PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Daniel Huamán Mosqueira

O método híbrido de elementos de contorno para problemas de elasticidade gradiente

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro, junho de 2013.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Daniel Huamán Mosqueira

O método híbrido de elementos de contorno para problemas de elasticidade gradiente

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada;

Prof. Ney Augusto Dumont
Orientador
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva
Departamento de Engenharia Civil –PUC-Rio

Prof. Francisco Célio Araújo
Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Rodrigo Bird Burgos
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Volodymyr Zozulya
Centro de Investigación Científica de Yucatán

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 7 de junho de 2013

Daniel Huamán Mosqueira

Graduando-se em Engenharia Civil na Pontificia Universidad Católica del Perú em 1996. Mestre em Engenharia Civil – Estruturas na PUC-Rio em 2008, Iniciou o curso de Doutorado na PUC-Rio em 2008, atuando na linha de pesquisa da Método Híbrido de Elementos Finitos e Contorno na Elasticidade Gradiente.

Ficha Catalográfica

Mosqueira, Daniel Huamán

O método híbrido de elementos de contorno para problemas na elasticidade gradiente / Daniel Huamán Mosqueira ; orientador: Ney Augusto Dumont. – 2013.
186 f. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2013.
Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Método de Elementos Finitos (MEF). 3. Método de Elementos De Contorno (MEC). 4. Método Híbrido de Elementos Finitos (MHEF). 5. Método Híbrido de Elementos de Contorno (MHEC). 6. Método Híbrido de Elementos de Contorno Simplificado (MHECS). 7. Método Expedito de Elementos de Contorno (MEEC). 8. Elasticidade Gradiente (EG). I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD:624

Para minha mãe e meu irmão menor.

Agradecimentos

A minha mãe Tarcila Mosqueira, quem assumiu como intuito de sua vida educar aos seus cinco filhos sem se importar com a dificuldade que significasse isso.

A meu irmão Javier, por ser constantemente uma fonte de inspiração para o meu crescimento pessoal.

A meu pai Jesús Huamán Centeno, por dar-me a vida.

Ao meu irmão Jesús, por ensinar-me a ler, escrever, álgebra e por todo o apoio brindado durante minha carreira profissional.

A minha irmã Cecibel, por ser uma positiva influência no âmbito espiritual.

A minha irmã Rocío, por me estimular sempre a ser uma melhor pessoa.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, por ter-me ajudado a escolher este interessante tema de investigação e sua assistência.

A CNPq, à PUC-Rio e ao Governo do Brasil por oferecer-me esta grande oportunidade de incrementar meu conhecimento, na qualidade de bolsista.

À Pontificia Universidad Católica del Perú por ter-me facilitado a oportunidade de formar-me na sua instituição e a todos os professores que gentilmente brindaram-me apoio para realizar esta Pós-Graduação.

Resumo

Mosqueira, Daniel Huamán; Dumont, Ney Augusto. **O método híbrido de elementos de contorno para problemas de elasticidade gradiente.** Rio de Janeiro, 2013. 186 p; Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Atualmente está bem difundido o uso de novas modelagens matemáticas para o estudo do comportamento de micro e nano sistemas mecânicos e eléctricos. O problema de escala é notável quando o tamanho das moléculas, partículas, grãos ou cristais de um sólido é relativamente considerável em relação ao comprimento do microdispositivo. Nesses casos a teoria clássica dos meios contínuos não descreve apropriadamente a solicitação estrutural e é necessária uma abordagem mais geral através de teorias generalizadas não-clássicas que contém a elasticidade clássica como um caso particular delas, onde os parâmetros constitutivos que representam às partículas são desprezíveis. Quando os efeitos microestruturais são importantes, o comportamento não responde como um material homogêneo se não como um material não homogêneo.Cem anos atrás os irmãos Cosserat desenvolveram uma teoria de grãos rígidos imersos dentro de um macromeio elástico; posteriormente Toupin, Mindlin e outros pesquisadores na década de 1960 formularam a chamada teoria gradiente de deformações, que recentemente é um objeto de muitas investigações analíticas e experimentais. Na década de oitenta, Aifantis e colaboradores conseguiram desenvolver uma teoria gradiente de deformações simplificada, baseada em só uma constante elástica adicional não-clássica representativa da energia de deformação volumétrica para caracterizar satisfatoriamente os padrões dos fenômenos não-clássicos. Beskos e colaboradores estenderam o campo de aplicações da proposta inicial de Aifantis e fizeram as primeiras implementações de elementos de contorno 2D e 3D para análises de elasticidade gradiente estática, no domínio da frequência e a mecânica da fratura. Desde o tempo de Toupin e Mindlin, procura-se estabelecer uma base

variacional da teoria e uma formulação consistente das condições de contorno cinemáticas e de equilíbrio, o que parece ter tido êxito com os recentes trabalhos de Amanatidou e Aravas. Esta tese apresenta a formulação do método híbrido de elementos de contorno e finitos na elasticidade gradiente desenvolvida por Dumont e Huamán decompondo o potencial de Hellinger-Reissner em dois princípios de trabalhos virtuais: o primeiro em deslocamentos virtuais e o segundo em forças virtuais. Com esta finalidade é considerado além dos parâmetros clássicos, o trabalho realizado pelas tensões, deformações, forças e deslocamentos não-clássicos. É apresentado o desenvolvimento das soluções fundamentais singulares e polinomiais através das equações diferenciais de sexta ordem obtidas da equação de equilíbrio em termos de deslocamentos na elasticidade gradiente. É apresentada também a aplicação do método híbrido de contorno para problemas de tensão axial unidimensional e flexão bidimensional de vigas. Finalmente mostra-se a aplicação numérica do método em elementos finitos, é verificado o patch test de elementos finitos de diferentes ordem e mostra-se também análises de convergência.

Palavras- chave

Método de Elementos Finitos (MEF); Método de Elementos De Contorno (MEC); Método Híbrido de Elementos Finitos (MHEF); Método Híbrido de Elementos de Contorno (MHEC); Método Híbrido de Elementos de Contorno Simplificado (MHECS); Método Expedito de Elementos de Contorno (MEEC); Elasticidade Gradiente (EG); Elemento Finito Clássico (EFC); Elemento Finito de Elasticidade Gradiente (EF–EG); Patch Test (PT); Displacement PT (DPT); Individual Element Test (IET); Graus de Liberdade (gdl); Graus de Liberdade Clássicos (gdlC); Graus de Liberdade Não-Clássicos (gdlNC); Funções Polinomiais (FP); Funções Bessel (FB); Parte Finita (PF); Parte Descontínua (PD).

Abstract

Mosqueira, Daniel Huamán. Dumont, Ney Augusto (Advisor). **The hybrid boundary element method for gradient elasticity problems.** Rio de Janeiro, 2013. 186 p. PhD Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The use of new mathematical modeling in the study of micro and Nano electro mechanical systems is currently becoming widespread. The scaling problem is apparent when the length of molecules, particles or grains immersed in the material is relatively important compared with the whole micro device dimension. Under this approach the classical theories of mechanics cannot describe suitably the structural requirement and it is necessary a more general outlook through non classical generalized theories which enclose the classical elasticity as a particular case where the non-classical constitutive parameters are negligible. When the microstructural effects are important, the material does not respond as a homogeneous but as a non-homogeneous one. A hundred years ago Cosserat brothers formulated a new theory of rigid grains which were embedded in an elastic macro medium; later Toupin, Mindlin along others researchers in 1960s developed a gradient strain theory which has been recently the source of many analytics and experimental investigations. In 1980's Ainfantis et al could develop a simplified strain gradient theory with just one additional non classical elastic constant which represents the volumetric elastic strain energy and characterized successfully the whole non classical pattern phenomenon. Beskos et al extended the treatment proposed initially by Aifantis and developed the first numerical applications for 2D and 3D boundary element methods and solved static as dynamic and crack problems. Since the times of Toupin and Mindlin it is looking for to establish a variational theory with a consistent cinematic and equilibrium boundary conditions, which seemed to have had success in the recent works of Amanatiodou and Aravas. This work presents the formulation of the hybrid boundary and finite element methods under the strain gradient scope

which were developed by Dumont and Huamán through the versatile decomposition of the Hellinger-Reissner potential in two virtual work principles: the displacements virtual work and the forces virtual work; both principles contain the virtual work performed by the non-classical magnitudes. Following, it is presented the complete development of singular and polynomial fundamental solutions obtained through the sixth order strain gradient differential equilibrium equations in terms of displacements. Next it is shown an application of the method to unidimensional truss element and bidimensional beam. Finally, it is presented a numerical application to strain gradient finite element, it is checked the patch tests to different element's orders and it is also shown a series of convergence analysis.

Keywords

Finite Element Method (FEM); Boundary Element Method (BEM); Hybrid Finite Element Method (HFEM); Hybrid Boundary Element Method (HBEM); Simplified Hybrid Boundary Element Method (SHBEM); Expedite Boundary Element Method (EBEM); Gradient Elasticity (GE); Classical Finite Element (CFE); Strain Gradient Finite Element (SG-FE); Patch Test (PT); Displacement PT (DPT); Individual element test (IET); Degree of freedom (DOF); Classical DOF (CDOF.); Non classical DOF (NCDOF); Finite Part (FP); Free Terms (FT).

Sumário

Abreviaturas, notação, e lista de símbolos

Regularmente se redunda durante o texto as abreviaturas e notação utilizadas e indicadas embaixo a menos que se especifique o contrário.

Abreviaturas

MEF	: Método de Elementos Finitos
MEC	: Método de Elementos De Contorno
EG	: Elasticidade Gradiente.
MHEF	: Método Híbrido de Elementos Finitos
MHEC	: Método Híbrido de Elementos de Contorno
MHECS	: Método Híbrido de Elementos de Contorno Simplificado
MEEC	: Método Expedito de Elementos de Contorno
gdl	: Grau de Liberdade
gdlC	: Grau de Liberdade Clássicos
gdlNC	: Grau de Liberdade Não-Clássicos
CC	: Condições de contorno

Notação e Simbolos

$(\ )_i,(\ )_{ij},(\ )_{kji}$, etc.	: Subscritos i, j , k referem-se genericamente às coordenadas cartesianas.
$(\ )_m,(\ )_{mn},(\ )_{\breve{m}n},(\ )_{m\breve{n}}$, etc.	: Subscritos m,n referem-se particularmente aos gdlC e genericamente aos gdl generalizados , $\breve{m},\breve{n}$ referem-se genericamente aos gdlNC.
$x_i = x_i^{\mathbf{y}} \equiv x,y,z$	: Coordenadas cartesianas genericamente do ponto campo $\mathbf{y}$.
$x_i^{\mathbf{x}}$	: Coordenadas cartesianas do ponto campo $\mathbf{x}$.
$n_j,\mathbf{n}$	: Vetor normal em Γ no ponto campo em notação indicial e simbólica respectivamente.
$\eta_j,\boldsymbol{\eta}$	: Vetor normal em Γ no ponto fonte em notação indicial e simbólica respectivamente.
$t_j,\mathbf{t}$	: Vetor tangente em Γ em notação indicial e simbólica respectivamente.
$\boldsymbol{\mu}, \mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{p}$, etc.	: Notação simbólica negrito para tensores, matrizes e vetores de qualquer ordem.
$\mu_{kjim}, H_{mn}, F_{mn}, d_n, p_n$, etc.	: Notação indicial para tensores, matrizes e vetores.
$(\ )^*$	: Sobrescrito para designar grandezas do sistema interno ‘ * ’ correspondentes á solução fundamental, por exemplo $u_{im}^*, \sigma_{jim}^*, \tau_{jim}^*, p_m^*$, etc.
$(\ )^R$	: Sobrescrito para designar grandezas análogas ao sistema interno mas afetadas pelo gradiente direcional no ponto fonte $(\ )^R = \partial(\ )^* / \partial\eta$.
u_{im}^*	: Solução fundamental da EG.
τ_{jim}^*	: Tensão fundamental de Cauchy obtida em função de u_{im}^* da EG.
σ_{jim}^*	: Tensão fundamental total no contexto da EG obtida em função de $\tau_{jim}^* = (1 - g^2\nabla^2)\tau_{jim}^*$.

μ^{*}_{kjim}	: Tensão fundamental não-clássica no contexto da EG.
$u^{R}_{im}, \sigma^{R}_{jim}, \tau^{R}_{jim}, p^{R}_{m}$, etc.	: grandezas análogas ao sistema interno mas afetadas pelo gradiente direcional no ponto fonte $(\ )^{R} = \partial (\ )^{*} / \partial \eta$.
$\mathbf{H}, H_{\mathrm{mn}}$	: Matriz de transformação cinemática generalizada em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{F}, F_{\mathrm{mn}}$	: Matriz de flexibilidade generalizada do sistema (*) da formulação do MHEC em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{K}, K_{\mathrm{mn}}$	: Matriz de rigidez generalizada em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{U}^{*}, U^{*}_{mn}$	: Matriz de deslocamento fundamental nodal generalizada em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{H}^{A}, H^{A}_{mn}, \mathbf{H}^{AR}, H^{AR}_{mn}$, etc.	: Sub matrizes de $\mathbf{H}$ em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{F}^{A}, F^{A}_{mn}, \mathbf{F}^{AR}, \mathbf{F}^{AR}_{mn}$, etc.	: Sub matrizes de $\mathbf{F}$ em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{U}^{**}, U^{**}_{mn}, \mathbf{U}^{*R}, U^{*R}_{mn}$	: Sub matrizes de $\mathbf{U}^{*}$ em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{W}$	: Espaço nulo de $\mathbf{H}, \mathbf{K}$.
$\mathbf{V}$	: Espaço nulo de $\mathbf{H}^{\mathbf{T}}, \mathbf{F}$.
$\mathbf{P}, P_{\mathrm{m}}$	: Vetor de forças de superfície generalizadas que contém forças clássicas e não-clássicas; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{D}, D_{\mathrm{m}}$	: Vetor de deslocamentos generalizados que contém deslocamentos clássicos e não-clássicos; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{p}, p_{i}$	: Vetor de forças de superfície clássicas contido em $\mathbf{P}$; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{R}, R_{i}$	: Vetor de forças de superfícies não-clássicas contido em $\mathbf{P}$; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{d}, d_{m}$	: Vetor de deslocamento nodal clássico contido em $\mathbf{D}$; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{q}, q_{\breve{m}}$	: Vetor de deslocamento nodal não-clássico contido em $\mathbf{D}$; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{P}^{*}, P^{*}_{m}$	: Vetor de forças generalizadas do sistema interno (*) que contém forças clássicas e não-clássicas; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{D}^{*}, D^{*}_{m}$	: Vetor de deslocamentos generalizados do sistema interno (*) que contém deslocamentos clássicos e não-clássicos; em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{p}^{*}, p^{*}_{m}$	: Força de superfície clássica do sistema interno (*) em notação simbólica e indicial respectivamente.
$\mathbf{R}^{*}, R^{*}_{\breve{m}}$	: Força de superfície não-clássica do sistema interno (*) em notação simbólica e indicial respectivamente.
u^{d}_{i}	: Campo de deslocamentos clássico que satisfaz CC em Γ .
q^{d}_{i}	: Campo de deslocamentos não-clássico que satisfaz CC em Γ .
ε_{ji}	: Deformação.
κ_{kji}	: $\varepsilon_{ji,k}$ Gradiente de deformação tipo II.

$\sigma^*_{ji} n_j,\ x_{ii}$, etc	: Notação indicial para somatória de Einstein $=\sum_j \sigma^*_{ji} n_j,\ \ \sum_i x_{ii}$, etc .
δ_{ij}	: Delta de Kronecker.
e_{ijk}	: Tensor Levi-civita ou tensor alternante de sinais.
Ω	: Domínio do modelo estrutural.
Γ	: Contorno do modelo estrutura.
$\overline{\Omega}$	: Domínio do modelo estrutural complementar, problema de meio infinito.
$\overline{\Gamma}$	: Contorno do modelo estrutural complementar, problema de meio infinito.
$\overline{n}_j,\ \overline{\mathbf{n}},\ \overline{H}_{mn},\ \overline{\mathbf{H}}$, etc.	: Grandezas análogas do modelo estrutural definido em Γ mas designadas genericamente para $\overline{\Gamma}$ no problema de meio infinito.
$f^A_{mn}, f^{AR}_{mn}, f^B_{mn}$, etc.	: Integrando livre: denominador do integrando singular do tipo $\int_\Gamma \frac{1}{r^p} f^{AR}_{mn} d\Gamma$.
C_p, C^A_p, C^{AR}_p, etc.	: Coeficientes de desenvolvimento em séries, de soluções diferenciais, polinômios, etc.
λ, μ, ν	: Constantes constitutivas clássicas de Lamè (μ sem subscrito, μ com subscrito é a tensão não-clássica, por exemplo μ_{kji}.
g	: Constantes constitutivas não-clássica da energia de deformação volumétrica na EG.
ℓ	: Constantes constitutivas não-clássica da energia de deformação superficial .
u_{in}	: Função isoparamétrica de interpolação nodal.
ξ	: Coordenada paramétrica local de intervalo [0..1]
ξ_o	: Coordenada paramétrica de um ponto de singularidade.
δ	: $\xi - \xi_o$
r	: Raio do ponto $\mathbf{x}$ ao ponto $\mathbf{y}$.
n	: Norma do vetor normal,
J	: Jacobiando de transformação de coordenadas cartesianas à coordenada paramétrica local ξ no intervalo [0..1].
J_o, J'_o, r_o, x_o, y_o, etc.	: Grandezas avaliadas genericamente na coordenada paramétrica ξ_o correspondente ao ponto de singularidade.
$(\ )',\ (\ )''$, etc	: Genericamente primeira derivação, segunda derivação, etc, com respeito á coordenada paramétrica local ξ no intervalo [0..1]
$(\ )_{,i},\ (\ )_{,ij}$, etc	: Genericamente primeira derivação, segunda derivação, etc, com respeito ás coordenadas cartesianas x_i, x_j, etc
$GL\int_\Gamma f d\Gamma$	: Integração numérica através de quadratura de Gauss Legendere regular.
$LN\int_\Gamma f d\Gamma$	: Integração numérica através da quadratura logarítmica.

$pf(\mathbf{H}) \equiv \underline{\mathbf{H}},\ \ pf(\mathbf{F}) \equiv \underline{\mathbf{F}},$ $pf\int f d\Gamma,\ \mathrm{etc}$	: Parte finita de $\mathbf{H}, \mathbf{F},\ \mathrm{etc}$.
$pd(\mathbf{H}) \equiv \underline{\underline{\mathbf{H}}},\ \ pd(\mathbf{F}) \equiv \underline{\underline{\mathbf{F}}},$ $pd\int f d\Gamma,\ \mathrm{etc}$	: Parte descontínua de $\mathbf{H}, \mathbf{F},\ \mathrm{etc}$.
$K_s(r)$	: Função de Bessel do segundo tipo de ordem s avaliado em r.
$I_s(r)$	: Função de Bessel do primeiro tipo de ordem s avaliado em r.
$L^{P}_{p,s,f}$	: Função de Legendre de tipo P de grau p e ordem s.
$M(x)$	: Momento fletor de vigas.
$V(x)$	: Forças cortante de vigas
$m(x)$	: Momento não-clássico de vigas da EG.
`M, N, oe, nn, ie`, etc.	: Notação com fonte Courier corresponde à utilizada para fazer referência á numeração de pontos nodais, de elementos de contorno e parâmetros da implementação computacional e cuja descrição é feita durante o texto e em detalhe na seção 0.