



**Kenny Fernando Conto Quispe**

**Vibrações não lineares e instabilidade de arcos  
esbeltos abatidos com apoios elásticos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil do Departamento de  
Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro  
Outubro de 2014



**Kenny Fernando Conto Quispe**

**Vibrações não lineares e instabilidade de arcos  
esbeltos abatidos com apoios elásticos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Orientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Frederico Martins Alves da Silva**

Universidade Federal de Goiás

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 03 de outubro de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Kenny Fernando Conto Quispe**

Graduou-se em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Mecânica da UNSAAC (Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco – Perú), em 2010. Em 2012 iniciou o curso de Mestrado em Engenharia Civil na PUC–Rio, na área de Estruturas, atuando na linha de pesquisa de Estabilidade e Dinâmica de Estruturas.

#### Ficha Catalográfica

Conto Quispe, Kenny Fernando

Vibrações não lineares e instabilidade de arcos esbeltos abatidos com apoios elásticos / Kenny Fernando Conto Quispe ; orientador: Paulo Batista Gonçalves. – 2014.

127 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2014.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Arcos abatidos. 3. Vibrações não lineares. 4. Estabilidade. 5. Apoios elásticos. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais Aurélio e Rufina, por cada um de seus ensinamentos, conselhos e, especialmente, pelo amor incondicional e inesgotável que me ofereceram ao longo da minha vida.

Aos meus irmãos David, Patrícia e Zulema, que fizeram da minha infância a melhor etapa da minha vida.

## Agradecimentos

A meu orientador Prof. Paulo Batista Gonçalves, pela confiança, a sua disposição e os conhecimentos transmitidos para a realização deste trabalho.

Ao Brasil, a bolsa da CAPES e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

A minha alma mater, UNSAAC-Perú, e aos professores da faculdade de engenharia mecânica pelos ensinamentos básicos transmitidos.

A meus amigos Luís Palomino e Elvis Mamani, pela ajuda que eles me brindaram ao início desta nova aventura no Brasil.

Aos colegas do curso, amigos de pelada e demais pessoas especiais na minha vida as quais se tornaram uma nova família aqui no Brasil.

## Resumo

Quispe, Kenny Fernando Conto; Gonçalves, Paulo Batista. **Vibrações Não Lineares e Instabilidade de Arcos Esbeltos Abatidos com Apoios Elásticos.** Rio de Janeiro, 2014. 127p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Arcos abatidos são usados com frequência para vencer grandes vãos. Exemplos incluem pontes em arco e coberturas de grandes espaços como galpões industriais e estádios. Em muitos casos empregam-se arcos atirantados ou apoiados em estruturas flexíveis, fazendo com que os apoios se movam quando o arco é carregado. Isto aumenta a flexibilidade do sistema e a probabilidade de perda de estabilidade na presença de cargas estáticas e dinâmicas. Em muitos casos estas estruturas podem ser modeladas como arcos com apoios elásticos. No presente trabalho resolve-se o problema de estabilidade estática de forma analítica e através de uma aproximação usando o método de Ritz, servindo a solução analítica para aferir a precisão do modelo numérico. A seguir, com base neste estudo, desenvolve-se, usando o método de Ritz, a formulação para análise das vibrações não lineares do arco com apoios elásticos, assunto inédito na literatura. Os resultados mostram a grande influência dos apoios nas vibrações não lineares e na estabilidade do arco sob cargas estáticas e dinâmicas.

## Palavras-chave

Arcos abatidos; Vibrações não lineares; Estabilidade; Apoios elásticos.

## Abstract

Quispe, Kenny Fernando Conto; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Nonlinear Vibrations and Instability of Shallow Arches with Spring Supports**. Rio de Janeiro, 2014. 127p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Shallow arches are often used to overcome large spans, for example, arch bridges or steel roofs to cover large spaces such as industrial sheds and stadiums. In many cases the arches are tied or are supported by a flexibility structure, causing that supports to move when the arch has been loaded. This increases the flexibility of the system and the probability of loss of stability in the presence of static and dynamic loads. In many cases, these structures can be modeled as arches with elastic supports. In the present work the static stability has been solved analytically and through the Ritz method, serving the analytical solution to assess the accuracy of the numerical model. Then, based on this study, the analysis of nonlinear vibrations of shallow arches with elastic supports is developed, using the Ritz method, a subject not yet studied in the literature. The results show the noticeable influence of the supports on the nonlinear vibration and stability of shallow arches under static and dynamic loads.

## Keywords

Shallow Arches; Nonlinear Vibrations; Stability; Spring Supports.

*“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser; não sou o que ire ser... Mas graças a Deus, não sou o que era antes”.*

*Martin Luther King Jr.*



## Sumário

1 INTRODUÇÃO.	19
1.1. Considerações Gerais.	19
1.2. Considerações Iniciais.	23
1.3. Objetivos.	25
1.3.1. Objetivo Geral.	25
1.3.2. Objetivos Específicos.	25
1.4. Estrutura da dissertação.	25
2 ANÁLISE ESTÁTICA DA ESTABILIDADE – MÉTODO ANALÍTICO.	27
2.1. Equilíbrio Não Linear no Plano.	27
2.1.1. Equação Diferencial de Equilíbrio.	28
2.1.2. Equação de Equilíbrio Não Linear.	31
2.2. Análise da Flambagem.	33
2.2.1. Equação de Equilíbrio Crítico	34
2.2.2. Flambagem Antissimétrica	35
2.2.3. Flambagem Simétrica	37
2.3. Resultados obtidos da solução analítica	40
3 ANÁLISE ESTÁTICA DA ESTABILIDADE - MÉTODO RAYLEIGH RITZ.	44
3.1. Cálculo do Carregamento Crítico Adimensional.	45
3.2. Cálculo da Energia Potencial.	49
3.3. Análise dos resultados obtidos.	49
3.4. Comparação do Carregamento Crítico Obtido Analiticamente e pelo Método de Rayleigh – Ritz.	53
4 FORMULAÇÃO PARA A ANÁLISE DINÂMICA.	56
4.1. Equação Diferencial de Movimento	56
4.1.1. Vibração Livre do Sistema.	59
4.1.2. Vibração Forçada do Sistema.	59
4.2. Princípio da Conservação da Energia - Plano de Fase do Sistema	60

4.3. Frequência Natural do Sistema.	61
4.3.1. Planos de Fase do Sistema em Vibração Livre.	63
 5 ANALISE DINÂMICA NÃO LINEAR.	 65
5.1. Conceitos Básicos.	65
5.2. Estabilidade Local do Equilíbrio – Sistemas Autônomos.	67
5.2.1. Soluções de Equilíbrio.	67
5.2.2. Bifurcações das soluções de equilíbrio.	70
5.3. Estabilidade Local de Soluções Periódicas.	73
5.3.1. Mapa de Poincaré	73
5.3.2. Teoria de Floquet.	74
5.3.3. Estabilidade de uma solução periódica.	76
5.3.4. Bifurcações das Soluções Periódicas.	77
5.4. Análise Dinâmica Não Linear do Arco Abatido.	79
5.4.1. Resposta no Tempo e Planos de Fase.	79
5.4.2. Diagramas de Bifurcação.	80
5.4.3. Bacias de Atração.	81
5.5. Análises dos resultados obtidos	81
5.5.1. Resposta no Tempo.	81
5.5.2. Sistema Amortecido.	84
5.5.3. Diagramas de Bifurcação em Função da Frequência da Excitação.	88
5.5.4. Diagramas de Bifurcação em Função da Magnitude de Excitação.	101
5.5.5. Bacias de Atração	114
 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.	 121
6.1. Conclusões.	121
6.2. Sugestões para trabalhos futuros.	122
 REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA.	 124

## Lista de figuras

- Figura 1.1 - A ponte “The Infinity” que atravessa o rio Tees, nordeste da Inglaterra. (a) e (b) Curvatura variável da ponte. (c) e (d) Detalhe dos tirantes do arco. [Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Infinity\\_Bridge](http://en.wikipedia.org/wiki/Infinity_Bridge)] 20
- Figura 1.2 - Pontes com arco atirantado. (a) Passarela de pedestre em Lleida-Espanha. (b) Ponte do lago Champlain em New York. (c) Ponte ferroviária de Windsor, Berkshire. (d) Ponte de Torún, Polônia. [Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Tied-arch\\_bridge](http://en.wikipedia.org/wiki/Tied-arch_bridge)] 20
- Figura 1.3 - (a) Estádio Wembley em Londres, Inglaterra. (b) Estádio da Luz em Lisboa, Portugal. [Fonte (a): [http://en.wikipedia.org/wiki/Wembley\\_Stadium](http://en.wikipedia.org/wiki/Wembley_Stadium)]; [Fonte (b): [http://en.wikipedia.org/wiki/Est%C3%A1dio\\_da\\_Luz](http://en.wikipedia.org/wiki/Est%C3%A1dio_da_Luz)] 21
- Figura 1.4 - Arco Atirantado. (a) Esquema de arco atirantado. (b) Esquema equivalente a um arco atirantado. (c) Arco atirantado. [Fonte (c): <http://www.brantacan.co.uk/ArchTiedEdin.jpg>] 21
- Figura 1.5 - Colapso do auditório da faculdade de C.W. Post. [Fonte: <https://failures.wikispaces.com/C.%20W.%20Post%20College%20Auditorium%20Collapse>] 22
- Figura 1.6 - Estádio olímpico do Engenhão em Rio de Janeiro – Brasil. [Fonte: <http://www.rio.rj.gov.br/web/guest/exibeconteudo?id=4144211>] 22
- Figura 2.1 - Arco parabólico. 28
- Figura 2.2 - Arco parabólico suportado por molas horizontais. 29
- Figura 2.3 – Modos de Flambagem para arcos parabólicos. (a) Flambagem antissimétrica. (b) Flambagem simétrica. 34
- Figura 2.4 - Variação da carga de flambagem para arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas em função da esbeltez  $\lambda$ . 41
- Figura 2.5 - Carregamento de flambagem para arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas versus  $f/L$ . 42
- Figura 2.6 – Caminhos não lineares de equilíbrio de arcos parabólicos suportado horizontalmente por molas.  $\alpha = 0, 4$  e  $50$ . Método analítico. 43
- Figura 3.1 - Deslocamento horizontal para diversos valores de  $\alpha$  e  $\lambda = 8.71$ . 51

- Figura 3.2 - Caminhos não lineares de equilíbrio para valores selecionados de  $\lambda$  e  $\alpha = 0, 4$  e  $50$ . 51
- Figura 3.3 - Energia potencial adimensional versus deslocamento  $V1$ ,  $\lambda = 2.75$ . 52
- Figura 3.4 - Energia potencial adimensional versus deslocamento  $V1$ ,  $\lambda = 4.58$ . 52
- Figura 3.5 - Energia potencial adimensional versus deslocamento  $V1$ ,  $\lambda = 8.71$ . 53
- Figura 3.6 - Energia potencial adimensional versus deslocamento  $V1$ ,  $\lambda = 17.61$ . 53
- Figura 4.1 - Frequência natural  $\omega_0$  versus deslocamento estático  $V1$ ,  $\lambda = 8.71$ . 62
- Figura 4.2 - Comportamento de  $\omega_0^2$  e  $\omega_0$  em função do carregamento estático adimensional.  $\lambda = 8.71$ . 63
- Figura 4.3 - Curvas de nível de igual energia para níveis crescentes de carregamento estático e energia associada ao ponto de sela, Clim. Para  $\lambda = 8.71$  e  $\alpha = 0$ . 64
- Figura 5.1 - (a) Espaço solução. (b) Plano de fase. 67
- Figura 5.2 - Classificação dos pontos fixos de acordo aos autovalores da matriz A. 69
- Figura 5.3 - Classificação da estabilidade local segundo os pontos fixo hiperbólicos. 69
- Figura 5.4 - Classificação da estabilidade local segundo os pontos fixo não hiperbólicos. 70
- Figura 5.5 - Autovalores da matriz Jacobiana para um sistema de duas equações diferenciais. 70
- Figura 5.6 - Bifurcações estáticas das soluções de equilíbrio. (a) Bifurcação nó-sela; (b) Bifurcação transcritical; (c) Bifurcação por quebra de simetria supercrítica (bifurcações simétricas estáveis); (d) bifurcação por quebra de simetria subcrítica (bifurcação simétrica instável).  $\mu$  – parâmetro de controle. 71
- Figura 5.7 - (a) Bifurcação Hopf supercrítica, (b) Bifurcação Hopf subcrítica,  $\mu$  – parâmetro de controle. 72
- Figura 5.8 - Estrutura das raízes para a equação  $x + bx + cx = 0$ , onde  $b$  é o amortecimento efetivo e  $c$  a rigidez efetiva.  $D^2 = b^2 - 4c$  [Thompson e Stewart, 1993]. 73
- Figura 5.9 - Planos de Poincaré. 74

Figura 5.10 - Multiplicadores de Floquet para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem.	76
Figura 5.11 - Forma como os multiplicadores de Floquet podem sair do círculo de raio unitário.	77
Figura 5.12 - Bifurcação Flip ou duplicação de período (a) Supercrítica, (b) Subcrítica.	78
Figura 5.13 - Resposta no tempo. (a) Equação (4.26). (b) Sistema de Equações (5.26). $vel0 = 0$ e $V10 = 0.01$ .	82
Figura 5.14 - Resposta no tempo para diferentes magnitudes do carregamento dinâmico. Comparação da solução linear com o não linear. $V10 = 0.0$ ; $vel0 = 0.0$ . $\Omega = 51\text{Hz}$ .	83
Figura 5.15 - Sistema amortecido (a) Plano de fase. (b) Resposta no tempo	84
Figura 5.16 - Plano de fase e resposta no tempo para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 0.0\%$ ( $qp/Np$ )crit, $\Omega = 30\text{ Hz}$ .	86
Figura 5.17 - Plano de fase e resposta no tempo para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 50\%$ ( $qp/Np$ )crit, $\Omega = 30\text{ Hz}$ .	87
Figura 5.18 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 0\%$ ( $qp/Np$ )crit.	89
Figura 5.19 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 0\%$ ( $qp/Np$ )crit.	90
Figura 5.20 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 50\%$ ( $qp/Np$ )crit.	91
Figura 5.21 - Diagramas de bifurcação para diferentes amplitudes de carregamento dinâmico. $qp/Np = 50\%$ ( $qp/Np$ )crit.	92
Figura 5.22 - Diagrama de bifurcação para carregamento dinâmico igual $qp/Np = 50\%$ ( $qp/Np$ )crit.	93
Figura 5.23 - Diagramas de bifurcação. $qp/Np = 0\%$ ( $qp/Np$ )crit.	94
Figura 5.24 - Diagramas de bifurcação. $qp/Np = 50\%$ ( $qp/Np$ )crit	95
Figura 5.25 - Diagramas de bifurcação. Comparação dos resultados obtidos entre o programa computacional Maple e o algoritmo desenvolvido por Orlando (2010). $qp/Np = 00\%$ ( $qp/Np$ )crit.	96
Figura 5.26 - Multiplicadores de Floquet e diagrama de bifurcação, método da continuação. $qp/Np = 0\%$ ( $qp/Np$ )crit.	98

- Figura 5.27 - Multiplicadores de Floquet e diagramas de bifurcação, método da continuação.  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 99
- Figura 5.28 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet,  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$  100
- Figura 5.29 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet,  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$  101
- Figura 5.30 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência, método da força bruta (Maple).  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 103
- Figura 5.31 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, método da força bruta (Visual Studio).  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$  104
- Figura 5.32 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência da excitação, método da continuação (Visual Studio).  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 105
- Figura 5.33 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet para o primeiro caminho de equilíbrio do sistema.  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$  106
- Figura 5.34 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação, método da força bruta (Maple).  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 107
- Figura 5.35 - Diagrama de bifurcação fixando a frequência, método da força bruta (Visual Studio). ,  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 108
- Figura 5.36 - Diagrama de bifurcação para valores selecionados da frequência da excitação, método da continuação (Visual Studio).  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 109
- Figura 5.37 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet para o primeiro caminho de equilíbrio do sistema.  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 110
- Figura 5.38 – Diagramas de bifurcação. Comparação entre o método da Continuação e da Força Bruta. Para  $\Omega = 45\text{Hz}$  e  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 111
- Figura 5.39 – Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para  $\Omega = 45\text{Hz}$  e  $q_p/N_p = 0\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 112
- Figura 5.40 – Diagramas de bifurcação. Comparação entre o método da Continuação e da Força Bruta. Para  $q_p/N_p = 50\% (q_p/N_p)_{crit}$ . 112
- Figura 5.41 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para  $\Omega = 20\text{Hz}$  e

$qp/Np = 50\% (qp/Np)_{crit}$ .	113
Figura 5.42 - Comportamento dos multiplicadores de Floquet, para $\Omega = 100\text{Hz}$ e $qp/Np = 50\% (qp/Np)_{crit}$ .	114
Figura 5.43 - Bacia de atração. $qp/Np = 0\% (qp/Np)_{crit}$	116
Figura 5.44 - Bacia de atração. $qp/Np = 50\% (qp/Np)_{crit}$	117
Figura 5.45 - Bacia de atração. $qp/Np = 50\% (qp/Np)_{crit}$	118
Figura 5.46 - Órbitas coexistentes. $qp/Np = 0\% (qp/Np)_{crit}$	119
Figura 5.47 - Órbitas coexistentes. $qp/Np = 50\% (qp/Np)_{crit}$ .	120

## Lista de tabelas

Tabela 2.1 - Propriedades do arco	40
Tabela 2.2 - Tipos de Flambagem para diferentes valores de $\lambda$ e $\alpha$ .	42
Tabela 2.3 - Carregamento Crítico ( $p_q/N_p$ )crit	44
Tabela 3.1 - Relação de rigidez e esbeltez modificada analisados.	49
Tabela 3.2 - Relação entre as rigidezes $\alpha$ e K.	50
Tabela 3.3 - Deslocamento horizontal nos apoios $\lambda = 8.71$ , $L = 4m$ .	50
Tabela 3.4 - Carregamento e deslocamento crítico correspondente ao ponto limite.	52
Tabela 3.5 - Comparação dos carregamentos críticos de flambagem.	54
Tabela 3.6 - Posições de equilíbrio em função do nível de carregamento para $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$	54
Tabela 3.7 - Posições de equilíbrio em função do nível de carregamento para $\lambda = 4.58$ e $\alpha = 0$	55
Tabela 4.1 - Frequência natural $\omega_0$ do sistema na configuração descarregada.	61
Tabela 4.2 - Frequência natural $\omega_0$ do arco em torno um carregamento estático, $\lambda = 8.71$ .	61
Tabela 4.3 - Valores de $C_{lim}$ para $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$ .	64
Tabela 5.1 - Coeficiente de amortecimento C para $\lambda = 8.71$ e $\alpha = 0$ em função do nível de carregamento.	84



## Lista de símbolos

$A$	área da seção transversal do arco.
$\bar{C}$	constante que representa a energia do sistema para um par de condições iniciais.
$\bar{C}_{lim}$	energia do ponto de sela de onde partem as duas órbitas homoclínicas que limitam os dois vales potenciais.
$E$	modulo de elasticidade do material.
$I$	momento de inercia da seção transversal do arco.
$K_o$	rigidez generalizada do sistema.
$K_i$	parâmetro de rigidez adimensional
$L$	comprimento do arco.
$M_o$	massa generalizada do sistema.
$N$	força constante axial de compressão no arco.
$N_p$	carregamento de segundo modo de flambagem para uma coluna biarticulada submetida a um carregamento axial de compressão.
$T$	energia Cinética.
$U_i$	energia interna de deformação.
$V_1$	deslocamento generalizado ou variável cinemática
$V_1(t)$	deslocamento generalizado ou variável cinemática em função do tempo.
$V$	volumem total do arco.
$V_{1o}$	deslocamento inicial do sistema em $t = 0$ .
$W_e$	trabalho das forças externas.
$Y_{est}$	deslocamento estático.
$Y_{max}$	deslocamento máximo.
$f$	altura do arco.
$k_i$	constante da rigidez das molas.
$p$	parâmetro focal.
$q, q(t)$	carregamento linear vertical estático e dinâmico, respetivamente.
$q_o$	magnitude do carregamento dinâmico.
$r$	relação entre a frequência de excitação e a frequência natural do

	sistema
$r_x$	raio de giração em torno ao eixo x-x.
$u, w$	componentes dos deslocamentos.
$w_i$	deslocamento vertical nos apoios.
$vel_o$	velocidade inicial do sistema em $t = 0$ .
$y, z$	coordenadas ortogonais.
$\Delta\pi$	energia potencial total do sistema.
$\Omega$	frequência de excitação.
$\mathcal{L}$	função de Lagrange.
$\alpha$	relação entre a rigidez axial do arco e a rigidez elástica da mola.
$\delta()$	variação.
$\delta, \gamma$	parâmetros geométricos adimensionais.
$\varepsilon, \varepsilon_m, \varepsilon_b$	deformação total, de membrana e de flexão, respectivamente.
$\lambda$	constante de esbeltez modificada.
$\mu$	parâmetro de estabilidade.
$\omega$	carregamento adimensional.
$\omega_o$	frequência natural do sistema.
$(-)$	energias, carregamento e coordenadas adimensionais.