coordenada complexa de  $\eta$ :

$$\cos \theta = \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1}, \quad (\text{A-12a})$$

$$\sin \theta = \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1}. \quad (\text{A-12b})$$

Mostra-se também que:

$$\cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{|\eta|^2}{|\eta|^2 + 1}, \quad (\text{A-13a})$$

$$\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{|\eta|^2 + 1}. \quad (\text{A-13b})$$

Utilizando a fórmula de Euler, obtém-se ainda outras duas expressões amplamente utilizadas na apresentação da formulação:

$$\cos \phi = \frac{\bar{\eta} + \eta}{2|\eta|}, \quad (\text{A-14a})$$

$$\sin \phi = \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{2|\eta|}. \quad (\text{A-14b})$$

Alternativamente, pode-se escrever:

$$\cos \phi = \frac{\text{Re}[\eta]}{|\eta|}, \quad (\text{A-15a})$$

$$\sin \phi = \frac{\text{Im}[\eta]}{|\eta|}. \quad (\text{A-15b})$$

Tem-se ainda, as seguintes relações entre o sistema de coordenadas complexas e o sistema de coordenadas cartesianas:

$$x = (\bar{\eta} + \eta)e^{L(\eta)}, \quad (\text{A-16a})$$

$$y = i(\bar{\eta} - \eta)e^{L(\eta)}, \quad (\text{A-16b})$$

$$z = (|\eta|^2 - 1)e^{L(\eta)}, \quad (\text{A-16c})$$

ou

$$x = 2 \text{Re}[\eta] e^{L(\eta)}, \quad (\text{A-17a})$$

$$y = 2 \text{Im}[\eta] e^{L(\eta)}. \quad (\text{A-17b})$$

A relação inversa pode ser obtida fazendo  $r = 1$ :

$$z = [1 - x^2 - y^2]^{1/2}. \quad (\text{A-18})$$

Substituindo (A-16c) em (A-18) e fazendo  $L(\eta) = 0$  encontra-se

$$(|\eta|^2 - 1)e^{L(\eta)} = [1 - x^2 - y^2]^{1/2}, \quad (\text{A-19})$$

que pode ser reescrito como

$$\eta = \frac{1 + [1 - x^2 - y^2]^{1/2}}{x - iy}. \quad (\text{A-20})$$

Neste trabalho, tratar-se-á a coordenada  $\eta$  como a direção dos raios provenientes do alimentador, e a coordenada  $\zeta$  a direção dos raios refletidos pela superfície refletora e definida como:

$$\zeta = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\beta} = u + iv, \quad (\text{A-21})$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de elevação em relação ao eixo  $z$  e  $\beta$  o ângulo de azimute em relação ao eixo  $x$ . De forma análoga, pode-se escrever a relação entre o ângulo de azimute  $\beta$  e a direção de reflexão  $\zeta$ :

$$\beta = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\right). \quad (\text{A-22})$$

As relações entre o ângulo de elevação  $\alpha$  e a coordenada complexa de  $\zeta$  são:

$$\cos \alpha = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (\text{A-23a})$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{2|\zeta|}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (\text{A-23b})$$

ou

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (\text{A-24a})$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (\text{A-24b})$$

e as relações entre o ângulo  $\beta$  e  $\zeta$

$$\cos \beta = \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{2|\zeta|}, \quad (\text{A-25a})$$

$$\text{sen} \beta = \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{2|\zeta|}, \quad (\text{A-25b})$$

ou

$$\cos \beta = \frac{\text{Re}[\zeta]}{|\zeta|}, \quad (\text{A-26a})$$

$$\text{sen} \beta = \frac{\text{Im}[\zeta]}{|\zeta|}. \quad (\text{A-26b})$$

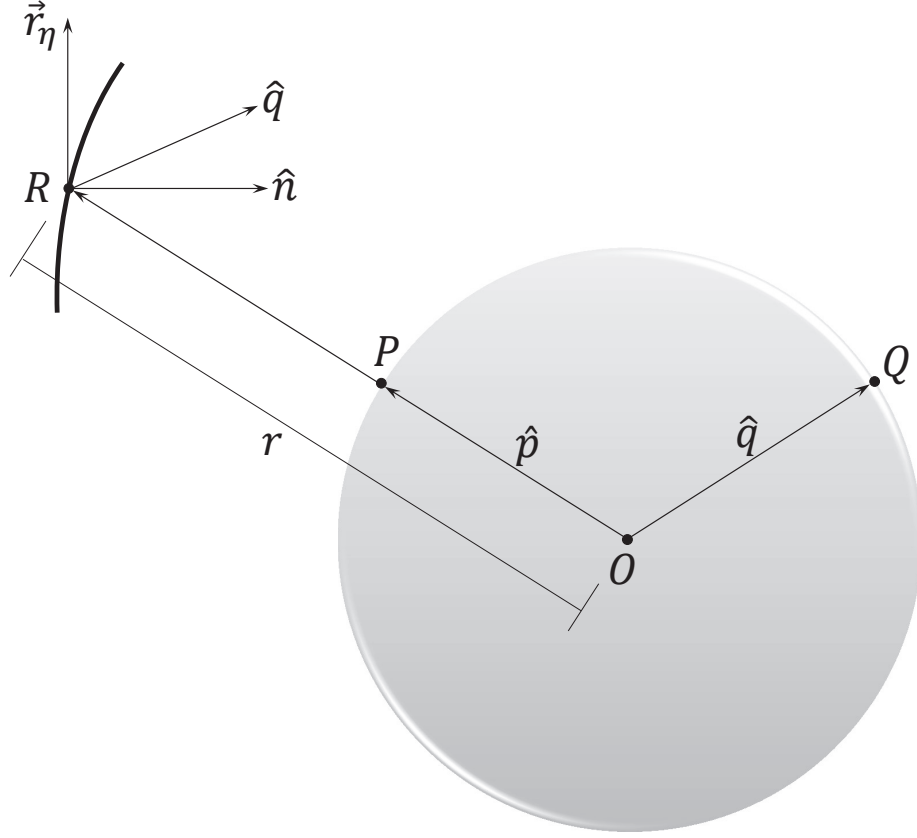


Figura A.2: Representação das direções de incidência e reflexão na esfera de raio unitário

### A.3 Vetores em Coordenadas Complexas

Na Figura A.2 a esfera de raio unitário com centro em  $O$ , que é assumida como uma fonte pontual de onde provem os raios incidentes. O ponto  $P(\eta)$  e  $Q(\zeta)$  são os pontos finais dos vetores unitários  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ . Os vetores unitários  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  representam as direções dos raios incidentes e refletidos e são definidos como:

$$\hat{p}(\eta) = \frac{\bar{\eta} + \eta}{\eta\bar{\eta} + 1}\hat{x} + \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{\eta\bar{\eta} + 1}\hat{y} + \frac{\eta\bar{\eta} - 1}{\eta\bar{\eta} + 1}\hat{z}, \quad (\text{A-27a})$$

$$\hat{q}(\zeta) = \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{\zeta\bar{\zeta} + 1}\hat{x} + \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{\zeta\bar{\zeta} + 1}\hat{y} + \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}\hat{z}. \quad (\text{A-27b})$$

Derivando (A-27a) em relação à  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  obtém-se, respectivamente:

$$\hat{p}_\eta(\eta) = \frac{1 - \bar{\eta}^2}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{x} - \frac{i(1 + \bar{\eta}^2)}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{y} + \frac{2\bar{\eta}}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{z}, \quad (\text{A-28a})$$

$$\hat{p}_{\bar{\eta}}(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{x} + \frac{i(1 + \eta^2)}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{y} + \frac{2\eta}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}\hat{z}. \quad (\text{A-28b})$$

Das equações (A-28a) e (A-28b) verificam-se as seguintes relações:

$$\hat{p}_\eta = \overline{\hat{p}_{\bar{\eta}}}, \quad (\text{A-29a})$$

$$\hat{p}_{\bar{\eta}} = \overline{\hat{p}_\eta}. \quad (\text{A-29b})$$

Além disto, como o vetor  $\hat{p}$  é uma função real, sabe-se que:

$$\hat{p}_\eta = \hat{\bar{p}}_\eta, \quad (\text{A-30a})$$

$$\hat{p}_{\bar{\eta}} = \hat{\bar{p}}_{\bar{\eta}}. \quad (\text{A-30b})$$

Utilizando (A-27a) e (A-28a) e (A-28b) pode-se obter os seguinte produtos escalares:

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_\eta = \frac{\bar{\eta} + \eta}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{1 - \bar{\eta}^2}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} - \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{i(1 + \bar{\eta}^2)}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} + \frac{\eta\bar{\eta} - 1}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{2\bar{\eta}}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}, \quad (\text{A-31a})$$

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{\bar{\eta} + \eta}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{1 - \eta^2}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} \hat{x} + \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{i(1 + \eta^2)}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} + \frac{\eta\bar{\eta} - 1}{\eta\bar{\eta} + 1} \frac{2\eta}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2}. \quad (\text{A-31b})$$

Manipulando (A-31a) e (A-31b) mostra-se que:

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_\eta = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^3} [(2\bar{\eta} - 2\bar{\eta}^2\eta) + (2\bar{\eta}^2\eta - 2\bar{\eta})], \quad (\text{A-32a})$$

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^3} [(2\eta - 2\eta^2\bar{\eta}) + (2\eta^2\bar{\eta} - 2\eta)]. \quad (\text{A-32b})$$

Por fim, de (A-32a) e (A-32b) obtém-se os seguintes resultados:

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_\eta = 0, \quad (\text{A-33a})$$

$$\hat{p} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = 0. \quad (\text{A-33b})$$

Outras duas relações importantes são determinadas pelos seguintes produtos escalares:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_\eta = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^4} [(1 - \bar{\eta}^2)(1 - \bar{\eta}^2) + i(1 + \bar{\eta}^2)i(1 + \bar{\eta}^2) + 2\bar{\eta}2\bar{\eta}], \quad (\text{A-34a})$$

$$\hat{p}_{\bar{\eta}} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^4} [(1 - \eta^2)(1 - \eta^2) + i(1 + \eta^2)i(1 + \eta^2) + 2\eta2\eta]. \quad (\text{A-34b})$$

Após algumas manipulações é fácil mostrar que (A-34a) e (A-34b) resultam em:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_\eta = 0, \quad (\text{A-35a})$$

$$\hat{p}_{\bar{\eta}} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = 0. \quad (\text{A-35b})$$

Fazendo o produto escalar entre (A-28a) e (A-28b) obtém-se:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^4} [(1 - \bar{\eta}^2)(1 - \eta^2) - i(1 + \bar{\eta}^2)i(1 + \eta^2) + 2\bar{\eta}2\eta] . \quad (\text{A-36})$$

Manipulando (A-36) é fácil demonstrar que:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{(\eta\bar{\eta} + 1)^4} [(1 + 2\eta\bar{\eta} + \eta^2\bar{\eta}^2)(1 + 2\eta\bar{\eta} + \eta^2\bar{\eta}^2)] . \quad (\text{A-37})$$

Escrevendo alguns termos na forma de produto notável (A-37) é reduzida a:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} = \frac{2}{(|\eta|^2 + 1)^2} . \quad (\text{A-38})$$

Por analogia, pode-se escrever as mesmas relações para o vetor  $\hat{q}$  e suas derivadas em relação à  $\zeta$  e  $\bar{\zeta}$ , respectivamente:

$$\hat{q} \cdot \hat{q}_\zeta = 0, \quad (\text{A-39a})$$

$$\hat{q} \cdot \hat{q}_{\bar{\zeta}} = 0. \quad (\text{A-39b})$$

Escreve-se também que:

$$\hat{q}_\zeta \cdot \hat{q}_\zeta = 0, \quad (\text{A-40a})$$

$$\hat{q}_{\bar{\zeta}} \cdot \hat{q}_{\bar{\zeta}} = 0, \quad (\text{A-40b})$$

$$\hat{q}_\zeta \cdot \hat{q}_{\bar{\zeta}} = \frac{2}{(|\zeta|^2 + 1)^2} . \quad (\text{A-41})$$

Fazendo o produto escalar entre os vetores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  encontra-se:

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \frac{\bar{\eta} + \eta}{|\eta|^2 + 1} \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{|\zeta|^2 + 1} + \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{|\eta|^2 + 1} \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{|\zeta|^2 + 1} + \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1}, \quad (\text{A-42})$$

que é reescrito na forma

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \frac{(\bar{\eta} + \eta)(\bar{\zeta} + \zeta) - (\bar{\eta} - \eta)(\bar{\zeta} - \zeta) + (|\eta|^2 - 1)(|\zeta|^2 - 1)}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-43})$$

Após algumas manipulações mostra-se que:

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \frac{2\bar{\eta}\zeta + 2\eta\bar{\zeta} + |\eta|^2|\zeta|^2 - |\eta|^2 - |\zeta|^2 + 1}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-44})$$

Por fim, faz-se o produto escalar entre os vetores  $\hat{p}_\eta$  e  $\hat{q}$ :

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{q} = \frac{1 - \bar{\eta}^2}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{\zeta\bar{\zeta} + 1} - \frac{i(1 + \bar{\eta}^2)}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{\zeta\bar{\zeta} + 1} + \frac{2\bar{\eta}}{(\eta\bar{\eta} + 1)^2} \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}. \quad (\text{A-45})$$

Após algumas manipulações, (A-46) é reduzida a:

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{q} = \frac{2\zeta(1 - \bar{\eta}^2) + 2\bar{\eta}(|\zeta|^2 - 1)}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-46})$$



#### A.4

##### Lei de Snell

Considere a superfície refletora  $r(\eta)$  apresentada na Figura A.2 onde um raio emitido pela fonte em  $O$  com direção  $\hat{p}$  é refletido na direção  $\hat{q}$ . Esta superfície pode ser descrita pelo seguinte vetor posição:

$$\vec{r}(\eta) = r(\eta) \hat{p}. \quad (\text{A-47})$$

A Lei de Snell de reflexão implica que um vetor normal  $\hat{n}$ , dado por

$$\hat{n} = \hat{p} - \hat{q}, \quad (\text{A-48})$$

deve ser perpendicular a derivada tangencial  $\vec{r}_\eta$ . Logo:

$$\vec{r}_\eta \cdot [(\hat{p} - \hat{q})] = 0. \quad (\text{A-49})$$

Derivando o vetor (A-47):

$$\vec{r}_\eta(\eta) = r_\eta \hat{p} + r \hat{p}_\eta, \quad (\text{A-50})$$

e substituindo em (A-49) encontra-se:

$$[r_\eta \hat{p} + r \hat{p}_\eta] \cdot [(\hat{p} - \hat{q})] = 0. \quad (\text{A-51})$$

Fazendo o produto escalar, (A-51) é reescrita como:

$$r_\eta [(\hat{p} \cdot \hat{p}) - (\hat{p} \cdot \hat{q})] + r [(\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}) - (\hat{p}_\eta \cdot \hat{q})] = 0. \quad (\text{A-52})$$

Observando que  $\hat{p} \cdot \hat{p} = 1$  e utilizando (A-33a) obtém-se

$$r_\eta [1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})] = r(\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}), \quad (\text{A-53})$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\frac{r_\eta}{r} = \frac{\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}}{1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})}. \quad (\text{A-54})$$

Definindo uma função auxiliar como

$$\rho = \ln r, \quad (\text{A-55})$$

mostra-se com facilidade que

$$\rho_\eta = \frac{\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}}{1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})}, \quad (\text{A-56})$$

onde  $\rho_\eta$  é a derivada da função auxiliar  $\rho$  em relação à  $\eta$ . Definindo

$$\Lambda(\eta, \zeta) = 1 - \hat{p} \cdot \hat{q}, \quad (\text{A-57})$$

e derivando em relação à  $\eta$

$$\Lambda_\eta(\eta, \zeta) = -\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}, \quad (\text{A-58})$$

a equação (A-56) pode ser reescrita como:

$$\rho_\eta = -\frac{\Lambda_\eta}{\Lambda}. \quad (\text{A-59})$$

Definindo uma outra função auxiliar

$$\Psi(\eta, \zeta) = -\ln \Lambda, \quad (\text{A-60})$$

e derivando em relação à  $\eta$ , mostra-se que:

$$\Psi_\eta(\eta, \zeta) = \rho_\eta = -\frac{\Lambda_\eta}{\Lambda}, \quad (\text{A-61})$$

Substituindo o produto escalar (A-44) em (A-57), obtém-se:

$$\Lambda(\eta, \zeta) = \frac{2|\eta|^2 + 2|\zeta|^2 - 2\bar{\eta}\zeta - 2\eta\bar{\zeta}}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-62})$$

Reescrevendo (A-62):

$$\Lambda(\eta, \zeta) = \frac{2|\eta - \zeta|^2}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-63})$$

Derivando (A-63) e após algumas manipulações mostra-se que:

$$\frac{r_\eta}{r} = \frac{1}{\zeta - \eta} + \frac{\bar{\eta}}{1 + |\eta|^2}. \quad (\text{A-64})$$

A diferenciação da função

$$r = (|\eta|^2 + 1)e^{L(\eta)}, \quad (\text{A-65})$$

leva a seguinte expressão:

$$r_\eta = \bar{\eta}e^{L(\eta)} + (|\eta|^2 + 1)e^{L(\eta)}L_\eta, \quad (\text{A-66})$$

onde  $L_\eta = \partial L / \partial \eta$  é a derivada parcial da função  $L$  em relação à  $\eta$ . Substituindo (A-66) em (A-64), tem-se:

$$r_\eta = r \frac{\bar{\eta}}{|\eta|^2 + 1} + r L_\eta, \quad (\text{A-67})$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\frac{r_\eta}{r} = L_\eta + \frac{\bar{\eta}}{|\eta|^2 + 1}. \quad (\text{A-68})$$

A substituição de (A-68) em (A-64) leva a seguinte forma da Lei de Snell:

$$L_\eta = \frac{1}{\zeta - \eta}. \quad (\text{A-69})$$

## A.5

### Conservação da Energia

A Conservação da Energia requer que elementos de ângulo sólido  $d\Omega'$  sejam transformados para  $d\Omega''$  (observe a Figura 3.5) na razão  $I/G$ , ou seja:

$$\left| \frac{d\Omega'}{d\Omega''} \right| = \frac{I}{G}. \quad (\text{A-70})$$

Essa transformação, que representa a modificação imposta ao diagrama de radiação do alimentador pela superfície refletora é dada por:

$$I(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = G(\alpha, \beta) \sin\alpha d\alpha d\beta, \quad (\text{A-71})$$

onde  $\sin\theta d\theta d\phi$  é o elemento de ângulo sólido associado ao cone de raios provenientes do alimentador e  $\sin\alpha d\alpha d\beta$  o elemento de ângulo sólido associado ao cone de raios refletido pela superfície modelada. A relação entre os elementos de área é dada pelo módulo do jacobiano  $J(\theta, \phi; \alpha, \beta)$  da transformação  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\theta, \phi)$ . Logo:

$$\frac{I(\theta, \phi)}{G(\alpha, \beta)} \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = |J(\theta, \phi; \alpha, \beta)|. \quad (\text{A-72})$$

Utilizando a regra da cadeia de diferenciação, (A-72) é transformada em:

$$\frac{I(\theta, \phi)}{G(\alpha, \beta)} \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\zeta, \bar{\zeta})} \frac{\partial(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial(\eta, \bar{\eta})} \frac{\partial(\eta, \bar{\eta})}{\partial(\theta, \phi)}, \quad (\text{A-73})$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \sin\theta \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(\eta, \bar{\eta})} = \sin\alpha \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\zeta, \bar{\zeta})} \frac{\partial(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial(\eta, \bar{\eta})}. \quad (\text{A-74})$$

Manipulando (A-74), mostra-se que:

$$J(\zeta, \bar{\zeta}; \eta, \bar{\eta}) = \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \frac{J(\alpha, \beta; \zeta, \bar{\zeta})}{J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta})}. \quad (\text{A-75})$$

Note que o jacobiano  $J(\alpha, \beta; \theta, \phi)$  incorpora três transformações: a primeira,  $J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta})$ , referente à transformação  $(\theta, \phi) \rightarrow (\eta, \bar{\eta})$  do sistema de coordenadas esférico para o complexo no alimentador; a segunda,  $J(\alpha, \beta; \zeta, \bar{\zeta})$ , análoga à primeira, referente à transformação  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\zeta, \bar{\zeta})$  no campo distante; e a terceira,  $J(\zeta, \bar{\zeta}; \eta, \bar{\eta})$ , relacionando os dois planos complexos. O jacobiano  $J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta})$  é dado por:

$$J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta}) = \begin{bmatrix} \theta_\eta & \theta_{\bar{\eta}} \\ \phi_\eta & \phi_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} = \theta_\eta \phi_{\bar{\eta}} - \theta_{\bar{\eta}} \phi_\eta. \quad (\text{A-76})$$

A diferenciação de (A-11) e (A-12a) permite obter as seguintes relações:

$$\phi_\eta = -\frac{2\bar{\eta}}{(|\eta|^2 + 1)^2} \frac{1}{\sin\theta}, \quad (\text{A-77})$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{i2\eta}. \quad (\text{A-78})$$

Como  $\theta_{\bar{\eta}} = \bar{\theta}_\eta$  e  $\phi_{\bar{\eta}} = \bar{\phi}_\eta$  obtém-se que:

$$\theta_{\bar{\eta}} = -\frac{2\eta}{(|\eta|^2 + 1)^2} \frac{1}{\sin\theta}, \quad (\text{A-79})$$

$$\phi_{\bar{\eta}} = -\frac{1}{i2\bar{\eta}}. \quad (\text{A-80})$$

A substituição (A-77), (A-78), (A-79) e (A-80) em (A-76) resulta em

$$\sin\theta J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta}) = -\frac{i2}{(|\eta|^2 + 1)^2}. \quad (\text{A-81})$$

De forma análoga, tem-se:

$$J(\alpha, \beta; \zeta, \bar{\zeta}) = \begin{bmatrix} \alpha_\zeta & \alpha_{\bar{\zeta}} \\ \beta_\zeta & \beta_{\bar{\zeta}} \end{bmatrix} = \alpha_\zeta \beta_{\bar{\zeta}} - \alpha_{\bar{\zeta}} \beta_\zeta, \quad (\text{A-82})$$

de onde se obtém que:

$$\sin\alpha J(\alpha, \beta; \zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{i2}{(|\zeta|^2 + 1)^2}. \quad (\text{A-83})$$

O jacobiano  $J(\eta, \bar{\eta}; \zeta, \bar{\zeta})$  é dado por:

$$J(\zeta, \bar{\zeta}; \eta, \bar{\eta}) = \begin{bmatrix} \zeta_\eta & \zeta_{\bar{\eta}} \\ \bar{\zeta}_\eta & \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} = \zeta_\eta \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} - \zeta_{\bar{\eta}} \bar{\zeta}_\eta. \quad (\text{A-84})$$

Sabendo que  $\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} = \bar{\zeta}_\eta$  e  $\bar{\zeta}_\eta = \bar{\zeta}_{\bar{\eta}}$  obtém-se que:

$$J(\theta, \phi; \eta, \bar{\eta}) = |\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2. \quad (\text{A-85})$$

Por fim, substituindo (A-81), (A-83) e (A-85) em (A-75), tem-se

$$|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (\text{A-86})$$

## A.6

### Mapeamento $\tau : P(\eta) \rightarrow Q(\zeta)$

Esta seção é dedicada ao estudo da relação de mapeamento local  $\tau$  em uma esfera unitária que relaciona  $P(\eta)$  a  $Q(\zeta)$ . Inicialmente, considere a curva  $\eta = \eta(t)$  sobre a superfície da esfera onde  $t$  é um parâmetro real. O vetor tangente à curva é dado por:

$$\frac{d}{dt} [\hat{p}(\eta(t))] = \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt}. \quad (\text{A-87})$$

O complexo conjugado o vetor tangente (A-87) é:

$$\overline{\frac{d\hat{p}}{dt}} = \hat{p}_\eta \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{dt}. \quad (\text{A-88})$$

Utilizando as relações (A-29a) e (A-29b), (A-88) é reescrito como:

$$\overline{\frac{d\hat{p}}{dt}} = \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt}. \quad (\text{A-89})$$

O módulo do vetor tangente pode ser obtido através de:

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 = \left( \frac{d\hat{p}}{dt} \right) \cdot \left( \overline{\frac{d\hat{p}}{dt}} \right). \quad (\text{A-90})$$

Substituindo (A-87) e (A-89) em (A-90):

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 = \left( \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) \cdot \left( \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} \right). \quad (\text{A-91})$$

Expandindo o produto escalar em (A-91):

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 &= \left( \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) + \left( \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} \cdot \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} \right) \\ &\quad + \left( \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) + \left( \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \cdot \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} \right). \end{aligned} \quad (\text{A-92})$$

Manipulando (A-92):

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 &= \left| \frac{d\eta}{dt} \right|^2 (\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}}) + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 (\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_\eta) \\ &\quad + \left( \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right)^2 (\hat{p}_{\bar{\eta}} \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}}) + \left| \frac{d\eta}{dt} \right|^2 (\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}}). \end{aligned} \quad (\text{A-93})$$

Utilizando as relações (A-34a) e (A-34b) em (A-93), mostra-se que:

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 = 2 \left| \frac{d\eta}{dt} \right|^2 (\hat{p}_\eta \cdot \hat{p}_{\bar{\eta}}). \quad (\text{A-94})$$

Substituindo (A-38) em (A-94):

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right|^2 = \left| \frac{d\eta}{dt} \right|^2 \frac{4}{(|\eta|^2 + 1)^2}, \quad (\text{A-95})$$

encontrando-se, finalmente, o comprimento do vetor tangente:

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = \left| \frac{d\eta}{dt} \right| \frac{2}{|\eta|^2 + 1}. \quad (\text{A-96})$$

Suponha que o mapeamento  $\tau$  seja dado por:

$$\zeta = \zeta(\eta) \quad (\text{A-97})$$

em termos das coordenadas complexas  $\eta$  de  $P$  e  $\zeta$  de  $Q$ , logo:

$$Q(\eta) = \tau(P(\zeta)) \quad (\text{A-98})$$

A transformação curva  $\eta = \eta(t)$  em  $\zeta = \zeta(\eta(t))$  pode ser obtida através da relação entre o módulo dos seus vetores tangentes. O vetor tangente á curva  $\zeta$  é dado por:

$$\frac{d}{dt} [\hat{q}(\zeta(\eta(t)))] = \frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{q}_\zeta \left( \zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) + \hat{q}_{\bar{\zeta}} \left( \bar{\zeta}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right). \quad (\text{A-99})$$

onde  $\zeta_\eta$  e  $\zeta_{\bar{\eta}}$  são as derivadas parciais de  $\zeta$  em relação à  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , respectivamente. O complexo conjugado o vetor tangente  $\hat{q}$  é:

$$\overline{\frac{d\hat{q}}{dt}} = \overline{\hat{q}_\zeta} \left( \overline{\zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt}} \right) + \overline{\hat{q}_{\bar{\zeta}}} \left( \overline{\bar{\zeta}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt}} \right). \quad (\text{A-100})$$

Utilizando as relações (A-29a) e (A-29b), e observando que

$$\bar{\zeta}_\eta = \overline{\zeta_\eta}, \quad (\text{A-101a})$$

$$\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} = \overline{\zeta_{\bar{\eta}}}, \quad (\text{A-101b})$$

$$\overline{\bar{\zeta}_\eta} = \zeta_\eta, \quad (\text{A-101c})$$

$$\overline{\bar{\zeta}_{\bar{\eta}}} = \zeta_{\bar{\eta}}, \quad (\text{A-101d})$$

a equação (A-100) pode ser reescrita como:

$$\overline{\frac{d\hat{q}}{dt}} = \overline{\hat{q}_{\bar{\zeta}}} \left( \bar{\zeta}_\eta \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{dt} \right) + \overline{\hat{q}_\zeta} \left( \zeta_\eta \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{dt} \right). \quad (\text{A-102})$$

O módulo do vetor tangente pode ser obtido através de:

$$\left| \frac{d\hat{q}}{dt} \right|^2 = \left( \frac{d\hat{q}}{dt} \right) \cdot \left( \overline{\frac{d\hat{q}}{dt}} \right). \quad (\text{A-103})$$

Substituindo (A-99) e (A-102) em (A-104)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{q}}{dt} \right|^2 &= \left[ \hat{q}_\zeta \left( \zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) + \hat{q}_{\bar{\zeta}} \left( \bar{\zeta}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \overline{\hat{q}_{\bar{\zeta}}} \left( \bar{\zeta}_\eta \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{dt} \right) + \overline{\hat{q}_\zeta} \left( \zeta_\eta \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{dt} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-104})$$

Utilizando as relações (A-40a) e (A-40b), (A-104) é reescrita como:

$$\left| \frac{d\hat{q}}{dt} \right|^2 = 2 \left| \zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right|^2 (\hat{q}_\zeta \cdot \hat{q}_{\bar{\zeta}}). \quad (\text{A-105})$$

Por fim, substituindo (A-41) em (A-105) obtém-se:

$$\left| \frac{d\hat{q}}{dt} \right|^2 = \left| \zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right|^2 \frac{4}{(|\zeta|^2 + 1)^2}, \quad (\text{A-106})$$

de onde se obtém o comprimento do vetor tangente:

$$\left| \frac{d\hat{q}}{dt} \right| = \left| \zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \right| \frac{2}{(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (\text{A-107})$$

A razão entre os comprimentos dos vetores tangentes é expressa como:

$$\left| \frac{d\hat{q}/dt}{d\hat{p}/dt} \right| = ||\zeta_\eta| \pm |\zeta_{\bar{\eta}}|| \left( \frac{|\eta|^2 + 1}{|\zeta|^2 + 1} \right). \quad (\text{A-108})$$

A equação (A-108) expressa a distorção imposta pelo mapeamento  $\tau$ , onde um círculo de vetores tangentes ao ponto  $P$  da esfera se transforma em uma elipse de vetores tangentes  $Q$ , cujos eixos maior e menor são dados pela relação (A-108). Como consequência, a distorção da área é dada pelo seguinte fator:

$$F = \left( \frac{|\eta|^2 + 1}{|\zeta|^2 + 1} \right)^2 (|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2). \quad (\text{A-109})$$

A relação entre as densidades de potência implica que o mapeamento  $\tau$  tenha que alterar as áreas na razão  $I/G$ , onde  $I$  é a densidade de potência proveniente da fonte e  $G$  a densidade de potência no campo distante. Com consequência, obtém-se a equação diferencial de conservação da energia:

$$|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2 = \pm \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (\text{A-110})$$