2 A trigonometria no triângulo retângulo

A trigonometria foi inventada há mais de dois mil anos. Ela consiste, essencialmente, em associar a cada ângulo α, *definido como a união de um par de semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (Rezende; Queiroz, 2000, p. 21*), certos números como o $\cos\alpha$ (o cosseno de α) e o $\mathrm{sen}\alpha$ (o seno de α) . Até então, as relações métricas nos triângulos se restringiam em estabelecer fórmulas que relacionavam entre si comprimentos de segmentos (alturas, lados, bissetrizes, etc.). Já a Trigonometria relacionava ângulos com segmentos.

2.1 Conceitos e pré-requisitos

A base teórica na qual se fundamentou originalmente a Trigonometria foi a semelhança de triângulos, que garante que as definições de $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\alpha$ são coerentes, isto é, independem de qual tenha sido o triângulo retângulo ABC escolhido.

2.1.1 Definição de seno e cosseno de um ângulo agudo

Dado um ângulo agudo α, constrói-se um triângulo retângulo ABC no qual $\alpha = B\hat{A}C$ seja um dos seus ângulos.

Se $\overline{AC}$ é a hipotenusa, define-se:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

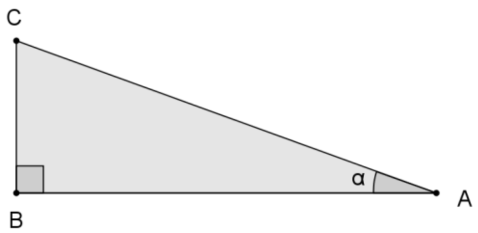

Figura 2: Seno e cosseno de um ângulo agudo

Se tivéssemos construído qualquer outro triângulo retângulo $AB'C'$ de modo análogo, ele seria semelhante a ABC por ter um ângulo agudo comum, logo $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ e $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$.

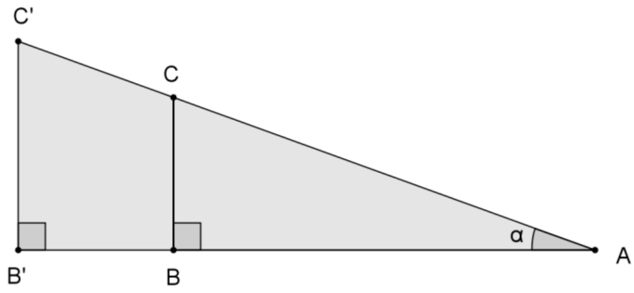

Figura 3: Seno e cosseno de um ângulo agudo

Assim, teríamos os mesmos valores para $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$. Portanto, de acordo com a definição acima, esses valores são números associados ao ângulo α que independem do triângulo retângulo ABC escolhido.

Veremos a seguir que é evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra cosseno (seno do complemento).

Pela lei angular de Thales: $\beta = 90^o - \alpha$ (β é o complemento de α)

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{c}{a}$ e $\cos\beta = \dfrac{b}{a}$

Logo: $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90^o - \alpha)$

$\cos\alpha = \operatorname{sen}(90^o - \alpha)$

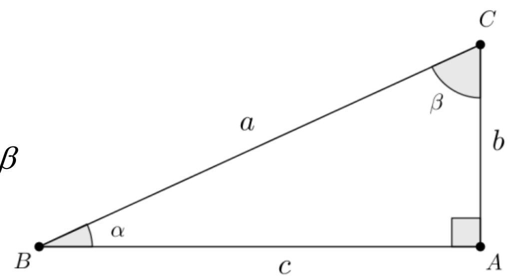

Figura 4: Seno e cosseno do complemento de um ângulo

Logo, construída uma tabela para os valores do seno de um ângulo agudo, podemos construir a dos cossenos.

Como já mencionamos, historicamente o seno e o cosseno foram introduzidos como *razões* entre lados de um triângulo retângulo, e estavam definidas para ângulos do intervalo (0° , 90°).

Entretanto para que possamos tratar das ferramentas adequadas a qualquer triângulo é necessário definir seno e cosseno para ângulos até 180º.

2.1.2 Definição de seno e cosseno de ângulos reto e obtuso

No caso do ângulo reto, definimos: sen 90º = 1 e cos 90º = 0.

Seja agora β um ângulo obtuso. Para definir as razões trigonométricas de β, vamos considerar seu suplemento $\alpha = 180º - \beta$.

Definimos:

$\text{sen}\beta = \text{sen}\,\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$

As figuras a seguir permitem visualizar o seno e o cosseno de ângulos agudos ou obtusos. Nelas tomamos $\overline{AC} = 1$.

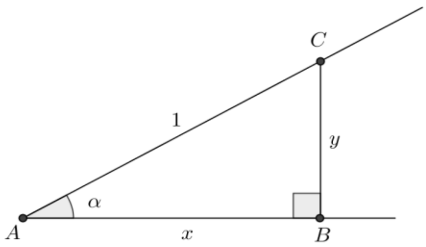

Figura 5: Seno e cosseno de um ângulo agudo

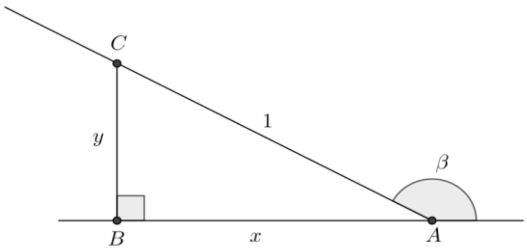

Figura 6: Seno e cosseno de um ângulo obtuso

Na *figura 5,* temos $\text{sen}\,\alpha = y$ e $\cos\alpha = x$

Na *figura 6*, temos $\text{sen}\beta = y$ e $\cos\beta = -x$

Assim, temos:

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\beta = \text{sen}\,(180º - \beta)$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\beta = -\cos\,(180º - \beta)$$

2.1.3 Relação fundamental

Dado um ângulo agudo α, constrói-se um triângulo retângulo ABC no qual $\alpha = A\hat{B}C$ seja um dos ângulos. Com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, conforme figura a seguir:

Assim, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

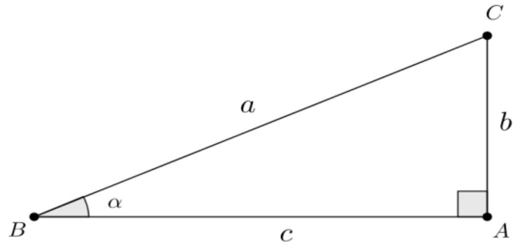

Figura 7: Relação fundamental

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$b^2 + c^2 = a^2$

Assim, podemos escrever: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Logo, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Podemos observar também que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a.\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a.\cos\alpha$$

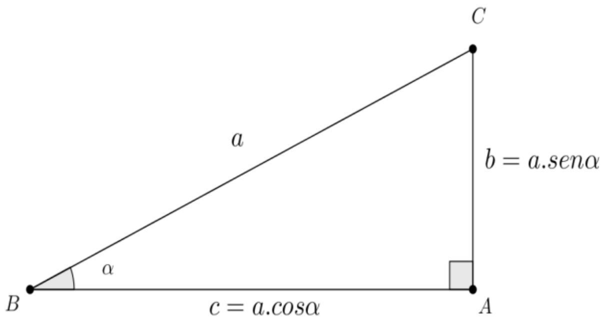

Figura 8: Catetos em função do seno ou cosseno e da hipotenusa

Assim, podemos escrever os catetos de um triângulo retângulo em função do seno e do cosseno de um ângulo agudo e da hipotenusa.

2.1.4 Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$,$\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja ainda $h = \overline{CH}$

a altura baixada de C sobre o lado $\overline{AB}$. Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AB}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

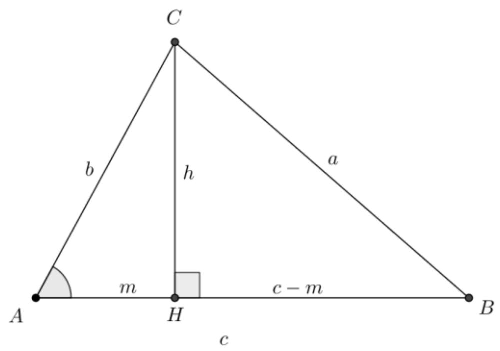

Figura 9: Lei dos cossenos-
Triângulo acutângulo

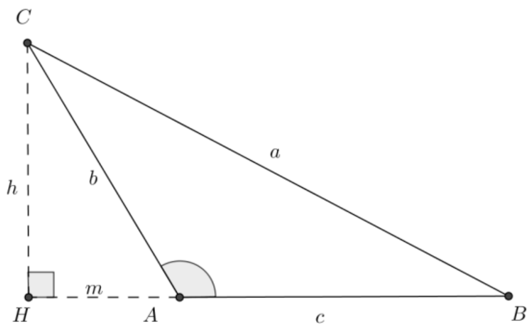

Figura 10: Lei dos cossenos -
Triângulo obtusângulo

I) No primeiro caso, seja $m = \overline{AH} = b.\cos \hat{A}$. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos AHC e BHC fornece as igualdades:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 = h^2 + c^2 - 2.c.m + m^2$$

Mas como $m = b.\cos \hat{A}$

Temos : $a^2 = h^2 + c^2 - 2.c.b.\cos \hat{A} + m^2$

Comparando estas igualdades obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

II) No segundo caso, $m = \overline{AH} = b.\cos\left(180^{\circ} - \hat{A}\right) = -b.\cos\hat{A}$.

Novamente o Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos AHC e BHC nos dá:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 = h^2 + c^2 + 2.c.m + m^2$$

Mas como $m = -b.\cos\hat{A}$

Temos: $a^2 = h^2 + c^2 - 2.c.b.\cos\hat{A} + m^2$

Daí resulta, como antes, que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

Analogamente, tem-se também:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C}$$

Observe que, quando Â é um ângulo reto, a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras.

Uma utilização importante da Lei dos Cossenos, é a de podermos, facilmente, obter os cossenos dos ângulos de um triângulo quando seus lados são conhecidos.

2.1.5 Lei dos senos

Mostraremos a seguir que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo.

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Seja R o raio da circunferência circunscrita. Então:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

Demonstração:

Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AB}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

I) No primeiro caso, traçando a altura h_1 do triângulo ABC relativa ao vértice C, temos:

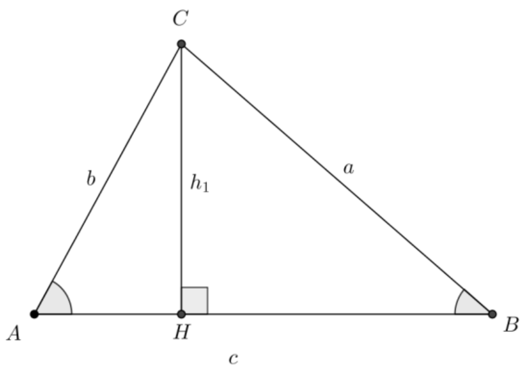

Figura 11: Lei dos senos- Triângulo acutângulo

No triângulo AHC, $h_1 = b.\operatorname{sen} \hat{A}$

No triângulo BHC, $h_1 = a.\operatorname{sen} \hat{B}$

Logo, $b.sen\hat{A} = a.sen\hat{B} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$ (1)

Ainda no primeiro caso, traçando a altura h_2 do triângulo ABC relativa ao vértice A, temos:

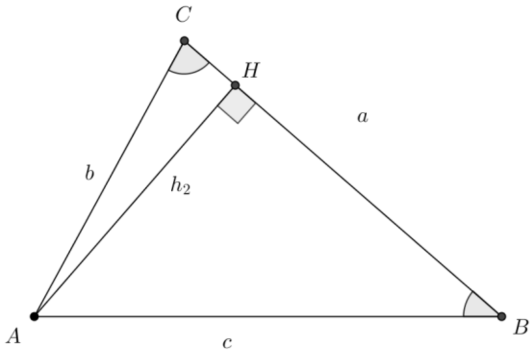

Figura 12: Lei dos senos- Triângulo acutângulo

No triângulo AHC, $h_2 = b.\text{sen}\,\hat{C}$

No triângulo AHB, $h_2 = c.\text{sen}\,\hat{B}$

Logo, $b.\text{sen}\,\hat{C} = c.\text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$ (2)

Comparando (1) e (2), temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

II) No segundo caso, traçando a altura h_1 do triângulo ABC relativa ao vértice C, temos:

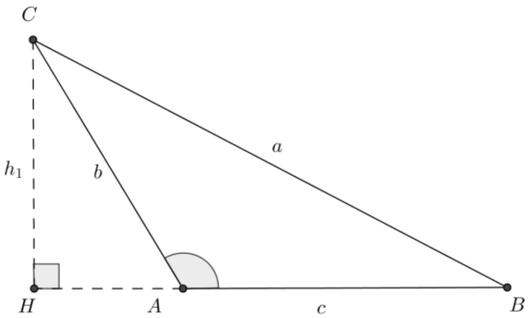

Figura 13: Lei dos senos- Triângulo obtusângulo

No triângulo AHC, $h_1 = b.\text{sen}\,(180^{\circ} - \hat{A})$

Mas como sabemos que $\text{sen}\,(180^{\circ} - \hat{A}) = \text{sen}\,\hat{A}$,

Temos: $h_1 = b.\text{sen}\,\hat{A}$

No triângulo BHC, $h_1 = a.\text{sen}\,\hat{B}$

Logo, $b.\text{sen}\,\hat{A} = a.\text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow \dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$ (3)

Ainda no segundo caso, traçando a altura h_2 do triângulo ABC, relativa ao vértice A, temos:

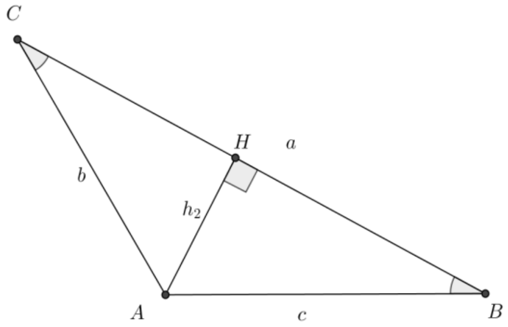

Figura 14: Lei dos senos-
Triângulo obtusângulo

No triângulo AHC, $h_2 = b.\text{sen}\,\hat{C}$

No triângulo AHB, $h_2 = c.\text{sen}\,\hat{B}$

Logo, $b.\text{sen}\,\hat{C} = c.\text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$ (4)

Comparando (3) e (4), temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Para completar a demonstração, ainda temos uma interpretação geométrica para a razão $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$:

Caso $\hat{B}$ seja um ângulo agudo, temos:

Seja $\overline{CD}$ um diâmetro.

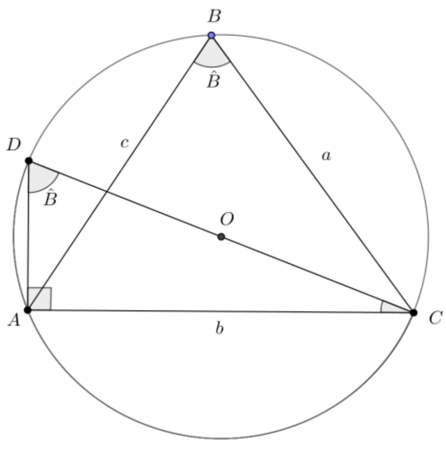

Figura 15: Lei dos senos

Os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes, pois ambos são ângulos inscritos na mesma circunferência e compreendem o mesmo arco AC.

Assim, no triângulo ADC,

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$$ = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Analogamente,

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{2R} \Leftrightarrow \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Finalmente,

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Caso $\hat{B}$ seja um ângulo obtuso, temos:

Seja $\overline{CD}$ um diâmetro.

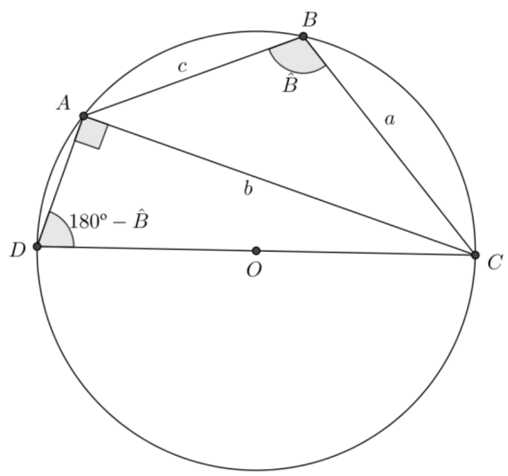

Figura 16: Lei dos senos

O ângulo $A\hat{B}C$, inscrito na circunferência acima, compreende o arco ADC. O ângulo $A\hat{D}C$, também inscrito na mesma circunferência, compreende o arco ABC.

Sendo o ângulo $A\hat{B}C$ igual a $\hat{B}$, temos que o ângulo $A\hat{D}C$ é igual a $180º-\hat{B}$, pois os arcos que eles compreendem são replementares (cuja soma é igual a 360º).

Assim, no triângulo ADC,

$\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \dfrac{b}{2R}$ = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Mas como $\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \text{sen}\,\hat{B}$, temos:

$$\text{sen}\,(180º-\hat{B}) = \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$$

Analogamente,

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{2R} \Leftrightarrow \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

Finalmente,

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

2.1.6 Área de um triângulo em função de dois lados e o ângulo formado por eles

Conhecemos bem a fórmula da área do triângulo como sendo o semiproduto da base pela altura. Expressaremos esta área como função de dois lados e o ângulo formado por eles.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto H pertença ao segmento $\overline{AC}$ ou esteja sobre seu prolongamento.

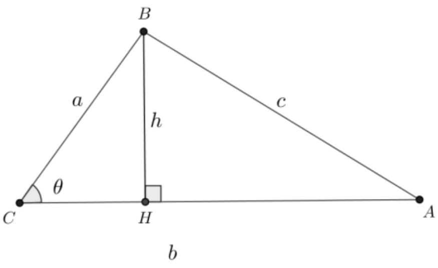

Figura 17: Área de um triângulo acutângulo

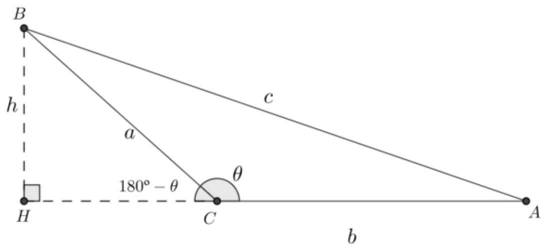

Figura 18: Área de um triângulo obtusângulo

Como mencionado inicialmente, sabemos que a área deste triângulo ABC deve ser calculada pela expressão: $\acute{A}rea = \dfrac{base \cdot altura}{2}$

Logo, $\acute{A}rea = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Podemos notar nas duas figuras que o triângulo formado pelos vértices BCH é um triângulo retângulo, e então podemos usar os conceitos trigonométricos.

Na figura 17, temos: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

Na figura 18, temos: $\operatorname{sen}(180º - \theta) = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

Como temos agora esta expressão para a altura do triângulo ABC , podemos substituí-la na nossa primeira fórmula para a área.

Assim, teremos: $\acute{A}rea = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \acute{A}rea = \dfrac{b \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$

Logo, $\acute{A}rea = \dfrac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$

Essa fórmula será usada na proposta 2, na demonstração da fórmula da adição de arcos no contexto da trigonometria no triângulo retângulo.