4 Trigonometria no círculo trigonométrico

Com o surgimento do cálculo infinitesimal e, posteriormente, da análise matemática, as noções básicas da trigonometria ganharam uma nova dimensão. Passaremos a tratá-la não somente no triângulo retângulo, mas também no círculo trigonométrico.

4.1 Conceitos e pré-requisitos

A partir dessa nova dimensão, passou a ser possível falar em cosseno e seno de um número real, em vez de cosseno e seno de um ângulo. Mas para isso, é indispensável considerar as funções $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ definidas para todo número real t. Essa transição é feita por meio de uma função E, que chamaremos **função de Euler**.

4.1.1 A função de Euler

O domínio da função de Euler é o conjunto $\Re$ dos números reais. Seu contra domínio é o círculo unitário do plano, representado por S^1. Assim, a cada número real t , a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo S^1 .

Para definir precisamente o círculo S^1, introduzimos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que todo ponto P do plano passa a ser representado como um par ordenado $P=(x,y)$, onde x é a sua abscissa e y sua ordenada.

Pelo teorema de Pitágoras, a distância do ponto $P=(x,y)$ ao ponto $W=(u,v)$ é $d_{\overline{PW}}=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. Em particular, a distância de $P=(x,y)$ à origem $O=(0,0)$ é igual a $d_{\overline{PO}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

O círculo unitário S^1 é, por definição, o conjunto dos pontos do plano cuja distância à origem é igual a 1. Assim, o ponto $P=(x,y)$ pertence a S^1 se, e somente se, $\sqrt{x^2+y^2}=1$ ou, o que é o mesmo, $x^2+y^2=1$.

A relação fundamental, $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\text{sen}\alpha$ sejam as coordenadas de um ponto do círculo de raio 1 e centro na origem de $\Re^2$.

Observamos que, para todo ponto $P=(x,y)\in S^1$, tem-se $-1\le x\le 1$ e $-1\le y\le 1$

Por exemplo, os pontos $(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertencem à curva S^1.

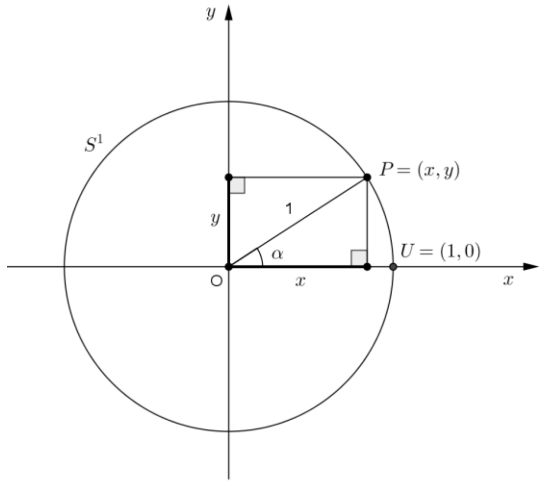

Figura 30: Círculo trigonométrico

Agora temos a definição da função E de Euler:

Dado o número real $t>0$, medimos no círculo S^1, a partir do ponto $U=(1,0)$, um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido no sentido anti-horário (sentido positivo).

A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de $E(t)$. Se $t<0$, $E(t)$será a extremidade final de um arco de comprimento $|t|$, medido a partir do ponto $U=(1,0)$, no sentido horário (sentido negativo).

Como o comprimento de S^1é igual a 2π, se tivermos $t>2\pi$ ou $t<-2\pi$, para descrevermos um arco de comprimento t a partir do ponto $U=(1,0)$,teremos de dar mais de uma volta ao longo de S^1. Em particular, se $t=2k\pi$, onde ké um número inteiro (positivo, negativo ou nulo), temos $E(2k\pi) = U$. Mais geralmente, para qualquer $t \in \Re$ vale $E(t + 2k\pi) = E(t)$, quando k é um número inteiro qualquer.

Reciprocamente, se $t < t'$ em $\Re$ são tais que $E(t) = E(t')$, isto significa que, quando um ponto P varia de t a t' sua imagem $E(P)$ se desloca sobre S^1, no sentido positivo, a partir de t, dando um número inteiro k de voltas e retornando ao ponto de partida $E(t) = E(t')$.

A distância total percorrida é igual a $2k\pi$, logo $t' = t + 2k\pi$, pois o comprimento do caminho percorrido por $E(P)$ é, por definição, igual à distância percorrida por P sobre a reta $\Re$.

Assim, temos $E(t) = E(t')$ se, e somente se, $t' = t + 2k\pi$, com $k \in Z$. (Quando $t' > t$, vale $k > 0$; quando $t' < t$ temos $k < 0$).

Vale observar que, com essa definição, podemos ter $E(t)$ com $t < 0$, ou seja, é permitido a um a ângulo ter medida negativa.

A função de Euler $E : \Re \to S^1$ pode também ser imaginada como um processo de enrolar a reta $\Re$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \Re$ caia sobre o ponto $U = (1,0) \in S^1$.

Com auxílio da função $E : \Re \to S^1$ podemos definir o cosseno e o seno de um número real t.

Dado $t \in \Re$, seja $E(t) = (x, y)$. Definiremos $\cos t = x$ e $\operatorname{sen} t = y$

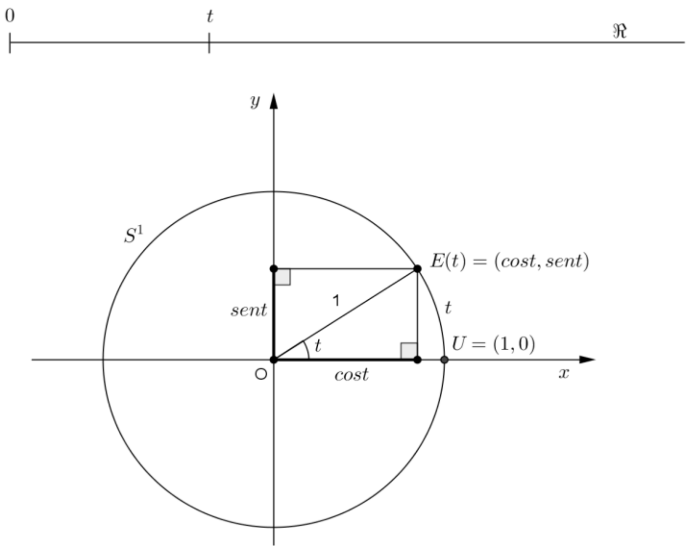

Figura 31: Função de Euler

Portanto, $x = \cos t$ é a abscissa e $y = \operatorname{sen} t$ é ordenada do ponto $E(t)$.

Como $E(t + 2k\pi) = E(t)$ quando k é um número inteiro qualquer, em particular, temos $\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$.

Todas as relações de $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ resultam dessa definição, uma vez que podemos associar um ponto do círculo, com coordenadas $E(t)$, a ângulos maiores que 90º.

Isto nos leva a definir a medida do ângulo pelo comprimento do arco orientado que a ele corresponde. Esta nova unidade é o radiano.

Dizemos que um ângulo α possui medida de 1 radiano, se, e somente se, o arco por ele subtendido tem comprimento igual ao raio do círculo que o contém.

O ângulo de 1 grau é aquele que subtende um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Como a circunferência inteira tem 2π radianos e 360 graus, temos que $2\pi \ radianos = 360 graus$

Portanto, podemos pensar que o seno e o cosseno dependem apenas do comprimento desses arcos medidos em radianos.

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{senx}.$$

É importante observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

4.1.2 Interpretações geométricas:

4.1.2.1 Relação fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Essa relação decorre do fato de que o ponto P pertence ao círculo trigonométrico de raio unitário, onde suas coordenadas são $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

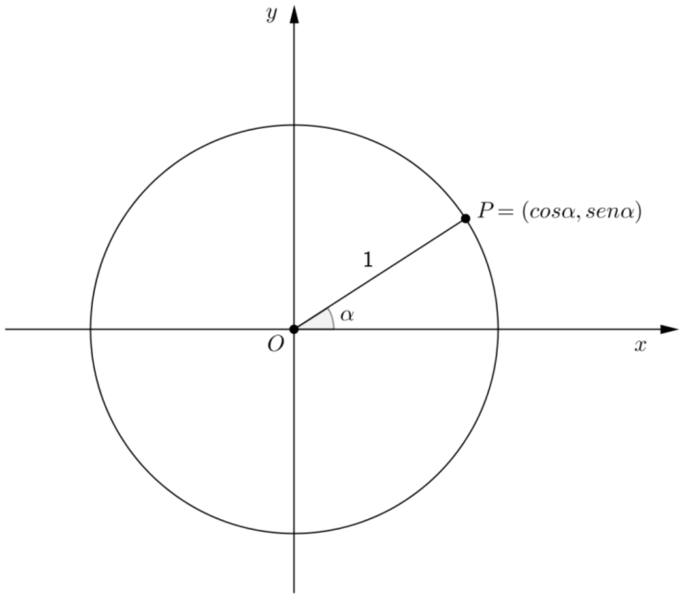

Figura 32: Relação fundamental

Assim, para todo x real, vale a relação: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

4.1.2.2 Seno e cosseno

$\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$

$\overline{OQ} = \cos\alpha$

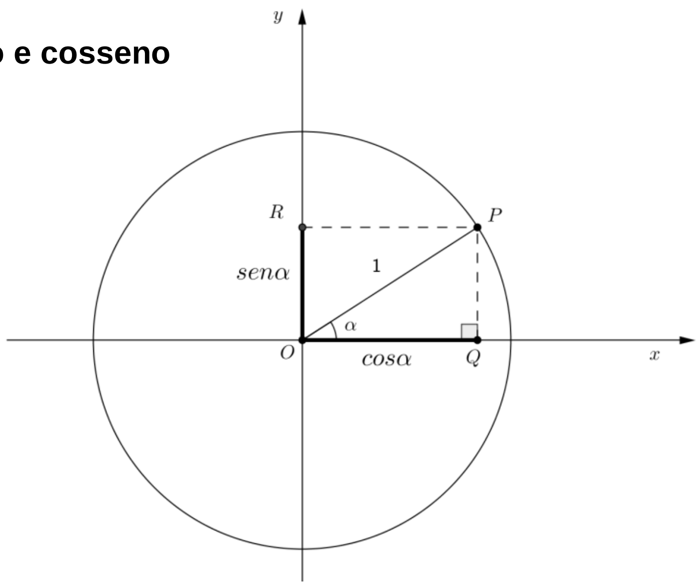

Figura 33: Seno e cosseno

4.1.2.3 Tangente e cotangente

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$\Delta OST \approx \Delta OQP$

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{ST}}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{ST} = \operatorname{tg}\alpha$

$\Delta ORP \approx \Delta OUV$

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Rightarrow \frac{\overline{UV}}{1} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{UV} = \operatorname{cotg}\alpha$

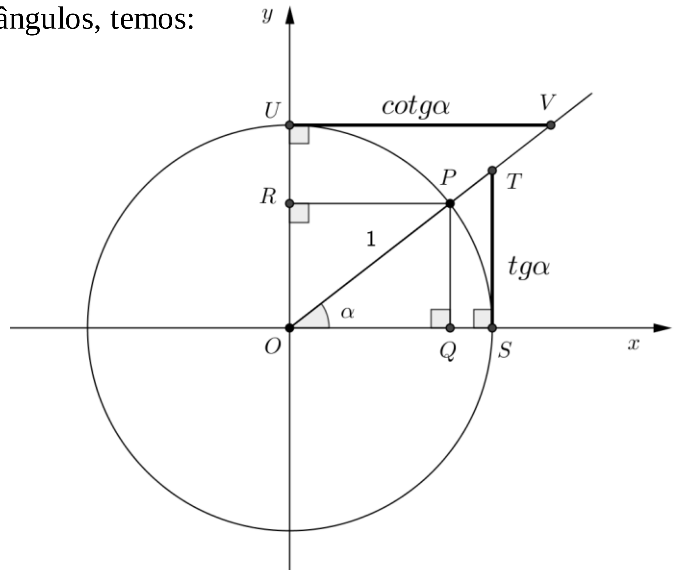

Figura 34: Tangente e cotangente

4.1.2.4 Secante e cossecante

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$\Delta OSP \approx \Delta OPQ$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{OS} = \sec\alpha$

$\Delta OUP \approx \Delta OPR$

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} \Rightarrow \frac{\overline{OU}}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Assim, temos: $\overline{OU} = \operatorname{cossec}\alpha$

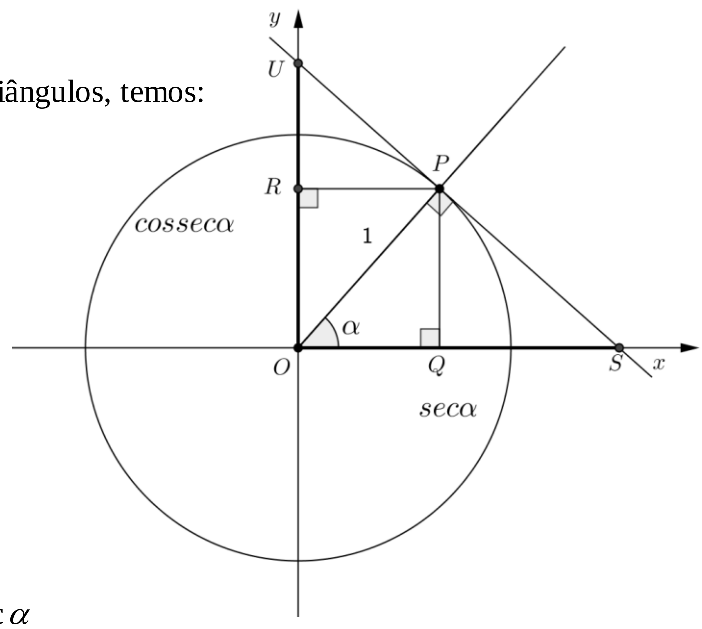

Figura 35: Secante e cossecante

4.1.3 Corolário

Para todo $x \neq \frac{k\pi}{2}$ real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$(I) \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$(II) \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

$$(III) \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(IV) \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Demonstrações:

$$Como \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad segue \quad que:$$

$$(I) \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(II) \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$$

$$(III) \quad \cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(IV) \quad \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x . \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x . \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} . \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

4.1.4 Simetrias no círculo trigonométrico

4.1.4.1 Redução ao 1° quadrante

Dado um arco α com extremidade no 1º quadrante, existem três outros, cada um com extremidades num dos quadrantes, que têm, com exceção do sinal, o mesmo seno e o mesmo cosseno do arco α.

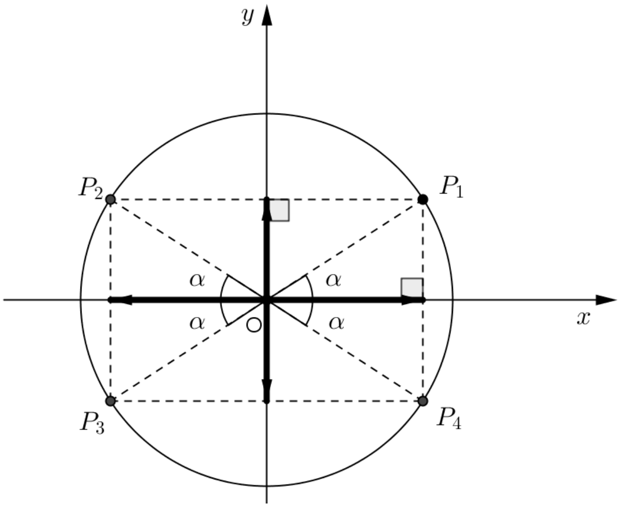

Figura 36: Simetrias no círculo trigonométrico

4.1.4.2 Redução do 2° ao 1° quadrante

Seja P_2 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 2º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_2 em relação ao eixo dos senos. Conforme a figura 37, temos:

$AP_2 + P_2A' = \pi$ (no sentido anti-horário)

E como $AP_1 = P_2A'$, vem:

$AP_2 + AP_1 = \pi$.

Logo, se $AP_1 = \alpha$,então $AP_2 = \pi - \alpha$.

É imediato que:

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)$

E

$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

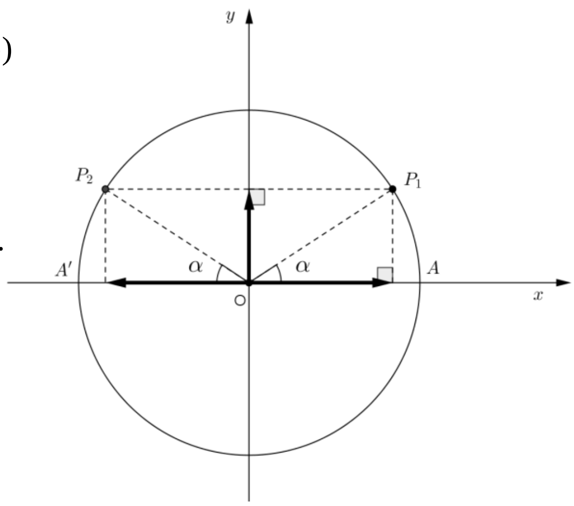

Figura 37: Redução do 2° ao 1° quadrante

Estas equações coincidem com as definições de seno e cosseno de ângulo obtuso, dadas anteriormente quando tratamos de trigonometria no triângulo.

Levando-se em conta as relações fundamentais, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{-\cos(\pi-\alpha)} = -\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)$$

$$\sec\alpha = -\sec(\pi-\alpha)$$

$$\operatorname{cossec}\alpha = \operatorname{cossec}(\pi-\alpha)$$

Assim, por exemplo, temos:

$$\operatorname{sen}115° = \operatorname{sen}(180°-115°) = \operatorname{sen}65°$$

$$\cos130° = -\cos(180°-130°) = -\cos50°$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{4\pi}{5} = -\operatorname{cotg}\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}$$

4.1.4.3 Redução do 3° ao 1° quadrante

Seja P_3 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 3º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_3 em relação ao centro. Conforme a figura 38, temos:

$AP_3 - AP_1 = \pi$ (no sentido anti-horário)

E como $AP_1 = A'P_3$, vem:

$AP_3 - AP_1 = \pi$.

Logo, se $AP_1 = \alpha$,então $AP_3 = \pi + \alpha$

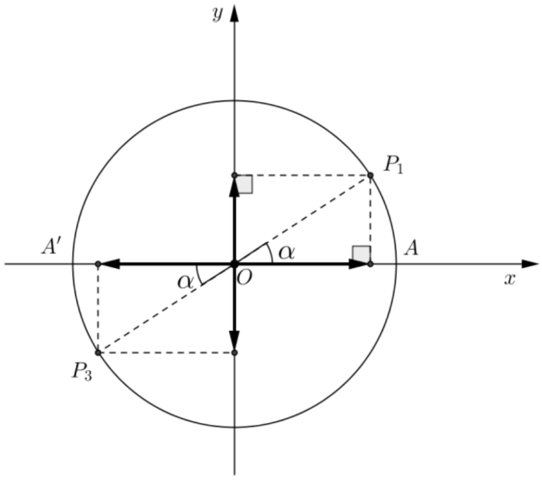

Figura 38: Redução do 3° ao 1° quadrante

É imediato que:

$\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(\pi + \alpha)$

E

$\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$

Em consequência temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\text{sen}(\pi+\alpha)}{-\cos(\pi+\alpha)} = \text{tg}(\pi+\alpha) \quad ,$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,(\pi + \alpha) \quad ,$$

$$\sec\alpha = -\sec(\pi + \alpha) \quad ,$$

$$\text{cossec}\,\alpha = -\text{cossec}\,(\pi + \alpha) \quad .$$

Assim, por exemplo, temos:

$$\text{sen}\,210° = -\text{sen}\,(180° + 30°) = -\text{sen}\,30°$$

$$\cos 225° = -\cos(180° + 45°) = -\cos 45°$$

$$\text{tg}\,\frac{4\pi}{3} = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3}$$

$$\sec\frac{7\pi}{6} = -\sec\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sec\frac{\pi}{6}$$

4.1.4.4 Redução do 4° ao 1° quadrante

Seja P_4 um ponto situado na extremidade de um arco pertencente ao 4º quadrante do círculo trigonométrico. E seja P_1 o ponto do círculo, simétrico de P_4 em relação ao eixo dos cossenos. Conforme a figura 39, temos:

$AP_4 + P_4A = 2\pi$ (no sentido anti-horário).

Como $AP_1 = P_4A$, vem:

$AP_4 + AP_1 = 2\pi$,

Logo, se $AP_1 = \alpha$, então $AP_4 = 2\pi - \alpha$.

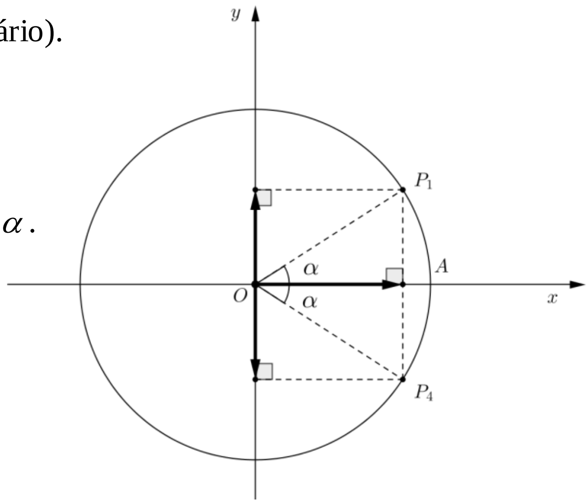

Figura 39: Redução do 4° ao 1° quadrante

É imediato que:

$\text{sen}\, x = -\text{sen}\left(2\pi - \alpha\right)$

E

$\cos x = \cos\left(2\pi - \alpha\right)$

Em consequência temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\text{sen}\left(2\pi-\alpha\right)}{\cos\left(2\pi-\alpha\right)} = -\text{tg}\left(2\pi-\alpha\right) \quad ,$$

$$\text{cotg}\,\alpha = -\text{cotg}\left(2\pi-\alpha\right) \quad ,$$

$$\sec\alpha = \sec\left(2\pi-\alpha\right) \quad ,$$

$$\text{cossec}\,\alpha = -\text{cossec}\left(2\pi-\alpha\right) \quad .$$

Assim por exemplo, temos:

$$\text{sen}\ 280° = -\text{sen}\ (360° - 280°) = -\text{sen}\ 80°$$

$$\cos 340° = \cos\left(360° - 340\right) = \cos 20°$$

$$\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\text{cossec}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{cossec}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\text{cossec}\,\frac{\pi}{3}$$

4.1.5 Fórmula da distância entre dois pontos

Consideram-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da figura. A distância entre esses pontos é $\overline{AB}$, hipotenusa do triângulo sombreado. O cateto $\overline{AC}$ mede $x_B - x_A$ e o cateto $\overline{BC}$ mede $y_B - y_A$.

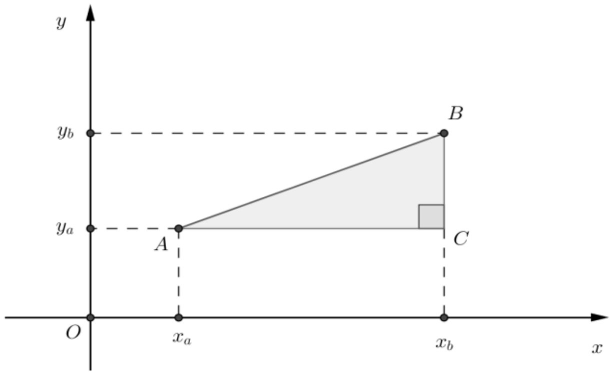

Figura 40: Fórmula da distância entre dois pontos

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, tem-se:

$$d\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Então a fórmula da distância entre $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Essa fórmula é válida para quaisquer pontos A e B do plano cartesiano, e podemos utilizá-la sem necessidade de recorrer a figuras. Por exemplo, a distância entre os pontos $A(2,3)$ e $B(7,15)$ pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(7-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

Essa fórmula será útil nas demonstrações 6.3 , 6.4 e 6.5

Cabe ressaltar que o aluno do 1º ano do ensino médio, enquanto está aprendendo trigonometria, desconhece essa fórmula, pois ainda não lhe foi ensinado o conteúdo de geometria analítica, que está previsto para as séries seguintes. Porém, a apresentação desta fórmula é trivial, pois os alunos já conhecem o Teorema de Pitágoras.