

4 Formulação do método híbrido na EG

A seguir é aplicado o potencial de Hellinger–Reissner decomposto em dois princípios de trabalhos virtuais, um de forças e outro de deslocamentos, com o objetivo de desenvolver os aspectos conceituais vinculados à elasticidade gradiente. O campo de tensões no domínio Ω é compreendido pela tensão de Cauchy τ_{ji}^s , a tensão total σ_{ji}^s e a tensão dupla μ_{kji}^s . Todas são decompostas em uma parcela homogênea e uma particular, de forma que $\tau_{ji}^s = \tau_{ji}^{*s} + \tau_{ji}^{ps}$, $\sigma_{ji}^s = \sigma_{ji}^{*s} + \sigma_{ji}^{ps}$ e $\mu_{kji}^s = \mu_{kji}^{*s} + \mu_{kji}^{ps}$. O campo de deslocamentos clássicos correspondente ao campo de tensões σ_{ji}^s é dado por u_i^s , e o campo de deslocamentos não-clássicos na superfície Γ é dado por $q_i^s = u_{i,j}^s n_j$, independentemente do deslocamento clássico, de acordo com Mindlin [2], onde o vetor n_j representa a normal na superfície Γ . O campo de deslocamentos no contorno é identificado por u_i^d e q_i^d os quais satisfazem às condições de contorno em Γ .

4.1. Princípio dos trabalhos virtuais

4.1.1. Princípio dos trabalhos virtuais em deslocamentos

Parte-se da expressão de trabalhos virtuais

$$\int_{\Omega} (\tau_{ji}^s \delta \epsilon_{ij}^d + \mu_{kji}^s \delta \kappa_{kji}^d) d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{is} \delta u_{i,s}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} R_i n_i \delta u_{i,i}^d d\Gamma \quad (4-1)$$

onde o subscrito s em $Q_{is} \delta u_{i,s}^d$ representa a coordenada paramétrica da discretização do problema que para 3D corresponde a duas coordenadas $[\xi \ \eta]$ e

para 2D a uma coordenada $[\xi]$, inicialmente se trabalhará em 2D de maneira ilustrativa de tal forma que $Q_{is} \delta u_{i,s}^d = Q_i \delta u_{i,\xi}^d$. Posteriormente se fará a generalização para o caso 3D. κ_{kji}^d é conhecido como o gradiente de deslocamentos do modelo de Mindlin Tipo II, onde:

$$\delta \kappa_{kji}^d = \frac{1}{2} \delta (u_{i,jk}^d + u_{j,ik}^d) = \delta \epsilon_{ji,k}^d = \delta \kappa_{kij}^d \quad (4-2)$$

que sendo simétrico em j e i implica naturalmente a simetria do tensor de segunda ordem μ_{kji}^s :

$$\mu_{kji}^s = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \kappa_{kji}^s} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \kappa_{kij}^s} = \mu_{kij}^s \quad (4-3)$$

que no marco da elasticidade gradiente proposta por Aifantis fica também refletido pela definição de μ_{kji}^s

$$\mu_{kji}^s = \mu_{kij}^s = g^2 \tau_{ji,k}^s \quad (4-4)$$

O trabalho virtual diferencial realizado pela tensão de segunda ordem pode escrever-se também considerando a simetria do tensor em $i \leftrightarrow j$ como

$$\mu_{kji}^s \delta \kappa_{kji}^d = \frac{1}{2} \mu_{kji}^s \delta (u_{i,jk}^d + u_{j,ik}^d) = \frac{1}{2} \mu_{kji}^s \delta u_{i,jk}^d + \mu_{kji}^s u_{j,ik}^d = \mu_{kji}^s \delta u_{i,jk}^d \quad (4-5)$$

Isso permite escrever novamente a equação integral de trabalhos virtuais como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta W d\Omega &= \int_{\Omega} (\tau_{ji}^s \delta u_{i,j}^d + \mu_{jki}^s \delta u_{i,jk}^d) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{is} \delta u_{i,s}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} R_i n_i \delta u_{i,l}^d d\Gamma \end{aligned} \quad (4-6)$$

Se é aplicado o teorema de Green em relação ao subscrito j na energia interna então obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta W d\Omega = \int_{\Gamma} \tau_{ji}^s n_j \delta u_i^d d\Gamma - \int_{\Omega} \tau_{ji,j}^s \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} \mu_{jki}^s n_j \delta u_{i,k}^d d\Gamma - \int_{\Omega} \mu_{jki,j}^s \delta u_{i,k}^d d\Omega \quad (4-7)$$

e se é aplicada novamente a mesma operação em relação ao subscrito k obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta W d\Omega &= \int_{\Gamma} \tau_{ji}^s n_j \delta u_i^d d\Gamma - \int_{\Omega} \tau_{ji,j}^s \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} \mu_{jki}^s n_j \delta u_{i,k}^d d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \mu_{jki,j}^s n_k \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} \mu_{jki,jk}^s \delta u_i^d d\Omega \end{aligned} \quad (4-8)$$

Finalmente pode-se trocar os subscritos $j \leftrightarrow k$ para obter

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta W d\Omega &= \int_{\Gamma} \tau_{ji}^s n_j \delta u_i^d d\Gamma - \int_{\Omega} \tau_{ji,j}^s \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} \mu_{kji}^s n_k \delta u_{i,j}^d d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \mu_{kji,k}^s n_j \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} \mu_{kji,jk}^s \delta u_i^d d\Omega \end{aligned} \quad (4-9)$$

Se for utilizada novamente a equação (182), reagrupado os termos convenientemente e usando a decomposição do gradiente de deslocamentos como a soma de uma projeção normal mais um projeção tangencial da seguinte forma $\delta u_{i,j}^d = n_j n_l \delta u_{i,l}^d + (\delta_{jl} - n_k n_l) \delta u_{i,l}^d$ então se obtém:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} [(\tau_{ji}^s - \mu_{kji,k}^s)_{,j} - \bar{f}_i] \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma} [(\tau_{ji}^s - \mu_{kji,k}^s) n_j - P_i] \delta u_i^d d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} (\mu_{kji}^s n_j n_k - R_i) n_l \delta u_{i,l}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mu_{kji}^s n_k (\delta_{jl} - n_j n_l) \delta u_{i,l}^d - Q_{i,\xi} \delta u_{i,\xi}^d) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4-10)$$

Agora, a tensão total é dada por $\sigma_{ji}^s = (\tau_{ji}^s - \mu_{kji,k}^s)$ e por equilíbrio $(\tau_{ji}^s - \mu_{kji,k}^s)_{,j} - \bar{f}_i = 0$ que dá como resultado a expressão

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}^s n_j - P_i) \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mu_{kji}^s n_j n_k - R_i) n_l \delta u_{i,l}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mu_{kji}^s n_k (\delta_{jl} - n_j n_l) \delta u_{i,l}^d \\ & - Q_{i,\xi} \delta u_{i,\xi}^d) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

Este é o ponto de partida e divergência entre o proposto por Mindlin [2] e o método desenvolvido Dumont e Huamán [42]-[44], já que Mindlin elimina a derivação do subscrito l no último termo através de identidades do cálculo vetorial que requer incluir o conceito de tensões de salto (*jump tensors*) enquanto aqui é feita uma simplificação baseada na geometria diferencial, que leva a expressões diferentes na determinação da tensão clássica e finalmente da matriz \mathbf{H} nos diferentes MECs da EG do presente trabalho; isso se mostrará depois das considerações comuns da formulação híbrida dos elementos de contorno e finitos mostrados a seguir. Na formulação híbrida se usa convenientemente a decomposição das tensões e os deslocamentos em uma solução homogênea e outra particular da forma

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^s &= \sigma_{ji}^* + \sigma_{ji}^p \\ u_i^s &= u_i^* + u_i^p \end{aligned} \quad (4-12)$$

e também a representação da solução homogênea como um somatório de soluções fundamentais

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^* &= \sigma_{jim}^* p_m^* \\ \mu_{kji}^* &= \mu_{kjim}^* p_m^* \\ u_i^* &= u_{im}^* p_m^* \end{aligned} \quad (4-13)$$

Outra ferramenta usada no método consiste em expressar os deslocamentos através de funções de interpolação de um vetor de deslocamentos nodais

generalizados $d_m^G \equiv \mathbf{d}^G = \langle \mathbf{d} \quad \mathbf{q} \rangle^T$ que contém tanto as grandezas clássicas como não-clássicas,

$$\begin{aligned} u_i^d &= u_{in} d_n \\ q_i^d &= u_{in} q_n \end{aligned} \quad (4-14)$$

Agora, para ilustração, mostra-se como é simplificado em 2D o termo que permite desenvolver de forma diferente o exposto por Mindlin [2], vinculado com a projeção tangencial $\delta_{jl} - n_j n_l$ do gradiente de deslocamentos, do seguinte jeito,

$$\delta_{jl} - n_j n_l = \frac{1}{j^2} t_j t_l \quad (4-15)$$

$$t_l \delta u_{i,l}^d = \frac{\partial u_i^d}{\partial \xi} \rightarrow t_l \delta u_{i,l}^d = \frac{\partial \delta u_i^d}{\partial \xi} = u'_{in} \delta d_n \quad (4-16)$$

onde t_j representa o vetor tangencial na superfície Γ dado pelo vetor $\mathbf{t} = [x'(\xi), y'(\xi)]^T$ e ξ representa a coordenada paramétrica que descreve a geometria da superfície Γ através das funções de interpolação nodal $u_{im}(\xi)$.

Utilizando (4-12) – (4-16) pode-se escrever a identidade (4-11) como

$$\begin{aligned} p_m^* \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_{in} d\Gamma \delta d_n + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^p n_j - P_i) u_{in} d\Gamma \delta d_n + p_m^* \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \delta q_n + \\ \int_{\Gamma} (\mu_{kij}^p n_k n_j - R_i) u_{in} d\Gamma \delta q_n + p_m^* \int_{\Gamma} (\frac{1}{j^2} \mu_{kijm}^* n_k t_j u'_{in}) d\Gamma \delta d_n \\ + \int_{\Gamma} (\frac{1}{j^2} \mu_{kij}^p n_k t_j - Q_{is}) u'_{in} d\Gamma \delta d_n = 0 \end{aligned} \quad (4-17)$$

que matricialmente pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \{ p_m^* \}^T \left[\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{j^2} \mu_{kijm}^* n_k t_j u'_{in} d\Gamma \mid \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \delta d_n \\ \delta q_n \end{Bmatrix} \\ + \left[\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^p n_j u_{in} + \frac{1}{j^2} \mu_{kji}^p n_k t_j u'_{in}) d\Gamma \mid \int_{\Gamma} \mu_{kji}^p n_k n_j u_{in} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \delta d_n \\ \delta q_n \end{Bmatrix} \\ - \left[\int_{\Gamma} P_i u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_i u'_{in} d\Gamma \mid \int_{\Gamma} R_i u_{in} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} \delta d_n \\ \delta q_n \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4-18)$$

Como a identidade anterior tem que ser válida para qualquer configuração de deslocamentos compatíveis o fator que multiplica a $\{\delta d_n \quad \delta q_n\}^T$ tem que ser nulo, o que dá como resultado a expressão final

$$\left[\begin{array}{c} \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{j^2} \mu_{kijm}^* n_k t_j u'_{in} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p_m^* \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Gamma} \left(\sigma_{ij}^p n_j u_{in} + \frac{1}{j^2} \mu_{kji}^p n_k t_j u'_{in} \right) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kji}^p n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Gamma} P_i u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_i u'_{in} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} R_i u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} = 0 \quad (4-19)$$

que pode-se escrever como

$$H_{nm}^T p_m^* = p_n^G - p_n^p \equiv H^T p^* = p^G - p^p \quad (4-20)$$

onde p_n^G representa o vetor de forças nodais generalizadas que envolvem tanto forças não-clássicas como clássicas e p_n^p é o vetor análogo ao anterior, correspondente à solução particular do problema.

4.1.2. Princípio de trabalhos virtuais em forças

Parte-se da entidade proveniente do potencial de Hellinger–Reissner que permite controlar a compatibilidade de deslocamentos tanto para u_i^s e u_i^d através de trabalhos virtuais em termos de forças

$$\int_{\Omega} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d) \delta \tau_{ji}^* d\Omega + \int_{\Omega} (u_{i,jk}^s - u_{i,jk}^d) \delta \mu_{kji}^* d\Omega = 0 \quad (4-21)$$

Igualmente ao caso anterior, pode-se trocar os subscritos $j \leftrightarrow k$ ficando a equação anterior da forma

$$\int_{\Omega} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d) \delta \tau_{ji}^* d\Omega + \int_{\Omega} (u_{i,jk}^s - u_{i,jk}^d) \delta \mu_{jki}^* d\Omega = 0 \quad (4-22)$$

que integrada por partes e aplicando-se o teorema de Green em ambos termos fica

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d) \delta \tau_{ji}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} (u_i^s - u_i^d) \delta \tau_{ji}^* d\Omega + \int_{\Gamma} (u_{i,k}^s - u_{i,k}^d) \delta \mu_{jki}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{i,k}^s - u_{i,k}^d) \delta \mu_{jki}^* d\Omega = 0 \quad (4-23)$$

Se o procedimento é repetido no segundo e quarto termos a equação anterior fica depois de trocar subscritos $k \leftrightarrow j$ nos três últimos termos como

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d) \delta \tau_{ji}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} (u_i^s - u_i^d) \delta \tau_{ji}^* d\Omega + \int_{\Gamma} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d) \delta \mu_{kji}^* n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_{i,k}^s - u_{i,k}^d) \delta \mu_{kji}^* n_j d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{i,k}^s - u_{i,k}^d) \delta \mu_{kji}^* d\Omega = 0 \quad (4-24)$$

que agrupado resulta em

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d)(\delta\tau_{ji}^* - \delta\mu_{kji,k}^*)n_j d\Gamma - \int_{\Omega} (u_i^s - u_i^d)(\delta\tau_{ji,j}^* - \delta\mu_{kji,kj}^*)d\Omega + \int_{\Gamma} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d)\delta\mu_{kji}^*n_k d\Gamma = O \quad (4-25)$$

Se na equação anterior é aplicado as equivalências $(\tau_{ji}^* - \mu_{kji,k}^*) = \sigma_{ji}^*$ e $\sigma_{ji,j}^* = 0$ obtém-se finalmente

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d)\delta\sigma_{ji}^*n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d)\delta\mu_{kji}^*n_k d\Gamma = O \quad (4-26)$$

Analogamente ao caso de deslocamentos virtuais pode-se descompor a gradiente de deslocamentos numa projeção tangencial e outra ortogonal $u_{i,j} = n_j n_l u_{i,l} + (\delta_{jl} - n_j n_l) u_{i,l}$ em $u_{i,j}^d$ e então a equação anterior é dada por

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d)\delta\sigma_{ji}^*n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{i,j}^s \delta\mu_{kji}^*n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{i,l}^d n_j n_l \delta\mu_{kji}^*n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{i,l}^d (\delta_{jl} - n_j n_l) \delta\mu_{kji}^*n_k d\Gamma = O \quad (4-27)$$

Em 2D pode-se usar na equação anterior a expressão da projeção ortogonal $\delta_{jl} - n_j n_l = |J|^{-2} t_j t_l$ e a definição de deslocamento de segunda ordem $q_i^d = u_{i,l}^d n_l$ resultando em

$$\int_{\Gamma} \delta\sigma_{ji}^* n_j (u_i^s - u_i^d) d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta\mu_{kji}^* n_k u_{i,j}^s d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta\mu_{kji}^* n_j n_k q_i^d d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta\mu_{kji}^* n_k |J|^{-2} t_j t_l u_{i,l}^d d\Gamma = O \quad (4-28)$$

Se à equação anterior se aplica a decomposição da solução em uma homogênea e particular (4-12), a representação da solução homogênea como uma serie de soluções fundamentais (4-13) e os deslocamentos de acordo com a interpolação de deslocamentos nodais (4-14) chega-se à expressão:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \delta p_m^* n_j (u_{ir}^* p_r^* + u_i^p - u_{in}^d) d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* \delta p_m^* n_k (u_{ir,j}^* p_r^* + u_{i,j}^p) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* \delta p_m^* n_k u_{in}^d d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* \delta p_m^* n_k |J|^{-2} t_j u_{in}^d d\Gamma = O \quad (4-29)$$

que matricialmente pode ser expressa como

$$\begin{aligned} & \{\delta p_m^*\} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{ir}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{ir,j}^* d\Gamma \right] \{p_r^*\} \\ & - \{\delta p_m^*\} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in}^d d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j u_{in}^d d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} d_n \\ q_n \end{Bmatrix} \\ & + \{\delta p_m^*\} \left\{ \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^p d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{i,j}^p d\Gamma \right\} = O \end{aligned} \quad (4-30)$$

válida para qualquer sistema de forças virtuais $\{\delta p_m^*\}$, o que dá como resultado que o termo que ele multiplica deve ser sempre nulo chegando-se assim a expressão final

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{ir}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{ir,j}^* d\Gamma \right] \{ p_r^* \} \\ & - \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k |J|^{-2} t_j u'_{in} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_j n_k u_{in} d\Gamma \right] \begin{Bmatrix} d_n \\ q_n \end{Bmatrix} \\ & + \left\{ \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{i,j}^p d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjim}^* n_k u_{i,j}^p d\Gamma \right\} = O \end{aligned} \quad (4-31)$$

Isso permite distinguir as matrizes \mathbf{F} no primeiro termo e \mathbf{H} no segundo através da expressão seguinte:

$$F_{mr}^* p_r^* = H_{mn} d_n^G - b_m \equiv \mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} \mathbf{d}^G - \mathbf{b} \quad (4-32)$$

O vetor \mathbf{b} corresponde ao último termo da equação (4-31), e \mathbf{d}^G ao vetor generalizado de deslocamentos nodais $\{d_n \quad q_n\}^T$.

4.2. Expressões gerais para problemas 3D.

A expressão $\delta_{jl} - n_j n_l = \frac{1}{J^2} t_j t_l$ tem um formato equivalente em 3D:

$$\delta_{jl} - n_j n_l = \frac{1}{J^2} \tilde{t}_{js} t_{ms} \quad (4-33)$$

para o qual define-se as matrizes $\tilde{\mathbf{t}} \equiv \tilde{t}_{js}$ e $\mathbf{t} \equiv t_{ms}$ onde os subscritos r e s correspondem às coordenadas paramétricas ξ e η , enquanto m corresponde às coordenadas x , y , e z , dadas pelas expressões:

$$\mathbf{t} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}] \quad (4-34)$$

$$\mathbf{t}^\perp = [\mathbf{v} \quad -\mathbf{u}] \quad (4-35)$$

$$\tilde{t}_{js} = t_{jr}^\perp t_{mr}^\perp t_{ms} \quad (4-36)$$

onde os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são definidos pelas derivadas com respeito às coordenadas paramétricas do vetor posição $\langle x, y, z \rangle = \langle x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta) \rangle$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \partial_\xi x \\ \partial_\xi y \\ \partial_\xi z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \partial_\eta x \\ \partial_\eta y \\ \partial_\eta z \end{Bmatrix} \quad (4-37)$$

Os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} podem ser visualizados na Figura 7 como os vetores tangentes determinados pela direção de cada coordenada paramétrica ξ e η .

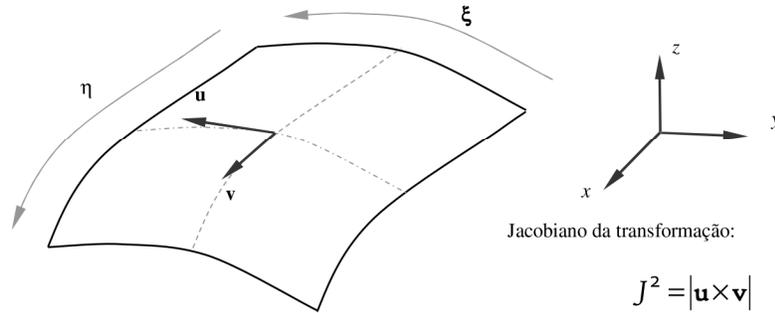


Figura 7 Sistema de coordenadas paramétricas em 3D

As equações (4-34)–(4-36) permitem rescrever as expressões (4-20) – (4-31) no formato geral para problemas 3D do seguinte jeito:

$$\left[\begin{array}{c} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{j^2} \mu_{kijm}^* n_k \tilde{t}_{js} u_{in,s} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p_m^* \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Gamma} \left(\sigma_{ji}^p n_j u_{in} + \frac{1}{j^2} \mu_{kji}^p n_k \tilde{t}_{js} u_{in,s} \right) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mu_{kji}^p n_k n_j u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Gamma} P_i u_{in} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} R_i u_{in} d\Gamma \end{array} \right\} = 0 \quad (4-38)$$

$$\left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{ir}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k u_{ir,j}^* d\Gamma \right] \left\{ \begin{array}{c} p_r^* \end{array} \right\} - \left[\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k |J|^{-2} \tilde{t}_{js} u_{in,s} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k n_j u_{in} d\Gamma \right] \left\{ \begin{array}{c} d_n \\ q_n \end{array} \right\} + \left\{ \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_i^p d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kijm}^* n_k u_{i,j}^p d\Gamma \right\} = 0 \quad (4-39)$$

Finalmente a matriz \mathbf{K} é obtida das duas expressões como

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{H} \quad (4-40)$$

Resolvido o problema em termos de \mathbf{p}^* em (4-20) e (4-31), obtém-se

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^p + \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{b} \quad (4-41)$$

O MHEF está governado no resumo pelas equações determinadas para os dois supostos de trabalhos virtuais:

$$H_{nm}^T p_m^* = p_n^G - p_n^p \equiv \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p}^G - \mathbf{p}^p \quad (4-42)$$

$$F_{mr}^* p_r^* = H_{mn} d_n^G - b_m \equiv \mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} \mathbf{d}^G - \mathbf{b} \quad (4-43)$$

Em suma, o MHEC generalizado precisa de uma variação da solução fundamental singular composta de uma solução clássica e uma não-clássica, tal como é mostrado na seção seguinte. Também é preciso uma derivação de

superfície em relação ao ponto fonte nas duas expressões para completar o sistema de equações.

Deve ser considerado que os dois métodos, o MHEF e o MHEC, na prática são utilizados só teoricamente como ferramenta para uma formulação simplificada já que o cálculo computacional da matriz F é na EG ainda mais trabalhoso e complexo.