

10

Aplicação Numérica 2D do MHEF na EG

10.1. Q4 Irregular

A primeira tentativa para conferir a formulação do MHEF na EG consistiu em fazer um teste individual ao elemento finito irregular Q4 de 24 gdl, 8 gdl clássicos e 16 gdl não-clássicos, como se mostra Figura 35.

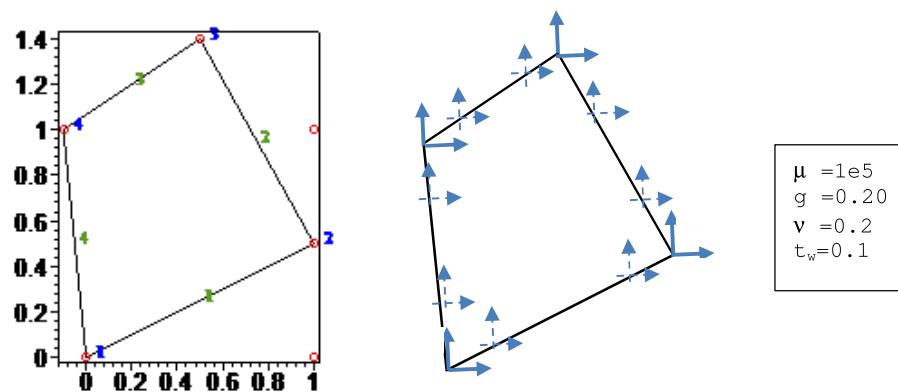


Figura 35. Q4 Irregular com 24 gdl. nodais, 8 clássicos (setas contínuas) e 16 não-clássicos (setas descontínuas desenhadas fora dos nós mas correspondem a eles); mostram-se também as constantes constitutivas utilizadas e a espessura.

Primeiro foram calculadas as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} e analisadas suas propriedades espectrais, para o qual se determinou o espaço nulo \mathbf{W} e \mathbf{V} respectivamente.

$\mathbf{W} \equiv \langle \mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2 \quad \mathbf{W}_3 \rangle$ está constituído respectivamente por dois campos de deslocamentos de corpo rígido de translação $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ mais um campo de rotação $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix}^T$ avaliados de forma nodal. Aqui acontece um fenômeno não trivial com o campo nulo de deslocamentos nodais \mathbf{W}_3 , já que se apresentam grandezas nodais não-clássicas devidas à rotação de corpo rígido. O campo de deslocamentos de corpo rígido não-clássico é dado por

$$\mathbf{q}_3 = \nabla \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n} \equiv q_{3i} = u_{3i,j} n_j \equiv \begin{pmatrix} -n_2 & n_1 \end{pmatrix}^T, \quad (\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{o}) \text{ avaliados nos nós;}$$

como se pode apreciar este deslocamento correspondem a grandezas apenas tangenciais. Então \mathbf{W}_3 pode se escrever como uma composição de um vetor clássico \mathbf{W}_3^d (no presente exemplo de ordem 8) e outro vetor não-clássico \mathbf{W}_3^q (de ordem 16) da seguinte maneira:

$$\mathbf{W}_3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_3^d \\ \mathbf{W}_3^q \end{Bmatrix} \quad (10-1)$$

Como se mostrou a matriz \mathbf{H} é uma matriz também composta de duas submatrizes vinculadas a deslocamentos clássicos e não-clássicos,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \langle \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B \quad \mathbf{H}^C \rangle \\ &= \oint_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{in} d\Gamma + \oint_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_k |J|^{-2} t_j u_m^* d\Gamma \quad \oint_{\Gamma} \mu_{kjm}^* n_j n_k u_m d\Gamma \end{aligned} \quad (10-2)$$

Na elasticidade gradiente o espaço nulo da rotação de corpo rígido se dá através de uma compensação de duas parcelas vinculadas aos deslocamentos clássicos e não-clássicos que se anulam mutuamente da seguinte maneira

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{W}_3 = (\mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B) \cdot \mathbf{W}_3^d + \mathbf{H}^C \cdot \mathbf{W}_3^q \equiv \mathbf{0} \quad (10-3)$$

onde se verificou que $\mathbf{H}^A \cdot \mathbf{W}_3^d \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^C \cdot \mathbf{W}_3^q \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^B \cdot \mathbf{W}_3^d = \mathbf{0}$ e portanto

$$\mathbf{H}^B \cdot \mathbf{W}_3^d = -\mathbf{H}^C \cdot \mathbf{W}_3^q. \quad \text{A configuração geométrica do vetor } \mathbf{W}_3^q \text{ mostra-se na Figura 36.}$$

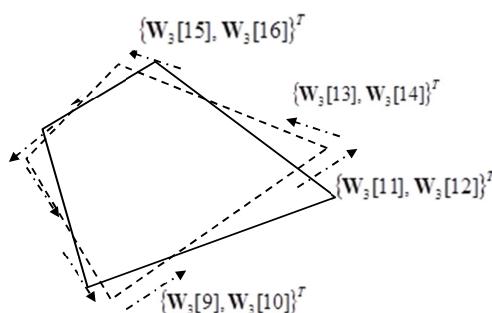


Figura 36. Configuração vetorial (setas descontínuas) do campo de deslocamento nodal não-clássico à rotação \mathbf{W}_3^q . Todos são tangentes à superfície onde são avaliadas.

A montagem da matriz \mathbf{H} foi feita com uma aproximação de 30 casas decimais e se verificou o erro do espaço nulo satisfatoriamente através da definição de norma de erro seguinte.

$$Error(\mathbf{H} \cdot \mathbf{W}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{24} H_{ik} W_{kj} \right)^2} = .11475e-25 \quad (10-4)$$

que também foi verificado em todos os outros elementos que se apresentarão em adiante.

\mathbf{V} se avaliou através da dependência linear das soluções fundamentais das soluções escolhidas, aqui se usaram as soluções fundamentais polinomiais clássicas:

$$\mathbf{u}^* \equiv u_{im} = \begin{bmatrix} -3+4v & 0 & x(-5+8v) & y & y(-7+8v) & \dots \\ 0 & -3+4v & y & x(-7+8v) & x & \dots \end{bmatrix} \quad (10-5)$$

que determina o campo nulo seguinte:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \quad (10-6)$$

A norma de erro de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$ foi exatamente zero.

Verificou-se numericamente os postos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} com as ordens dos seus correspondentes campos nulos \mathbf{W} e \mathbf{V} de forma satisfatória (a igual que em todos os elementos que se apresentarão mais adiante),

$$Posto(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) = Dimensão(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) - Rank(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T) = 3, \quad (10-7)$$

$$Posto(\mathbf{F}) = Dimensão(\mathbf{F}) - Rank(\mathbf{F}) = 3 \quad (10-8)$$

A matriz \mathbf{K} foi obtida através da expressão (4-40) $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{H}$ utilizando o conceito de inversa generalizada da matriz \mathbf{F}^* (matriz singular) e dada pela expressão $(\mathbf{F}^* + \mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1}$; foram aplicados diversos campos de deslocamento \mathbf{d} , linear, de tal jeito de poder verificar satisfatoriamente que as forças nodais correspondentes a $\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}$ gerem deformações constantes (o IET). Também se verificou que o campo nulo de \mathbf{K} , ou seja \mathbf{W} , satisfaça $\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} \equiv \mathbf{0}$.

O Q4 da elasticidade gradiente passa o teste individual (IET) através da aplicação de um campo linear da solução fundamental gerando tensão e deformação constante, fato não trivial já que eles surgem através de operações

matriciais que incluem grandezas não-clássicas. Embora campos de maior ordem não passem o teste, o campo quadrático gera forças nodais equivalentes em equilíbrio com as forças obtidas através de relação de rigidez $\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}$.

10.2. Patch Test de 3 EF–SG lineares Q4 irregulares

Foi feito o PT de 3 elementos finitos Q4 do tipo elasticidade gradiente, lineares de 24 gdl cada, mostrados na Figura 37 que integrados no Patch fizeram um sistema global de 50 gdl nodais, 14 gdl clássicos (setas contínuas) e 36 gdl não-clássicos (setas descontínuas)

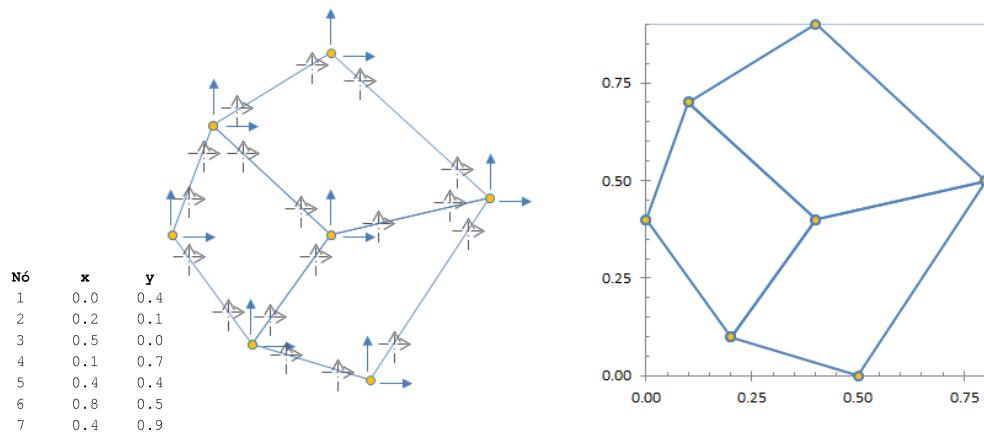


Figura 37. Sistemas de coordenadas de um Patch conformado por 3 EF–EG lineares Q4 de 24 gdl nodais cada. O Patch está conformado por 14 gdlC (zetas contínuas) e 36 gdlINC (setas descontínuas), todos correspondem a grandezas nodais mas estão desenhadas ilustrativamente a um canto de cada nó, por exemplo, o nó central está conformado por 8 gdl (2 gdlC+6 gdlINC).

O primeiro PT consistiu da aplicação de um campo de deslocamentos linear $\mathbf{u} = \langle x(-5+8v) \quad y \rangle^T$ correspondente a uma solução fundamental polinomial e foi verificado se o sistema de forças nodais satisfazia o equilíbrio e se a força nodal central era nula. O PT seguinte consistiu da aplicação de um campo de deslocamentos de corpo rígido, que contém deslocamentos clássicos e não-clássicos, e a consequente geração de forças nodais nulas que também representa uma propriedade espectral da matriz de rigidez global. Finalmente foi feito um PT com um campo de deslocamentos quadrático que também passou o teste satisfatoriamente.

10.3. Convergência de uma barra de treliça com elementos finitos 2D

Apresenta-se nesta seção uma análise de convergência de elementos finitos de elasticidade gradiente Q4, lineares e de 24 gdl cada, para a simulação de um elemento de treliça utilizando diferentes modelos de discretização. Os dois campos aplicados ao modelo correspondem às soluções fundamentais quadrática e cúbica. A grandeza analisada corresponde à força axial no extremo direito da barra obtida através do método de rigidez $p = K \cdot d$ e ao carregamento nodal equivalente no contorno.

Erro Força Axial

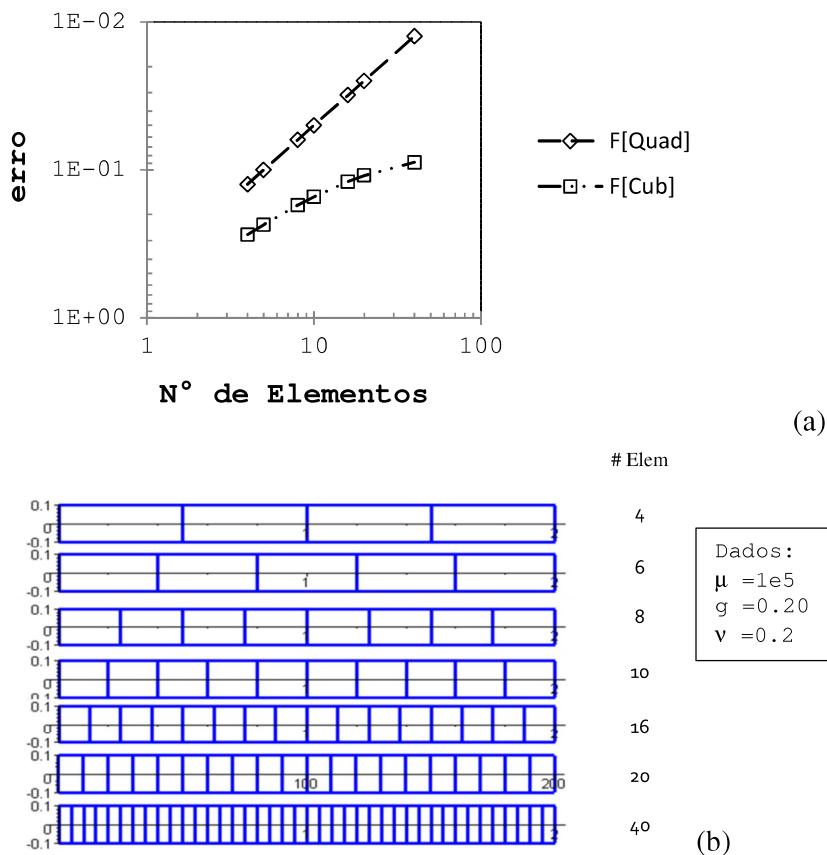


Figura 38. Análise de convergência de elementos finitos para conformação de uma barra de treliça. Foi aplicado dois campos de deslocamentos e analisado o erro da força no extremo direito da barra para diferentes graus de discretização.

Na Figura 38(a) se mostra os resultados dos campos aplicados e se pode apreciar que a convergência para um campo cúbico e 40 elementos não fica satisfatoriamente, pouco menos de 10%, em quanto o resultado para um campo quadrático ficou distingivelmente superior, 1.25%. Esse fenômeno é também encontrado de forma análoga na análise de convergência de elementos finitos da EG feita por Vardoulakis et al [53] onde ainda não é reconhecida fisicamente a razão do comportamento em questão. Os resultados da análise feita para um campo de deslocamento linear são diretos, ou seja, em todos os modelos de discretização os resultados são numérica e exatamente iguais.

10.4. IET e PT de elementos cúbicos quadrilaterais.

Nesta seção se apresenta um IET (Individual Element Test) de um elemento cúbico quadrilateral de 12 nós e 56 gdl, 24 gdlC mais 32 gdlNC, Figura 39(a), que passou o teste através de uma aplicação de três campos de deslocamento: linear, quadrático e cúbico. Também foi feito um PT de dois elementos cúbicos, Figura 39. (b), onde além de passar o teste se verificou se as forças internas nodais eram nulas.

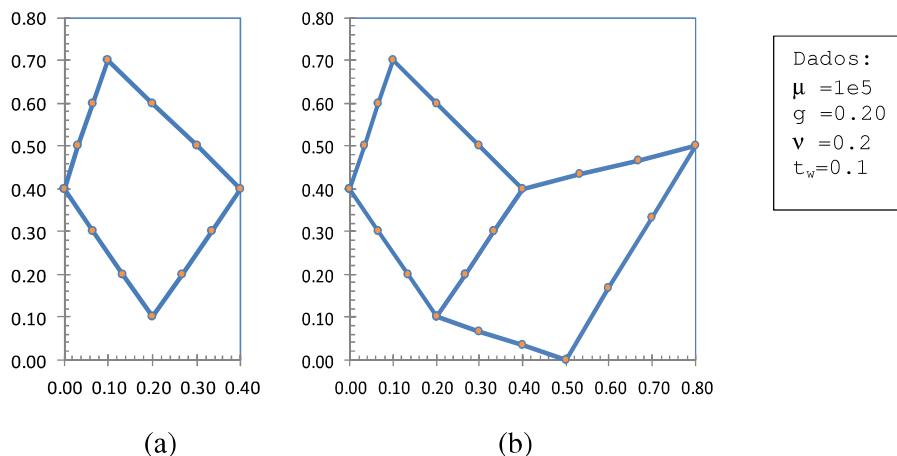


Figura 39. (a) Mostra-se o elemento finito cúbico de 12 nós, 56 gdl, 24 gdlC+32gdlNC submetido ao IET com três campos, linear, quadrático e cúbico; (b) PT de dois elementos cúbicos de 44 nós e 92 gdl, 48 gdlC+44 gdlNC, foi aplicado também os mesmos campos de deslocamentos nodais que o caso anterior.

10.4.1. Análise de convergência de EF

Nesta seção se apresenta a análise de convergência para elementos finitos Q4 de 24 gdl e Q8 de 36 gdl submetidos a campos de deslocamentos que variam desde o quadrático até o quíntico correspondente às soluções fundamentais polinomiais; verificaram-se em cada caso duas consistências (1) que a somatória das forças internas nodais tenda a zero e (2) que o erro das forças de superfície proveniente da comparação de $\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{d}$ com a força nodal equivalente clássica $P_i^N = \int_{\Gamma} P_i u_{in} d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{,i} u'_{in} d\Gamma$ e não-clássicas $R_i^N = \int_{\Gamma} R_i u_{in} d\Gamma$ tendam a zero.

Os diferentes modelos de refinamento da discretização estão representados na Tabela 3 onde se mostra os números de elementos finitos utilizados em cada modelo e os dois sólidos que foram analisados.

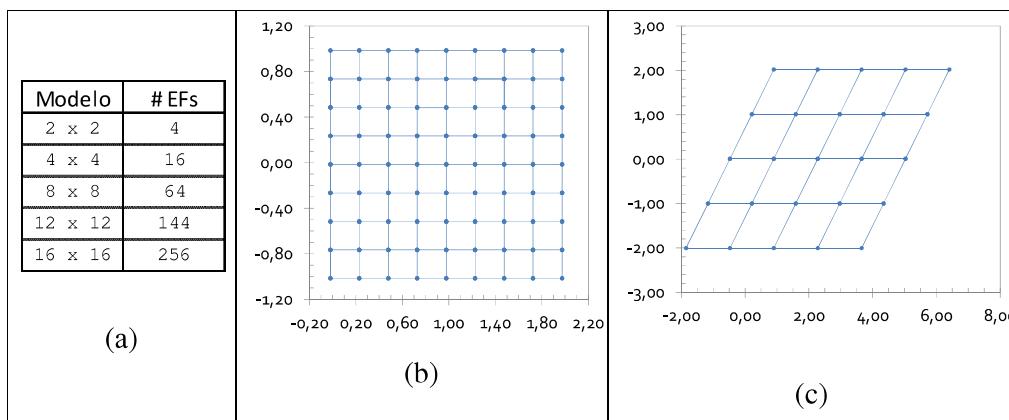


Tabela 3. (a) Modelos de discretização para os dois sólidos analisados: (b) quadrado 2.0 x 2.0 m (c) paralelogramo de lado 5.0 m

Na Tabela 3 se podem visualizar as dimensões dos sólidos regulares analisados: um quadrado de 2x2 m, e um paralelogramo de lado 5 m e inclinação $\frac{\pi}{4}$. Para a representação média do erro de todas as forças internas se utilizou a norma de erro dada pela somatória do erro em cada ponto

$$\text{erro}(\bar{p}) = \sqrt{\sum_{k=1,n} \text{erro}(p_i)^2} \quad (10-9)$$

e o erro da força em cada ponto $\text{erro}(p_i)$ só para os n pontos internos foi calculado pela expressão

$$erro(p_i) = \frac{\left| \sum_{j=1}^N K_{ji} d_j \right|}{\sum_{j=1}^N |K_{ji} d_j|} \quad (10-10)$$

onde K_{ji} corresponde à matriz de rigidez generalizadas global e d_j ao vetor de deslocamento nodais generalizados de acordo ao campo escolhido.

Também se verificou as propriedades espetrais de matriz global a través de deslocamentos de corpo rígido que como se mencionou anteriormente eles implicam na elasticidade gradiente deslocamentos não-clássicos.

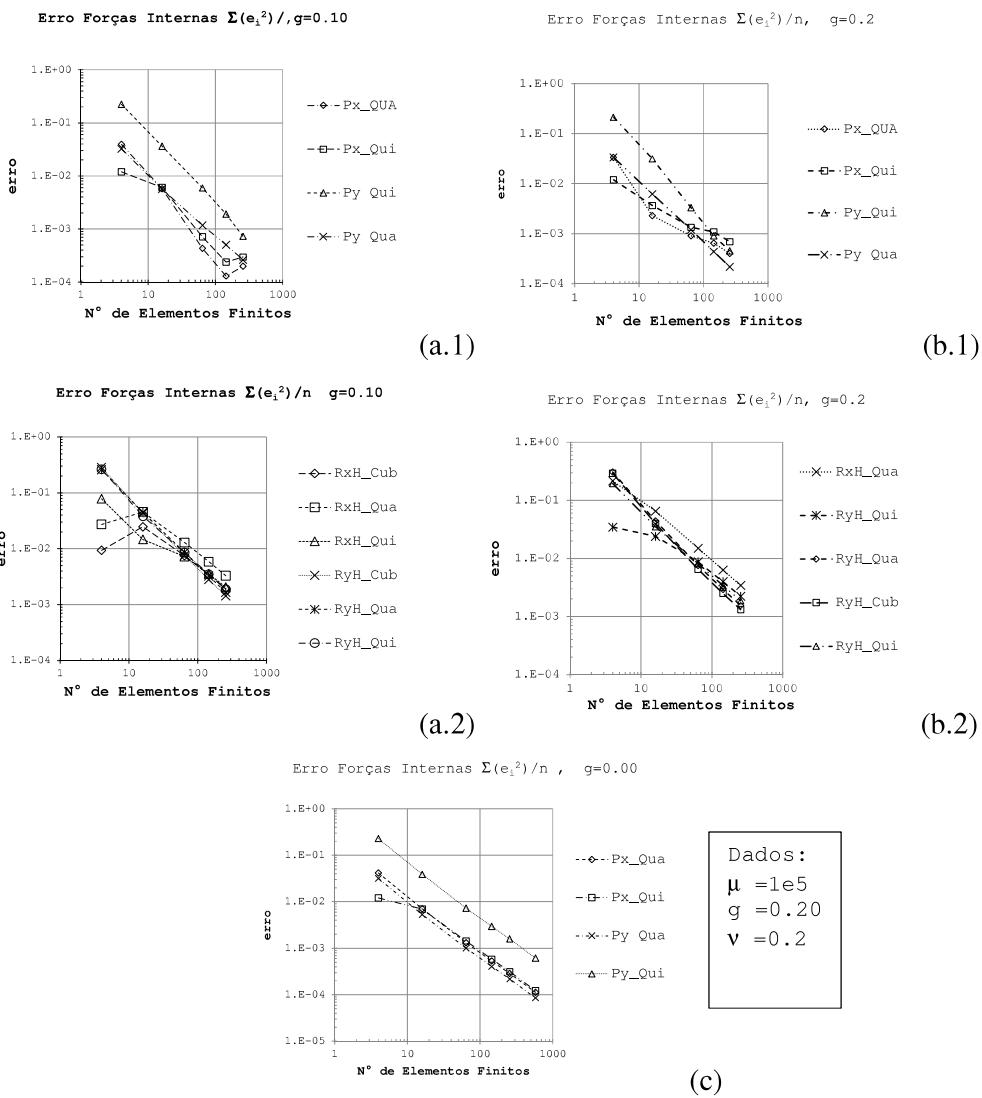


Figura 40. Paralelogramo Q4: erro das duas forças médias clássicas e não-clássicas em x e y, para campos de deslocamento cúbicos (Cub), quárticos (Qua) e quínticos (Qui) para (a) $g=0.10$ (b) $g=0.20$ (c) para $g=0.00$.

A Figura 40 mostra a convergência das forças internas clássicas e não-clássicas para campos de deslocamento de graus 3° , 4° e 5° (Cub, Qua e Qui) provenientes da soluções fundamentais não-clássicas desenvolvidas na seção 3. O erro das forças clássicas estão designadas por Px, Py e o erro das forças não-clássicas na face inclinada Rx, Ry são designadas com sufixo V e as forças não-clássicas na face horizontal Rx, Ry com sufixo H.

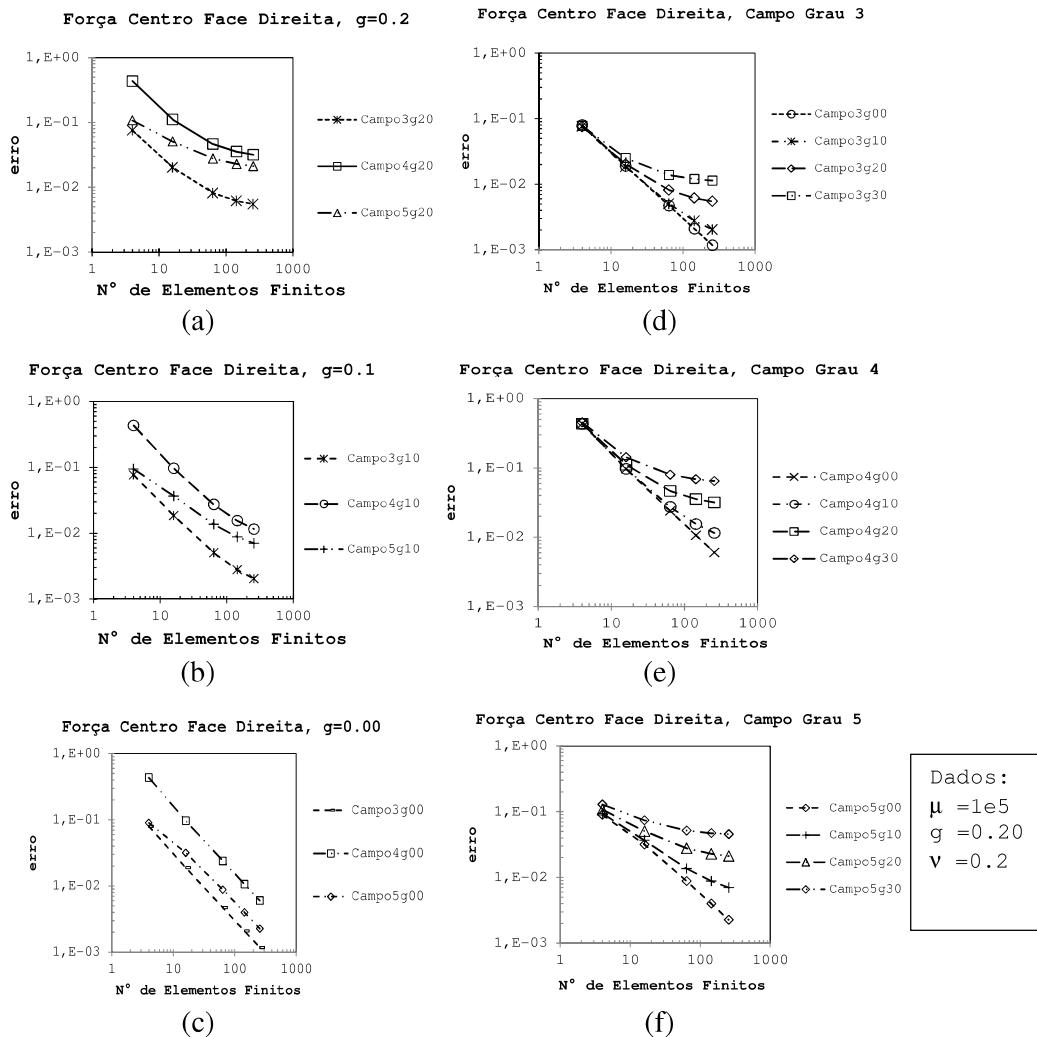


Figura 41. Convergência da força de superfície central no sólido paralelogramo através da norma do erro $|K.d-P|/|K.d|$, P, força nodal equivalente: (a)-(c) cada ilustração mostra para cada g a sensibilidade aos três diferentes campos aplicados $O(r^3)$ - $O(r^5)$; (d)-(e) cada ilustração mostra para cada campo a sensibilidade ao parâmetro g .

A Figura 41 mostra a convergência da força interna clássica Px do mesmo paralelogramo discretizado por Q4s. Os primeiros 3 gráficos mostram a sensibilidade do erro ao campo de deslocamentos de graus 3° , 4° e 5° (Cub, Qua e

Qui), mantendo constante o parâmetro constitutivo não-clássico para cada caso: $g=\{0.2,0.10,0.00\}$. Os últimos 3 gráficos mostram a sensibilidade do erro ao parâmetro constitutivo não-clássico $g=\{0,0.10,0.20,0.30\}$ mantendo constante os graus 3° , 4° e 5° do campo de deslocamentos em cada caso.

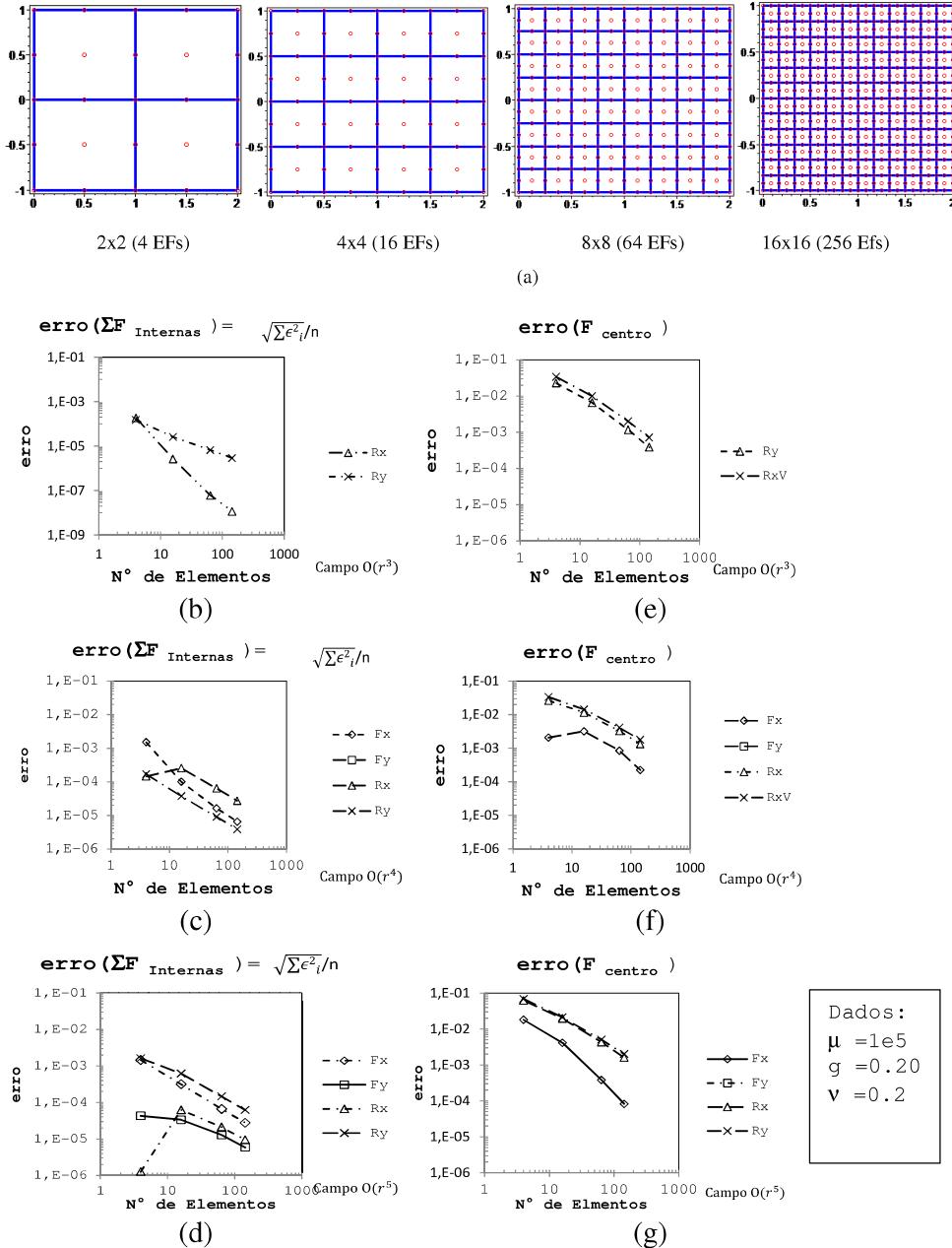


Figura 42. (a) Discretização de um sólido em elementos Q8; (b)–(d) erro médio de todas as forças internas; (e)–(g) erro no ponto central do elemento. As curvas que não parecem são nulas.

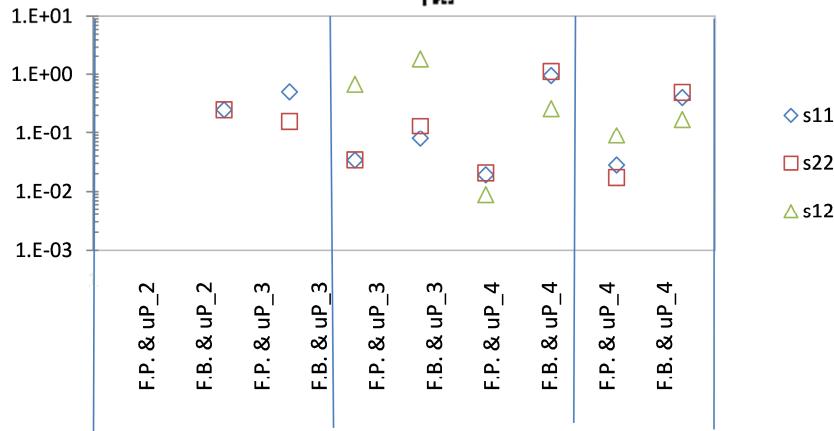
10.5.Cálculo de tensões internas de um elemento finito

O erro das tensões da aproximação numérica para elementos finitos no subdomínio Ω de cada elemento pode-se estimar através da seguinte norma de erro:

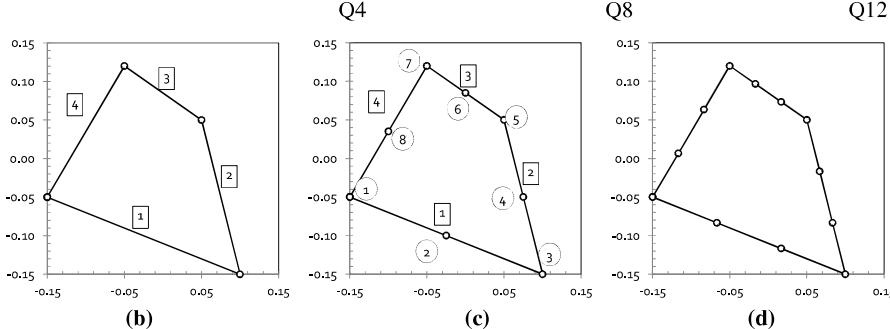
$$\text{erro}(\sigma_{ji}^N) = \frac{\left| \int_{\Omega} (\sigma_{ji}^N - \sigma_{ji}^A) d\Omega \right|}{\sqrt{\int_{\Omega} (\sigma_{ji}^N)^2 d\Omega}} \quad (10-11)$$

onde σ_{ji}^N corresponde à solução numérica e σ_{ji}^A à solução analítica; a

$$\text{erro}(\sigma_{ji}^N) = \frac{\left| \int_{\Omega} (\sigma_{ji}^N - \sigma_{ji}^A) d\Omega \right|}{\sqrt{\int_{\Omega} (\sigma_{ji}^N)^2 d\Omega}}$$



(a)



(b)

Q4

Q8

Q12

(c) (d)

Figura 43. (a) Análise do desempenho de aproximação das funções polinomiais (F.P.) e as funções Bessel (F.B.) no cálculo do erro das tensões resultantes (s_{11} , s_{22} , s_{12}) da aplicação de campos de deslocamento quadrático (uP_2), cúbico (uP_3) e quártico (uP_4) para três diferentes elementos finitos quadrilaterais irregulares: (b) Q4 (c) Q8 e (d) Q12.