

## 9 Tangente do arco metade

Vamos deduzir fórmulas para calcular  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  conhecida a  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Das fórmulas de multiplicação, temos:

$$\sin 2a = 2 \cdot \operatorname{sena} \cdot \cos a = 2 \cdot \operatorname{sena} \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2 \cdot \frac{\operatorname{sena}}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Fazendo  $2a = x$  e  $a = \frac{x}{2}$ , temos:

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Notando que  $\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ , temos:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Uma utilidade destas três últimas fórmulas é nos permitir a substituição de  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  por uma única função  $\left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ , para obtermos as primitivas no estudo de cálculo diferencial e integral.

Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado, também, na resolução de equações trigonométricas.