7
DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE MORLEY

7.1. Através da Geometria Euclidiana Plana

Observando a prova de Dan Sokolowsky publicada na *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática* [15], foi feita uma demonstração que se vale apenas da Geometria Euclidiana Plana. A opção pela apresentação de diversas figuras tem por objetivo facilitar a visualização das propriedades aplicadas, sem a necessidade de retorno ao enunciado.

Incialmente, se faz necessário provar o seguinte lema:.

Lema: Para um triângulo qualquer ABC, no qual as medidas dos ângulos internos são dadas por $B\hat{A}C = 3\alpha$, $A\hat{B}C = 3\beta$ e $A\hat{C}B = 3\gamma$, se BF e CF são trissetrizes adjacentes ao lado BC, então os segmentos FP e FQ, perpendiculares às outras trissetrizes de mesma origem que as primeiras, formam entre si um ângulo cuja medida é igual a $120° - 2\alpha$.

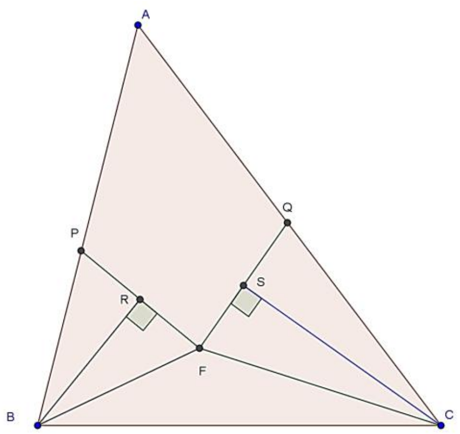


Figura 22: Um lema importante.

Demonstração

Sendo $B\hat{F}C = 180° - (\beta + \lambda)$, $B\hat{F}P = 90° - \beta$ e $C\hat{F}Q = 90° - \gamma$, então:

$P\hat{F}Q = 360° - [180° - (\beta + \gamma) + 90° - \beta + 90° - \gamma] = 2(\beta + \gamma)$.

Mas, $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = 60°$ e daí decorre que:

$(\beta + \gamma) = 60° - \alpha$ e, finalmente, $P\hat{F}Q = 2(60° - \alpha) = 120° - 2\alpha$.

A seguir, passo a passo conduz-se a demonstração do Teorema de Morley propriamente dita:

Passo 1: Dado um triângulo ABC, constroem-se as trissetrizes de $A\hat{B}C$ e de $A\hat{C}B$, assim obtendo os pontos F e G. Assim, $\overline{BF}$ e $\overline{CF}$ são, respectivamente, bissetrizes de $C\hat{B}G$ e $B\hat{C}G$, portanto, F é incentro do triângulo BCG.

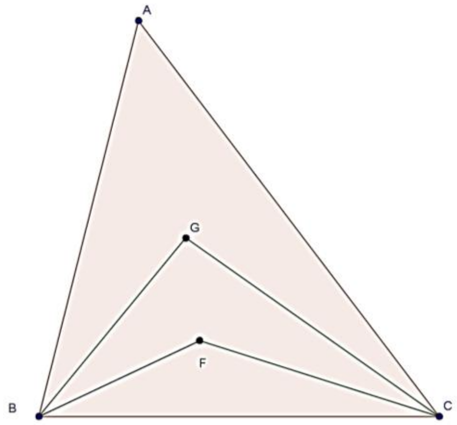


Figura 23: Demonstração geométrica – Passo 1.

Passo 2: Traçando $\overline{PF}$ e $\overline{QF}$, respectivamente perpendiculares a $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$, obtém-se os pontos R e S, médios desses segmentos e, consequentemente, as mediatrizes $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$.

Mas, F é incentro do triângulo BCG, logo $\overline{PR} = \overline{RF} = \overline{FS} = \overline{QS}$ e, obviamente, $\overline{PF} = \overline{QF}$.

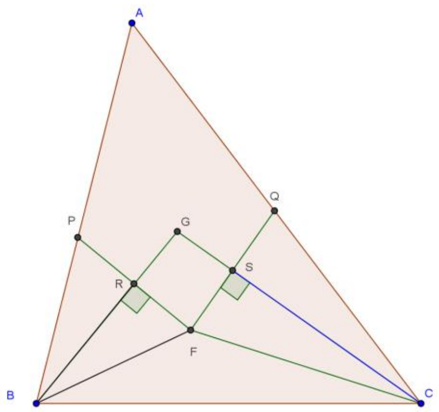


Figura 24: Demonstração geométrica – Passo 2.

Passo 3: Traçando uma circunferência λ definida pelos pontos A, P e Q , obtém-se os pontos X e Y, respectivamente, sobre $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$. Também são obtidos T e U em $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$, respectivamente. Sendo O o centro de λ, tem-se $P\hat{O}Q = 6\alpha$ e $\overline{OP} = \overline{OT} = \overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OU} = \overline{OQ}$.

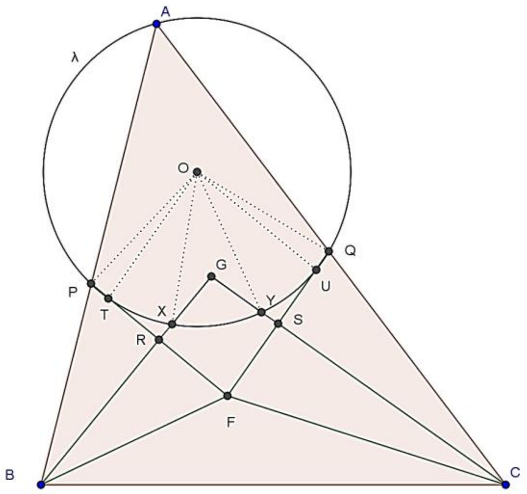


Figura 25: Demonstração geométrica – Passo 3.

Passo 4: Sendo $\overline{OP} = \overline{OQ}$ e $\overline{PF} = \overline{QF}$, ligando os pontos O e F, são obtidos, pelo caso LLL[1], os triângulos congruentes OPF e OQF. Neles, os ângulos internos opostos ao lado OF são dados por:

$O\hat{P}F = O\hat{Q}F = 180° - (3^{a} + 60° - \alpha) = 120° - 2\alpha$ e, consequentemente, OF é bissetriz de $P\hat{F}Q$ e de $P\hat{O}Q$.

Logo, $P\hat{F}Q = O\hat{P}F = O\hat{Q}F$ e $P\hat{F}O = Q\hat{F}O = 60° - \alpha$.

Analogamente, OTF e OUF também são triângulos congruentes e sendo OPT e OQU triângulos isósceles, tem-se:

$O\hat{T}F = O\hat{U}F = 180° - (120° - 2\alpha) = 60° + 2\alpha$.

Daí pode-se concluir que OU e PF são paralelos e $F\hat{O}U = F\hat{O}T = 60° - \alpha$, então $F\hat{O}U = F\hat{O}T = T\hat{F}O = U\hat{F}O$ e assim, o quadrilátero $OTFU$ é um losango, pois $\overline{FT} = \overline{FU} = \overline{OT} = \overline{OU}$.

Além disso, $OPFU$ é um trapézio isósceles (OU // PF e $P\hat{F}U = O\hat{P}F$), portanto, a semirreta $\overrightarrow{BR}$ é mediatriz tanto de PF, quanto de OU e daí, então tem-se $\overline{OX} = \overline{XU} = \overline{OU}$, ou seja, o triângulo OXU é equilátero.

Mas, se $F\hat{O}U = 60° - \alpha$ e $X\hat{O}U = 60°$, então $F\hat{O}X = a$.

[1] Caso de congruência segundo o qual os lados de dois triângulos têm medidas respectivamente iguais.

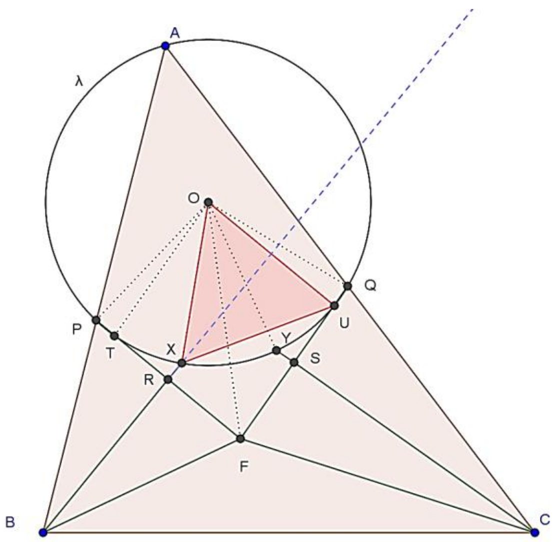


Figura 26: Demonstração geométrica – Passo 4.

Passo 5: Construindo-se um ponto Y nas mesmas condições impostas ao ponto X, pela simetria em relação ao segmento OF, pode-se afirmar que $X\hat{O}Y = 2\alpha$ e, então, os pontos X e Y trissectam o arco PQ.

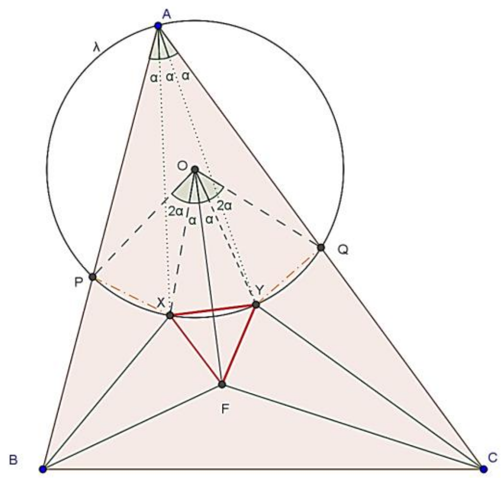


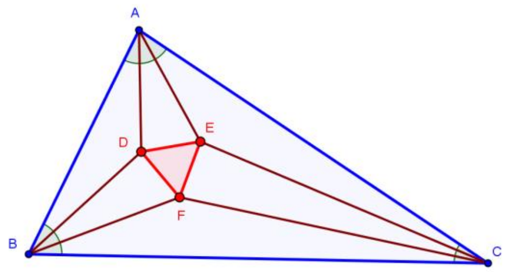
Figura 27: Demonstração geométrica – Passo 5.

Decorre desse fato que AX e AY são trissetrizes de $B\hat{A}C$ e $\overline{PX} = \overline{XY} = \overline{YQ}$. Como X e Y foram construídos sobre mediatrizes, tem-se $\overline{FX} = \overline{YF} = \overline{XY}$. Logo, X, Y e F são os vértices do triângulo de Morley.

7.2. Através das Relações Trigonométricas

Outra demonstração pode ser feita com aplicações de relações trigonométricas, tema frequente nas aulas do Ensino Médio. Trata-se de aplicar basicamente a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos, adição de arcos e as transformações em produto. O desenvolvimento a seguir, se baseia no artigo publicado na revista EUREKA! [18].

A figura 17, apresentada anteriormente, será o ponto de partida. Nela, serão considerados ângulos $B\hat{A}C = a$, $A\hat{B}C = b$ e $A\hat{C}B = c$.



Inscrevendo ABC em uma circunferência de raio R, pela Lei dos senos, pode-se afirmar que: $\frac{\overline{BC}}{sen\ a} = 2R$, ou seja, $\overline{BC} = 2R.sen\ a$. (1)

Fazendo uso da identidade trigonométrica demonstrada no Apêndice III, $sen\ a = 4\ sen\ \frac{a}{3}.sen\ \frac{\pi+a}{3}\ .sen\ \frac{2\pi+a}{3}$, substituindo em (1), decorre que:

$$\overline{BC} = 8R.\ sen\ \frac{a}{3}.sen\ \frac{\pi+a}{3}\ .sen\ \frac{2\pi+a}{3}.$$

No triângulo BCF, onde $B\hat{F}C = \pi - \left(\frac{b+c}{3}\right) = \pi - \left(\frac{\pi-a}{3}\right) = \frac{2\pi+a}{3}$. Novamente pela Lei dos Senos, tem-se:

$$\frac{\overline{BC}}{sen\frac{2\pi+a}{3}} = \frac{\overline{BF}}{sen\frac{c}{3}} \Rightarrow \frac{8R.sen\frac{a}{3}.sen\frac{\pi+a}{3}.sen\frac{2\pi+a}{3}}{sen\frac{2\pi+a}{3}} = \frac{\overline{BF}}{sen\frac{c}{3}}$$

$$\text{logo, } \overline{BF} = 8R.\ sen\ \frac{a}{3}.sen\ \frac{\pi+a}{3}\ .sen\ \frac{c}{3}.$$

Analogamente, Repetindo o processo para o triângulo *ABD*, tem-se:

$$\overline{BD} = 8R.\,sen\,\frac{c}{3}.\,sen\,\frac{\pi+c}{3}\,.\,sen\,\frac{a}{3}.$$

Para simplificar os cálculos, faz-se $\boldsymbol{k} = 8R.\,sen\,\frac{a}{3}\,.\,sen\,\frac{c}{3}$ e, assim são obtidos: $\overline{BF} = k.\,sen\,\frac{\pi+a}{3}$ e $\overline{BD} = k.\,sen\,\frac{\pi+c}{3}$. Com essas medidas, aplica-se a Lei dos Cossenos no triângulo *BDF*:

$$\overline{DF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2.\overline{BF}.\overline{BD}.cos\frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = \left(k.\,sen\,\frac{\pi+a}{3}\right)^2 + \left(k.\,sen\,\frac{\pi+c}{3}\right)^2 - 2.\left(k.\,sen\,\frac{\pi+a}{3}\right).\left(k.\,sen\,\frac{\pi+c}{3}\right).cos\frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left(sen^2\,\frac{\pi+a}{3} + sen^2\,\frac{\pi+c}{3}\right) - k^2.2.\left(sen\,\frac{\pi+a}{3}\right).\left(sen\,\frac{\pi+c}{3}\right).cos\frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left(\frac{1-cos\frac{2\pi+2a}{3}}{2} + \frac{1-cos\frac{2\pi+2c}{3}}{2}\right) - k^2\left[\left(cos\frac{a-c}{3}\right) - \left(cos\frac{2\pi+a+c}{3}\right)\right].cos\frac{b}{3}$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 - \left(\frac{cos\frac{2\pi+2a}{3} + cos\frac{2\pi+2c}{3}}{2}\right) + \left(cos\frac{2\pi+a+c}{3}\right).cos\frac{b}{3} - \left(cos\frac{a-c}{3}.cos\frac{b}{3}\right)\right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 - \left(cos\,\frac{2\pi+a+c}{3}.cos\,\frac{a-c}{3}\right) + \left(cos\frac{2\pi+a+c}{3}\right).cos\frac{b}{3} - \left(cos\frac{a-c}{3}.cos\frac{b}{3}\right)\right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 - \left(cos\,\frac{2\pi+\pi-b}{3}.cos\,\frac{a-c}{3}\right) + \left(cos\frac{2\pi+\pi-b}{3}\right).cos\frac{b}{3} - \left(cos\frac{a-c}{3}.cos\frac{b}{3}\right)\right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 - \left(cos\,\left(\pi - \frac{b}{3}\right).cos\,\frac{a-c}{3}\right) + cos\,\left(\pi - \frac{b}{3}\right).cos\frac{b}{3} - \left(cos\frac{a-c}{3}.cos\frac{b}{3}\right)\right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 + cos\,\frac{b}{3}\,.cos\,\frac{a-c}{3} - cos\,\frac{b}{3}\,.cos\frac{b}{3} - \left(cos\frac{a-c}{3}.cos\frac{b}{3}\right)\right]$$

$$\overline{DF}^2 = k^2.\left[1 - cos^2\,\frac{b}{3}\right] = k^2.\left[sen^2\,\frac{b}{3}\right]$$

Como $\overline{DF} > 0$, tem-se $\overline{DF} = k.\,sen\frac{b}{3}$.

Mas, $\boldsymbol{k} = 8R.\,sen\,\frac{a}{3}\,.\,sen\,\frac{c}{3}$ e assim: $\overline{DF} = 8R.\,sen\,\frac{a}{3}\,.\,sen\,\frac{b}{3}\,.\,sen\frac{c}{3}$.

Fazendo as mesmas aplicações partindo, respectivamente, dos triângulos *ABD* e *ACE*, obtém-se $\overline{DE} = \overline{EF} = 8R.\,sen\,\frac{a}{3}\,.\,sen\,\frac{b}{3}\,.\,sen\frac{c}{3}$.

Logo, $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{EF}$ e daí decorre que *DEF* é equilátero.