

5 ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR.

Na primeira parte deste capítulo são apresentados de forma concisa alguns dos conceitos necessários ao entendimento dos resultados obtidos neste trabalho, com base nas teses de doutorado de Del Prado (2001) e Orlando (2010). Não se pretende apresentar todos os aspectos concernentes à teoria dos sistemas dinâmicos não lineares. No trabalho publicado por Thompson e Stewart (1986) estes tópicos são tratados com a devida profundidade.

5.1. Conceitos Básicos.

No Capítulo 4 é obtida a equação diferencial não linear de movimento, Equação (4.25), para um arco parabólico abatido suportado horizontalmente por molas elásticas. Entretanto, a análise de sistemas dinâmicos não lineares contínuos é uma tarefa bastante difícil. Na análise deste tipo de problema normalmente utiliza-se um processo de discretização para aproximar o contínuo por um sistema discreto com um número finito de graus de liberdade. Usando um processo de discretização, o arco passa a ser descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo que, por sua vez, pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem no espaço de fase.

Seja o sistema dinâmico discreto com K graus de liberdade cujo movimento é descrito por K equações diferenciais de segunda ordem da forma:

$$\ddot{y} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_k, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_k), i = 1, 2, \dots, k \quad (5.1)$$

onde Y_i são funções não-lineares dos deslocamentos generalizados, y_i , e das velocidades generalizadas, \dot{y}_i , que definem o comportamento do sistema em um dado instante.

Considerando as velocidades \dot{y}_i como variáveis auxiliares, pode-se transformar a equação em um sistema de $n = 2k$, equações diferenciais de movimento de primeira ordem, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ou ainda:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (5.3)$$

onde x é um vetor de dimensão n ($x \in R^n$) tendo como elementos os deslocamentos e velocidades generalizadas, chamado vetor de estado, pois descreve o estado do sistema em um instante t ; e F é o vetor de funções não lineares do sistema. Se o sistema não depende explicitamente do tempo, ele é chamado de sistema autônomo.

Se o sistema depende também de um conjunto de m parâmetros de controle m_i , o sistema autônomo (5.3) pode ser escrito na forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, m) \quad (5.4)$$

Por outro lado, se F depende do tempo, ele é chamado sistema não autônomo, e tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, m) \quad (5.5)$$

É comum se analisar a resposta do sistema em um espaço de menor dimensão onde o tempo aparece implicitamente, denominado espaço de fase, que tem como coordenadas as componentes do vetor de estado x .

A dimensão do espaço solução esta associada ao número de graus de liberdade envolvido na análise e ao tempo. Assim o espaço solução tem dimensão $2k + 1$, enquanto que o espaço de fase é um espaço de dimensão $n = 2k$, sendo k

o número de graus de liberdade do sistema estrutural. Estes espaços e suas projeções são usados para visualizar a evolução do sistema dinâmico no tempo e assim compreender seu comportamento. Na Figura 5.1 mostra-se o espaço solução e o correspondente espaço de fase para um sistema com um grau de liberdade. O operador que transfere o sistema de um estado em $t_0 = 0$ para outro tempo t é chamado fluxo e é determinado pelas equações diferenciais de movimento, cuja solução para os deslocamentos e velocidades depende das condições iniciais. Quando o tempo $t \rightarrow \infty$ o comportamento assintótico do sistema é chamado de estado permanente ou *steady state*, enquanto que o comportamento do sistema antes de alcançar o estado permanente é chamado de estado transiente.

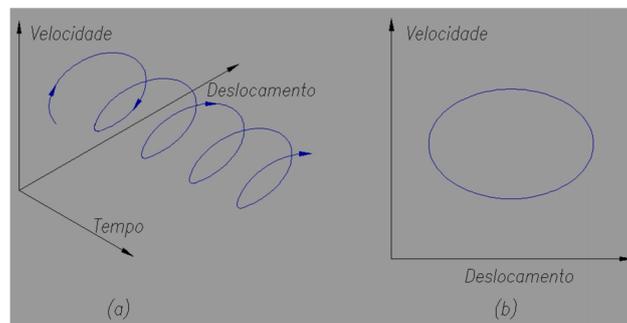


Figura 5.1 - (a) Espaço solução. (b) Plano de fase.

5.2. Estabilidade Local do Equilíbrio – Sistemas Autônomos.

5.2.1. Soluções de Equilíbrio.

Seja o sistema autônomo:

$$\dot{x} = F(x, m) \quad (5.6)$$

Neste sistema F não depende explicitamente da variável tempo t . Assim, a equação (5.6) é chamada de invariante com o tempo ou estacionária. Isto significa que se $x(t)$ é uma solução do sistema (5.6), então $x(t + \tau)$ é também uma solução do sistema (5.6) para qualquer valor arbitrário de t .

Soluções do sistema de equações diferenciais (5.6) são denominadas pontos fixos, sendo obtidas a partir do sistema de equações:

$$F(x, m) = 0 \quad (5.7)$$

Em problemas de estruturas, \mathbf{x} é constituído por componentes de deslocamento e velocidade. Isto implica que em um ponto fixo as componentes de velocidade e acelerações são nulas, o que corresponde fisicamente a uma posição de equilíbrio estático do sistema. Estas soluções são também conhecidas como soluções estacionárias, soluções constantes ou soluções permanentes.

Para se estudar a estabilidade de uma configuração de equilíbrio, deve-se adicionar uma perturbação ao vetor de estado e avaliar a evolução desta perturbação ao longo do tempo. Supondo que uma solução da equação (5.6) com $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ é \mathbf{x}_0 , a estabilidade dessa solução de equilíbrio pode ser determinada ao se impor uma pequena perturbação $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, ou seja:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}(\mathbf{t}) \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em, tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, \mathbf{m}_0) \quad (5.9)$$

Expandindo (5.9) em série de Taylor em relação a \mathbf{x}_0 , tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) + \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) \mathbf{y} + \mathbf{D}_{xx} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) \frac{\mathbf{y}^2}{2!} + 0(\|\mathbf{y}\|^3) \quad (5.10)$$

onde \mathbf{D}_x e \mathbf{D}_{xx} são a primeira e segunda derivada parcial de \mathbf{F} . Tendo em vista que \mathbf{y} é muito pequeno e $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) = \mathbf{0}$, lineariza-se (5.10):

$$\dot{\mathbf{y}} \approx \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (5.11)$$

onde a matriz de derivadas parciais \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Os autovalores da matriz \mathbf{A} fornecem as informações necessárias sobre a estabilidade local do ponto fixo \mathbf{x}_0 .

Quando todos os autovalores da matriz \mathbf{A} têm partes reais diferentes de zero, os pontos correspondentes são chamados de pontos fixos hiperbólicos, independentes do valor da parte imaginária. Quando um ou mais autovalores tem parte real nula, diz-se que o ponto fixo é não hiperbólico.

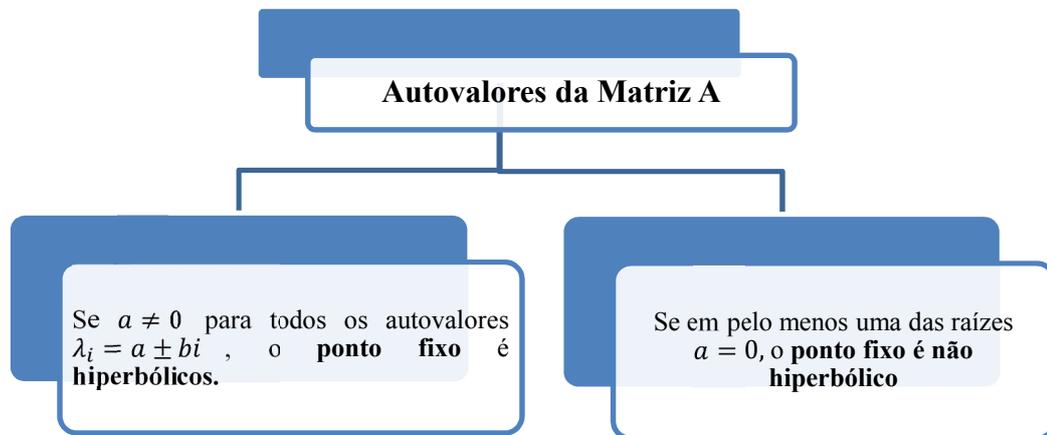


Figura 5.2 - Classificação dos pontos fixos de acordo aos autovalores da matriz A.

A Figura 5.3 mostra a classificação dos pontos fixos hiperbólicos, enquanto a Figura 5.4 mostra a classificação dos pontos fixos não hiperbólicos.

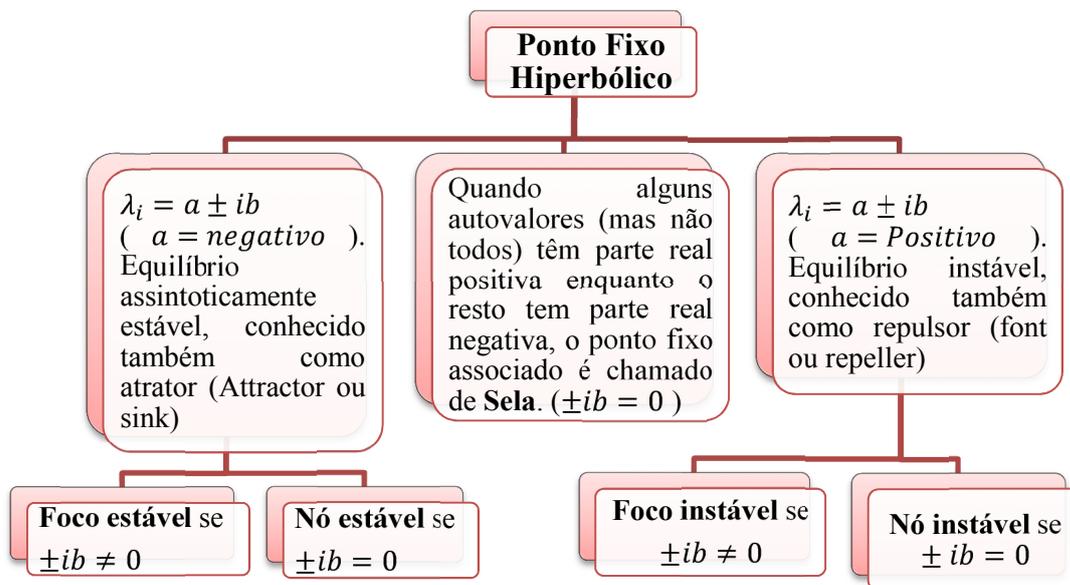


Figura 5.3 - Classificação da estabilidade local segundo os pontos fixo hiperbólicos.



Figura 5.4 - Classificação da estabilidade local segundo os pontos fixo não hiperbólicos.

Na Figura 5.5 são mostrados no plano complexo os autovalores para um sistema descrito por duas equações diferenciais de primeira ordem.

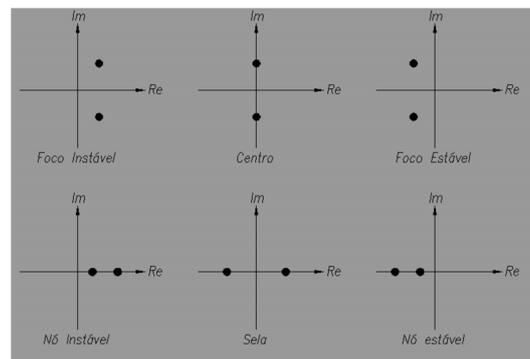


Figura 5.5 - Autovalores da matriz Jacobiana para um sistema de duas equações diferenciais.

5.2.2. Bifurcações das soluções de equilíbrio.

Uma bifurcação refere-se às mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico devidas a variações dos parâmetros de controle. Neste ponto de bifurcação ocorre uma mudança na topologia do retrato fase. Pode-se classificar uma bifurcação como contínua (suave) e descontínua (catastrófica). A bifurcação descontínua é caracterizada por saltos para uma nova solução de equilíbrio ao se atingir o ponto crítico. A bifurcação contínua é caracterizada pelo aparecimento de um novo atrator local que cresce suavemente a partir do ponto de bifurcação.

A variação dos parâmetros de controle m_i de um ponto fixo estável de um sistema contínuo pode produzir a perda de estabilidade por meio das seguintes bifurcações:

- Bifurcação nó-sela, também chamada do ponto limite ou dobra.
- Bifurcação pitchfork ou quebra de simetria, também conhecida por bifurcação simétrica.
- Bifurcação transcritical, também chamada de bifurcação assimétrica.
- Bifurcação de Hopf.

Estas bifurcações podem ser classificadas em dois grupos:

- Bifurcações estáticas.
- Bifurcações dinâmicas

a) Bifurcação estática. A este grupo pertencem as bifurcações nó-sela, por quebra de simetria e transcritical.

Na Figura 5.6 é possível observar os cenários locais das bifurcações estáticas, sendo que as linhas contínuas indicam soluções estáveis e as linhas descontínuas indicam soluções instáveis.

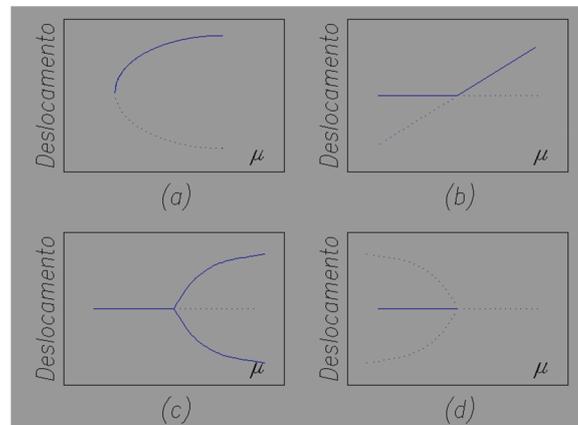


Figura 5.6 - Bifurcações estáticas das soluções de equilíbrio. (a) Bifurcação nó-sela; (b) Bifurcação transcritical; (c) Bifurcação por quebra de simetria supercrítica (bifurcações simétricas estáveis); (d) bifurcação por quebra de simetria subcrítica (bifurcação simétrica instável). μ – parâmetro de controle.

A bifurcação por quebra de simetria pode ser dividida em dois tipos: supercrítica e subcrítica. No caso de uma bifurcação supercrítica, tem-se localmente, de um lado do ponto de bifurcação, um ramo de pontos fixos estáveis e do outro lado, dois ramos de pontos fixos estáveis mais um ramo de pontos fixos

instáveis. Esta bifurcação é por vezes denominada simétrica estável. Em uma bifurcação subcrítica, localmente tem-se, de um lado do ponto de bifurcação, dois ramos de pontos fixos instáveis mais um ramo de pontos fixos estáveis e, do outro lado, um ramo de pontos fixos instáveis. Esta bifurcação é também denominada simétrica instável.

As bifurcações transcítica e simétrica estável são suaves, as bifurcações nó-sela e simétrica instável são catastróficas.

b) Bifurcações Dinâmicas. Neste tipo de bifurcação tem-se a bifurcação de Hopf.

Na Figura 5.7 são apresentadas as bifurcações de Hopf supercrítica e subcrítica.

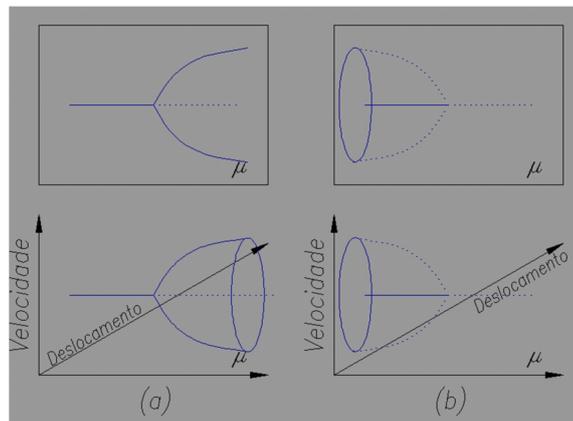


Figura 5.7 - (a) Bifurcação Hopf supercrítica, (b) Bifurcação Hopf subcrítica, μ – parâmetro de controle.

Na Figura 5.8 é apresentado o comportamento de um sistema estrutural de um grau de liberdade, em função dos seus autovalores e dos parâmetros de amortecimento e rigidez.

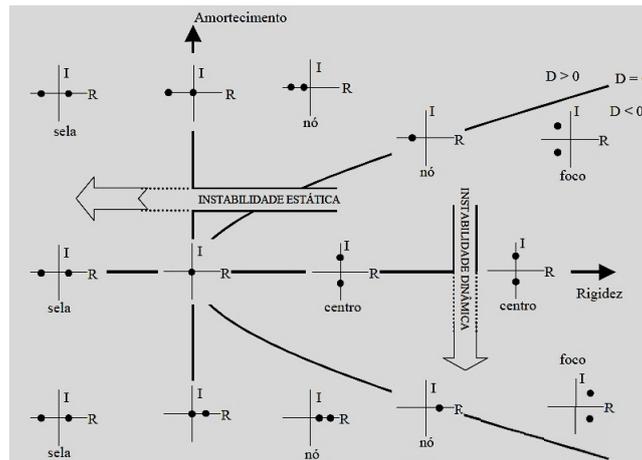


Figura 5.8 - Estrutura das raízes para a equação $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, onde b é o amortecimento efetivo e c a rigidez efetiva. $D^2 = b^2 - 4c$ [Thompson e Stewart, 1993].

5.3. Estabilidade Local de Soluções Periódicas.

Diz-se que um sistema é periódico se:

$$X(t+T) = X(t) \wedge X(t+t) \neq X(t) \quad (5.13)$$

para o intervalo de $0 < t < T$, onde T é um período mínimo ou básico.

5.3.1. Mapa de Poincaré

Uma solução periódica é aquela que se repete em um intervalo de tempo (cíclica). Devido à dificuldade de identificar a estabilidade de soluções periódicas, o mapeamento de Poincaré é um artifício muito utilizado. Ele reduz a dimensão do espaço solução, transformando-o de um sistema contínuo em um sistema discreto.

Na Figura 5.9 pode-se ver que o espaço das condições iniciais do problema é apresentado no *plano de fase ou plano de Poincaré*, designado pela letra Σ , e os planos paralelos ao plano Σ , que estão separados com um intervalo Δt , são denominadas as *seções de Poincaré*. O mapeamento de Poincaré refere-se ao conjunto de pontos sequencias do *espaço de fase* plasmados na *seção de Poincaré* e que são transformados ao espaço de condições iniciais (*plano de fase*).

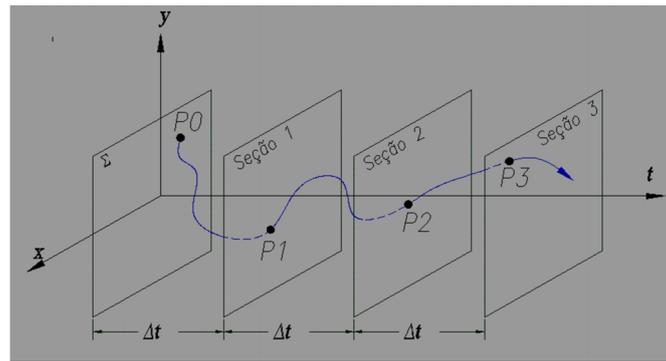


Figura 5.9 - Planos de Poincaré.

Diz-se que a solução é periódica, de período igual à força excitadora, se um único ponto se repete nas sucessivas seções de Poincaré, o qual é conhecido como *ponto fixo periódico* de ordem um (correspondente a uma órbita fechada). A presença de oscilações sub-harmônicas faz surgir mais de um ponto no mapa de Poincaré. Por exemplo, se aparecem dois pontos no plano de fase, se diz que o período da resposta é o dobro do período da força excitadora. Na medida em que aumenta o número de ponto fixos do mapa, a solução passa a ter um período cada vez mais longo.

Quando no processo de mapeamento, os novos pontos jamais coincidem com algum marcado anteriormente, a órbita é chamada de aberta e o movimento é não periódico.

5.3.2. Teoria de Floquet.

Em uma solução periódica de um sistema dinâmico é possível determinar se a solução é estável e como que ela pode perder sua estabilidade mediante a teoria de Floquet. Um resumo é aqui apresentado (Nayfeh e Balachandran, 1995, Del Prado, 2001).

Movimentos periódicos com período T podem representar duas classes de sistema:

Caso1: Sistemas não autônomos: Considere uma solução periódica \mathbf{x}_r com período mínimo T e que em um instante de tempo o sistema ocupa a posição \mathbf{x}_0 ao longo da órbita fechada. Neste caso a periodicidade implica em que $\mathbf{x}_r(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_r(\mathbf{x}_0, t + T)$.

Caso2: Sistema Autônomo: A solução x_r periódica se $x_r(t_0) = x_r(t_0 + T)$ e $x_r(t_0) \neq x_r(t_0 + t)$ para $0 < t < T$.

Para estudar o comportamento de uma solução periódica $x_r(t)$, considera-se uma pequena perturbação $\tilde{x}(t)$, ou seja:

$$x(t) = x_r(t) + \tilde{x}(t) \quad (5.14)$$

Para um sistema excitado externamente, caso 1, substitui-se a equação (5.14) na equação (5.5), obtendo-se:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{F}(\tilde{x} + t) \quad (5.15)$$

Expandido \tilde{F} em séries de Taylor e considerando somente os termos lineares, tem-se que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D(t)\tilde{x}(t) \quad (5.16)$$

onde D é a matriz com coeficientes dependentes do tempo dada por:

$$D(t) = \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \left. \frac{\partial \tilde{F}(x, t)}{\partial \tilde{x}} \right|_{x_r(t)} \quad (5.17)$$

No caso de uma solução periódica de um sistema autônomo (caso 2), obtém-se um sistema equivalente à equação (5.17), a saber:

$$D(t) = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_r=0} \quad (5.18)$$

Na teoria da estabilidade de Floquet a matriz D é substituída por uma matriz com coeficientes constantes, onde $\tilde{x}(t)$ é calculada em múltiplos do período básico T , ou seja, em $t = T, 2T, 3T, \dots$. Definem-se a seguir as soluções fundamentais $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$ como as n soluções lineares independentes da equação diferencial (5.16):

$$\tilde{x}(t) = c_1 \tilde{x}_1(t) + c_2 \tilde{x}_2(t) + \dots + c_n \tilde{x}_n(t) \quad (5.19)$$

que também se pode expressar da forma:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{X}(t)c \quad (5.20)$$

onde $\tilde{X}(t)$ é chamada matriz das soluções fundamentais e c é o vetor das constantes. Seja agora a matriz fundamental $\Phi(t)$ que tem como componentes as soluções fundamentais do sistema, onde as condições iniciais ficam dentro de uma esfera de raio 1:

$$\Phi(t) = [\Phi_1(t) \quad \Phi_2(t) \quad \cdots \quad \Phi_n(t)] \quad (5.21)$$

com condições iniciais:

$$\Phi(0) = I \quad (5.22)$$

Aplicando o argumento da periodicidade é possível estabelecer uma matriz $C_{n \times n}$ de modo que a seguinte igualdade seja válida:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \quad (5.23)$$

A matriz C mapeia $\Phi(t)$ em $\Phi(t+T)$, o que corresponde exatamente à definição do mapa de Poincaré para um sistema periódico.

Tendo em vista as condições iniciais dadas pela equação (5.22), pode-se deduzir da equação (5.23) que:

$$\Phi(T) = \Phi(0)C = IC = C \quad (5.24)$$

A matriz C é conhecida como a matriz monodromia. Geralmente ela não pode ser definida analiticamente, pelo que é necessário calculá-la numericamente.

5.3.3. Estabilidade de uma solução periódica.

A estabilidade de uma solução periódica pode ser definida mediante os autovalores da matriz monodromia conhecidos como Multiplicadores de Floquet. Na Figura 5.10 é apresentado o significado dos multiplicadores de Floquet para duas equações diferenciais de primeira ordem.

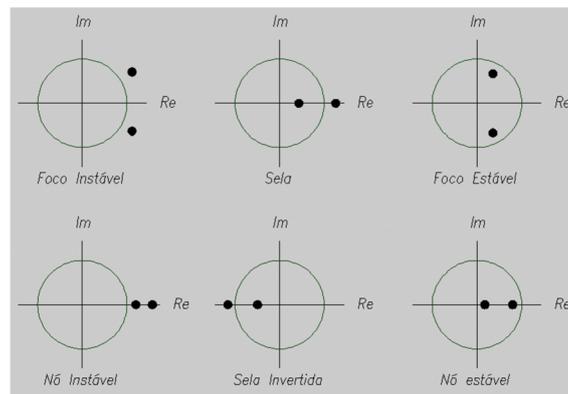


Figura 5.10 - Multiplicadores de Floquet para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem.

5.3.4. Bifurcações das Soluções Periódicas.

As bifurcações das soluções periódicas também são caracterizadas através da maneira como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo de radio unitário.

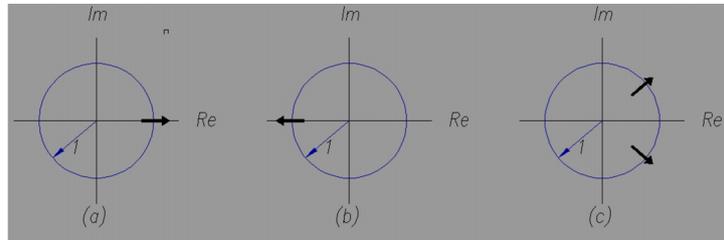


Figura 5.11 - Forma como os multiplicadores de Floquet podem sair do círculo de raio unitário.

As soluções periódicas podem exibir os seguintes tipos de bifurcações:

- Bifurcações por quebra de simetria.
- Bifurcação por dobra cíclica.
- Bifurcação transcritical.
- Bifurcação flip ou por duplicação de período.
- Bifurcação de Hopf secundária ou de Neimark.

As bifurcações por quebra de simetria, dobra cíclica e transcritical ocorrem quando um autovalor real deixa o círculo unitário através do ponto +1, ver a Figura 5.11a. A bifurcação por duplicação de período ocorre quando o autovalor real deixa o círculo através do ponto -1, Figura 5.11b. A bifurcação de Hopf ocorre quando um par de autovalores complexos ultrapassa o círculo de raio unitário, como visto na Figura 5.11c.

A seguir são apresentados alguns comentários sobre uma destas bifurcações:

- a) Bifurcação por quebra de simetria:** É caracterizada por ter um braço de soluções periódicas que é estável antes da bifurcação e instável depois de acontecido a bifurcação. Tem-se dois tipos de bifurcação, o primeiro é a bifurcação supercrítica (contínua ou suave) que tem soluções periódicas assimétricas estáveis e soluções periódicas simétricas instáveis depois de ocorrida a bifurcação, e a bifurcação subcrítica (descontínua ou catastrófica) que tem soluções periódicas assimétricas

instáveis e soluções simétricas estáveis depois de ocorrida a bifurcação (ver Figura 5.6c e Figura 5.6d).

- b) Bifurcação por dobra cíclica:** Neste tipo de bifurcações existe um braço de soluções periódicas que podem ser estáveis ou instáveis antes da bifurcação, porém, depois da bifurcação, o braço de soluções periódicas desaparece (ver Figura 5.6a).
- c) Bifurcação transcritical:** Os braços das soluções periódicas estáveis mudam para instáveis e vice-versa após da bifurcação (ver Figura 5.6b).
- d) Bifurcação flip ou por duplicação de período:** Tem um braço de soluções estáveis que depois da bifurcação mudam para instáveis, igual a uma bifurcação por quebra de simetria. Estas bifurcações podem ser divididas em supercríticas e subcríticas. Em uma bifurcação tipo supercrítica é criado mais um braço de soluções estáveis de periodicidade dobrada, enquanto que uma bifurcação subcrítica um braço de soluções instáveis com período dobrado é destruído depois da bifurcação (ver Figura 5.12).

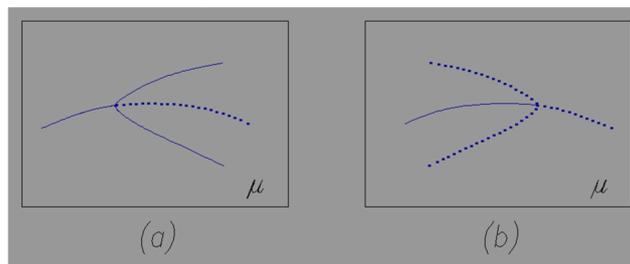


Figura 5.12 - Bifurcação Flip ou duplicação de período (a) Supercrítica, (b) Subcrítica.

- e) Bifurcação de Hopf secundária ou de Neimark:** A bifurcação de Hopf, nas soluções periódicas, está caracterizada por introduzir uma nova frequência a partir do ponto de bifurcação, ver Figura 5.11c. A nova solução pode ser periódica ou quase periódica, dependendo da relação da nova frequência introduzida e da frequência da solução que existia antes da bifurcação. Novamente, esta bifurcação pode ser supercrítica ou subcrítica. Em ambas as bifurcações, o braço das soluções estáveis periódicas que existia antes da bifurcação continua como um braço de soluções instáveis periódicas após a bifurcação. Se a bifurcação for supercrítica, um braço de soluções quase periódicas estáveis será criado,

mas se a bifurcação for subcrítica, um braço de soluções quase periódicas instáveis é destruído, o que representa uma bifurcação descontínua.

5.4.

Análise Dinâmica Não Linear do Arco Abatido.

A equação diferencial não linear de movimento (4.25), que descreve o comportamento de um arco parabólico abatido submetido a um carregamento vertical, é resolvida mediante métodos numéricos fazendo uso do programa computacional Maple e dos algoritmos desenvolvidos no grupo de pesquisa usando a Microsoft Visual Studio.

5.4.1.

Resposta no Tempo e Planos de Fase.

Como visto no ponto 5.1, uma equação diferencial de segundo ordem pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem. Neste trabalho a solução deste sistema de equações é obtida através do método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

Seja $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ e $x(t) = V_1(t)$, onde $y(t)$ é uma função auxiliar que transforma a equação não linear (4.18) em um sistema de equações de ordem um:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (5.25)$$

Assim, a equação (4.18) passa ser descrita pelo sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(t) = & \frac{1}{\left(1 + \frac{B_6}{A_6}x(t) + \frac{C_6}{A_6}x^2(t)\right)} \left[-\left(\frac{B_6}{2A_6} + \frac{C_6}{A_6}x(t)\right)y^2(t) - \frac{2A_0}{A_6}x^3(t) \right] \\
+ & \frac{1}{\left(1 + \frac{B_6}{A_6}x(t) + \frac{C_6}{A_6}x^2(t)\right)} \left[-\left(\frac{3B_0}{2A_6} + \frac{6A_0V_1}{A_6}\right)x^2(t) - \left(\frac{6A_0V_1^2}{A_6} + \frac{C_0}{A_6} + \frac{3B_0V_1}{A_6}\right)x(t) \right] \\
+ & \frac{1}{\left(1 + \frac{B_6}{A_6}x(t) + \frac{C_6}{A_6}x^2(t)\right)} \left[\frac{q_d \sin(\Omega t)}{2A_6} \right] \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Para o caso de um arco amortecido acrescenta-se a (5.26) o termo $C_a \frac{d}{dt}V_1(t)$ (onde C_a é a constante de amortecimento), dada em termos do amortecimento crítico:

$$C_C = 2M_0\omega_o = 2\sqrt{M_0K_0} \tag{5.27}$$

Os termos M_0 e K_0 são dados nas equações (4.33) e (4.34).

5.4.2. Diagramas de Bifurcação.

Existem diferentes métodos para obtenção do diagrama de bifurcação. Neste trabalho são utilizados os métodos da *Força Bruta* e da *Continuação*. O método da força bruta obtém uma sequência de soluções permanentes estáveis do sistema dinâmico quando se varia o parâmetro de controle. Ele consegue encontrar soluções periódicas, soluções quase periódicas e movimentos caóticos, sendo útil para uma compreensão global da dinâmica do sistema. Os algoritmos de continuação permitem obter soluções estáveis e instáveis de baixa periodicidade.

5.4.3. Bacias de Atração.

Os sistemas dinâmicos não lineares podem exibir diversas soluções estáveis coexistentes, ditas atratores, tendo cada um deles uma bacia de atração associada, ou seja, conjunto de condições iniciais que levam, após o regime transiente, a um dado atrator. Nos trabalhos publicados por Thompson e Stewart (1986), Del Prado (2001), Savi (2006) e Orlando (2010), dentre outros, este tópico é apresentado com a devida profundidade.

5.5. Análises dos resultados obtidos

Visando ilustrar o efeito da não linearidade do arco, integra-se numericamente o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (5.26) usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e compara-se inicialmente a resposta no tempo destas duas equações com respeito às equações linearizadas obtidas no Capítulo 4. O arco aqui analisado têm as características geométricas e físicas apresentadas na Tabela 2.1. Além disso, adotam-se os valores de $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$ para a análise dinâmica do sistema.

5.5.1. Resposta no Tempo.

Na Figura 5.13 apresenta-se a resposta no tempo da estrutura em vibração livre não amortecida para uma velocidade inicial igual $vel_0 = 0$ e um deslocamento inicial de $V_{10} = 0.01$. Verifica-se que para pequenos deslocamentos iniciais a resposta linear e não linear coincidem.

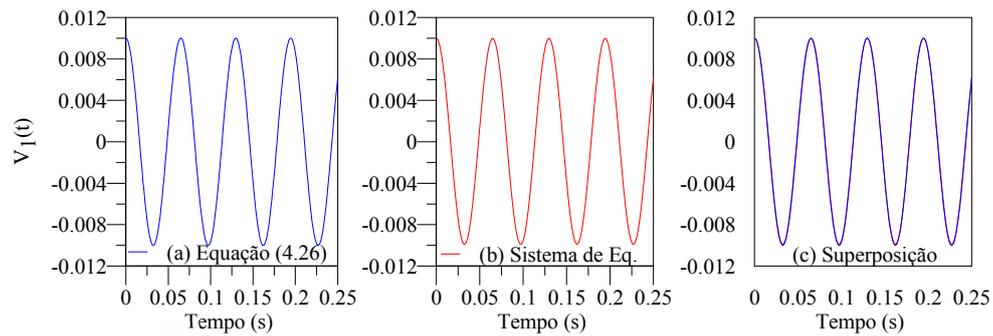


Figura 5.13 - Resposta no tempo. (a) Equação (4.26). (b) Sistema de Equações (5.26). $vel_0 = 0$ e $V_{10} = 0.01$.

Na Figura 5.14 mostra-se a resposta no tempo para o arco em vibração forçada não amortecida para as condições iniciais são $V_{10} = 0.0$; $vel_0 = 0.0$. Utiliza-se uma frequência de excitação igual a $\Omega = 51\text{Hz}$, e uma magnitude adimensional de excitação $\frac{q_0 p}{N_p}$ igual a uma porcentagem do carregamento crítico estático, como indicado na figura. Em todos os casos observa-se uma grande diferença entre as respostas no tempo e, em particular, os deslocamentos máximos obtidos para um sistema linear e não linear, crescendo esta diferença à medida que cresce a magnitude do carregamento dinâmico cresce.

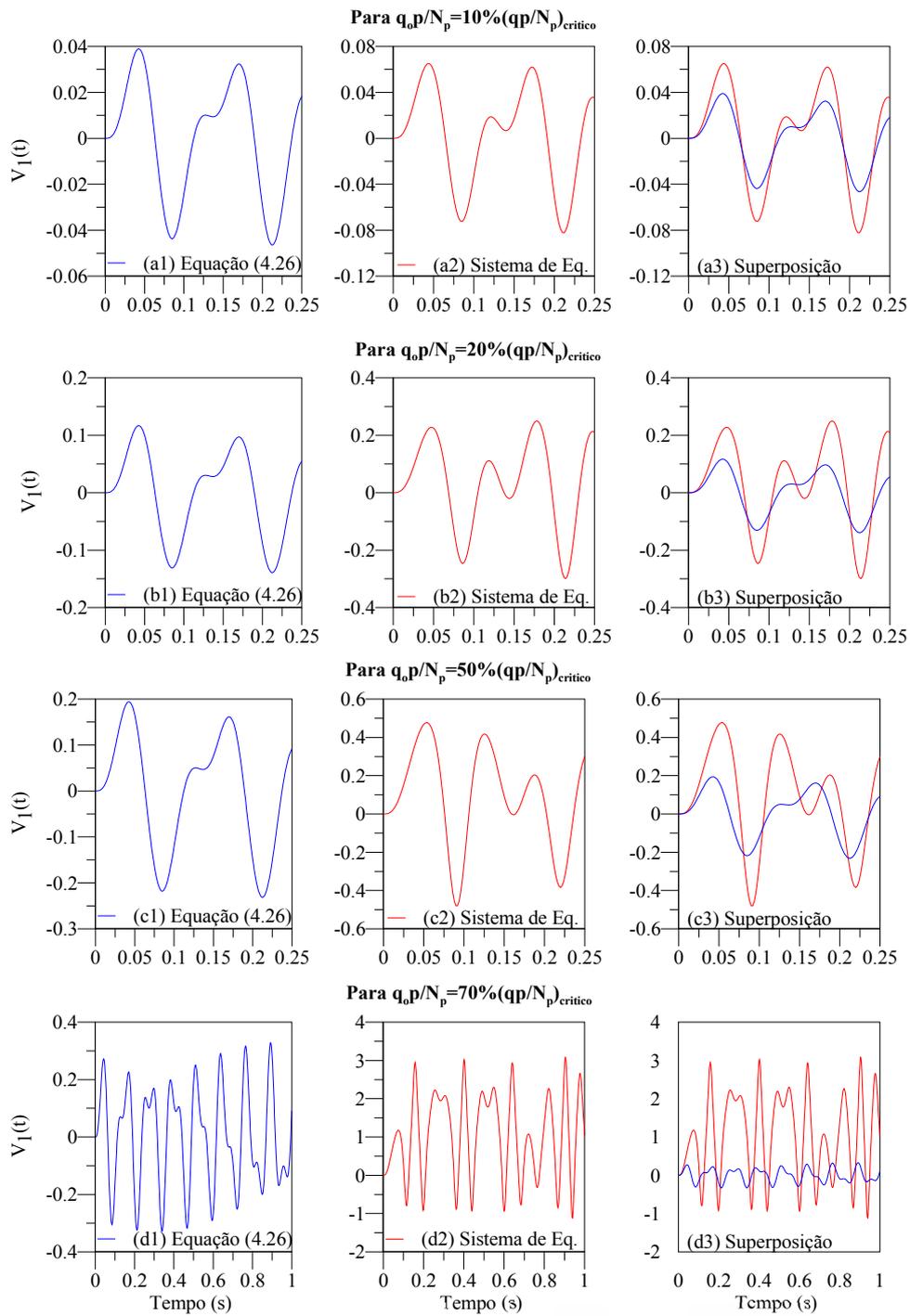


Figura 5.14 - Resposta no tempo para diferentes magnitudes do carregamento dinâmico.

Comparação da solução linear com o não linear. $V_{10} = \mathbf{0}, \mathbf{0}$; $vel_0 = \mathbf{0}, \mathbf{0}$. $\Omega = 51\text{Hz}$.

5.5.2. Sistema Amortecido.

Na presente análise considera-se que o arco tem um amortecimento igual a $C = 3\%C_c$. O nível de amortecimento crítico muda com o carregamento. A Tabela 5.1 mostra o valor de C para valores crescentes do pré-carregamento estático. Estes valores são obtidos empregando a equação (5.27).

Tabela 5.1 - Coeficiente de amortecimento C para $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$ em função do nível de carregamento.

Porcentagem	$\%(\text{qp}/N_p)_{\text{crit}}$	V1	$C=3\%C_c$
0%	0.000	0.000	7.06E-10
10%	0.060	0.023	6.85E-10
30%	0.180	0.074	6.36E-10
50%	0.299	0.134	5.77E-10
70%	0.419	0.211	4.99E-10
90%	0.539	0.327	3.68E-10
100%	0.599	0.498	5.80E-12

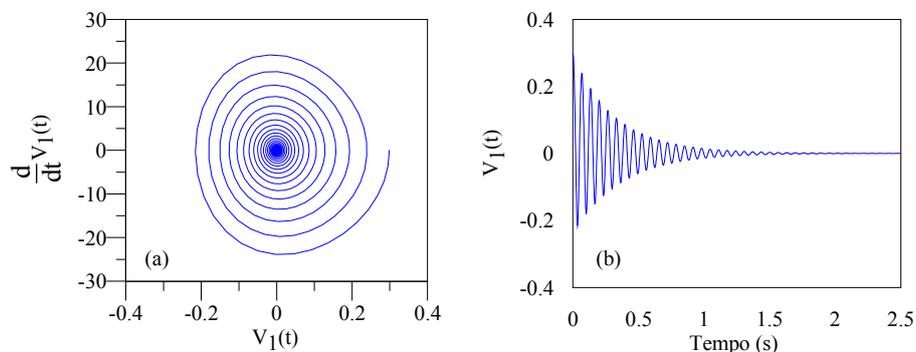


Figura 5.15 - Sistema amortecido (a) Plano de fase. (b) Reposta no tempo

Na Figura 5.15 mostra-se a resposta do sistema amortecido para um carregamento estático e dinâmico igual zero e $V_{10} = 0.299$ e $vel_0 = 0.0$. Neste caso, após uma perturbação inicial, a amplitude da resposta decresce rapidamente convergindo para uma solução trivial.

Na Figura 5.16 e Figura 5.17 apresenta-se o comportamento do arco ao ser submetido a diferentes amplitudes de carregamento dinâmico com uma frequência de excitação $= 30\text{Hz}$. Na Figura 5.16a, verifica-se que o arco encontra-se no vale

potencial de pré-flambagem. À medida que a carga cresce, cresce a complexidade da resposta no tempo, mas o arco permanece no vale pré-flambagem (Figura 5.16 de (a) a (f)). A seguir o arco passa a apresentar vibrações de grande amplitude visitando simultaneamente dois vales potenciais (Figura 5.16 de (g) a (j)). Um comportamento semelhante é observado na Figura 5.17, onde a estrutura se encontra submetida a um carregamento estático igual a 50% do carregamento crítico estático ($\frac{q_p}{N_p} = 0.299$). Verifica-se que a estrutura oscila no vale potencial pré-flambagem (Figura 5.17d) quando a amplitude do carregamento dinâmico $\frac{q_{o,p}}{N_p}$ é igual aos 20% do carregamento crítico. Porém, se $\frac{q_{o,p}}{N_p} = 30\%(\frac{q_p}{N_p})_{crit}$ o sistema escapa deste vale potencial pré-crítico e a solução converge para o vale pós-crítico, Figura 5.17f.

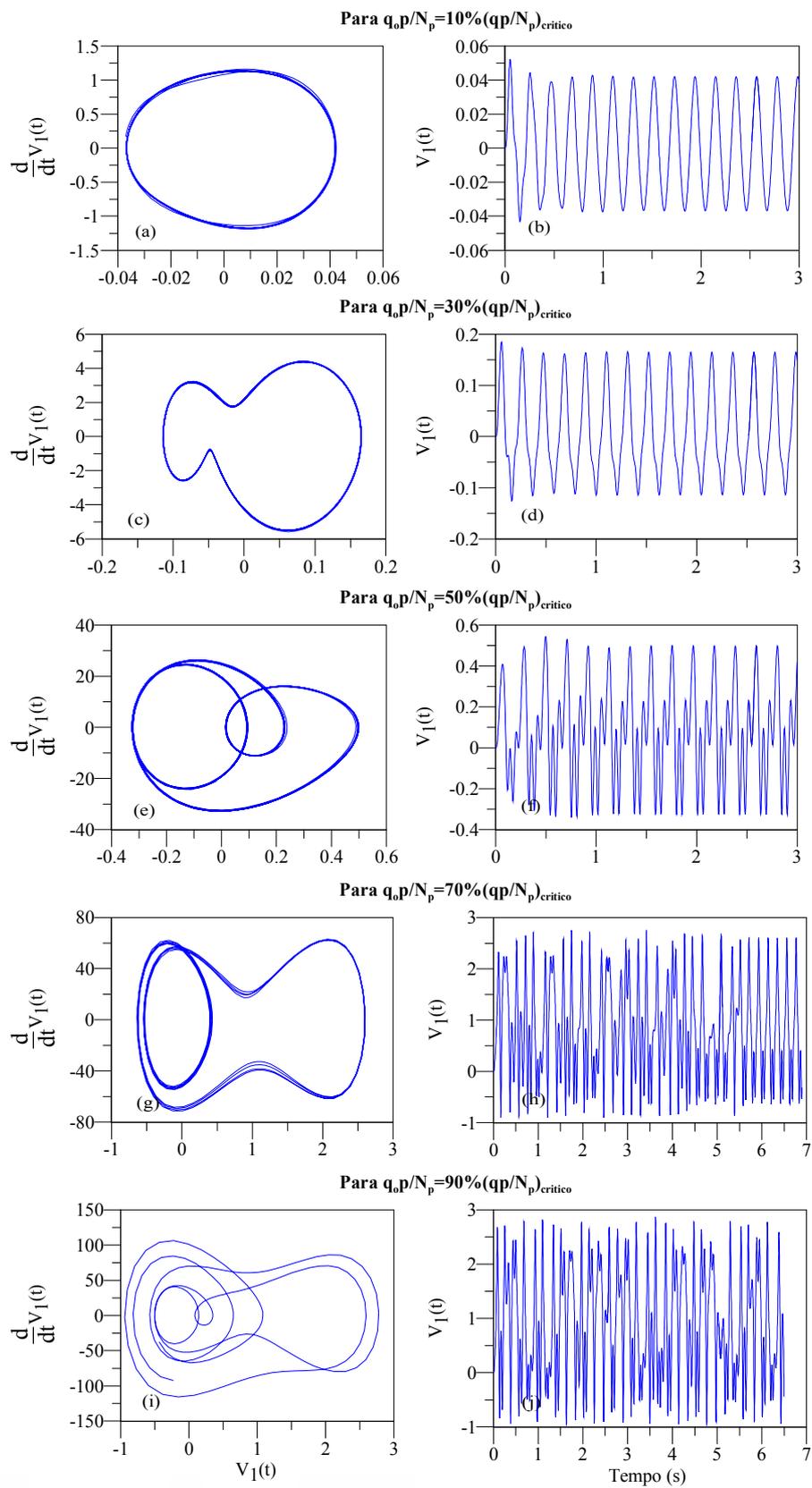


Figura 5.16 - Plano de fase e reposta no tempo para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $q p / N_p = 0.0\% (q p / N_p)_{\text{crit}}$, $\Omega = 30 \text{ Hz}$.

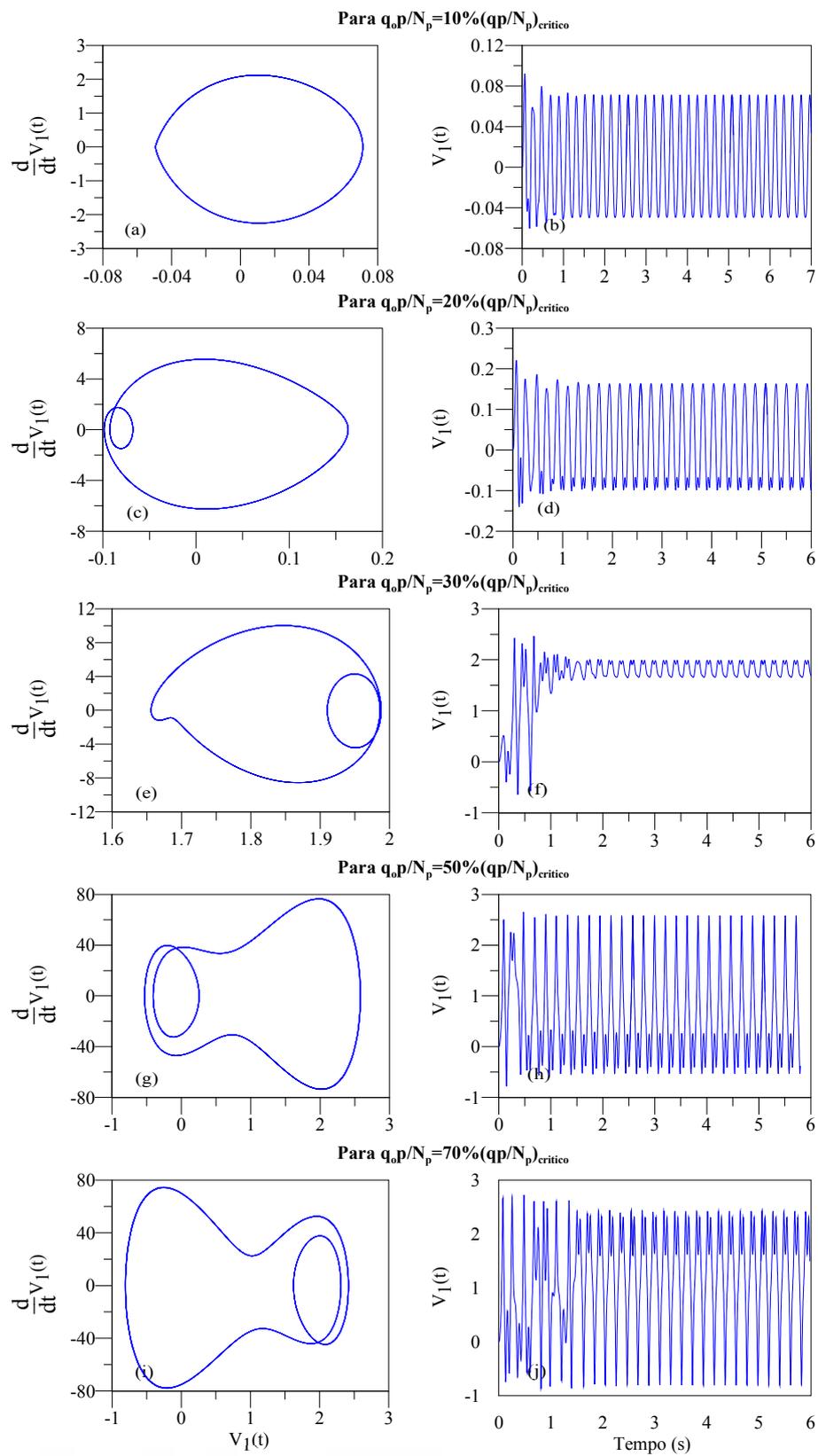


Figura 5.17 - Plano de fase e resposta no tempo para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{crit}$, $\Omega = 30 \text{ Hz}$.

5.5.3. Diagramas de Bifurcação em Função da Frequência da Excitação.

Na Figura 5.18 e Figura 5.19 apresentam-se os diagramas de bifurcação obtidos pelo método da força bruta para valores crescentes da magnitude da força, dada em porcentagem da carga crítica estática, tendo como variável de controle a frequência da excitação. A magnitude da força varia de 5% a 20% do valor crítico na Figura 5.18 e de 30% a 100% do valor crítico na Figura 5.19. O arco encontra-se sem nenhum carregamento estático. Mostra-se o diagrama para a frequência crescendo (em azul), diminuindo (em vermelho) e a superposição dos dois ramos. Na Figura 5.18, para 5% do valor crítico, a resposta é praticamente linear, coincidindo com a resposta clássica do sistema em ressonância. À medida que cresce a magnitude do carregamento dinâmico a não linearidade aumenta, apresentando um comportamento com perda de rigidez. Tem-se neste caso duas bifurcações nó-sela onde ocorrem saltos entre as soluções ressonantes e não ressonantes. Para 15% e 20% do valor crítico se observa uma bifurcação por duplicação de período no ramo ressonante (em vermelho), após a qual ocorre o salto.

Na Figura 5.19, quando o arco é submetido a um carregamento estático igual a 30% do valor crítico, passa a aparecer uma zona de movimento caótico. À medida que a carga cresce, aumenta a complexidade da resposta com diversas ressonâncias sub-harmônicas e regiões caóticas.

A Figura 5.20 e Figura 5.21 apresentam os diagramas considerando um nível de carregamento estático igual a 50% do valor crítico e valores crescentes da carga dinâmica. Comparando-se com a Figura 5.18 e Figura 5.19, verifica-se que a não linearidade aumenta de forma significativa em virtude do pré-carregamento estático.

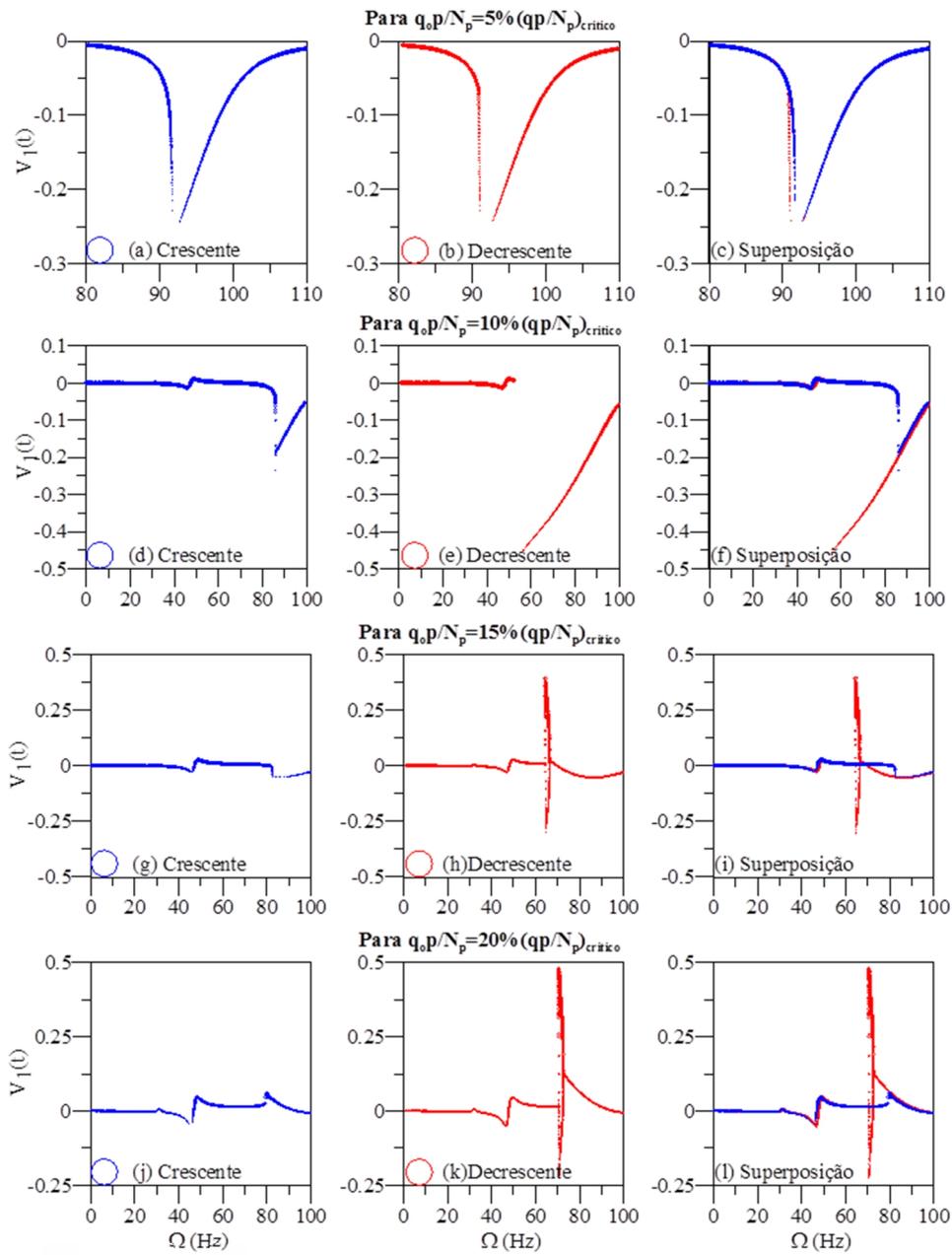


Figura 5.18 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $q_0 p / N_p = 0\% (q_0 p / N_p)_{crit}$.

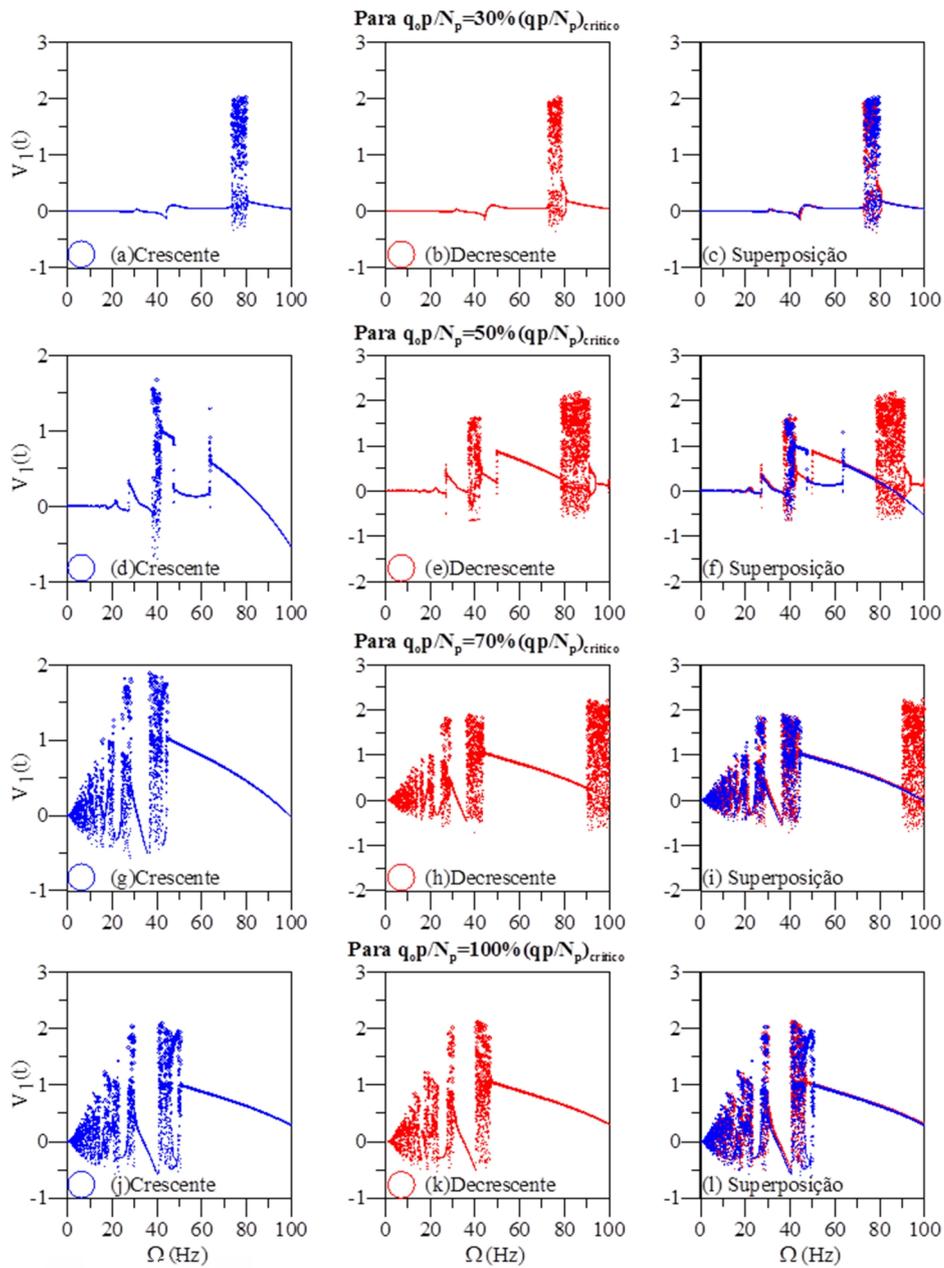


Figura 5.19 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $q_0 p / N_p = 0\% (q_0 p / N_p)_{\text{crit.}}$

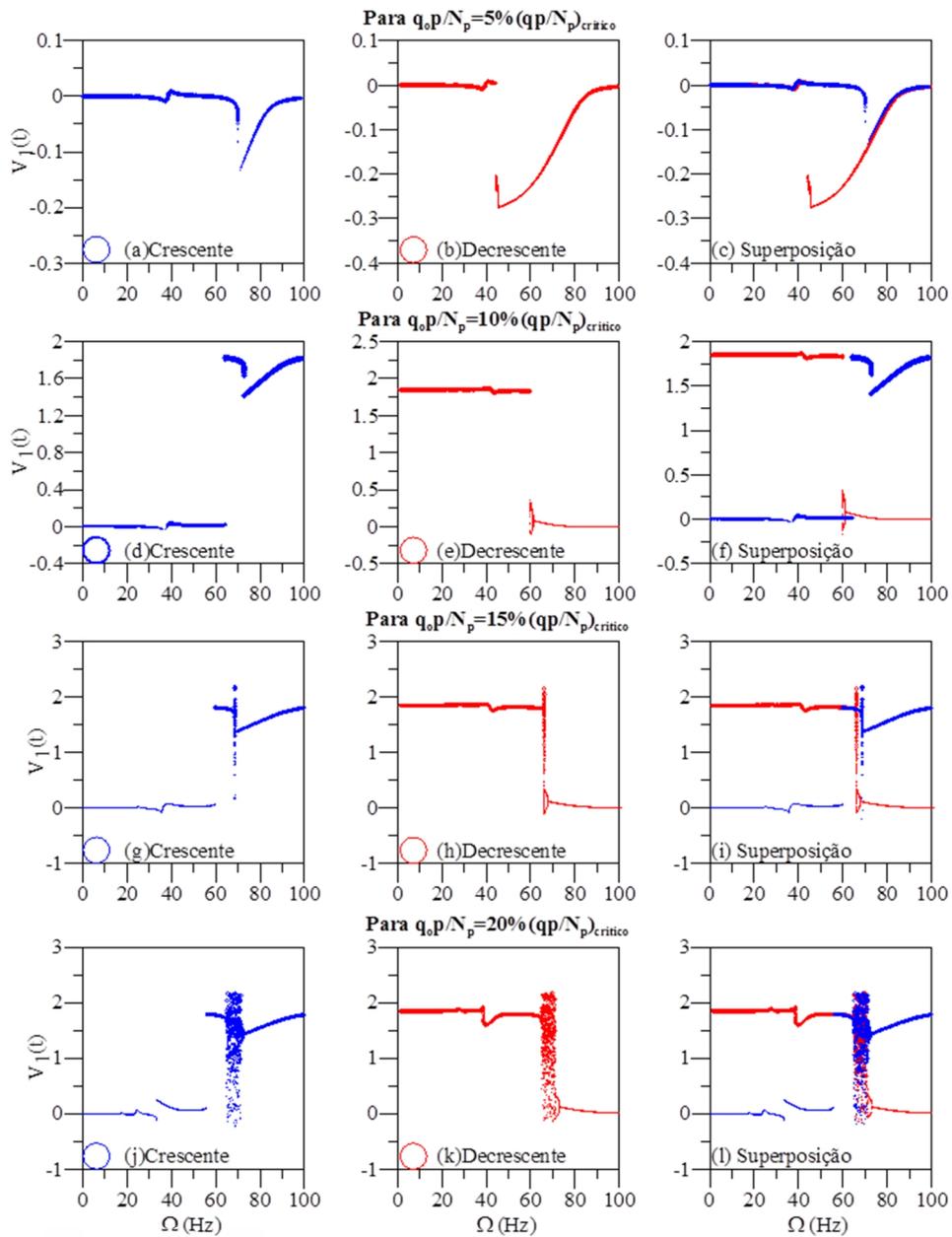


Figura 5.20 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $q p / N_p = 50\% (q p / N_p)_{crit.}$

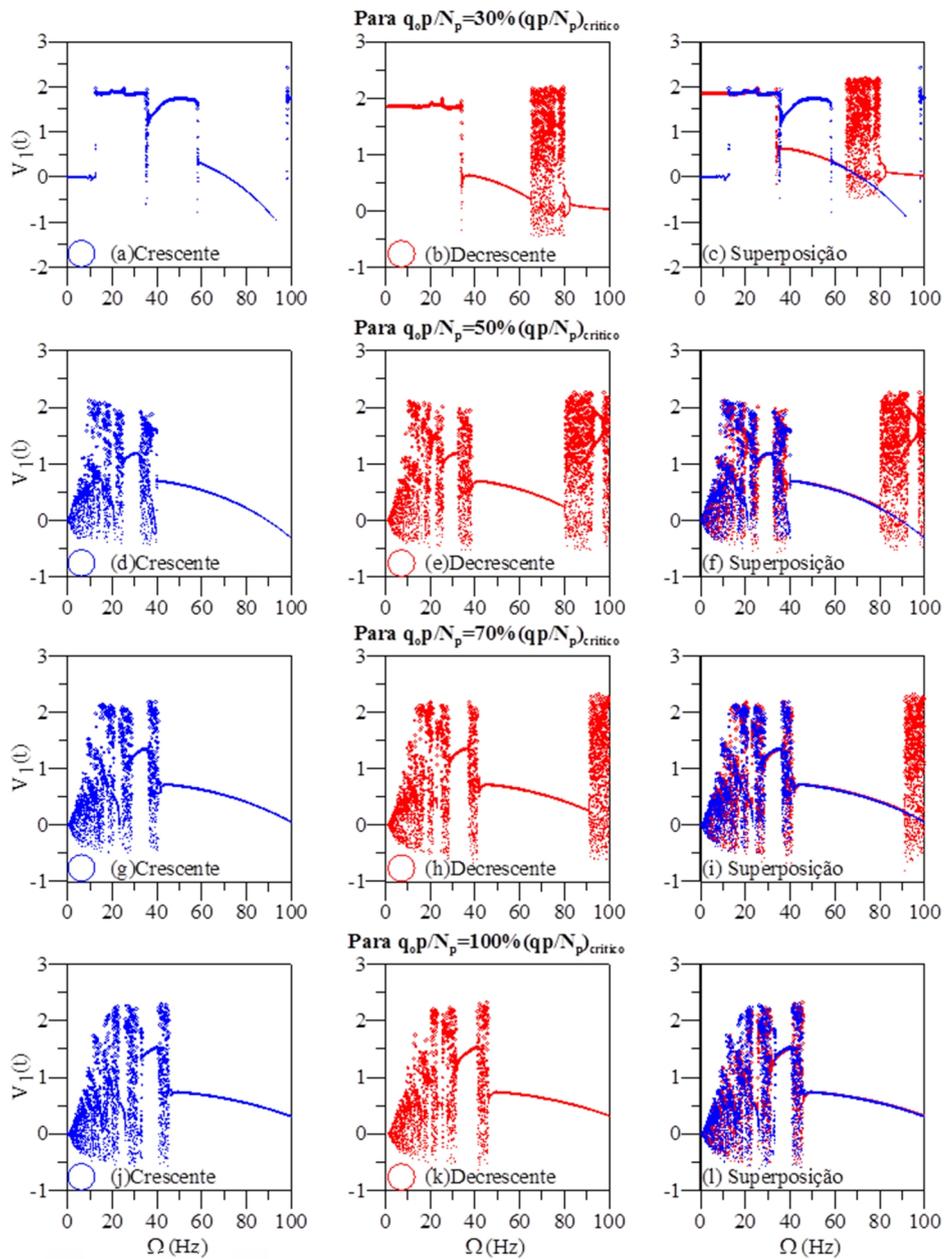


Figura 5.21 -Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $q p / N_p = 50\% (q p / N_p)_{\text{crit.}}$

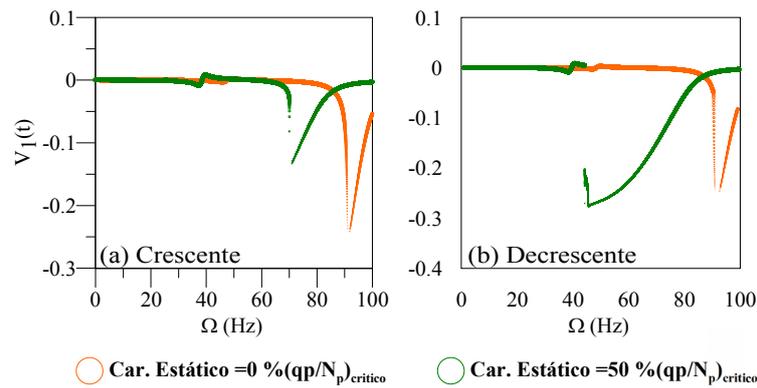


Figura 5.22 – Diagrama de bifurcação para carregamento dinâmico igual $qp/N_p = 50\%$ $(qp/N_p)_{crit}$.

A Figura 5.23 mostra com mais detalhes as bifurcações nó sela e os saltos dinâmicos que ocorrem no vale potencial pré-flambagem entre respostas ressonantes e não ressonantes. A Figura 5.23c mostra uma resposta quase linear, ou seja, não existe bifurcação nó-sela. Para a amplitude do carregamento dinâmico $\frac{q_0 p}{N_p} = 5\% \left(\frac{q p}{N_p}\right)_{crit}$ a resposta já apresenta uma não linearidade e a faixa onde ocorrem soluções estáveis coexistentes é de aproximadamente 1 Hz, ver Figura 5.23f. Na medida em que $\frac{q_0 p}{N_p}$ aumenta seu valor, a não linearidade e a faixa de frequências onde ocorre soluções estáveis coexistentes aumenta.

Observando-se os resultados apresentados nas Figura 5.18 a Figura 5.23, verifica-se que, para determinados valores do parâmetro de controle, a estrutura perde a estabilidade (escape do vale potencial pré-flambagem) e passa a vibrar em torno da posição de equilíbrio pós-crítico ($V_1=2$) ou exibe vibrações de grande amplitude percorrendo os dois vales potenciais. Em muitas aplicações práticas estas oscilações são inaceitáveis ou as tensões ultrapassam o limite de resistência do material e ocorre dano ou mesmo colapso da estrutura.

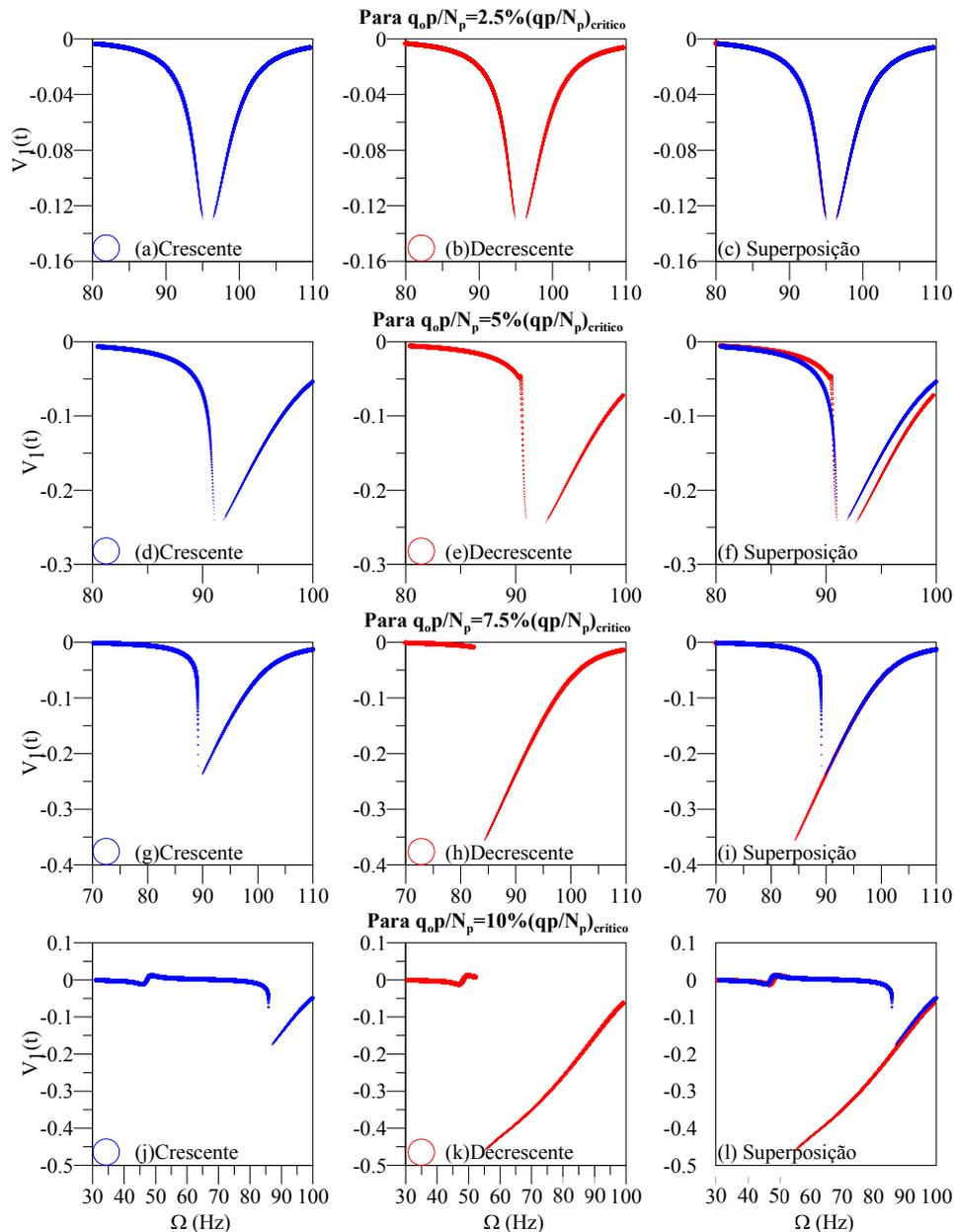


Figura 5.23 – Diagramas de bifurcação. $q p / N_p = 0\% (q p / N_p)_{crit}$.

Quando o arco encontra-se submetido a um carregamento estático de $\frac{q p}{N_p} = 50\% \left(\frac{q p}{N_p}\right)_{crit}$ o sistema perde rigidez (rigidez efetiva diminui). Assim, quando o arco é submetido a forças harmônicas, a faixa de frequências onde ocorre soluções estáveis simultâneas aumenta, como se pode ver na Figura 5.24.

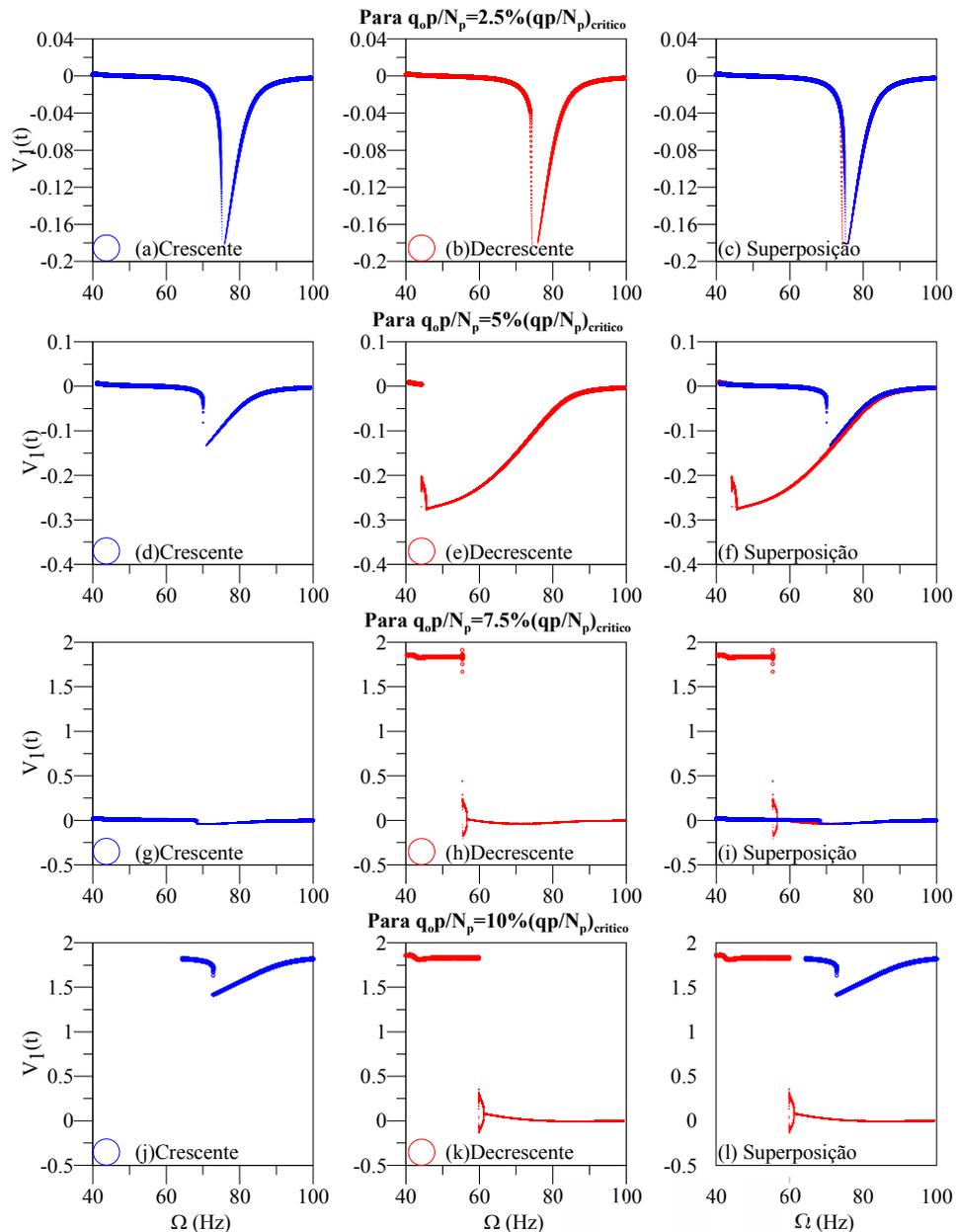


Figura 5.24 – Diagramas de bifurcação. $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{crit}$

Até aqui, os gráficos apresentados foram obtidos numericamente pelo programa computacional Maple. A Figura 5.25 mostra uma comparação dos resultados entre o programa Maple e o algoritmo desenvolvido no trabalho de Del Prado (2001), onde se observa uma perfeita coerência dos resultados.

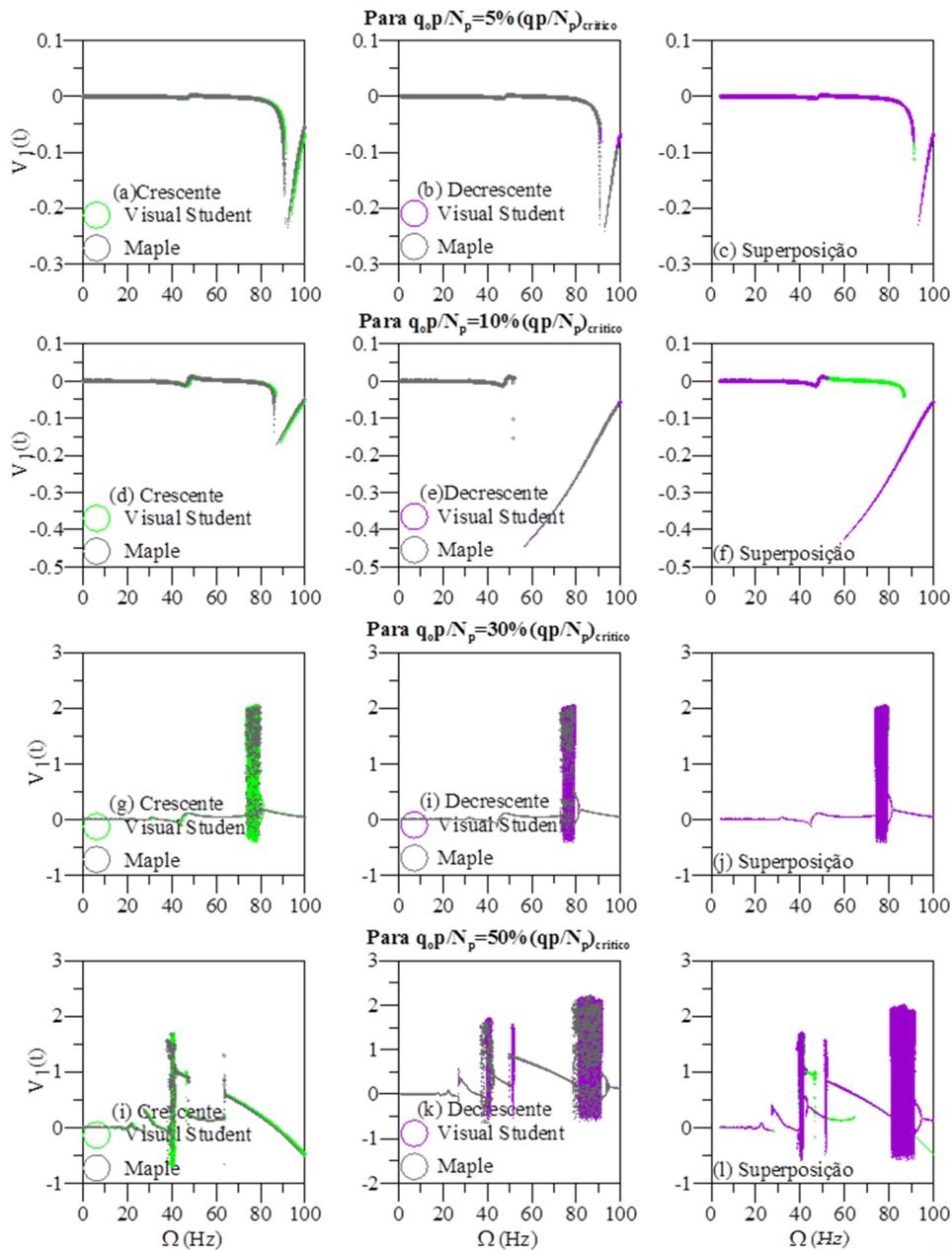


Figura 5.25 – Diagramas de bifurcação. Comparação dos resultados obtidos entre o programa computacional Maple e o algoritmo desenvolvido por Orlando (2010). $q_p/N_p = 00\%$ (q_p/N_p)crit.

Finalmente na Figura 5.26 mostram-se os diagramas de bifurcação obtidos pelo método da continuação (gráficos do extremo direito) e os respectivos multiplicadores de Floquet (gráficos do extremo esquerdo e do meio). Aqui, no diagrama da continuação, as linhas contínuas representam respostas estáveis e linhas tracejadas respostas instáveis. Como ressaltado anteriormente, estes trechos

instáveis não podem ser obtidos pelo método a força bruta. Para a obtenção destes resultados utilizou-se novamente o algoritmo desenvolvido no trabalho de Del Prado (2001). A Figura 5.27 mostra os resultados quando se considera um pré-carregamento estático igual a 50% da carga crítica. Dos diagramas de bifurcação pode-se também verificar que, à medida que a magnitude do carregamento dinâmico aumenta, surge uma segunda ressonância em $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ que influencia o comportamento dinâmico do sistema, este efeito não seria observado em um sistema linear, já que é devido a não linearidade quadrática do arco abatido.

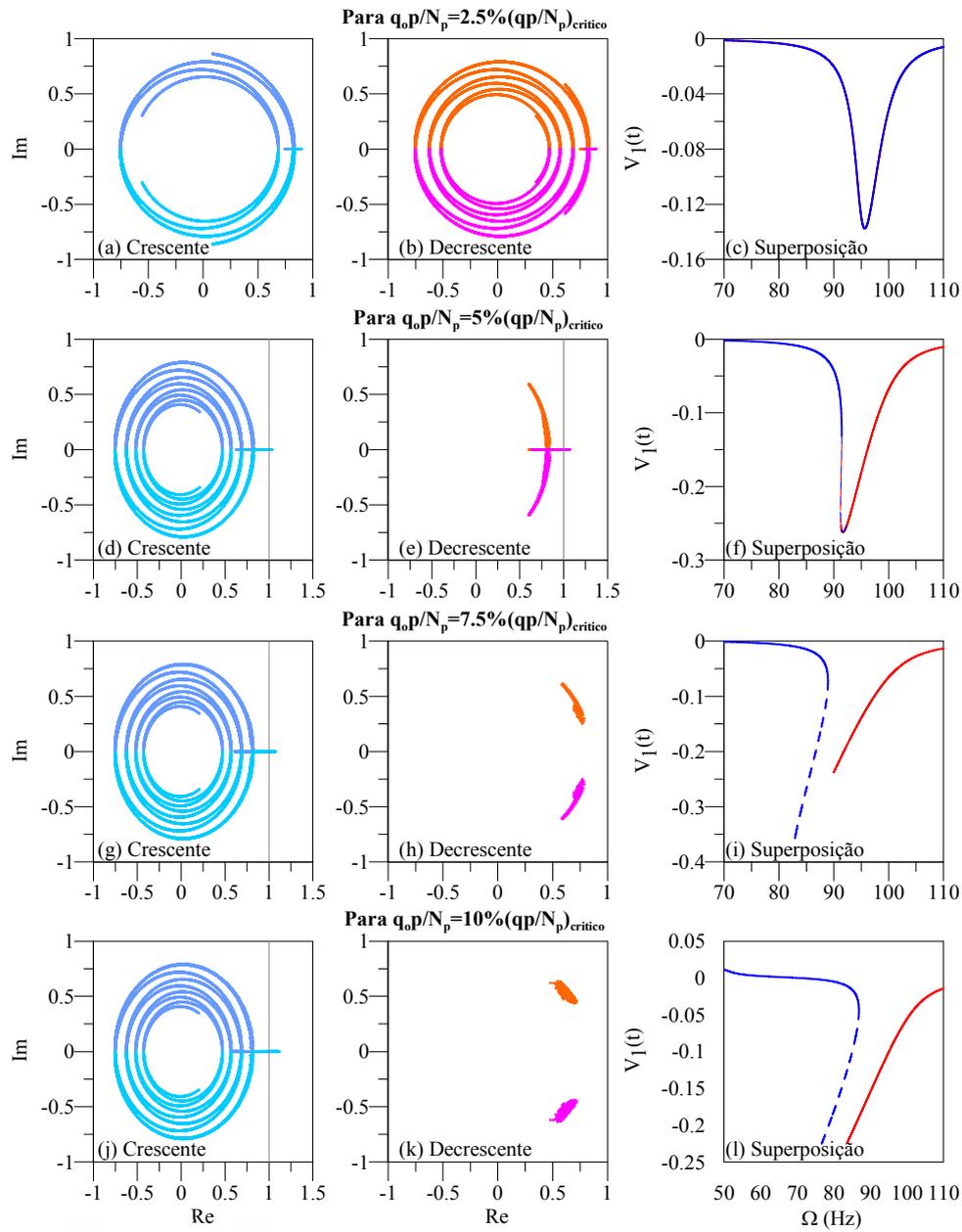


Figura 5.26 - Multiplicadores de Floquet e diagrama de bifurcação, método da continuação. $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{\text{critico}}$.

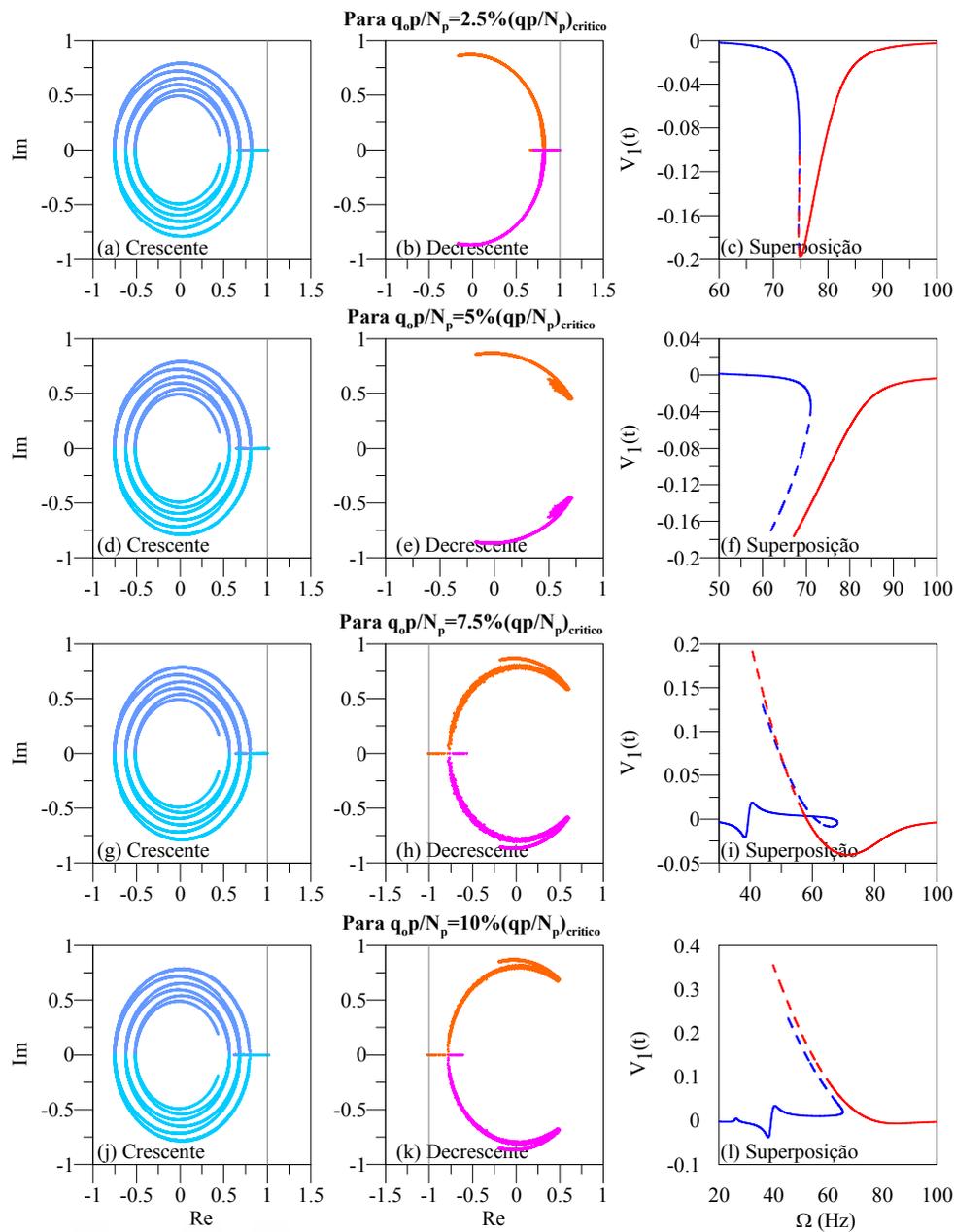


Figura 5.27 - Multiplicadores de Floquet e diagramas de bifurcação, método da continuação. $q_0 p / N_p = 50\% (q_0 p / N_p)_{crit}$.

Para uma melhor compreensão das figuras anteriormente mostradas, analisou-se o comportamento dos multiplicadores de Floquet, Figura 5.26 e Figura 5.27, onde se pode ver que a estabilidade do sistema (como visto no item 5.3.2) é determinada mediante estes multiplicadores. Veja-se, por exemplo, na Figura 5.28d e Figura 5.28f como variam os autovalores com o parâmetro de controle Ω . Quando o parâmetro de controle cresce, Figura 5.28e, a perda de estabilidade acontece quando a parte real de um dos dois autovalores (multiplicadores de Floquet)

ultrapassa o valor de um. Neste caso o valor do parâmetro de controle é igual $= 91.2 \text{ Hz}$.

Quando o arco encontra-se com pré-carregamento estático $\frac{qp}{N_p} = 50\% \left(\frac{qp}{N_p}\right)_{crit}$ os ramos perdem a estabilidade de diferentes formas, o ramo crescente ultrapassa o valor de +1, enquanto que o ramo decrescente perde estabilidade a través do ponto -1, além disso, pode-se ver que os valores de $V_1(t)$ são diferentes para cada ramo, ver Figura 5.29d e Figura 5.29e, o que significa que a não linearidade do sistema é cada vez maior.

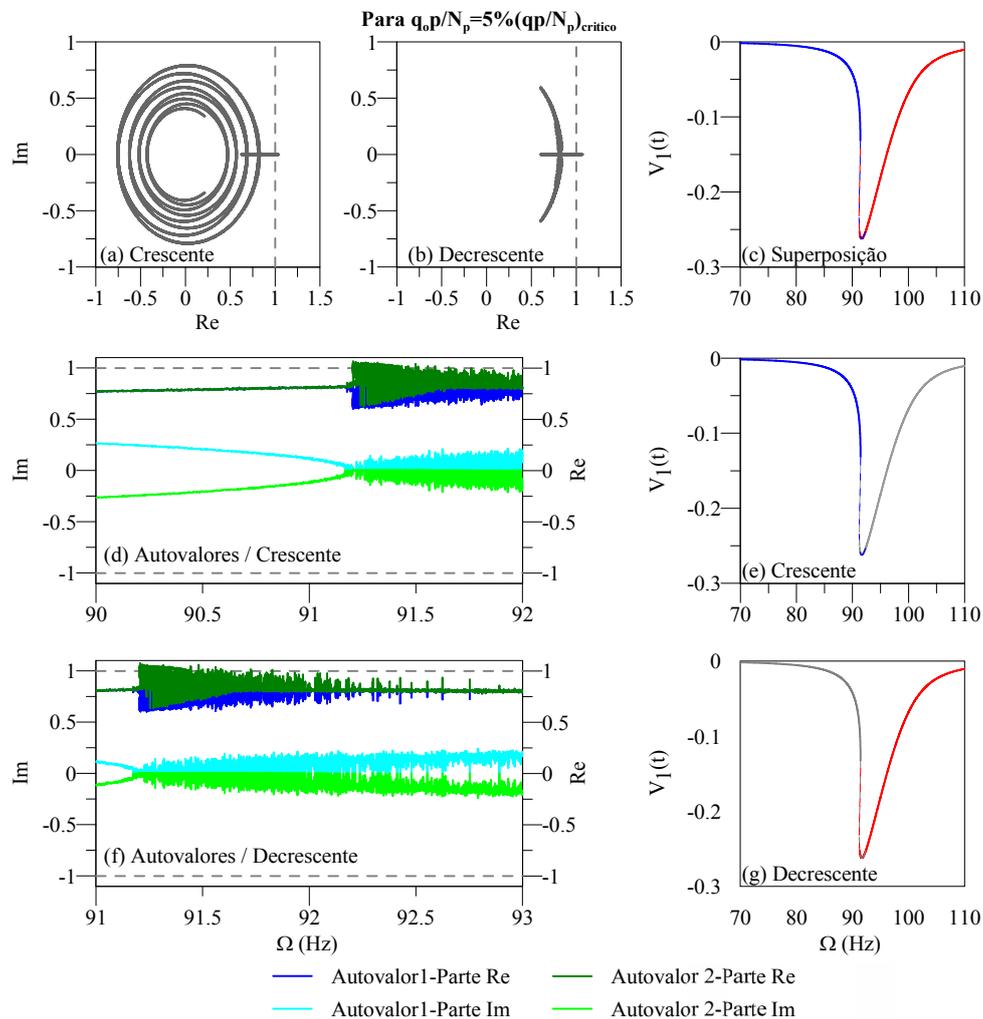


Figura 5.28 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, $qp/N_p = 0\% (qp/N_p)_{crit}$

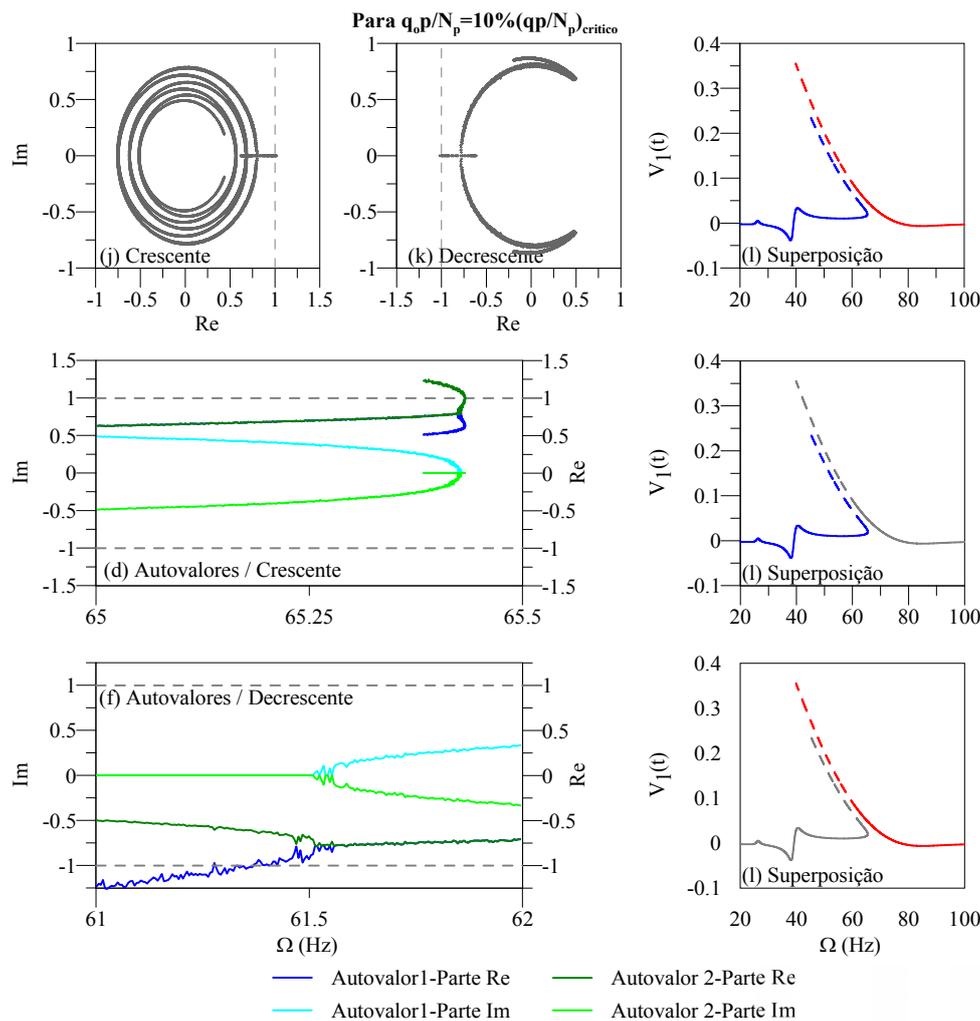


Figura 5.29 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, $q p / N_p = 50\%$ ($q p / N_p)_{crit}$

5.5.4. Diagramas de Bifurcação em Função da Magnitude de Excitação.

Como no item anterior, os diagramas de bifurcação aqui apresentados foram obtidos para dois níveis de pré-carregamento estático ($\frac{q p}{N_p} = 0\% \left(\frac{q p}{N_p} \right)_{crit}$), e para $\frac{q p}{N_p} = 50\% \left(\frac{q p}{N_p} \right)_{crit}$). Estes diagramas foram obtidos pelo método da força bruta e pelo método da continuação. Mostra-se também o comportamento dos coeficientes de Floquet que determinam a perda de estabilidade e o tipo de bifurcação que acontece na estrutura. Nota-se que, para valores pequenos de Ω , comparado à frequência fundamental, ω_0 , o arco apresenta soluções periódicas de período um até atingir o um valor crítico quando passa a exibir soluções caóticas

de grande amplitude (ver, por exemplo, Figura 5.30 de (a) a (d)). Para frequências um pouco inferiores a $\omega_0/2$ (ver, por exemplo, Figura 5.30 de (e) a (g)), a estrutura passa a exibir bifurcações nó sela no vale pré-crítico em função da ressonância sub-harmônica com soluções coexistentes, como se observa nos diagramas obtidos pelo método da continuação. Este fenômeno volta a ocorrer para frequências de excitação um pouco inferiores a ω_0 .

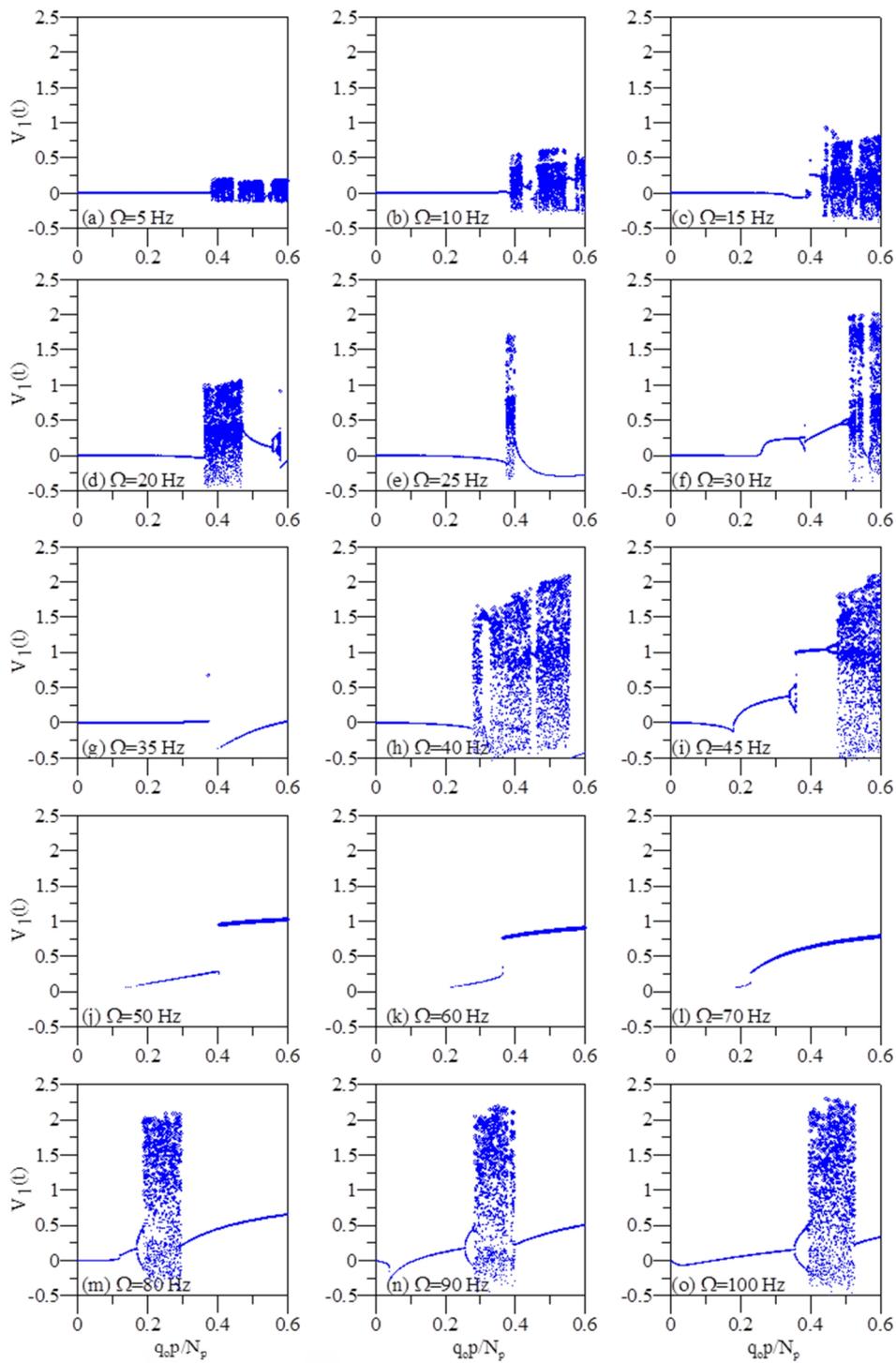


Figura 5.30 - Diagrama de bifurcação para valores seleccionados da frequência, método da força bruta (Maple). $qp/N_p = 0\%$ (qp/N_p)crit.

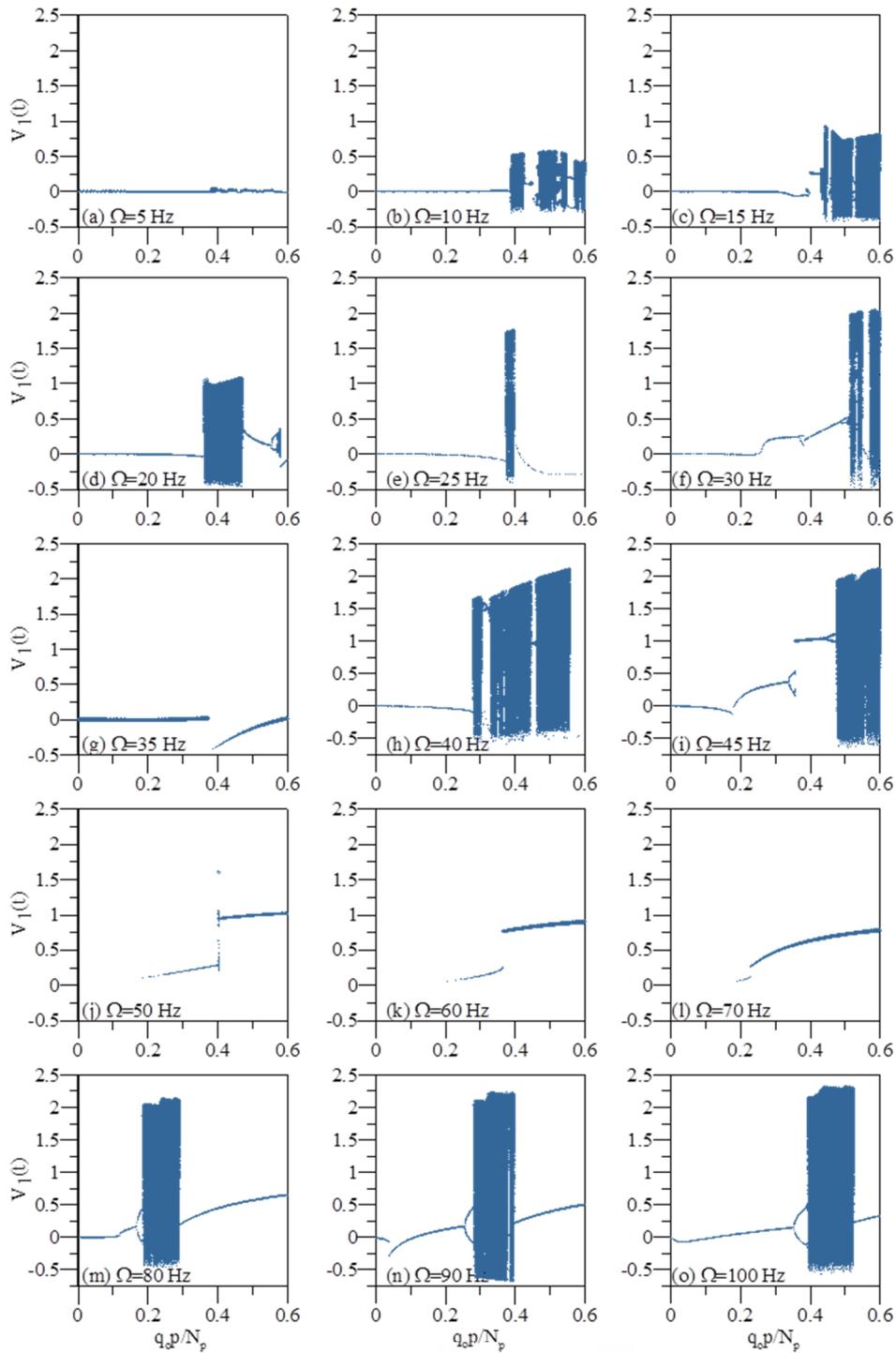


Figura 5.31 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, método da força bruta (Visual Studio). $qp/N_p = 0\%$ (qp/N_p)crit

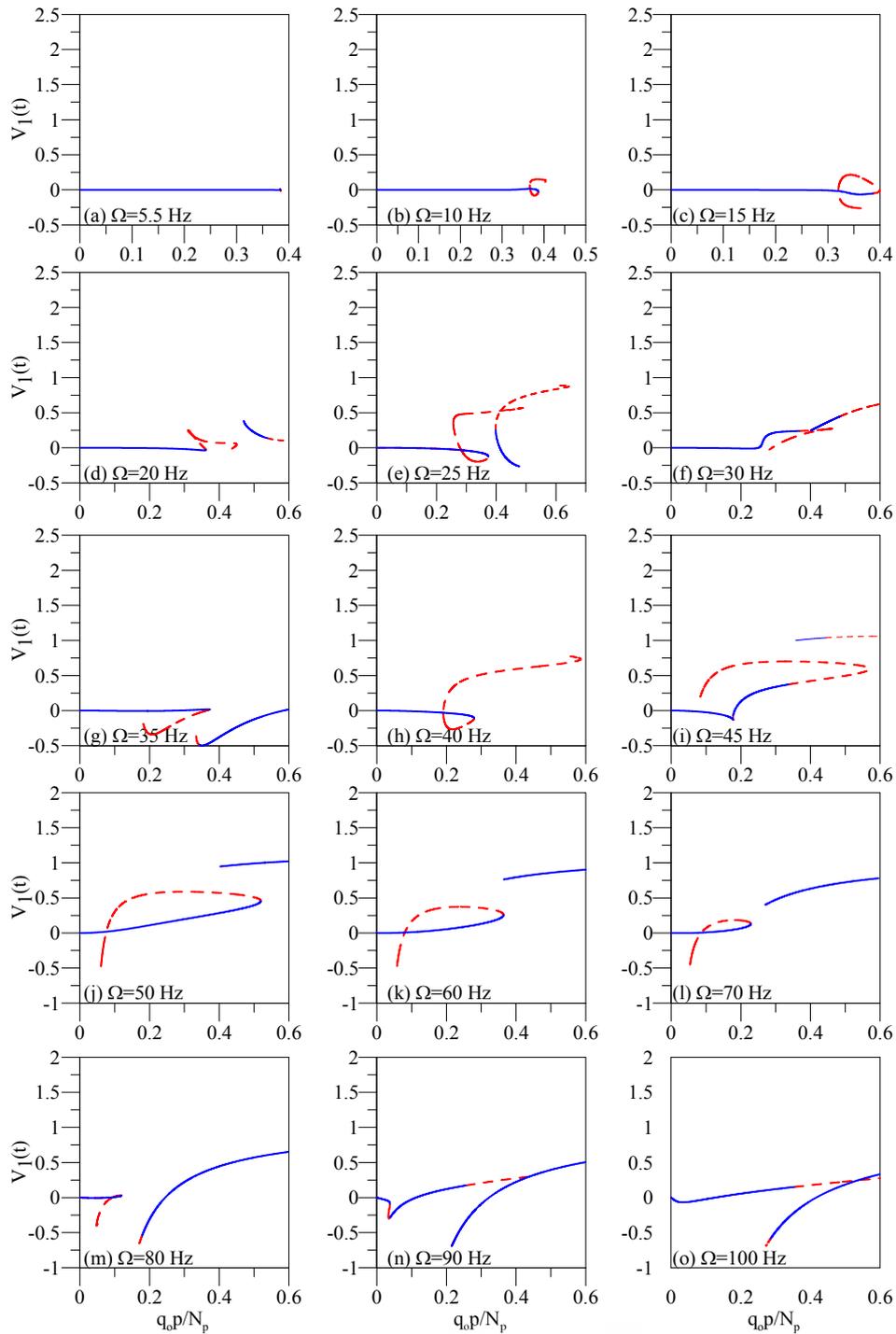


Figura 5.32 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência da excitação, método da continuação (Visual Studio). $q_p/N_p = 0\%$ (q_p/N_p)crit.

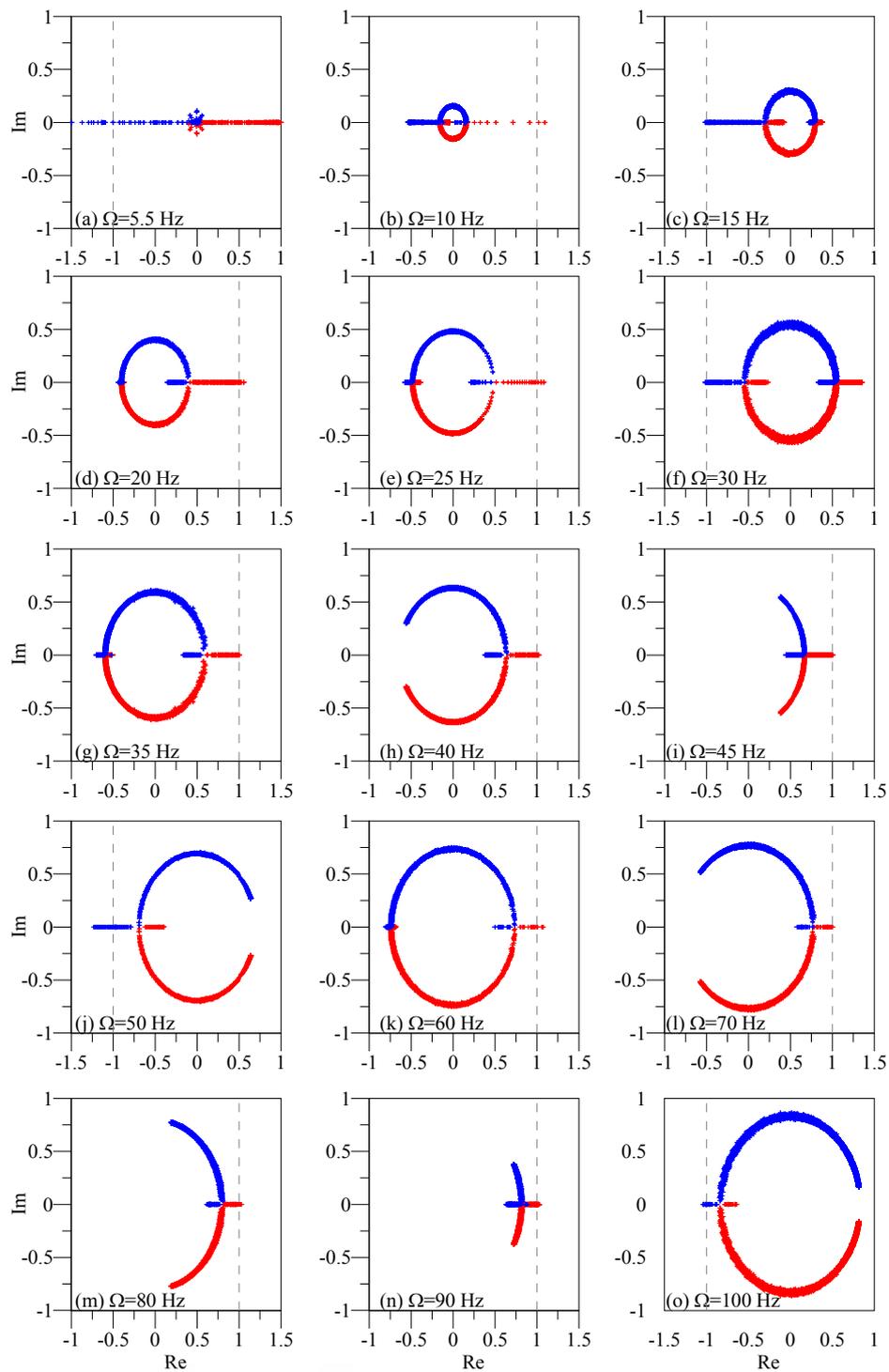


Figura 5.33 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet para o primeiro caminho de equilíbrio do sistema. $qp/N_p = 0\%$ (qp/N_p)crit

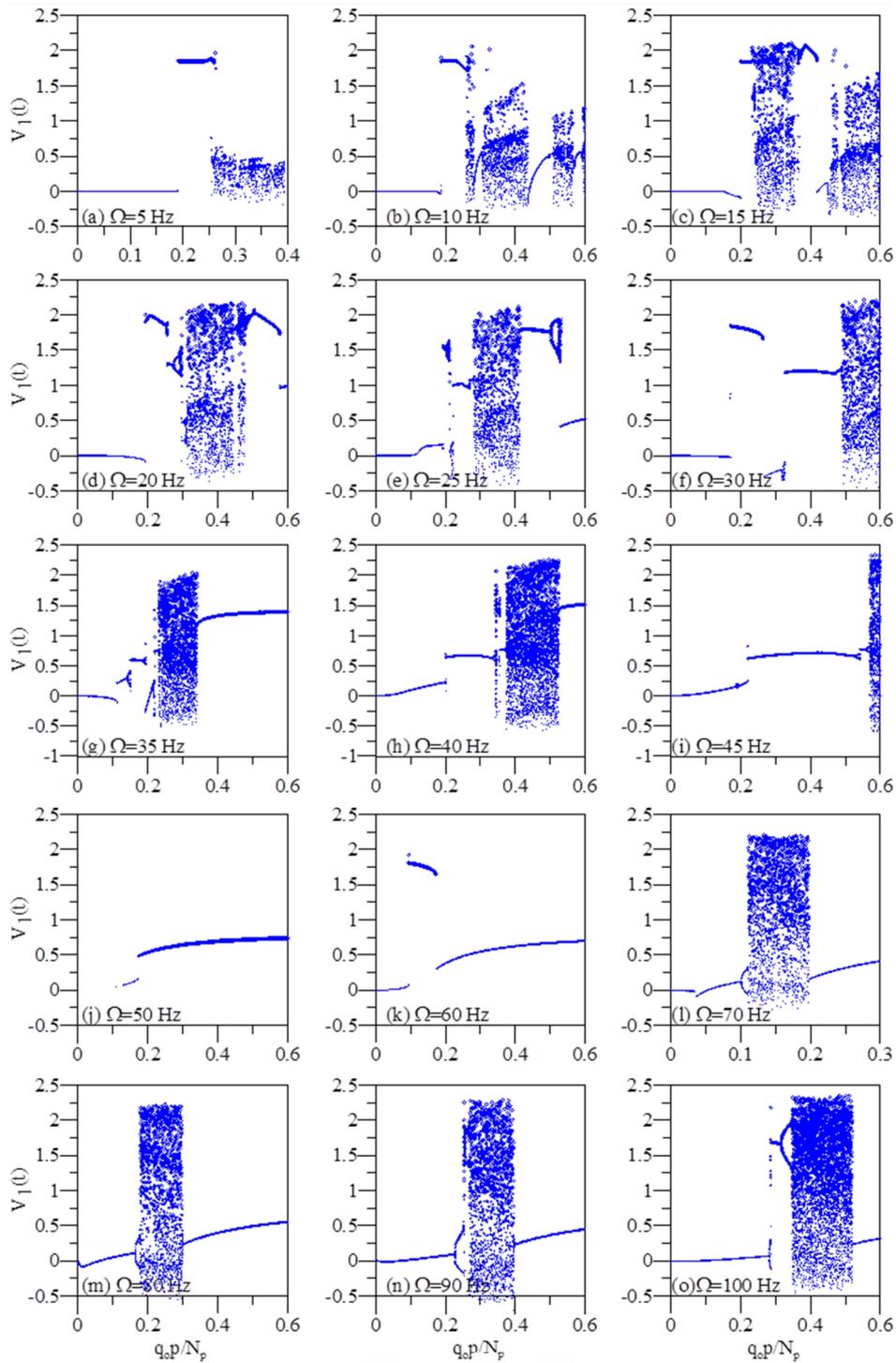


Figura 5.34 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, método da força bruta (Maple). $qp/N_p = 50\%$ $(qp/N_p)_{crit}$.

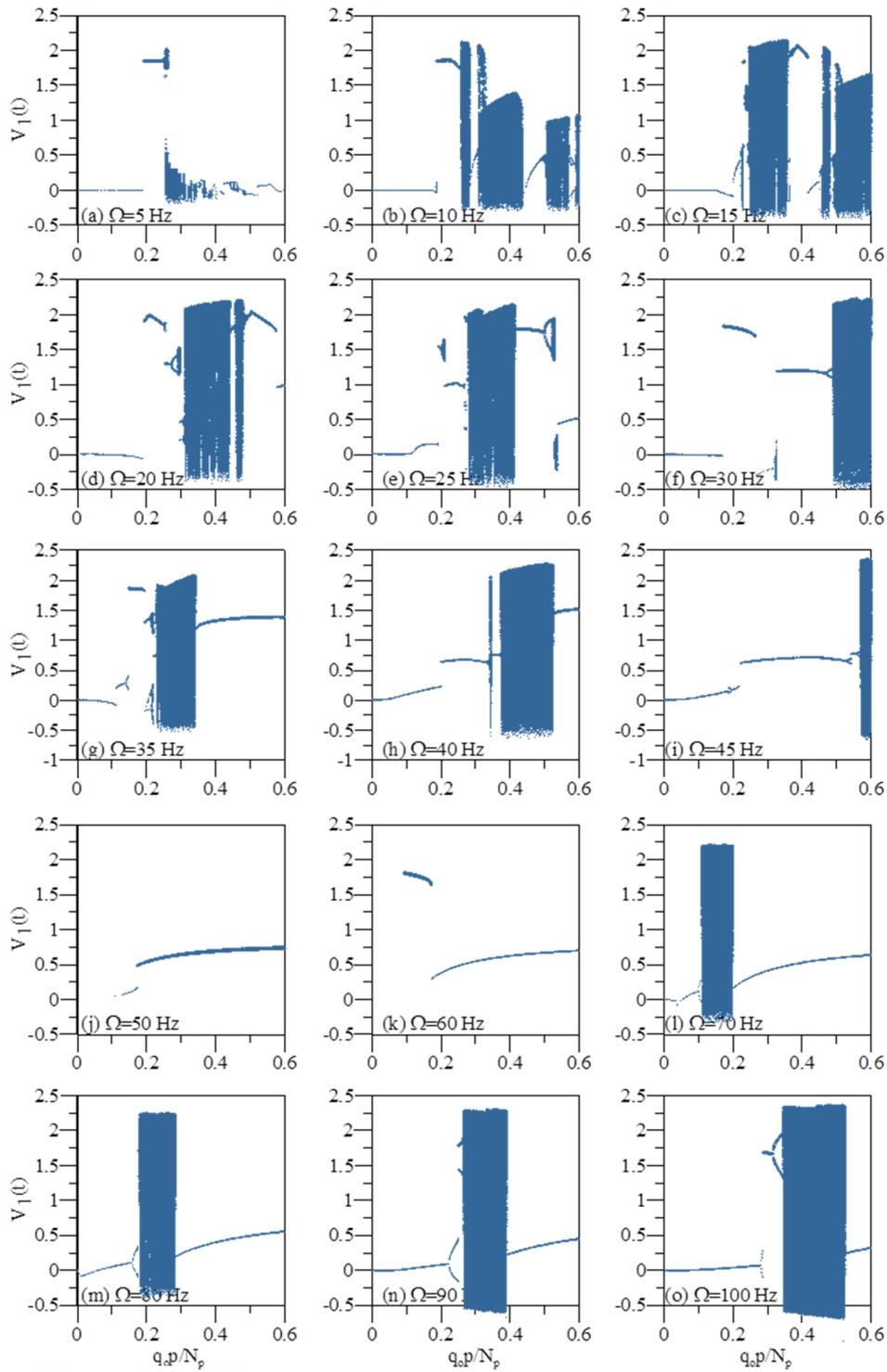


Figura 5.35 - Diagrama de bifurcação fixando a frequência, método da força bruta (Visual Studio). , $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{crit}$.

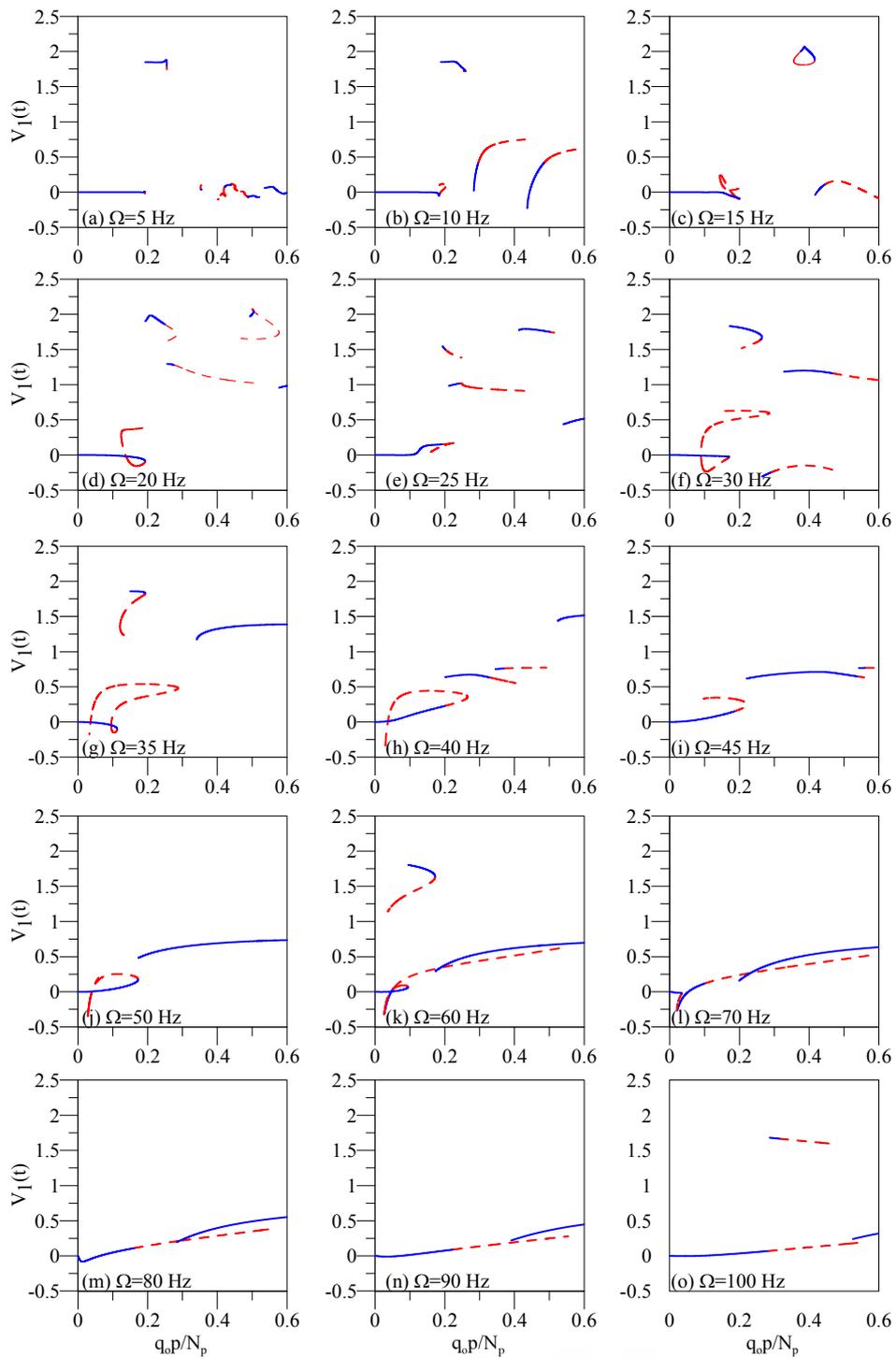


Figura 5.36 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência da excitação, método da continuação (Visual Studio). $qp/N_p = 50\%$ (qp/N_p)crit.

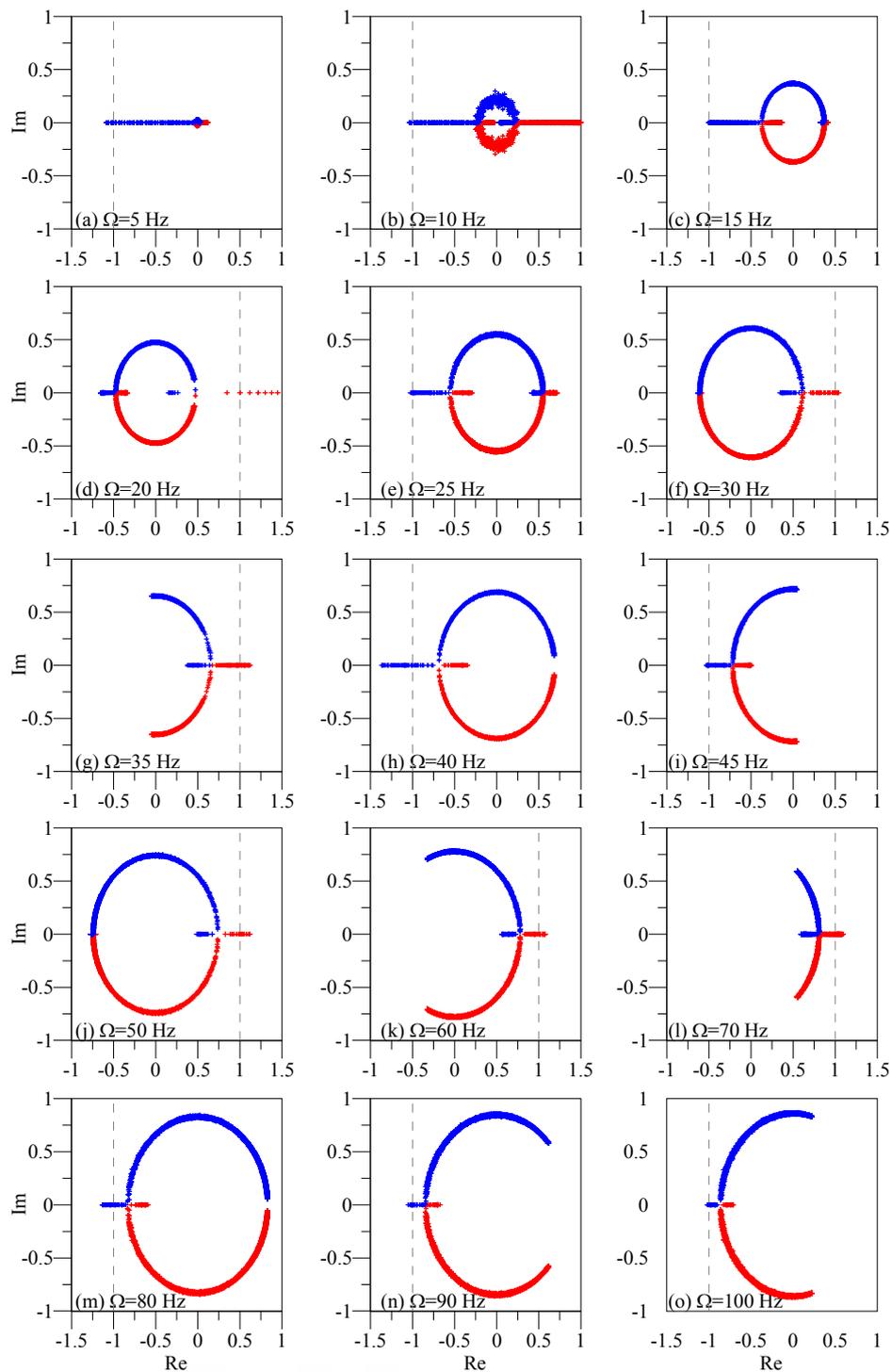


Figura 5.37 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet para o primeiro caminho de equilíbrio do sistema. $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{crit}$.

Na Figura 5.37 e Figura 5.37 é mostrado o comportamento dos multiplicadores de Floquet associados aos primeiros caminhos de equilíbrio onde o sistema passa de um estado de equilíbrio estável para um instável. Na Figura 5.38 pode se ver como os caminhos estáveis são descritos perfeitamente pelos dois métodos aqui

utilizados, porém, somente o método da continuação capta o caminho instável do sistema dinâmico, Figura 5.38a.

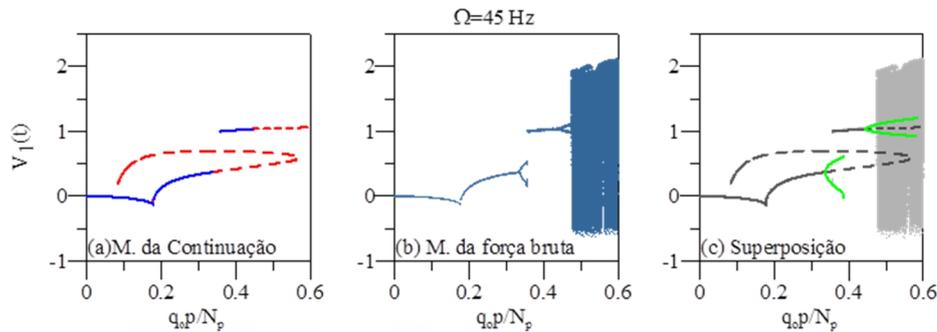


Figura 5.38 – Diagramas de bifurcação. Comparação entre o método da Continuação e da Força Bruta. Para $\Omega = 45\text{Hz}$ e $qp/N_p = 00\%$ (qp/N_p)crit.

A Figura 5.39 mostra como variam os autovalores da matriz monodromia (multiplicadores de Floquet) na medida em que o parâmetro de controle do sistema varia. Se pode ver que o primeiro caminho de equilíbrio da Figura 5.39e tornasse instável quando a parte real de um dos dois autovalores ultrapassa o ponto +1 quando o parâmetro de controle tem o valor de $q_0 p / N_p = 0.18$, como visto na Figura 5.39d. Da mesma forma, a Figura 5.39g mostra como outro caminho de equilíbrio estável passa ser instável mediante uma bifurcação de duplicação de período, e a Figura 5.39f mostra a variação dos respectivos multiplicadores de Floquet, onde um deles se torna -1 no ponto de bifurcação.

A Figura 5.40 mostra também (para um sistema pré-carregado estaticamente e diferentes parâmetros de controle) a comparação dos métodos da continuação e da força bruta, onde se pode ver como a resposta do sistema ou os caminhos de equilíbrio torna-se cada vez mais complexos. Nas Figura 5.41 e Figura 5.42 é apresentado o comportamento dos autovalores da matriz de Monodromia relacionados à Figura 5.40.

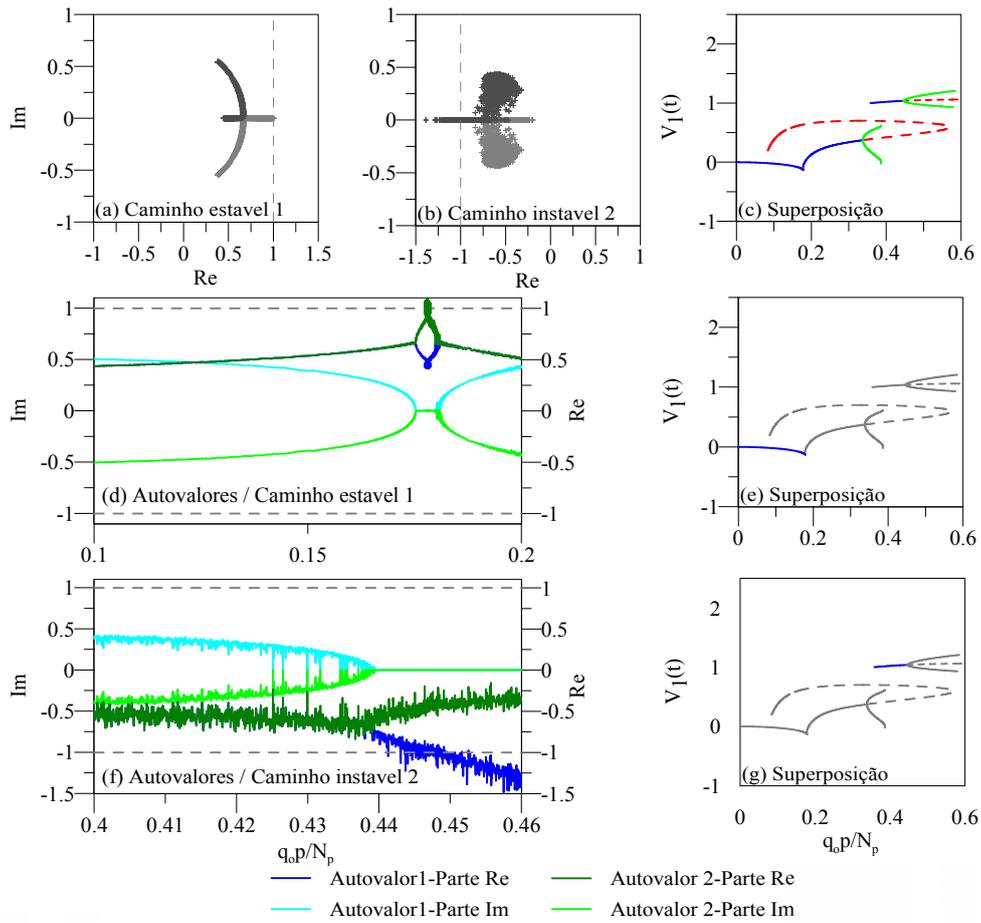


Figura 5.39 – Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para $\Omega = 45\text{Hz}$ e $qp'/N_p = 00\%$ (qp'/N_p)crit.

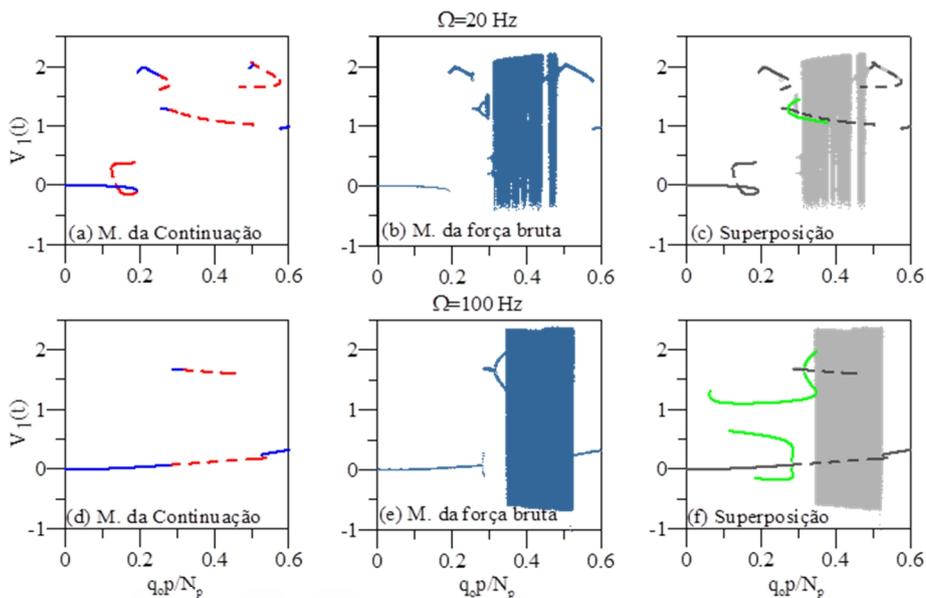


Figura 5.40 – Diagramas de bifurcação. Comparação entre o método da Continuação e da Força Bruta. Para $qp'/N_p = 50\%$ (qp'/N_p)crit.

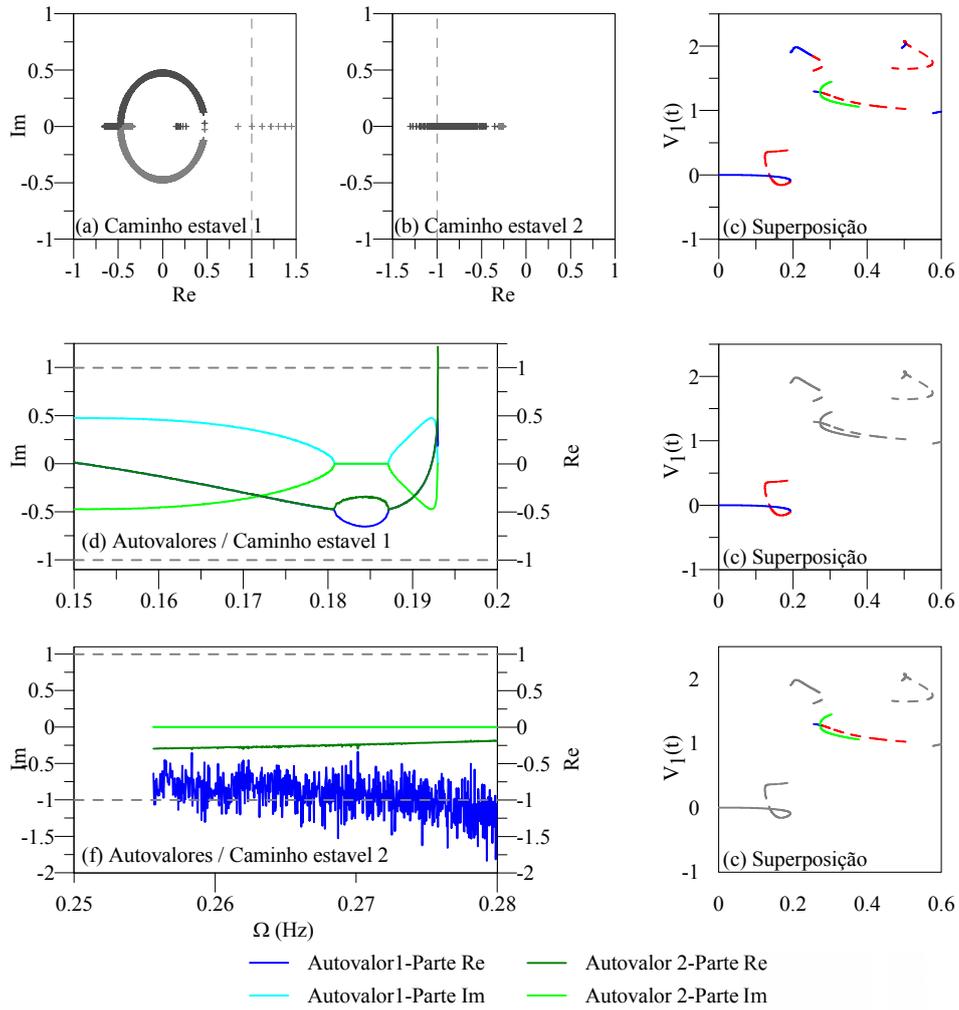


Figura 5.41 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para $\Omega = 20\text{Hz}$ e $qp/N_p = 50\%$ (qp/N_p)crit.

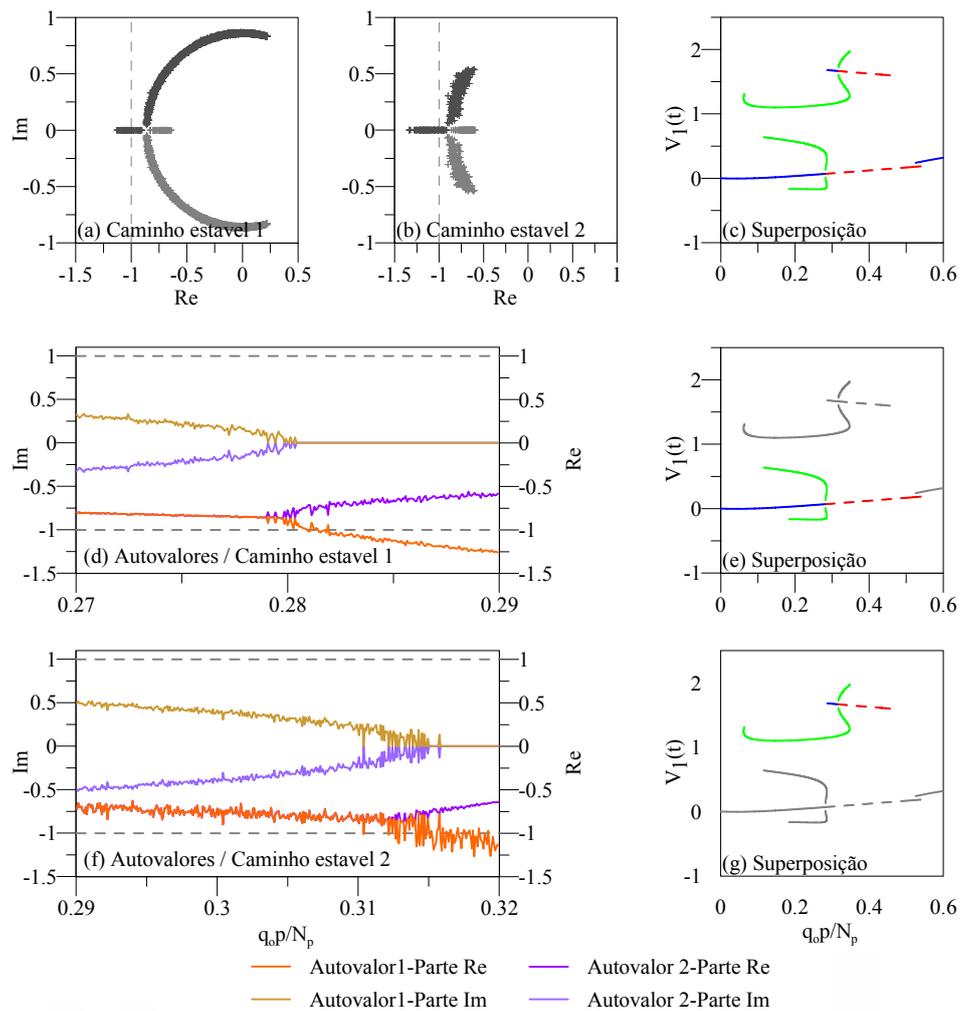


Figura 5.42 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para $\Omega = 100\text{Hz}$ e $qp/N_p = 50\%$ (qp/N_p)crit.

5.5.5. Bacias de Atração

Nas Figura 5.43, Figura 5.44 e Figura 5.45 mostram as bacias de atração do sistema para diferentes carregamentos estáticos e dinâmicos. Dos gráficos pode-se ver a coexistência das diferentes soluções do sistema, assim, por exemplo, a Figura 5.44a mostra o diagrama de bifurcação do sistema tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação, no qual se escolheu três diferentes valores da frequência para obter as bacias de atração. Nas Figura 5.44b, 5.44c e 5.44d mostram-se estes diferentes atratores, cada cor apresentado na figura representa um atrator diferente, assim, para um determinado ponto no espaço (condição inicial do

sistema), no qual a solução é avaliada na seção de Poincaré e no regime permanente, o sistema converge em uma das raízes ou soluções da equação diferencial não linear que governa o movimento do sistema ou também conhecido como atrator.

Finalmente na Figura 5.46 e Figura 5.47 mostra-se a resposta no tempo e plano de fase do sistema para certos pontos escolhidos das bacias de atração, exemplificando os diversos tipos de soluções. Na Figura 5.47a, por exemplo, mostram-se os três diferentes pontos escolhidos, os quais dois deles estão em bacias de atração diferentes. Na Figura 5.47 mostram-se três atratores distintos.

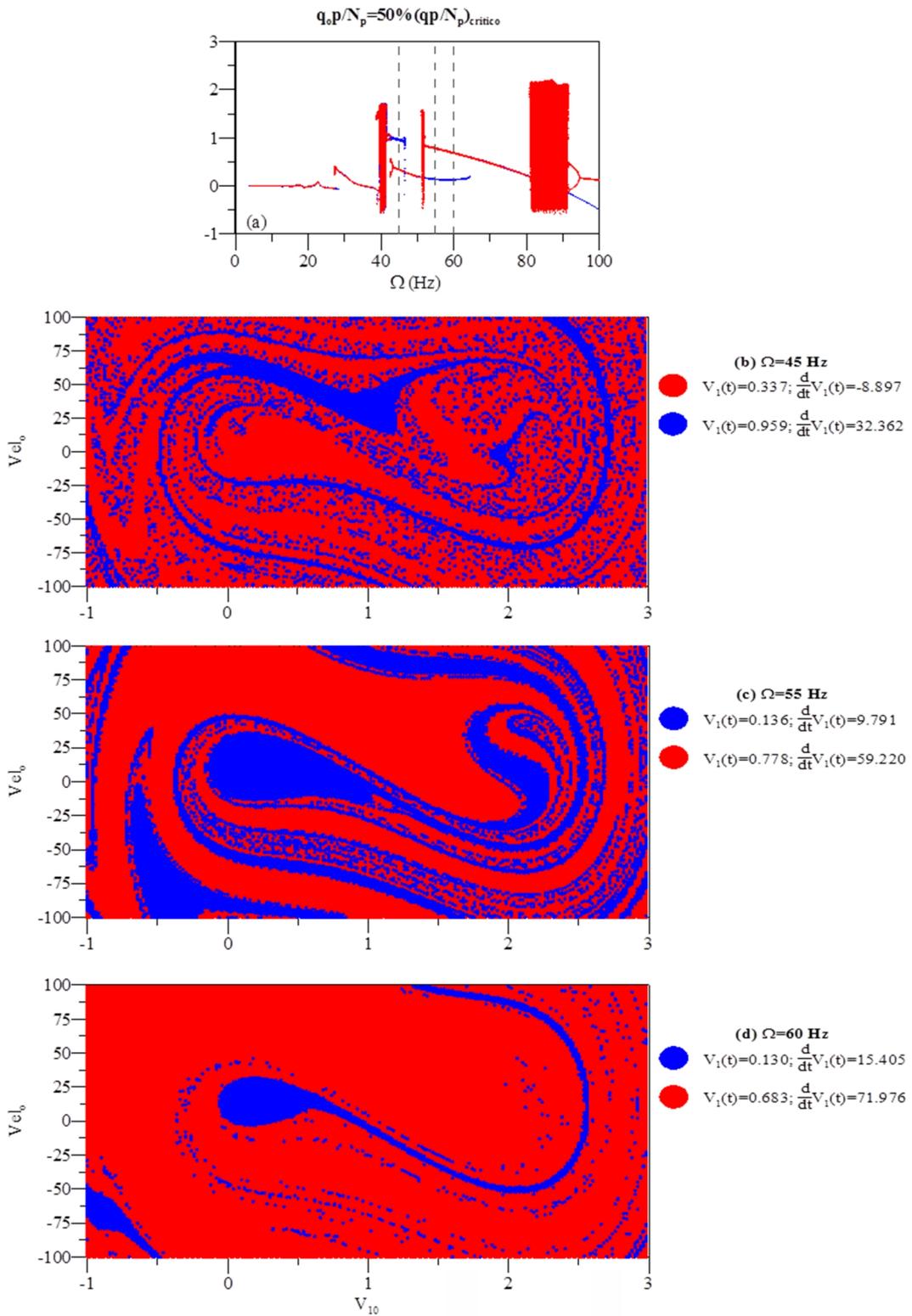


Figura 5.43 - Bacia de atração. $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$

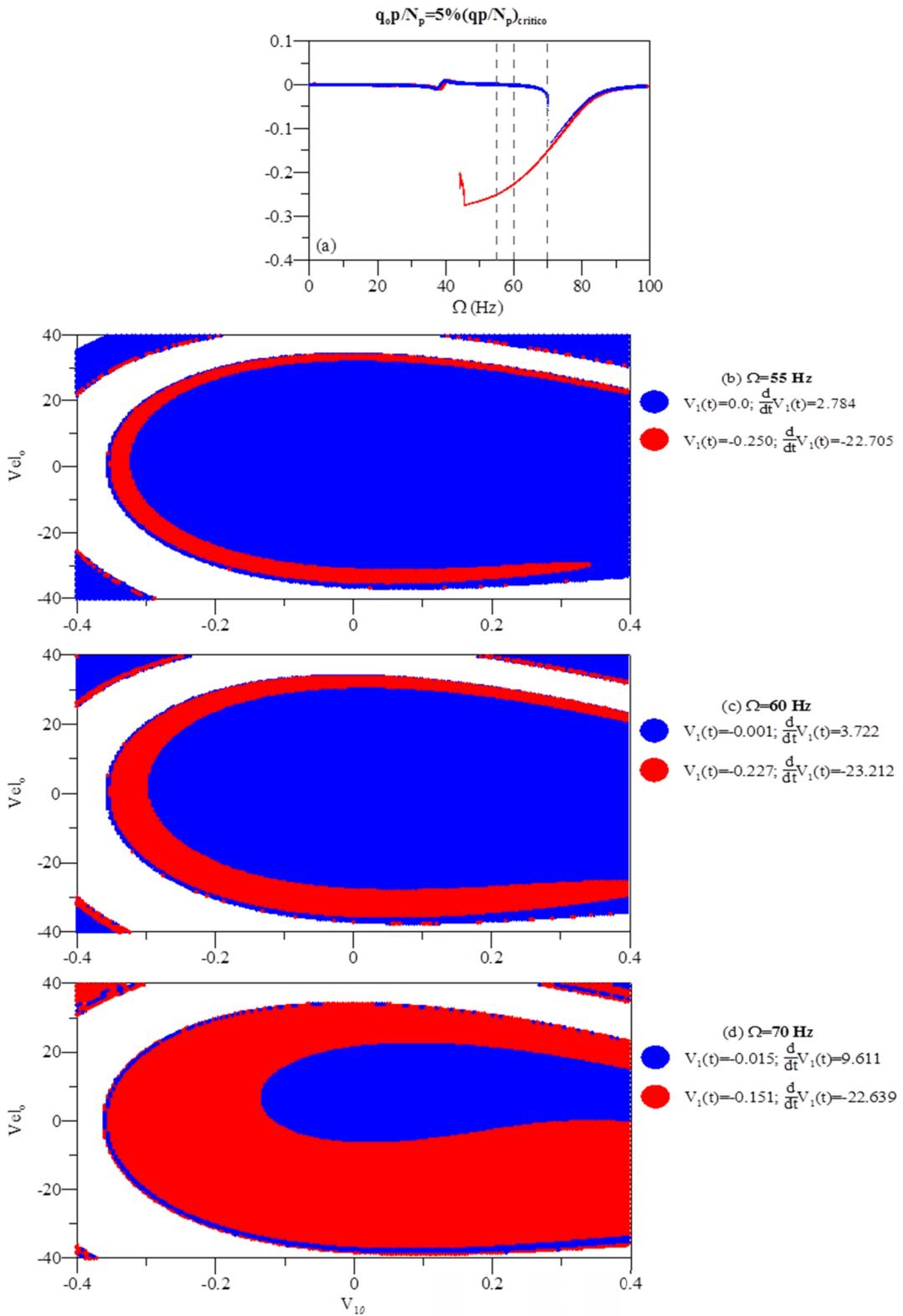


Figura 5.44 - Bacia de atração. $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{crit}$

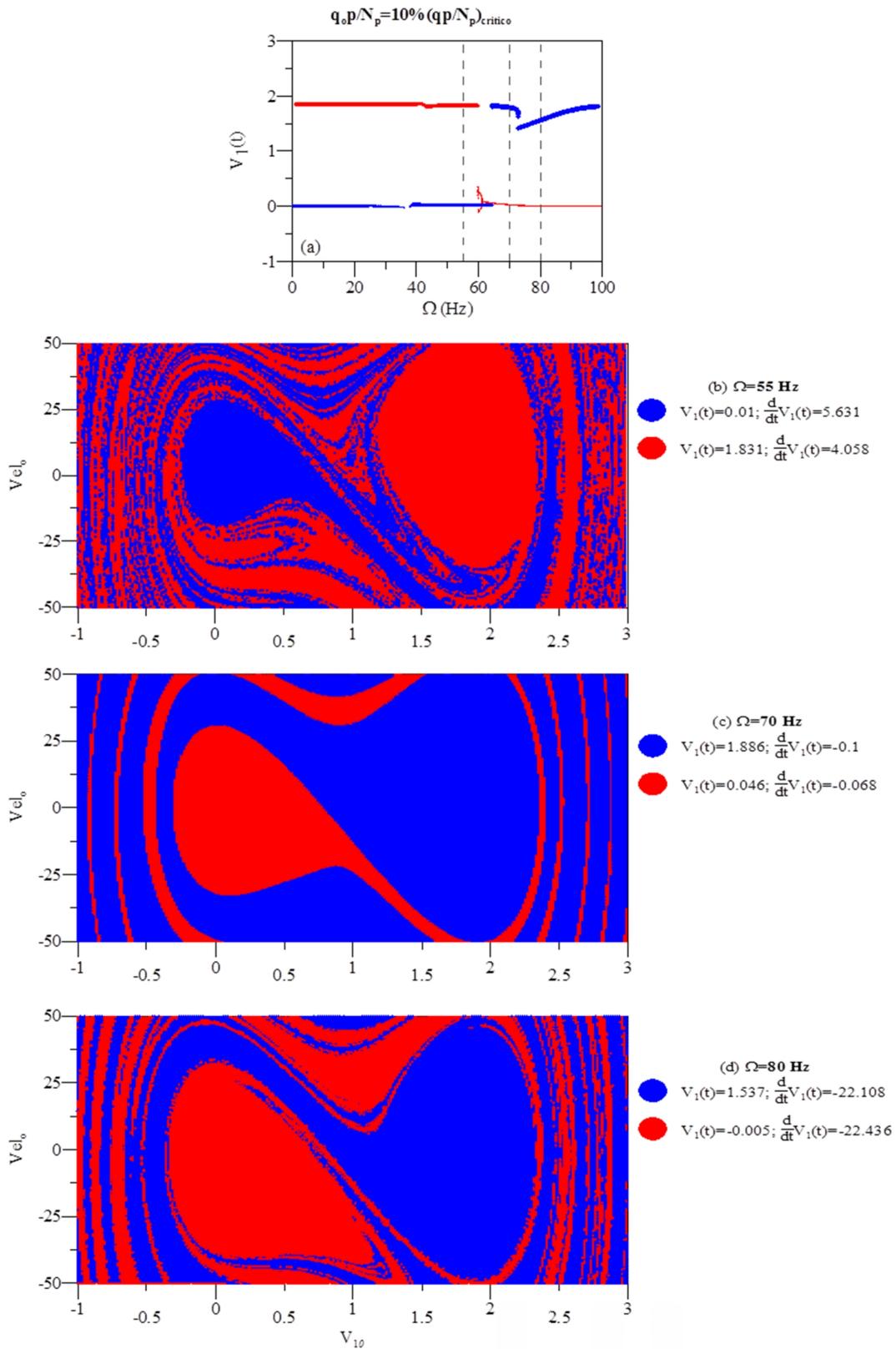


Figura 5.45 - Bacia de atração. $qp/N_p = 50\% (qp/N_p)_{\text{crit}}$

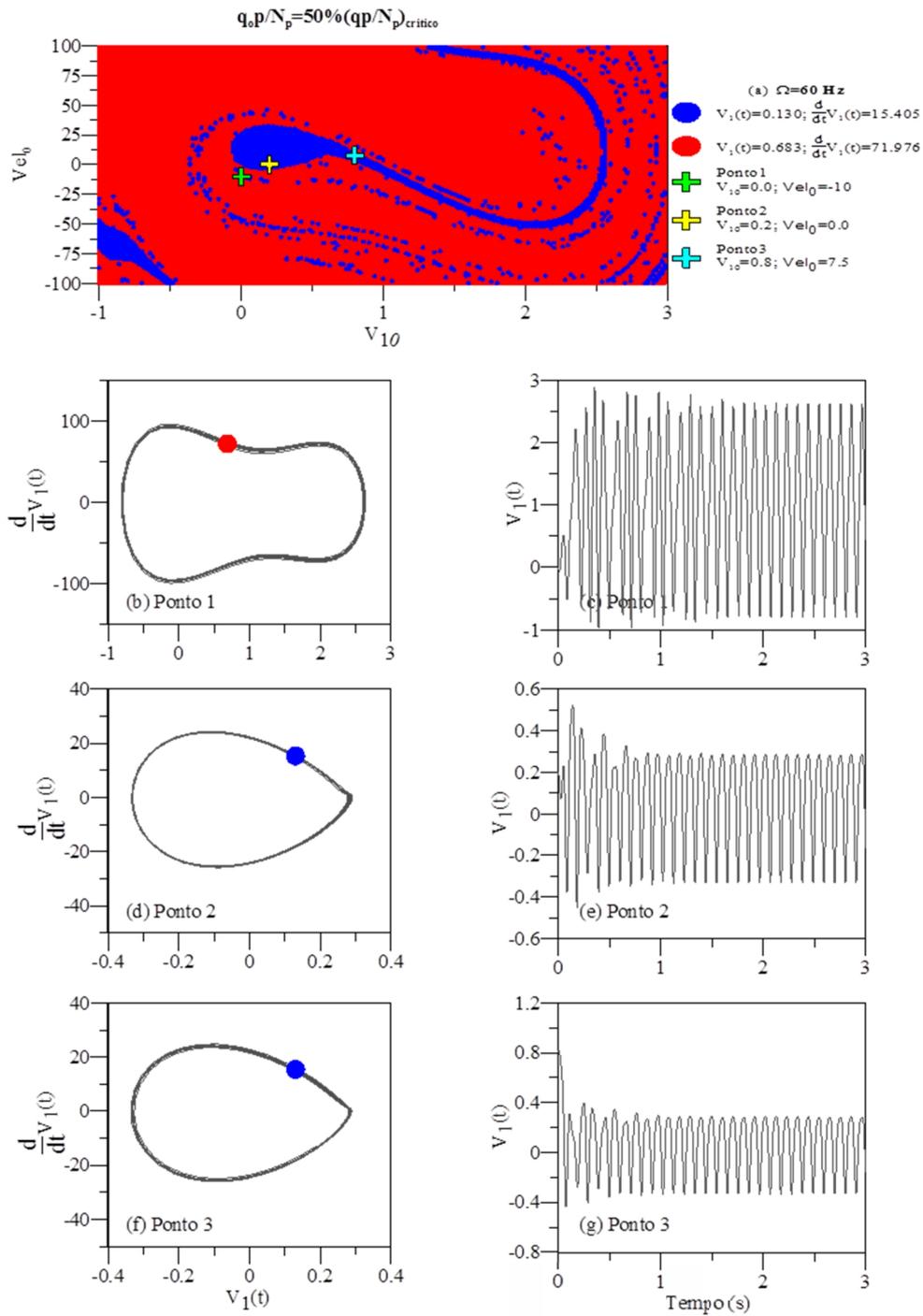


Figura 5.46 - Órbitas coexistentes. $q p / N_p = 0\% (q p / N_p)_{\text{crit}}$

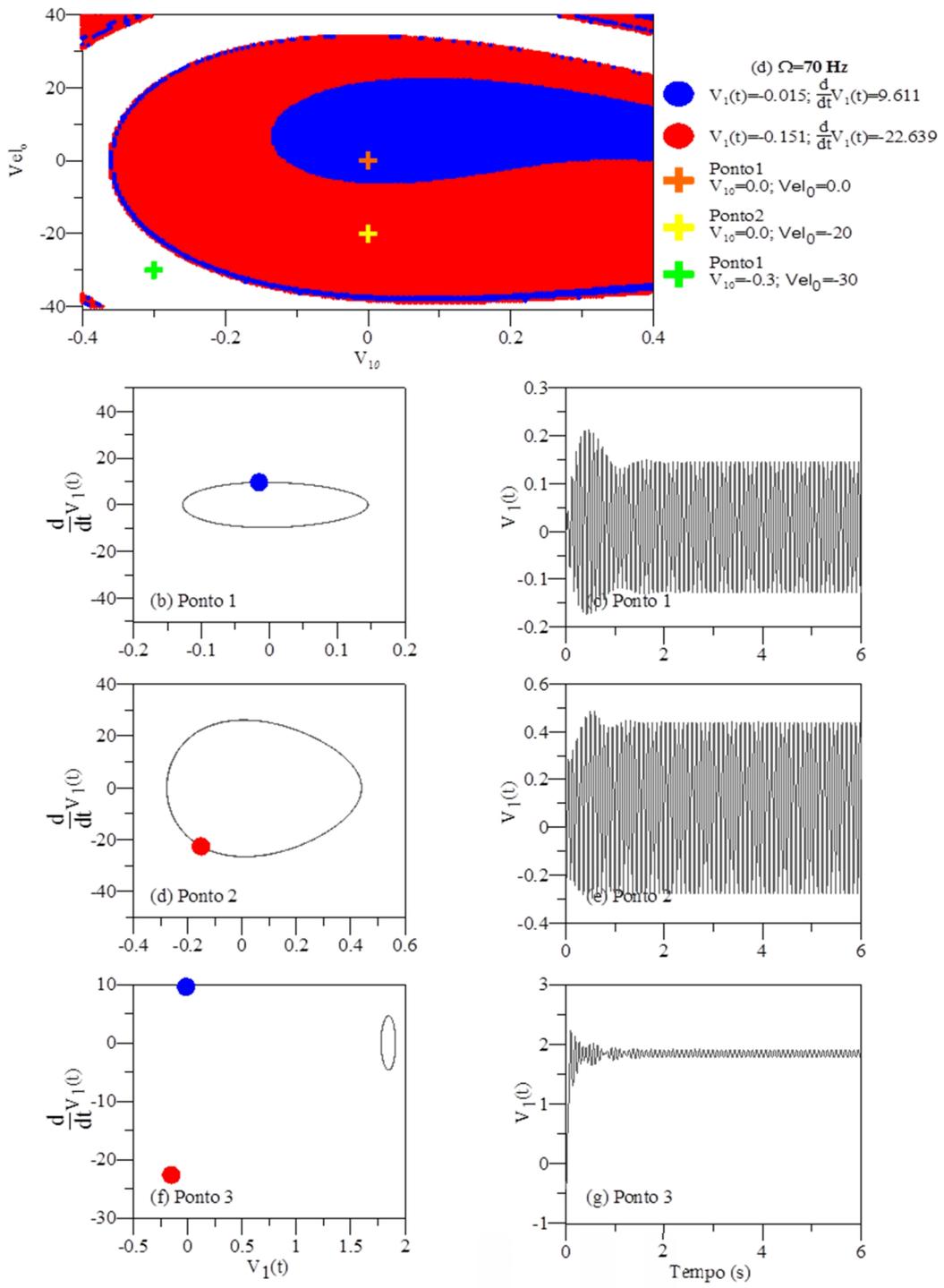


Figura 5.47 - Órbitas coexistentes. $qp/N_p = 50\%$ (qp/N_p)crit.