



Edwin Alexander Delgado Insuasty

**Estudo de lentes gravitacionais e algumas
aplicações para astrofísica de neutrino**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da PUC-Rio

Orientador: Prof. Hiroshi Nunokawa

Rio de Janeiro
Dezembro de 2013



Edwin Alexander Delgado Insuasty

**Estudo de lentes gravitacionais e algumas
aplicações para astrofísica de neutrino**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hiroshi Nunokawa
Orientador
Departamento de Física — PUC-Rio

Prof. Jailson Souza de Alcaniz
ON

Prof. Carla Göbel Burlamaqui de Mello
Departamento de Física-PUC-Rio

Prof. Stefan Zohren
Departamento de Física-PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de Dezembro de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Edwin Alexander Delgado Insuasty

Graduou-se em Física na Universidade de Nariño (Colombia) em 2008.

Ficha Catalográfica

Delgado Insuasty, Edwin Alexander

Estudo de lentes gravitacionais e algumas aplicações para astrofísica de neutrino / Edwin Alexander Delgado Insuasty; orientador: Hiroshi Nunokawa. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Física, 2013.

v., 97 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Tese. 2. Lentes Gravitacionais;. 3. Tempo de Atraso;. 4. Neutrino;. 5. Massa do Neutrino. I. Nunokawa, Hiroshi. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Dedico este espaço aquelas pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização de todo o meu trabalho de pesquisa e sua conclusão neste texto. Em primeiro lugar devo agradecer a minha mãe pela forma como me conduziu; seus conselhos fizeram de mim uma pessoa íntegra capaz de superar todos os obstáculos da minha vida. Agradeço ao Dr. Hiroshi Nunokawa pela paciência e predisposição em me atender e orientar em todas as dificuldades. Também agradeço aos colegas do grupo de Astrofísica de Neutrinos, particularmente a Alexander Quiroga por seu apoio incondicional e orientação durante estes anos de mestrado.

Agradeço em especial a Deus, por me conceder a força, a perseverança e a sabedoria, sem os quais seria impossível a realização deste trabalho. Ao CNPq, a CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais isto não poderia ter sido realizado.

Resumo

Delgado Insuasty, Edwin Alexander; Nunokawa, Hiroshi (Orientador). **Estudo de lentes gravitacionais e algumas aplicações para astrofísica de neutrino**. Rio de Janeiro, 2013. 97p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nessa dissertação foi realizada uma revisão da teoria elementar das lentes gravitacionais, fazendo ênfase no estudo do efeito que tem a massa dos neutrinos no atraso gravitacional de sinais provenientes de fontes distantes e que são desviados quando passam perto de uma distribuição de massa localizada entre a fonte e o observador. Para isto, dentro dos limites de massa que fornecem os atuais experimentos de oscilação de neutrinos, decaimento beta e a cosmologia, se estudou a contribuição à densidade de energia não relativista que hoje têm os neutrinos de fundo cósmico. Em base a esses resultados, fizemos uma comparação porcentual entre a distância do diâmetro angular para um valor de massa do neutrino permitido e o valor da distância quando a massa é zero. Esta análise foi feita sob o arcabouço do modelo cosmológico padrão para dois casos possíveis da condição de normalização para os parâmetros densidade de energia presentes no universo: primeiro quando os parâmetros de densidade de radiação e constante cosmológica são fixos e o segundo caso quando o parâmetro densidade de energia de matéria é fixo como também o parâmetro densidade de radiação e, portanto deixando variáveis os parâmetros densidade de neutrinos e constante cosmológica. Descobrimos que o efeito da massa do neutrino na medida do atraso das sinais é desprezível para o primeiro caso e tem uma contribuição de ordem de um por cento para o segundo caso.

Palavras-chave

Lentes Gravitacionais; Tempo de Atraso; Neutrino; Massa do Neutrino

Abstract

Delgado Insuasty, Edwin Alexander; Nunokawa, Hiroshi (Advisor). **Study of gravitational lenses and some applications to astrophysics of neutrino**. Rio de Janeiro, 2013. 97p. MSc Dissertation — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the present work I carried out an review of the elementary theory of gravitational lensing. It is mainly emphasizing to study the effect it would have neutrino mass in the time delay of signals from distant sources which are deflected due to the presence of a mass distribution that acts as a lens. To do this, for the mass values provided by neutrino oscillation, beta decay experiments and cosmology, we study the present contribution of cosmic background neutrinos to energy density of universe. Based on these results, it was made a comparison between the angular diameter distance measurement for an allowed neutrino mass and the value of the distance when the mass is zero. All this was done from the perspective of the standard cosmological model under two possible cases for the normalization condition of the energy density parameters present in the universe: first, when the radiation and cosmological energy density parameters are fixed and second when the parameters for matter and radiation are fixed. It was found that the effect of the neutrino mass on time delay measurement is negligible for the first case and has a contribution of the order of one percent for the second case.

Keywords

Gravitational Lens; Time Delay; Neutrino; Neutrino Mass

Sumário

1	Introdução	12
2	O Modelo Cosmológico Padrão	14
2.1	A expansão do universo	14
2.2	Dinâmica da expansão	16
2.3	Parâmetros cosmológicos	25
2.4	Medida de distância	29
2.5	Radiação cósmica de fundo (CMB)	34
3	Física de Neutrinos	38
3.1	Propiedades dos neutrinos no modelo padrão das partículas elementares	41
3.2	Neutrinos massivos	46
3.3	Oscilações de neutrinos no vácuo	51
3.4	Cosmologia de neutrinos	53
4	Lentes Gravitacionais	61
4.1	Teoria do lenteamento gravitacional	62
4.2	Princípio de Fermat	70
4.3	Modelos de lentes	72
5	Resultados	79
5.1	Distância do diâmetro angular	79
5.2	Deflexão da luz por uma galáxia	84
5.3	Deflexão de um feixe de neutrinos por um buraco negro supermaciço	87
6	Conclusão	90

Lista de figuras

Figura 2.1	Relação velocidade-distância para supernovas de tipo Ia e II.	15
Figura 2.2	Variação da densidade de energia com relação ao desvio para o vermelho.	25
Figura 2.3	Parâmetro de Hubble H/H_0 em função do fator de escala.	28
Figura 2.4	Variação dos parâmetros de densidade (Ω_i) em função do desvio para o vermelho para o modelo padrão.	29
Figura 2.5	Desenho esquemático para o cálculo da distância do diâmetro angular.	33
Figura 2.6	Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho.	34
Figura 2.7	Taxa de ionização em função do desvio para o vermelho.	37
Figura 3.1	Esquema do método utilizado em 1956 por Reines e Cowan para detecção do neutrino.	40
Figura 3.2	Representação gráfica da relação entre sabores de neutrinos e auto-estados de massa, através dos ângulos de mistura θ_{12} , θ_{13} e θ_{23}	52
Figura 3.3	Variação da fração ρ_2/ρ_1 com relação à massa do neutrino quando $T_\nu \ll m_\nu$.	58
Figura 3.4	Densidade de energia em função da temperatura para diferentes massas do neutrino: $m_\nu = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$ eV.	59
Figura 3.5	Variação da fração ρ_2/ρ_1 respeito de R quando $T_\nu \gg m_\nu$.	60
Figura 4.1	Configuração básica de uma lente gravitacional.	63
Figura 4.2	Desenho esquemático para o cálculo do tempo de atraso geométrico.	71
Figura 4.3	Superfície de tempo do atraso para a Cruz de Einstein $QSO2237 + 0305$ onde a galáxia lente é modelada como uma massa pontual.	73
Figura 4.4	Isocontorno da superfície da diferença do tempo de atraso projetado no plano da lente, para um sistema lente gravitacional: $z_s = 1,0$ e $z_L = 0,6$. A lente é modelada como esfera isotérmica singular com velocidade de dispersão de seus componentes $\sigma = 124,356$ km/s.	77
Figura 4.5	Zoom da Figura (4.4).	78
Figura 5.1	Dependência da distância do diâmetro angular no desvio para o vermelho e na massa do neutrino.	81
Figura 5.2	Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e Ω_Λ são fixos.	81

- Figura 5.3 Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e Ω_{Λ} são fixos. 82
- Figura 5.4 Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são fixos. 83
- Figura 5.5 Diferença fracionária da distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são fixos. 83
- Figura 5.6 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para o sistema QsO PG 1115+080. A lente é modelada como esfera isotérmica singular e $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$. 84
- Figura 5.7 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para o sistema QsO PG 1115+080. A lente é modelada como esfera isotérmica singular, o desvio para o vermelho é fixo em $z = 0,311$ e $\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$. 85
- Figura 5.8 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para o sistema QsO PG 1115+080. A lente é modelada como esfera isotérmica com núcleo, o desvio para o vermelho é fixado em $z = 0,311$ e $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$. 86
- Figura 5.9 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para o sistema QsO PG 1115+080. A lente é modelada como esfera isotérmica com núcleo, o desvio para o vermelho é fixado em $z = 0,311$ e $\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$. 87
- Figura 5.10 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para um feixe de neutrinos lentado por um buraco negro supermaciço. A lente é modelada como massa pontual com $M = 3,3 \times 10^8 M_{\odot}$ e $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$. 89
- Figura 5.11 Diferença fracionária da diferença do tempo de atraso em função da massa do neutrino para um feixe de neutrinos lentado por um buraco negro supermaciço. A lente é modelada como massa pontual com $M = 3,3 \times 10^8 M_{\odot}$ e $\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$. 89

Lista de tabelas

Tabela 2.1	Parâmetros cosmológicos de interesse neste trabalho de acordo com as colaborações: Planck, Planck+Lensing, Planck+WMAP.	28
Tabela 2.2	Parâmetros cosmológicos de interesse neste trabalho de acordo com as colaborações: Planck+WMAP, Planck+WMAP+BAO, Planck+WMAP+high-l CMB, Planck+WMAP+high-l CMB+BAO.	30

The effort to understand the universe is one of the very few things which lifts human life a little above the level of farce and gives it some of the grace of tragedy.

Steven Weinberg *The first three minutes. 1993*

1

Introdução

A física das lentes gravitacionais é hoje uma das ferramentas mais promissórias para o estudo de nosso universo. O principal motivo disto é que o efeito de lente depende só da gravidade e, portanto, oferece condições excepcionais para o estudo de buracos negros, matéria escura ou partículas que interagem fracamente com a matéria, como é no caso dos neutrinos que não participam das interações forte e eletromagnética. Assim, por exemplo, seria possível medir de forma indireta efeitos atribuídos à massa destes para a qual os experimentos de oscilação de sabor com neutrinos solares, atmosféricos, de aceleradores e de reatores mostram forte evidência de sua existência, tornando a física de neutrinos um dos campos mais excitantes e ativos da física de partículas e a cosmologia [1].

Devido a que os neutrinos são a segunda partícula mais abundante no universo depois dos fótons, portanto sua massa teve um papel importante na evolução do universo, principalmente na nucleossíntese primordial e a formação de galáxias. Hoje, o impacto cosmológico da massa dos neutrinos é pequeno e para quantificar este efeito muitos métodos têm sido estudados. Neste trabalho nos concentramos no estudo do tempo de atraso gravitacional para sinais vindo de uma fonte distante e que seguem trajetórias diferentes para chegar ao observador devido à presença de massa no seu caminho [2, 3]. Este valor depende principalmente da medida da distância do diâmetro angular da lente, da fonte e da distância lente-fonte. Conseqüentemente, estudamos esta grandeza física dentro do cenário do modelo cosmológico padrão para dois casos possíveis da condição de normalização dos parâmetros de densidade de energia das componentes presentes em nosso universo, isto é quando: primeiro se fixam os parâmetros de radiação e constante cosmológica e segundo quando se fixam radiação e matéria.

Para alcançar tal objetivo, no Capítulo 2, fizemos uma introdução à cosmologia padrão onde definimos o conceito de distância do diâmetro angular em termos do desvio para o vermelho e dos parâmetros cosmológicos do modelo. No Capítulo 3, realizamos um estudo da física do neutrino cobrindo

uma grande área: apresentamos de forma resumida a história, descrevemos suas propriedades no modelo padrão das partículas elementares, discutimos a abordagem de neutrinos massivos assim como também fizemos uma revisão da oscilação de neutrinos no vácuo. Além disso, foi estudado detalhadamente a contribuição à densidade de energia devido aos neutrinos de fundo cósmico, cuja função para o caso não-relativístico é usada para calcular o parâmetro densidade de energia do neutrino presente na equação da distância do diâmetro angular.

No Capítulo 4, apresentamos as principais características da teoria das lentes gravitacionais: o ângulo de deflexão, a equação da lente, convergência, cisalhamento e magnificação. Também discutimos o conceito de tempo de atraso para os modelos de lente mais utilizados nas análises que são: massa pontual, esfera isotérmica singular e esfera isotérmica com núcleo. No Capítulo 5, apresentamos os resultados deste trabalho e nas conclusões discutimos o significado dos resultados obtidos.

2

O Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão se baseia na suposição de que as interações que dominam o universo são gravitacionais e, portanto, podem ser descritas pela teoria da relatividade geral de Einstein (TRG); e na hipótese fundamental de que nosso universo é isotrópico e homogêneo em grandes escalas de distância (*Princípio Cosmológico*). A cosmologia padrão é a teoria que melhor explica os dados observacionais e, por conseguinte, forma um consenso entre a maioria dos cosmólogos. Este capítulo apresenta os principais elementos que constituem o modelo cosmológico padrão, assim como as bases que o suportam.

2.1

A expansão do universo

Uma das características mais importantes da cosmologia padrão é a expansão do universo. Por expansão, entende-se o fato de que hoje a distância entre qualquer par de partículas típicas¹ no universo é maior que o valor medido em épocas anteriores. A expansão manifesta-se no desvio para o vermelho (*redshift*) que apresentam as linhas espectrais de galáxias que têm sido estudadas. Operacionalmente o redshift é definido como:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.1)$$

onde λ_o é o comprimento de onda observado na terra e, λ_e é o comprimento de onda emitido pelos átomos na galáxia distante.

Os primeiros desvios para o vermelho de galáxias foram observados em 1910 por Vesto Melvin Slipher no observatório Lowell, em Flagstaff, Arizona. Mais tarde, entre 1918 e 1925 Wirtz e Lundmark descobriram uma série de nebulosas em espiral com desvios para o vermelho que pareciam aumentar com a distância, mas só em 1930 Lemaître e Hubble conseguiram obter uma relação linear entre distância e o desvio para o vermelho a partir de suas medições realizadas em galáxias no Aglomerado de Coma [4].

¹Na cosmologia relativista, o conteúdo do universo é modelado como um fluido perfeito, onde suas partículas são principalmente galáxias.

Hoje, sabemos que esta dependencia só é valida quando a velocidade de recessão (v) é pequena comparada com a velocidade da luz (c), em cujo caso o desvio para o vermelho é igual a v/c e portanto, a velocidade é proporcional à distância da galáxia. Esta relação é comumente conhecida como lei de Hubble e matematicamente é escrita como:

$$v = H(t)d, \tag{2.2}$$

onde d é a distância entre a galáxia e a Terra, e $H(t)$ representa o chamado parâmetro de Hubble. A Figura (2.1) apresenta o resultado final do projeto Hubble Space Telescope Key Project (HSTKP) em um diagrama de velocidade em função da distância para a determinação da constante de Hubble [5].

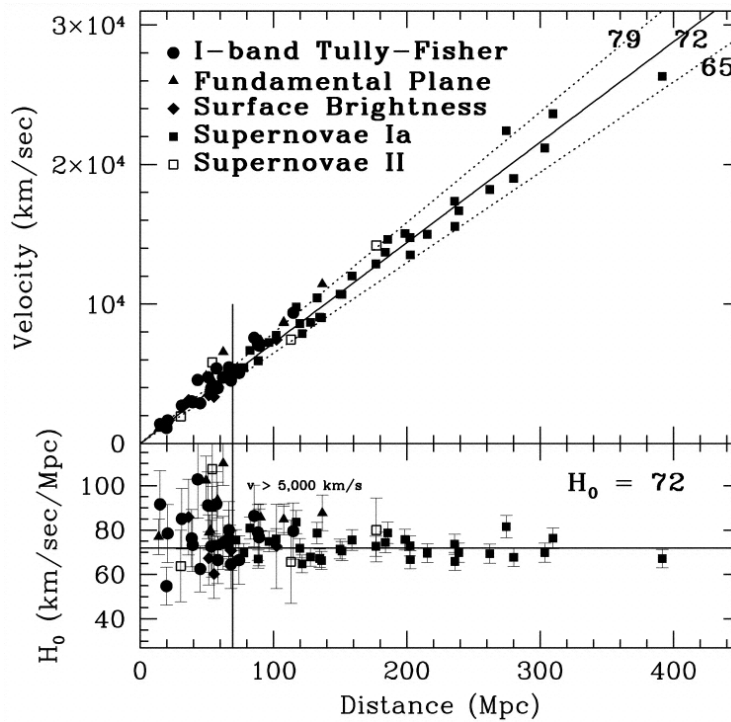


Figura 2.1: Relação velocidade-distância para supernovas de tipo Ia e II, de acordo com o HSTKP.

De acordo com a lei de Hubble, as galáxias estão se afastando de nós radialmente, mas isto não significa que nosso planeta ocupa um lugar privilegiado no universo. O princípio cosmológico garante que qualquer outro observador em outra galáxia distante verá um movimento geral de galáxias ao seu redor da mesma maneira que um observador na Terra. Consequentemente a Eq. (2.2) indica uma expansão geral do universo [6].

Em 1998 dois grupos de astrônomos, o *Supernova Cosmology Project* liderado por Saul Perlmutter e o *High-z Supernova Search* liderado por Brian

Schmidt, anunciaram suas medidas do parâmetro de desaceleração usando como indicadores de distância supernovae tipo Ia (SNIa). O resultado foi que o universo está acelerando sua expansão (ao contrário do que era esperado devido à gravidade) [7, 8, 9]. Uma tentativa de explicar esta aceleração é assumir a existência de um fluido de pressão negativa uniformemente distribuído por todo o universo, fluido este chamado de energia escura. A candidata natural à energia escura seria a constante cosmológica (Λ) pois ela atua nas equações de campo da relatividade geral como uma fonte homogênea e isotrópica com pressão $p = -\rho$. Apesar de Λ ser a melhor alternativa frente aos dados observacionais, esses mesmos ainda suportam outras possibilidades para a energia escura e estas devem ser exploradas, dado que, do ponto de vista teórico, o valor atualmente observado da constante cosmológica está extremamente abaixo do esperado, o que gera o chamado problema da constante cosmológica [10].

As alternativas à constante são muitas e vão desde um fluido barotrópico como a equação de estado $p = w\rho$, com $w = cte$, até modificações da teoria da gravidade. Apesar da grande variedade de modelos disponíveis atualmente, nenhum deles fornece uma descrição fundamental para energia escura. A maioria destes modelos ajustam os dados observacionais tão bem quanto a constante cosmológica. Contudo, apesar de não fornecerem uma explicação fundamental para energia escura, a maioria destes modelos permite estudar características gerais que não podem ser investigadas dentro do cenário fornecido pelo modelo padrão.

2.2

Dinâmica da expansão

Na cosmologia relativística, a evolução do universo e sua estrutura em grande escala são determinadas por interações gravitacionais e, portanto, são descritas pelas equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde o tensor $T_{\mu\nu}$ associa a cada ponto do espaço-tempo densidades de energia-momentum. Suas componentes possuem interpretação direta, no contexto da mecânica de fluidos relativista: T_{00} = densidade de matéria-energia, T_{0i} = fluxo de energia na i -ésima direção, T_{i0} = densidade da i -ésima componente do momentum e T_{ij} = fluxo da i -ésima componente de momentum ao longo da superfície $x^j = \text{constante}$.

A forma mais geral que pode tomar $T_{\mu\nu}$, compatível com a hipótese de

homogeneidade e isotropia é a de um fluido perfeito. Um fluido deste tipo é definido em um sistema inercial de coordenadas como aquele no qual não há forças, condução de calor ou viscosidade entre as partículas que o formam². Assim um fluido perfeito está em equilíbrio termodinâmico. Matematicamente, é representado pela expressão tensorial:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde, ρ é a densidade de energia, p é a pressão, u_μ é a quadri-velocidade do fluido e $g_{\mu\nu}$ é a métrica em consideração. Num referencial co-móvel, a quadri-velocidade é dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Em geral, podemos considerar a pressão e a densidade do fluido relacionadas por uma equação de estado barotrópica, para o qual geralmente se assume uma relação linear:

$$p = w\rho, \quad (2.5)$$

onde w é uma constante chamada parâmetro de estado, que pode assumir diferentes valores dependendo do estado em que se encontra o fluido, seja este por exemplo: matéria $w = 0$, radiação $w = 1/3$ ou constante cosmológica $w = -1$.

$G_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico com divergência covariante nula e construído só da métrica e suas derivadas. Usando as simetrias do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

e as chamadas identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0, \\ R_{\beta\mu\nu;\sigma} + R_{\beta\nu\sigma;\mu} + R_{\beta\sigma\mu;\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

pode-se mostrar que existe um único tensor com as anteriores características, o chamado tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

²Um fluido perfeito também pode ser definido como um sistema no qual um observador co-móvil vê como isotrópico.

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R a curvatura escalar e Λ é uma constante chamada de constante cosmológica.

2.2.1

A métrica Robertson-Walker

Toda a informação geométrica da estrutura espaço-temporal está contida no tensor de Einstein ou, mais explicitamente, no tensor métrico (ou simplesmente métrica como é usualmente chamado). Em 1935 [4], Robertson e Walker provaram, com considerações geométricas, que existe uma única representação de todos os espaços-tempo que têm a parte espacial homogênea e isotrópica. Para achá-la, é conveniente trabalhar em um sistema de coordenadas co-móveis ³ (x^0, x^1, x^2, x^3) , no qual a coordenada x^0 é o tempo próprio medido por relógios localizados em cada uma das galáxia, todos eles andam ao mesmo ritmo e estão sincronizados de tal modo que no *Big-Bang* eles marcam zero.

Os relógios estão em repouso com relação aos seus referenciais, assim:

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0, \quad (2.9)$$

consequentemente o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ implica que $c^2d\tau^2 = g_{00}dt^2$, expressando em unidades naturais onde $c = 1$, obtemos $g_{00} = 1$.

Se na vizinhança da galáxia são usadas as coordenadas geodésicas $(\acute{x}^0, \acute{x}^1, \acute{x}^2, \acute{x}^3)$, tem-se que a velocidade desta é zero, ou seja:

$$\frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^0} = 0. \quad (2.10)$$

Como os relógios nas galáxias próximas (afastadas por uma quantidade dx^k) estão sincronizados então

$$\frac{\partial \acute{x}^0}{\partial x^k} = 0. \quad (2.11)$$

Assim, em um sistema de coordenadas arbitrário encontra-se que:

$$\begin{aligned} g_{0k} &= \frac{\partial \acute{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \acute{x}^\nu}{\partial x^k} \acute{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \acute{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \acute{x}^\nu}{\partial x^k} \eta_{\mu\nu}, \\ g_{0k} &= \frac{\partial \acute{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \acute{x}^0}{\partial x^k} - \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^0} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}, \\ g_{0k} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

³Sistema de referência movendo-se com a partícula.

consequentemente, a escolha de um sistema co-móvel simplifica a forma da métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 + g_{kn}(t, x)dx^k dx^n, \\ ds^2 &= dt^2 - \tilde{g}_{kn}(t, x)dx^k dx^n, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde o tensor $\tilde{g}_{kn}(x)$ descreve a geometria do espaço em um dado instante de tempo⁴. Para obter mais informação deste tensor é necessário achar o tensor de curvatura de Riemann \tilde{R}_{klmn} , que devido à isotropia do universo tem que ser invariante sob rotações. O tensor de Riemann é construído da métrica e suas derivadas, assim em um sistema de coordenadas geodésicas ($\tilde{g}_{km} = \delta_{km}$), deve ser uma combinação linear da forma:

$$\tilde{R}_{mnsk} = k_0(\delta_{ms}\delta_{nk}) + k_1(\delta_{mk}\delta_{ns}) + k_2(\delta_{mn}\delta_{sk}), \quad (2.14)$$

em acordo com as Equações (2.6), a propriedade de antisimetria $\tilde{R}_{mnsk} = -\tilde{R}_{nmks}$ implica que $k_0 = -k_1$ e $k_2 = 0$. Obtendo-se deste modo o tensor de Riemann para espaços homogêneos e isotrópicos, em um sistema qualquer de coordenadas o tensor pode ser escrito como:

$$\tilde{R}_{mnsk} = k_0(\tilde{g}_{ms}\tilde{g}_{nk} - \tilde{g}_{mk}\tilde{g}_{ns}), \quad (2.15)$$

onde a grandeza k_0 tem que ser uma constante para assim satisfazer o princípio cosmológico. Contraindo (2.15) com \tilde{g}^{sm} se obtém o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{nk} &= k_0(\tilde{g}^{sm}\tilde{g}_{ms}\tilde{g}_{nk} - \tilde{g}^{sm}\tilde{g}_{mk}\tilde{g}_{ns}), \\ \tilde{R}_{nk} &= k_0(\delta_m^m\tilde{g}_{nk} - \delta_k^s\tilde{g}_{ns}), \\ \tilde{R}_{nk} &= 2k_0\tilde{g}_{nk}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Contraindo de novo com \tilde{g}^{mn} , encontra-se que a curvatura escalar $\tilde{R} = \tilde{g}^{mn}\tilde{R}_{mn}$ é igual a $6k_0$. Portanto o universo é descrito por uma variedade de curvatura constante e dependendo do sinal de k_0 , o espaço será aberto (sinal negativo), fechado (sinal positivo) o plano.

Pela condição de isotropia, a métrica, quando expressa em coordenadas polares (r, θ, ϕ) , tem que ser invariante sob rotações em torno de cada ponto do espaço. Consequentemente as únicas construções que podem ser feitas das coordenadas e seus diferenciais que satisfazem esta simetria são:

⁴As grandezas \tilde{g}_{kn} , \tilde{R}_{klmn} e \tilde{R} são definidas em um espaço 3-dimensional.

$$\begin{aligned} & r, \\ & dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \\ & r dr, \end{aligned} \tag{2.17}$$

assim o elemento de linha $d\sigma^2 = \tilde{g}_{kn}(x)dx^k dx^n$ pode ser escrito como

$$d\sigma^2 = A(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + B(r)dr^2, \tag{2.18}$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são funções desconhecidas para serem determinadas pela solução das equações de campo de Einstein. Ainda é possível simplificar mais a forma da métrica. Isto exige uma mudança de coordenadas: $\bar{r} = r\sqrt{A(r)}$, $\bar{\theta} = \theta$, $\bar{\phi} = \phi$. Em termos dessas novas variáveis a métrica adota a forma:

$$d\sigma^2 = \bar{A}(\bar{r})d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2, \tag{2.19}$$

sendo $\bar{A}(\bar{r})$ a nova função a ser determinada. É conveniente remover as barras das novas coordenadas e escrever $A(r)$ como uma função exponencial,

$$d\sigma^2 = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{2.20}$$

Para determinar $\lambda(r)$ é necessário encontrar as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel, que são definidos em função da métrica como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} [g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}]. \tag{2.21}$$

Estas componentes para o elemento de linha (2.20) são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = r^{-1}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = r^{-1}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \end{aligned} \tag{2.22}$$

e com eles as componentes não-nulas do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr}, \\ R_{22} &= 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{dr}, \\ R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, de acordo com as condições (2.16), finalmente obtemos a métrica para um espaço 3-dimensional de curvatura constante:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - k_0 r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.24)$$

Para observadores co-móveis com a expansão, que percebem o universo homogêneo e isotrópico, o tensor $\tilde{g}_{kn}(t, x)$ pode ser escrito como $S^2(t)\tilde{g}_{kn}(x)$, onde $S(t)$ é um fator de tal forma que os raios das distâncias correspondentes com pequenos deslocamentos são os mesmos em todos os tempos. Assumindo que $k_0 \neq 0$, pode-se definir uma nova constante $k = k_0/|k_0|$, de modo que k é $+1$ ou -1 dependendo se k_0 é positivo ou negativo e, portanto, redimensionar a coordenada radial mediante $|k_0|^{\frac{1}{2}}r$ para assim agora definir o chamado fator de escala $a(t)$ (medida da expansão do espaço) como:

$$a(t) = \begin{cases} S(t)/|k_0|^{\frac{1}{2}} & \text{se } k_0 \neq 0, \\ S(t) & \text{se } k_0 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Finalmente, das equações (2.13), (2.24) e (2.25) é obtida a métrica de Robertson-Walker que é a base do modelo padrão da cosmologia:

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.26)$$

2.2.1.1

Propagação da luz

Considere-se uma fonte de luz em um ponto P_1 de coordenadas $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ e um raio de luz viajando em um trajeto radial ($ds = d\theta = d\phi = 0$) da fonte ao observador (O).

Como as hiper-superfícies de tempo constante são espaços 3-dimensionais homogêneos, sem perda de generalidade, pode-se localizar o observador na origem de coordenadas e portanto $r = 0$.

A métrica de Robertson-Walker sob estas restrições gera a seguinte igualdade:

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}, \quad (2.27)$$

O sinal (+) corresponde a um raio de luz que chega à fonte, enquanto o sinal (−) corresponde a um raio que chega ao observador, por conseguinte a integração da anterior equação resulta em:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \equiv f(r_1), \quad (2.28)$$

onde

$$f(r_1) = \begin{cases} \sin^{-1} r_1 & \text{se } k = 1, \\ r_1 & \text{se } k = 0, \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Agora, considerem-se dois raios de luz consecutivos emitidos pela fonte, o primeiro no tempo t_1 e o segundo no tempo $t_1 + dt_1$, eles chegam ao observador nos tempos t_0 e $t_0 + dt_0$, respectivamente. Para o segundo raio tem-se:

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \equiv f(r_1). \quad (2.30)$$

Igualando Eq.(2.28) com Eq.(2.30) e supondo que a variação de $a(t)$ no intervalo de $t_1 + dt_1$ e $t_0 + dt_0$ é muito pequena, podemos colocar $a(t)$ fora das integrais e assim obter:

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)}, \quad (2.31)$$

onde dt_0 e dt_1 são intervalos de tempo próprio, o primeiro medido na origem do referencial e o segundo na fonte. Se a luz é considerada a partir do ponto de vista ondulatório pode-se dizer que estes intervalos são os tempos medidos entre duas cristas sucessivas, portanto, $\lambda_0 = c dt_0$ e $\lambda_1 = c dt_1$. Este resultado junto com a Eq.(2.1) e $c = 1$, fornece a expressão que relaciona o fator de escala cósmico com o redshift:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.32)$$

2.2.2

Equações de Friedmann

Para o caso de um universo homogêneo e isotrópico, onde as geodésicas são obtidas a partir da Eq. (2.26) e o tensor energia-momento é considerado como um fluido perfeito, Eq. (2.4). As equações de campo de Einstein podem ser desenvolvidas a fim de ver a evolução temporal do fator de escala cósmico.

O primeiro passo deste processo consiste em determinar os símbolos de Christoffel para a métrica Robertson-Walker:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^0 &= \left[\frac{a}{1-kr^2} \right] \frac{da}{dt}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\
 \Gamma_{22}^0 &= ar^2 \frac{da}{dt}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \\
 \Gamma_{33}^0 &= ar^2 \sin^2\theta \frac{da}{dt}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2\theta (1-kr^2), & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = r^{-1}, \\
 \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta, \\
 & & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = r^{-1}. & &
 \end{aligned}$$

O segundo passo é calcular as componentes não-nulas do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\frac{3}{a} \frac{d^2a}{dt^2}, \\
 R_{11} &= \left[\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{2}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} \right] \frac{a^2}{1-kr^2}, \\
 R_{22} &= \left[\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{2}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} \right] a^2 r^2, \\
 R_{33} &= \left[\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{2}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} \right] a^2 r^2 \sin^2\theta,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

e com elas calcular a curvatura escalar:

$$R = -6 \left[\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \tag{2.34}$$

O terceiro e último passo é substituir o tensor e escalar de Ricci nas equações de campo, Eq. (2.3), para achar as equações de Friedmann, que determinam a evolução temporal da expansão:

1. Componente tempo-tempo ($\mu = \nu = 0$):

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.35}$$

2. Componente espaço-espaço ($\mu = \nu = i$):

$$2 \left(\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} \right) + \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p + \Lambda. \tag{2.36}$$

A Eq.(2.35) envolve a primeira derivada de $a(t)$ em relação ao tempo, assim, se poderia dizer que ela é uma equação de energia; por outro lado, a Eq. (2.36) envolve a segunda derivada temporal e, portanto, pode ser considerada como uma equação de movimento.

A descrição do universo de acordo com estas equações requer o conhecimento de a , ρ e p , mas para determinar as três variáveis é necessário incluir a Eq. (2.5) para relacionar pressão e densidade nas equações de Friedmann. Assim derivando a Eq.(2.35) em relação ao tempo, multiplicando a Eq.(2.36) por $(\frac{-3}{8\pi G a}) \frac{da}{dt}$ e depois somando os resultados torna-se possível obter uma expressão para a primeira lei da termodinâmica no contexto cosmológico (conservação da energia), a qual mostra explicitamente o trabalho que faz a pressão para expandir um conjunto de partículas do substrato cósmico encerradas em um volume $v \sim a^3(t)$.

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3). \quad (2.37)$$

Reescrevendo esta equação de conservação em termos da densidade, utilizando para isto $p = w\rho$, é possível integrá-la para obter a dependência da densidade com o fator de escala:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w) \int \frac{da}{a}, \quad (2.38)$$

$$\rho(a) = C a^{-3(1+w)}, \quad (2.39)$$

onde C é uma constante de integração que está relacionada com o valor atual da densidade (ρ_0). Para sua determinação é fixado o fator de escala em $a(t = t_0) = a_0 = 1$. Substituindo este valor no resultado anterior e usando a Eq.(2.32) para expressar o fator de escala em termos do desvio para o vermelho têm-se:

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+w)}. \quad (2.40)$$

Para a matéria bariônica, usando a equação de estado dos gases ideais,

$$p = \frac{k_B T}{m_p} \rho \approx (10^{-13} T) \rho, \quad (2.41)$$

sendo $k_B = 8.62 \times 10^{-5} eV/K$ a constante de Boltzmann e $m_p = 938 MeV$ a massa do próton, vemos que w é muito pequeno mesmo para altas temperaturas, assim podemos tomar $w = 0$ como parâmetro de estado. De

acordo com a Eq.(2.40), a densidade de energia de matéria (ρ_m) escala como $(1+z)^3$, isto é o que deve acontecer em uma situação onde não há produção de matéria e não há pressão ou fluxos para compensar a diminuição da densidade pelo aumento do volume.

Por outro lado, no caso de matéria relativística o parâmetro de estado é $w = 1/3$ e assim a densidade de energia ρ_{rel} escala como $(1+z)^4$, diminuindo mais rapidamente que a densidade de energia para matéria ordinária. Isso pode ser entendido do seguinte modo:

- Densidade de energia diminui com o aumento do volume do Universo, isto justifica um fator $(1+z)^3$ na Eq.(2.40).
- Devido ao redshift o comprimento de onda aumenta proporcionalmente ao fator de escala, por conseguinte, a densidade de energia diminui em proporção a $(1+z)$.

Por último, a energia escura no modelo padrão é parametrizada com $w = -1$, o qual gera um valor constante para a densidade de energia. Na Figura (2.2) se pode observar a dependência da densidade de energia no desvio para o vermelho para cada uma destas componentes do universo.

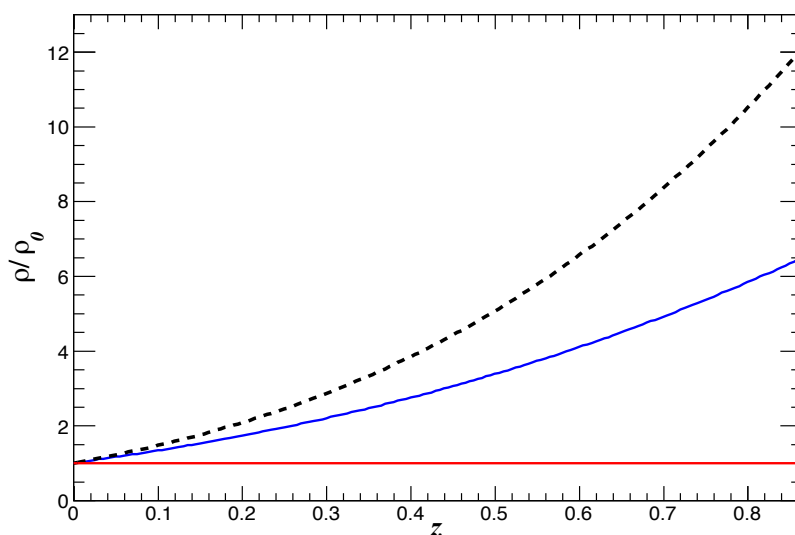


Figura 2.2: Variação da densidade de energia com relação ao desvio para o vermelho para diferentes componentes do universo: energia escura (linha vermelha), matéria ordinária (azul) e matéria relativista (curva preta).

2.3

Parâmetros cosmológicos

A partir das equações de campo se podem definir os seguintes parâmetros cosmológicos:

- $H = a^{-1} \frac{da}{dt}$ é o parâmetro de Hubble que mede a taxa relativa de expansão, seu valor na época atual $t = t_0$ é a constante de Hubble denotada com $H(t_0) = H_0$ e freqüentemente escrita na seguinte forma:

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.42)$$

onde $h = 0,673 \pm 0,012$ [11].

- Ω_i é o parâmetro densidade de energia da componente i do universo, que expressa a densidade de energia da componente i em unidades da densidade crítica ρ_{cr} a qual estabelece o limite entre um universo que se expande eternamente e um universo que colapsa de novo. Hoje ela tem um valor de:

$$\begin{aligned} \rho_{cr} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1,88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3, \\ &\simeq 11,3 h^2 \text{ prótons/m}^3, \\ &\simeq 1,06 \times 10^4 h^2 \text{ eV/cm}^3, \\ &\simeq 2,78 \times 10^{11} h^2 M_\odot/\text{Mpc}^3. \end{aligned} \quad (2.43)$$

- Ω_{rel} : parâmetro densidade de matéria relativística, este inclui: matéria escura quente (*HDM* siglas em inglês), neutrinos e fótons⁵.

$$\Omega_{rel} = \Omega_{HDM} + \Omega_\nu + \Omega_\gamma. \quad (2.44)$$

O valor atual da densidade de energia de fótons é determinada pela temperatura da radiação cósmica de fundo (*CMB* siglas em inglês). Como será analisado mais adiante neste capítulo, o espectro de frequência da *CMB* segue uma distribuição de corpo negro, com o valor de $(2,7255 \pm 0,0006) \text{ K}$ fornecido pelas medidas de Planck [11], para a temperatura atual da *CMB*, a densidade de energia hoje é:

$$\rho_{\gamma,0} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = (0,2602 \pm 0,0002) \text{ eV cm}^{-3}, \quad (2.45)$$

ou $\Omega_{\gamma,0} \simeq 2,455 \times 10^{-5} h^{-2}$, escrita em unidades da densidade crítica.

⁵Estes componentes da densidade de matéria não relativística correspondem aos primórdios do universo já que hoje os neutrinos são partículas não relativísticas.

• $\Omega_{n\tilde{a}o\ rel}$: densidade de matéria não relativística, inclui matéria escura fria (*CDM* siglas em inglês) e bárions:

$$\Omega_{n\tilde{a}o\ rel} = \Omega_m = \Omega_{CDM} + \Omega_B. \quad (2.46)$$

De acordo com a Figura (2.4), a matéria ordinária começa muito cedo a dominar a evolução da expansão. O redshift em que acontece a equipartição de matéria e radiação pode ser expressado em função dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{rel,0}$,

$$z_{eq} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{rel,0}} - 1 = 3391 \pm 60 \quad \text{Planck} + \text{WMAP}. \quad (2.47)$$

• $\Omega_{T,0}$: densidade total de matéria no universo,

$$\begin{aligned} \Omega_{T,0} &= \Omega_{n\tilde{a}o\ rel,0} + \Omega_{rel,0}, \\ &= [\Omega_{B,0} + \Omega_{CDM,0}] + [\Omega_{HDM,0} + \Omega_{\nu,0} + \Omega_{\gamma,0}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

• $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$: parâmetro densidade de energia escura. A Figura (2.4) mostra que neste momento a energia escura é a componente dominante na expansão. A igualdade entre densidade de matéria ordinária e densidade de energia escura ocorre num desvio para o vermelho que pode ser escrito em função dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e Ω_Λ ,

$$z_{eq} = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{m,0}} \right)^{1/3} - 1 = 0,30 \pm \begin{matrix} 0,02 \\ 0,03 \end{matrix} \quad \text{Planck} + \text{WMAP}, \quad (2.49)$$

z_{eq} é geralmente diferente daquele em que o universo começa a acelerar a expansão (z_{ace}) que é definido como:

$$q(z_{ace}) = -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{dt^2}(z_{ace}) = 0, \quad (2.50)$$

onde $q(z_{ace})$ é o parâmetro de desaceleração e z_{ace} está relacionado com o desvio para o vermelho de equilíbrio entre matéria e energia escura de acordo com:

$$z_{ace} = 2^{1/3}(1 + z_{eq}) - 1 = 0,64 \pm \begin{matrix} 0,02 \\ 0,04 \end{matrix}. \quad (2.51)$$

Em função dos parâmetros acima definidos, a Eq.(2.35) pode ser escrita como:

$$H(z) = H_0 E(z), \quad \text{com} \quad (2.52)$$

$$E(z) = [\Omega_{\gamma,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\nu,0}f(z) + \Omega_\Lambda]^{1/2},$$

onde $f(z)$ uma função que indica como a densidade de neutrinos depende do desvio para o vermelho. Os parâmetros em Eq.(2.52) satisfazem $\Omega_{\gamma,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0} + \Omega_{\Lambda} = 1$ no caso de um universo plano. A Figura (2.3) mostra o comportamento de H/H_0 em função do fator de escala (a), em escala logarítmica para o modelo cosmológico padrão.

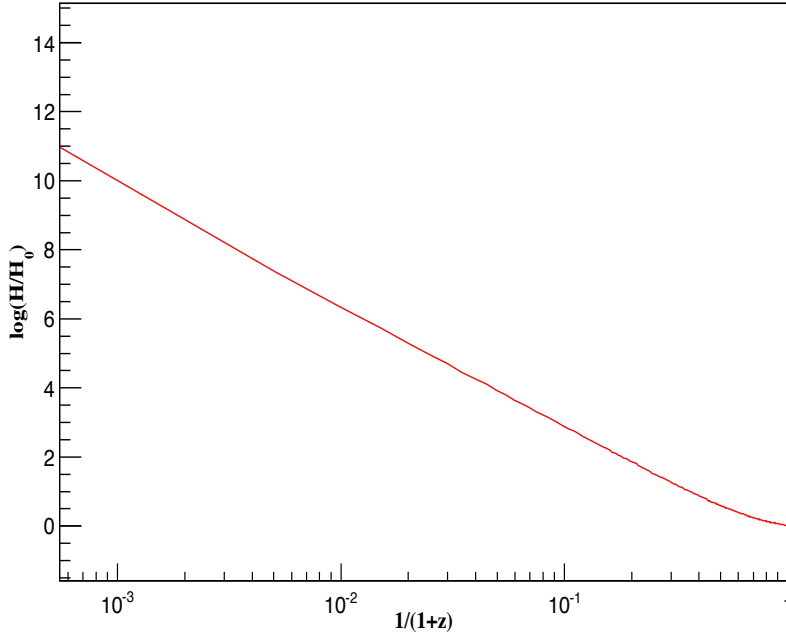


Figura 2.3: Parâmetro de Hubble H/H_0 em função do fator de escala, para o modelo padrão: $\Omega_{m,0} = 0.3175$, $\Omega_{\Lambda} = 0.6825$ e $\Omega_{\gamma,0} = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda})$.

Tal como $H(z)$, os parâmetros cosmológicos também variam em função do desvio para o vermelho. É fácil ver que:

$$\begin{aligned} \Omega_{\gamma}(z) &= \Omega_{\gamma,0} \frac{(1+z)^4}{E(z)^2}, & \Omega_m(z) &= \Omega_{m,0} \frac{(1+z)^3}{E(z)^2}, \\ \Omega_k(z) &= \Omega_k \frac{(1+z)^2}{E(z)^2}, & \Omega_{\Lambda}(z) &= \Omega_{\Lambda} \frac{1}{E(z)^2}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

o comportamento destas funções é ilustrado na Figura(2.4). Nas tabelas (2.1) e (2.2), é mostrado o valor atual destes parâmetros de acordo com os resultados das medidas de Planck publicadas em Janeiro de 2013 [11]. $\Omega_m h^2$ é a medida do parâmetro densidade de bárions, $\Omega_c h^2$ o parâmetro densidade de matéria escura fria, Ω_k o parâmetro densidade de curvatura com $\Omega_{T,0} = 1 - \Omega_k$, $\sum m_{\nu}$ a soma da masa de neutrinos em eV , N_{eff} o número efectivo de graus de liberdade de neutrinos relativísticos, Ω_{Λ} o parâmetro densidade de energia

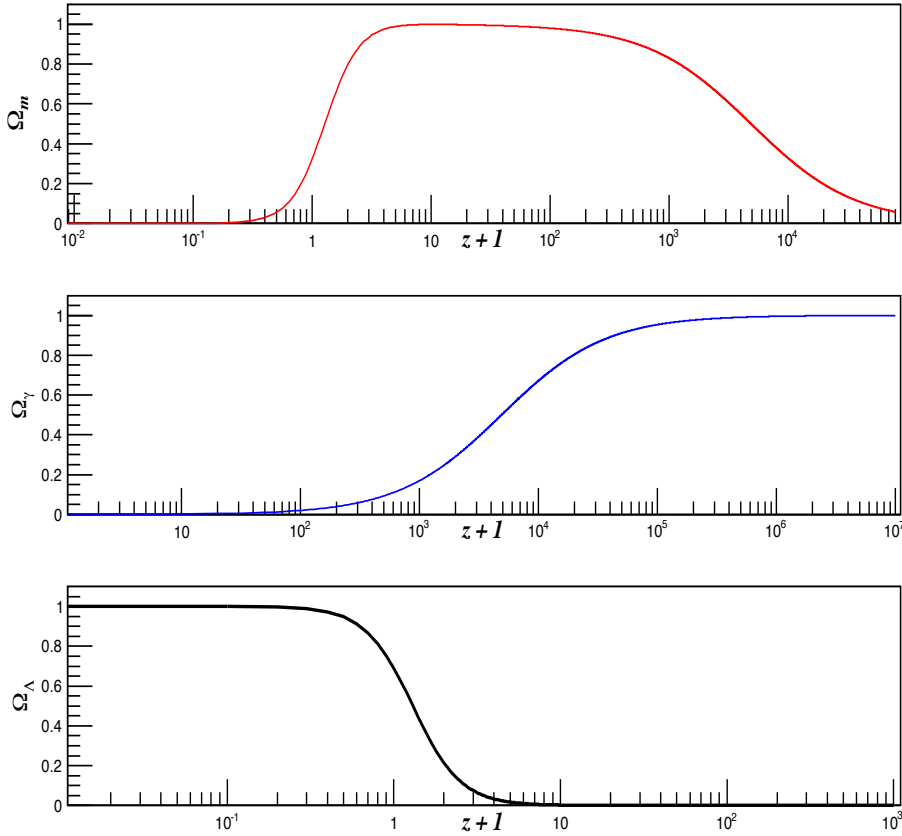


Figura 2.4: Variação dos parâmetros de densidade (Ω_i), em função do desvio para o vermelho para o modelo padrão. O valor do desvio para o vermelho inclui diferentes etapas do Universo tais como: equipartição matéria-energia escura, último espalhamento da CMB, equipartição matéria-radiação e fim da nucleossíntese primordial. A curva vermelha representa matéria ordinária, curva azul matéria relativística e curva preta constante cosmológica.

escura, t_0 idade do universo em Gyr , H_0 constante de Hubble e z_{eq} o redshift da igualdade entre densidade de matéria e densidade de radiação.

Parâmetro	Planck	Planck+Lensing	Planck+WMAP
$\Omega_b h^2$	$0,02207 \pm 0,00033$	$0,02217 \pm 0,00033$	$0,02205 \pm 0,00028$
$\Omega_c h^2$	$0,1196 \pm 0,0031$	$0,1186 \pm 0,0031$	$0,1199 \pm 0,0027$
$\Omega_m h^2$	$0,1423 \pm 0,0029$	$0,1414 \pm 0,0029$	$0,1426 \pm 0,0025$
Ω_m	$0,314 \pm 0,020$	$0,307 \pm 0,019$	$0,315^{+0,016}_{-0,018}$
Ω_Λ	$0,686 \pm 0,020$	$0,693 \pm 0,019$	$0,685^{+0,018}_{-0,016}$
H_0	$67,4 \pm 1,4$	$67,9 \pm 1,5$	$67,3 \pm 1,2$
$t_0 [Gyr]$	$13,813 \pm 0,058$	$13,796 \pm 0,058$	$13,817 \pm 0,048$
Z_{eq}	3386 ± 69	3362 ± 69	3391 ± 60

Tabela 2.1: Valores dos parâmetros cosmológicos em base às medidas da temperatura da CMB e o espectro de potências do potencial de acordo com as colaborações: Planck, Planck+Lensing, Planck+WMAP com um nível de confiança de 68%.

Parâm.	P+WP	P+WP+B	P+WP+h-l	P+WP+h-l+B
Ω_k	$-0,037 \pm_{0,049}^{0,043}$	$0,0000 \pm_{0,0067}^{0,0066}$	$-0,042 \pm_{0,048}^{0,043}$	$-0,0005 \pm_{0,0066}^{0,0065}$
$\sum m_\nu$ [eV]	$< 0,933$	$< 0,247$	$< 0,663$	$< 0,230$
N_{eff}	$3,51 \pm_{0,74}^{0,80}$	$3,40 \pm_{0,57}^{0,59}$	$3,36 \pm_{0,64}^{0,68}$	$3,30 \pm_{0,51}^{0,54}$
w	$-1,49 \pm_{0,57}^{0,65}$	$-1,13 \pm_{0,25}^{0,24}$	$-1,51 \pm_{0,53}^{0,62}$	$-1,13 \pm_{0,25}^{0,23}$

Tabela 2.2: Parâmetros cosmológicos em base às medidas da temperatura da CMB e o espectro de potências do potencial, de acordo com as colaborações: Planck+WMAP polarization, Planck+WMAP polarization+BAO, Planck+WMAP polarization+high-l CMB data, Planck+WMAP polarization+high-l CMB data+BAO à confiabilidade de 95%.

2.4

Medida de distância

Devido à expansão do Universo, a distância entre objetos é uma quantidade dinâmica que depende do método usado para sua determinação e da geometria do espaço-tempo.

2.4.1

Distância própria

A distância própria $d_p(t)$ entre dois pontos é definida como o comprimento da geodésica espacial que os junta quando o valor do fator de escala é fixo em $a(t)$. Assim, de acordo com a métrica Robertson-Walker, a distância entre o observador e um ponto de coordenada radial r é dado pela relação:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.54)$$

Na cosmologia, para que a distância seja uma quantidade operacional ela tem que ser independente do sistema de coordenadas usado para sua determinação e, portanto, escrita em função do desvio para o vermelho. Para isto se usa a equação de Friedmann $H(z) = H_0 E(z)$ e a equação $1 + z = a^{-1}$ para reescrever a segunda integral na Eq.(2.54) como:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{H_0 a(t_0)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.55)$$

Usando este resultado a distância própria em função do desvio para o vermelho é:

$$d_p(z) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.56)$$

2.4.2

Distância co-móvel (linha de visada)

A distância co-móvel D_c de um objeto em um desvio para o vermelho z se define como a distância entre eles que permanece constante quando o universo se expande. Em outras palavras, é a distância entre eles que se pode medir com réguas no tempo em que são observados (distância própria) vezes o fator $(1 + z)$.

$$D_c(z) = D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.57)$$

onde $D_H = c/H_0$ é a distância de Hubble medida ao tempo atual $t = t_0$. Em certo sentido, a distância co-móvel é a medida fundamental de distância em cosmologia, pois todas as outras distâncias são derivadas desta. A distância co-móvel é a medida correta para estudar aspectos da estrutura em grande escala do universo.

2.4.3

Distância co-móvel (transversal)

A Distância co-móvel entre dois eventos no mesmo desvio para o vermelho mas separados no céu por algum ângulo $\delta\theta$ é $D_M\delta\theta$ e a distância co-móvel transversal D_M (assim denotada) está relacionada com a distância co-móvel ao longo da linha de visada por:

$$D_M(z) = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} D_c/D_H) & \text{se } \Omega_k > 0 \\ D_c & \text{se } k = 0 \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|} D_c/D_H) & \text{se } \Omega_k < 0 \end{cases} . \quad (2.58)$$

2.4.4

Distância de luminosidade

A distância de luminosidade D_L de uma fonte S ao observador O é dada pela raiz quadrada da razão entre a luminosidade e o fluxo bolométrico:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}, \quad (2.59)$$

onde L é a luminosidade intrínseca da fonte e l sua luminosidade aparente. Para determinar a luminosidade aparente, se considera um detetor como um espelho de área A , com origem de coordenadas no centro do espelho e a linha de visada da fonte em $r = r_1$ é normal à superfície do espelho. A potência total recebida pelo espelho é:

$$P = L \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 w, \quad (2.60)$$

onde o fator $[a(t_1)/a(t_0)]^2$ é devido à expansão, reduz a energia dos fótons por um fator $(1+z)^{-1}$ e aumenta por um fator $(1+z)$ o intervalo de tempo entre fótons emitidos pela fonte. A quantidade w é a razão entre a área do espelho e a área da esfera em torno da fonte e que tem ao observador em um de seus pontos. É definida como:

$$w = \frac{A}{4\pi a(t_0)^2 r_1^2}. \quad (2.61)$$

Assim, a luminosidade aparente é $l = P/A = (La(t_1)^2)/(4\pi a(t_0)^4 r_1^2)$, substituindo este valor em Eq.(2.59) se obtém o seguinte resultado para a distância de luminosidade:

$$D_L(z) = a(t_0)r_1(1+z). \quad (2.62)$$

Para obter r_1 em função do desvio para o vermelho, é bom lembrar que a equação (2.28) tem diferentes soluções, dependendo qual seja a curvatura do espaço, isto é:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \begin{cases} \sin^{-1}(r_1) & \text{se } k = 1, \\ r_1 & \text{se } k = 0, \\ \sinh^{-1}(r_1) & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.63)$$

Isto junto com a Eq.(2.54) implica que:

$$a(t_0)r_1 = \begin{cases} \sin \left(D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) & \text{se } k = 1, \\ D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)} & \text{se } k = 0, \\ \sinh \left(D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) & \text{se } k = -1, \end{cases} \quad (2.64)$$

e assim finalmente a distância de luminosidade em função do desvio para o vermelho é:

$$D_L(z) = \begin{cases} (1+z) \sin \left(D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) & \text{se } k = 1, \\ D_H(1+z) \int_0^z \frac{dz}{E(z)} & \text{se } k = 0, \\ (1+z) \sinh \left(D_H \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.65)$$

2.4.5 Distância do diâmetro angular

A distância do diâmetro angular D_A é definida como a razão entre o tamanho transversal (D) de um objeto e seu tamanho angular observado (δ em radianos).

Considere-se uma fonte em $r = r_1$ cujo centro está em $\theta = 0$, figura(2.5), no instante de tempo $t = t_1$, raios de luz deixam a fonte a partir de seus lados opostos e chegam ao observador no tempo $t = t_0$, formando um ângulo δ .

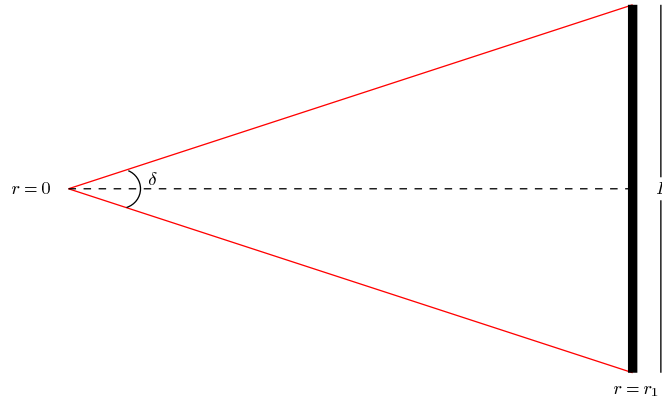


Figura 2.5: Desenho esquemático da posição do observador e a fonte para o cálculo da distância do diâmetro angular.

Então, para valores pequenos de δ , a métrica Eq.(2.26) com r e ϕ constantes, dá o tamanho transversal da fonte $D = a(t_1)r_1\delta$. Consequentemente a distância do diâmetro angular é:

$$D_A = a(t_1)r_1, \quad (2.66)$$

e a relação com a distância de luminosidade em base no teorema de Etherington [12], é dada por:

$$D_A = (1 + z)^{-2}D_L. \quad (2.67)$$

É possível integrar numericamente a Eq.(2.67), considerando os parâmetros cosmológicos do modelo padrão e obter a Figura(2.6), a qual mostra a variação da distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho. Pode-se ver que, para pequenos valores de z (objetos próximos), a distância angular cresce linearmente, mas depois deixa essa linearidade. Na verdade, para objetos com $z > 1$ a distância angular diminui cada vez mais, assim, os objetos parecem maiores quanto mais longe estão de nós.

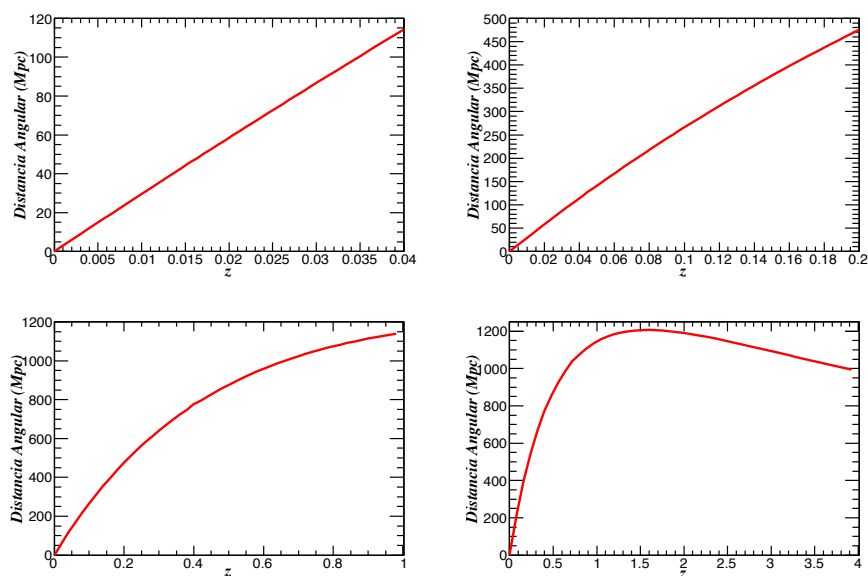


Figura 2.6: Variação da distância do diâmetro angular em função do redshift para o modelo Λ CDM.

2.5 Radiação cósmica de fundo (CMB)

A existência da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB) foi inicialmente prevista por George Gamow em 1948, e por Ralph Alpher e Robert Herman em 1950. Sua descoberta foi feita por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965, quando eles calibravam uma antena dos laboratórios Bell. O excesso de ruído, que não era proveniente do instrumento nem da emissão da atmosfera, foi medido em diferentes direções no céu em um único comprimento de onda, de 7,35 cm, e sua temperatura foi estimada em 3,5K. A interpretação de que essa radiação era a proveniente do universo primordial foi feita por Dicke em 1965 e desde então, vários experimentos começaram a ser desenvolvidos para estudar e medir a CMB.

Nos primórdios da expansão o universo era muito quente e não existiam átomos, apenas fótons, núcleos, elétrons livres e neutrinos. Havia igual número de prótons e elétrons e, portanto, a carga total do universo era nula. Os fótons eram abundantes, havia ao redor de 10^9 fótons por cada elétron. A taxa do número de fótons ao número de elétrons é conservada ao longo da expansão.

Apesar da temperatura do universo ir diminuindo com a expansão, enquanto ele se manteve suficientemente quente, os fótons eram permanentemente dispersos pelos elétrons e, portanto a matéria estava completamente ionizada e em equilíbrio térmico perfeito com a radiação. Quando finalmente a temperatura caiu até aproximadamente 3000K, os núcleos de hidrogênio puderam capturar os elétrons que lhes faltavam para neutralizar

os átomos. Os núcleos passaram a estar mais afastados e conseqüentemente os fótons foram libertados tornando o universo transparente à luz.

A distribuição de energia da CMB que permeia o universo hoje obedece a lei de Stefan-Boltzmann, apresentando assim um espectro de emissão de corpo negro:

$$\rho_0(\nu_0)d\nu_0 = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{\beta_0 h\nu_0} - 1}, \quad (2.68)$$

onde: $\beta_0 = 1/(k_B T_0)$, k_B é a constante de Boltzmann, h a constante de Planck, T_0 a temperatura atual da CMB, ν_0 a frequência de cada radiação monocromática e ρ_0 a densidade de energia no intervalo $[\nu_0, \nu_0 + d\nu_0]$. Integrando em todas as frequências, a densidade de radiação total é dada conforme a Eq.(2.45). Como o número de fótons é conservado tem-se⁶:

$$N = \frac{\rho_0(\nu_0)d\nu_0}{\frac{h\nu_0}{a_0^3}} = \frac{\rho_e(\nu_e)d\nu_e}{\frac{h\nu_e}{a_e^3}} = \text{constante}, \quad (2.69)$$

de onde,

$$\begin{aligned} \rho_e(\nu_e)d\nu_e &= \left(\frac{h\nu_e a_0^3}{h\nu_0 a_e^3} \right) \rho_0(\nu_0)d\nu_0, \\ &= \frac{\nu_e}{\nu_0} \left(\frac{a_0}{a_e} \right)^3 \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{\beta_0 h\nu_0} - 1}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

devido ao redshift cosmológico $a_0\nu_0 = a_e\nu_e$, e portanto:

$$\left(\frac{a_0}{a_e} \right)^3 = \left(\frac{\nu_e}{\nu_0} \right)^3 \quad \text{e} \quad d\nu_0 = \left(\frac{a_e}{a_0} \right) d\nu_e. \quad (2.71)$$

Substituindo estes resultados, a Eq.(2.68) pode simplificar em:

$$\rho_e(\nu_e)d\nu_e = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu_e^3 d\nu_e}{e^{\beta_0 h\nu_0} - 1}. \quad (2.72)$$

Se o universo é considerado como um sistema adiabático em equilíbrio termodinâmico tem-se que $TdS = dU + pdV$ com $dS = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} 0 &= dU + pdV, \\ &= d(\rho a^3) + pda^3, \\ &= d(\alpha T^4 a^3) + \frac{\alpha T^4}{3} da^3, \\ &= d(aT). \end{aligned} \quad (2.73)$$

⁶Aqui o índice 0 denota a época atual e o índice e faz referência ao momento do desacoplamento

Esta última equação mostra que o produto entre a temperatura do universo e o fator de escala é constante para qualquer tempo, e portanto de acordo com Eq.(2.72) depois de substituir $\beta_e \nu_e = \beta_0 \nu_0$, pode ser mostrado que a densidade de energia da radiação que permeava o universo primordial antes do desacoplamento dos fótons obedece também a lei de Stefan-Boltzmann para a radiação de um corpo negro.

$$\rho_e(\nu_e)d\nu_e = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu_e^3 d\nu_e}{e^{\beta_e h \nu_e} - 1}. \quad (2.74)$$

2.5.1

Recombinação e desacoplamento

É possível fazer uma estimativa do desvio para o vermelho do desacoplamento usando a equação de Saha. Esta equação fornece o número relativo de átomos em dois estados de ionização, como uma função da densidade do número de elétrons (n_e) e a temperatura.

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{G_{r+1}g_e}{G_r} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{k_B T}\right), \quad (2.75)$$

onde, n_{r+1} é a densidade de átomos no estado de ionização $r + 1$, n_r é a densidade de átomos no estado de ionização r , n_e é a densidade de elétrons, G_{r+1} é a função de partição do estado de ionização $r + 1$, G_r é a função de partição do estado de ionização r , $g_e = 2$ é o peso estatístico do elétron, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ é a massa do elétron, χ_r é o potencial de ionização do estado r .

A fotoionização (em equilíbrio térmico) de um universo composto apenas por átomos de hidrogênio é dada por $\frac{G_{r+1}g_e}{G_r} \approx 1$. Então, fazendo com que n_r represente o número de átomos de hidrogênio por unidade de volume na equação de Saha, tem-se que n_{r+1} corresponde ao número de átomos ionizados (prótons) por unidade de volume. Se n_B é a densidade de bárions pode-se definir as quantidades $\chi_e = \chi_p = n_e/n_b = n_p/n_p$ e $\chi_H = n_H/n_B$, para assim escrever a equação de Saha como:

$$\frac{\chi_e^2}{1 - \chi_e} = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{n_B h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{k_B T}\right) \quad \text{com} \quad \chi_r = 13,6 \text{ eV}. \quad (2.76)$$

A solução de esta equação, para $n_B \approx \rho_B/m_p = 1,124 \times 10^{-5}(1+z)^3 \Omega_B h^2$ prótons m^{-3} é:

$$\chi_e(z) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4,136 \times 10^{-21} \exp(57916,1/(1+z)) \Omega_B h^2 (1+z)^{3/2}}}. \quad (2.77)$$

A Figura(2.7) mostra a evolução da fração de ionização para o cenário do modelo cosmológico padrão. Quando o desvio para o vermelho é $z \approx 1100$, a radiação deixa de ionizar a matéria e o universo se torna transparente, isto ocorre à temperatura de $T = 2,7255(1 + 1000) \simeq 3000 \text{ K}$.

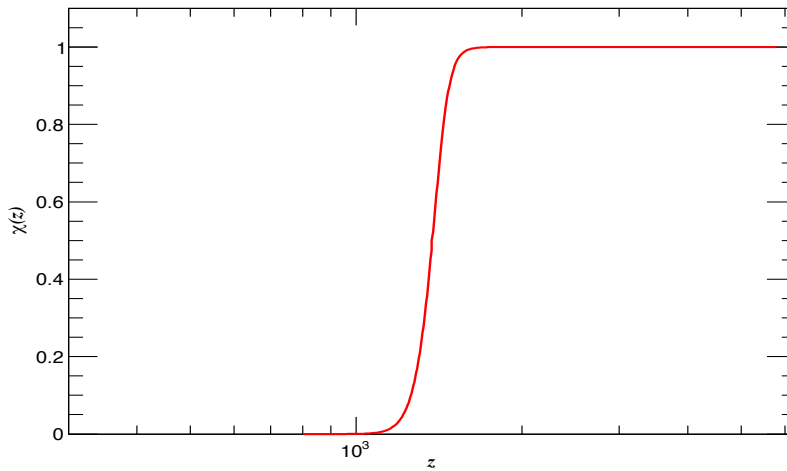


Figura 2.7: Taxa de ionização em função do desvio para o vermelho utilizando o modelo padrão.

3

Física de Neutrinos

Os primeiros passos no conhecimento da existência desta partícula elementar tem sua origem na descoberta da radioatividade, a partir de sais de Urânio, por parte de Becquerel em 1896. A compreensão dos diferentes tipos de radiação emitida neste processo mostrou que os raios alfa descobertos por Rutherford em 1899 eram compostos de núcleos de ${}^4\text{He}$, os raios beta eram elétrons gerados no decaimento de um núcleo instável, assim como também que a radiação gama descoberta em 1900 pelo químico e físico francês P. Villard era um fóton criado no núcleo com energia de alguns poucos MeV. No começo estudos cinemáticos do decaimento beta mostravam que o nêutron e o elétron ejetados do átomo não se moviam na mesma direção, o que parecia violar a conservação da quantidade de movimento. A energia total do sistema antes e depois do decaimento também não tinham o mesmo valor, violando assim o princípio da conservação da energia. Apenas a carga elétrica se conservava, garantindo a validade da conservação da carga elétrica. Assim, para solucionar o problema da conservação do momento e da energia no espectro do decaimento beta, Pauli em 1930, postulou a existência de uma nova partícula fermiônica que deveria ser ejetada além do elétron e do nêutron. Essa partícula deveria:

1. Carregar a energia que faltava, para garantir a validade da conservação da energia.
2. Ser ejetada com uma certa velocidade e em uma direção tais que a sua quantidade de movimento somada vetorialmente à quantidade de movimento do elétron dessem como resultado exatamente a quantidade de movimento do nêutron ejetado.
3. Deveria ter carga elétrica nula pois no decaimento beta esta estava devidamente balanceada, garantindo assim o princípio da conservação da carga.
4. Ter spin $1/2$ para conservar o momento angular total do sistema.

5. Interagir fracamente com a matéria, pois sua detecção não havia acontecido ainda e, além de isso, deveria ter uma massa muito pequena.

Esta nova partícula seria o equivalente ao um nêutron, com carga elétrica zero, só que com massa minúscula. Por este motivo, Enrico Fermi sugeriu que a partícula fosse batizada de neutrino, que em italiano significa pequeno nêutron e atualmente é representada pelo sinal ν . Na proposta de Pauli o decaimento beta se daria pela reação:



portanto, uma idéia de detecção de neutrinos seria utilizar o chamado decaimento beta inverso:



Em 1934, utilizando a teoria de Fermi para o decaimento beta [13], Hans Bethe e Rudolf Peierls calcularam a probabilidade desta reação. O resultado obtido foi que por um centímetro cúbico de água que contém 7×10^{22} prótons, um neutrino de seção de choque de $\sim 10^{-44}$ cm² dificilmente colidiria com um desses prótons pois a probabilidade seria de 10^{-21} . Assim seria necessário 10^{21} cm³ de água para absorver um neutrino. Obviamente os dois concluíram que jamais poderia-se detectar neutrinos através deste decaimento.

Entre 1952 e 1956, Cowan e Reines procuraram um modo de observar o decaimento beta inverso. Eles usaram um detector que intercalava pequenos tanques de água e cloreto de Cádmio como líquido cintilante. Com esse arranjo, o método utilizado foi um processo composto por três etapas: primeiro um próton na água absorvia um anti-neutrino proveniente de um reator nuclear, criando um nêutron e um pósitron; então, quase que imediatamente o pósitron se aniquilava com um elétron da água emitindo dois raios gamas em sentidos opostos, que seriam detetados por fotocélulas colocadas nas paredes do tanque que continha o líquido cintilante; e finalmente, depois de $5 \mu\text{s}$, o nêutron seria capturado pelo núcleo do Cádmio, que então produziria mais raios gamas. A correlação temporal dos flashes de luz evidenciaria a detecção indireta do neutrino. A Figura (3.1), mostra o esquema final de detecção do neutrino neste experimento.

Em 1959, Pontecorvo sugeriu que os neutrinos emitidos no decaimento beta e no decaimento muônico poderiam ser diferentes. Esta hipótese foi comferida em 1962 por Danby e colaboradores [14], que encontraram que os neutrinos produzidos no decaimento muônico poderiam criar, em interações

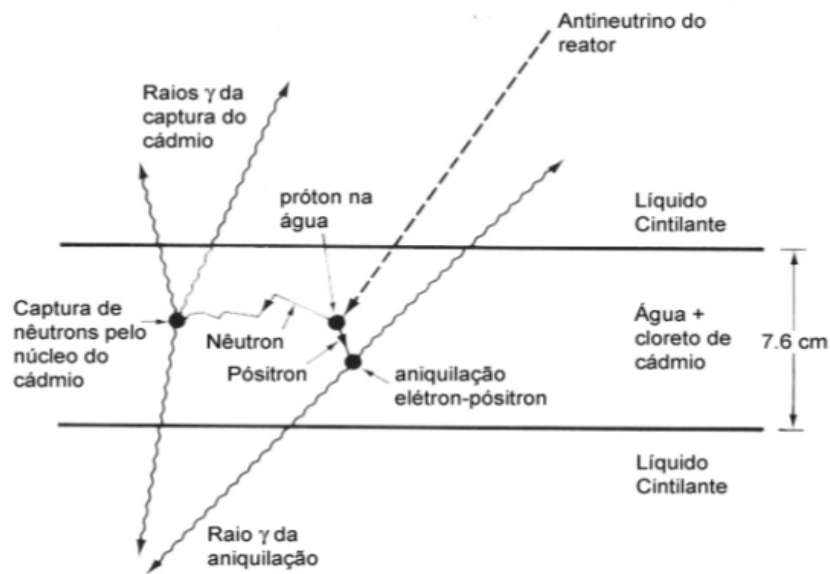


Figura 3.1: Esquema do método utilizado em 1956 por Reines e Cowan para detecção do neutrino.

secundárias, só muons mas não elétrons. Hoje está estabelecido que pelo menos há três tipos (ou sabores) diferentes de neutrinos: eletrônico (ν_e), cuja anti-partícula foi detectada no experimento de Reines e Cowan [15]; muônico (ν_μ) e o neutrino taônico (ν_τ) descoberto nos anos 2000 [16].

Pelo que hoje sabemos, os três sabores de neutrinos surgiram no começo do universo. Assim como existe uma radiação cósmica de fundo composta por fótons, existem também os neutrinos cósmicos de fundo os quais tem uma temperatura a baixo da temperatura dos fótons por terem se desacoplado antes, por causa da pouca energia, eles têm uma pequena seção de choque que faz os neutrinos difíceis de serem detetados, e ainda não se conhece nenhuma maneira de observá-los diretamente. Acredita-se que o universo tenha hoje 330 milhões de neutrinos por m^3 .

Neutrinos são também produzidos em estrelas, estes são neutrinos do elétron produzidos nas reações termonucleares que geram a energia da estrela. Em nosso sol o 2,27% da energia resultante no processo de fusão de prótons em Hélio-4 ($4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$), é liberada na forma de neutrinos. O primeiro resultado de detecção de neutrinos solares foi apresentado em 1968 por Raymond Davis e seus colaboradores, no experimento Homestake, cujo método de detecção usava a reação: $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ [17]. Logo vieram experimentos com gálio como: GNO [18], SAGE [19], GALLEX [20], experimentos com água como Kamiokande e seu sucessor Super-Kamiokande [21, 22, 23, 24] ou experimentos com água pesada como no caso de SNO [25, 26].

Outra fonte de neutrinos resulta da interação de partículas energéticas vindas do espaço (raios cósmicos), com os núcleos atômicos da atmosfera terrestre, criando chuviros de partículas, muitas das quais são instáveis e decaem criando neutrinos. Os experimentos com neutrinos atmosféricos começaram em 1960 quando o objetivo principal destes era a confirmação da existência de neutrinos nos raios cósmicos. Classificados segundo seu método de detecção, se tem experimentos com calorímetros tais como: KGF [27], Fréjus [28, 29], Soudan 2 [29], NUSEX [30, 29], Baksan [31], MACRO [32], MINOS [33, 34], e experimentos com água como: Kamiokande/Super-Kamiokande [35] e IMB [36], que utilizam radiação Cherenkov para a procura dos neutrinos.

As supernovas causadas por colapso gravitacional são também fontes valiosas de neutrinos pois 99% de sua energia é liberada através deles. A produção de neutrinos em supernovas tem duas etapas: a primeira tem lugar no começo do colapso estelar quando os elétrons são absorvidos por prótons no processo de decaimento beta inverso e a segunda etapa ocorre durante a continuação do colapso e produz todos os três tipos de neutrinos. Em 1987 os experimentos Kamiokande [37], IMB [38] e Baksan [39, 40] observaram neutrinos a partir de tais fontes.

Nosso planeta em seu interior tem também arrumado varios núcleos atômicos radioativos que produzem antineutrinos. Entre os isótopos radioativos mais abundantes na terra temos: ^{238}U , ^{232}Th e ^{40}K . Com aproximadamente 20 mg de potássio-40, nosso corpo emite cerca de 330 milhões de neutrinos por dia. Além destas fontes naturais de neutrinos [41, 42, 43], juntam-se aquelas produzidas pelo homem, como explosões atômicas, reatores nucleares e aceleradores de partículas. As usinas nucleares são construídas para geração de energia elétrica comercial, assim os neutrinos produzidos são um produto secundário e portanto possuem energias relativamente baixas. Os aceleradores de partículas são laboratórios onde se provocam colisões à altas energias para o estudo de interações fundamentais. Portanto os neutrinos criados desta forma têm grandes energias. Entre os experimentos com reatores estam: Bugey [31, 44], Gosgen [45], Rovno [46], Savannah River [47], CHOOZ [31, 48], KamLAND [31], Palo Verde [31], e aqueles com aceleradores: LSND [31], KARMEN [31], MiniBooNE [31], K2K [31], MINOS, OPERA [49], Minerva [50, 51], entre outros.

3.1

Propiedades dos neutrinos no modelo padrão das partículas elementares

Nas últimas décadas, uma unificação parcial de três das quatro forças fundamentais da natureza, a eletromagnética, a fraca e a forte, foi conseguida principalmente por Glashow, Weinberg e Salam, levando ao surgimento do modelo padrão das partículas elementares. De acordo com este modelo, as partículas elementares que não possuem estrutura interna são chamadas de léptons e quarks. As partículas que têm estrutura interna são chamadas de hádrons e são constituídas de quarks. Existem dois tipos de hádrons: bárions quando são constituídos por três quarks ou três antiquarks, ou mésons quando são constituídos por um quark e um antiquark. Há seis léptons: elétron (e^-) e neutrino eletrônico (ν_e), múon (μ) e neutrino muônico (ν_μ), tau (τ) e seu neutrino taônico (ν_τ); cada um destes pares de partículas estão associados de acordo com sua quiralidade, assim, os campos fermiônicos de quiralidade esquerda (Ψ_L) são representados por dubletos de isospin fraco:

$$\Psi_L^i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ i \end{pmatrix}_L \quad i = e^-, \mu, \tau. \quad (3.3)$$

Já que o neutrino só apresenta quiralidade esquerda, as componentes de quiralidade direita dos campos fermiônicos (Ψ_R) são associadas em singletos:

$$\Psi_R = e_R, \mu_R, \tau_R. \quad (3.4)$$

No setor de quarks há seis partículas, os quarks: up (u), down (d), charm (c), estrange (s), top (t) e bottom (b), cuja associação é análoga à de léptons, com a diferença que neste setor todos os campos fermiônicos têm participação:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (3.5)$$

$$\Psi_R = u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R.$$

Os quarks podem ser diferenciados com três cores: vermelho, verde e azul. As interações fundamentais ocorrem através das partículas mediadoras: fótons para a interação eletromagnética, glúons para a interação forte, e as partículas W^\pm e Z^0 para a interação fraca.

Neutrinos desempenham um papel especial no modelo padrão e têm características bem definidas, tais como:

1. Spin 1/2.
2. Massa zero.
3. Helicidade negativa.

4. Participam só das interações fraca e gravitacional.
5. Conservam o número leptônico¹
6. Os anti-neutrinos têm as mesmas propriedades dos neutrinos exceto que sua helicidade é positiva.

Como mencionado acima, a quiralidade e a helicidade de uma partícula, são dois conceitos fundamentais que se tem que estudar para um melhor entendimento das propriedades dos neutrinos, assim: a helicidade representa a medida do spin na direção do momento e é definida pelo operador helicidade:

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad (3.6)$$

onde \vec{p} representa o momento da partícula, $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ e σ são as matrizes de Pauli. Dado que $\hat{h}^2 = 1$, os autovalores deste operador são: $\lambda = +1$, $\vec{\Sigma}$ e \vec{p} têm o mesmo sentido (helicidade positiva) e $\lambda = -1$, onde $\vec{\Sigma}$ e \vec{p} são antiparalelos e portanto a helicidade é negativa.

A quiralidade é um conceito que está relacionado com a rotação da partícula, e está definida pela matriz de quiralidade:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (3.7)$$

que tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0, \\ (\gamma^5)^2 &= 1, \\ (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como $(\gamma^5)^2 = 1$, a matriz quiralidade tem dois autovalores: ± 1 , associados com as autofunções Ψ_R e Ψ_L as quais são chamadas de campos de mão direita e esquerda respectivamente.

$$\begin{aligned} \gamma^5\Psi_R &= +\Psi_R, \\ \gamma^5\Psi_L &= -\Psi_L. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para uma partícula de massa nula, os dois conceitos, quiralidade e helicidade, são essencialmente equivalentes pois helicidade negativa (positiva) corresponde exatamente à quiralidade esquerda (direita) sem nenhuma

¹O conceito do número leptônico foi introduzido em 1953 por Konopinski para explicar a não ocorrência de alguns decaimentos. As partículas $e^-, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ têm número leptônico +1, seus anti-partículas número leptônico -1 e os quarks número leptônico 0.

aproximação. Dentro do cenário do modelo padrão, neutrinos têm helicidade negativa e portanto são representados por campos de quiralidade esquerda. Este resultado pode ser visto no experimento realizado em 1958 por Goldhaber e seus colaboradores no qual se verificou explicitamente a quiralidade esquerda do neutrino [52], ou de forma indireta, pelo experimento de C. S. Wu e seus colaboradores realizado em 1957 [53, 54], que estudaram o decaimento do núcleo de Cobalto:



Neste processo, o núcleo de Cobalto foi polarizado por meio de um campo eletromagnético externo de tal forma que o momento angular do núcleo de cobalto e do núcleo de Níquel de valor 5 e 4 (em unidades de \hbar) respectivamente estivessem alinhados na direção do campo externo. Por conservação do momento o par elétron-antineutrino tem que ter um momento angular de 1 na direção do campo. Observou-se que o elétron sempre se movia na direção contrária ao campo, assim que o antineutrino deve se movimentar na direção do campo magnético. Estes resultados levaram a concluir que o elétron criado neste processo possui helicidade negativa, enquanto o antineutrino sai com helicidade positiva e, assim este processo só cria elétrons de quiralidade esquerda e antineutrinos de quiralidade direita. O fato que só se observem antineutrinos de quiralidade esquerda nestes processos é prova de que a simetria de paridade é violada.

Além da helicidade e da quiralidade, neutrinos possuem outra característica muito mais importante: a massa. No modelo padrão das partículas elementares, os léptons carregados e os quarks são partículas de Dirac como consequência da conservação da carga elétrica e, portanto, obedecem à equação de Dirac e são descritos por espinores complexos de quatro componentes. Neste modelo os neutrinos não têm massa, o que os diferencia dos outros férmions. Porém é possível descrevê-los dentro deste cenário matemático usando dois espinores complexos de duas componentes, chamados espinores de Weyl.

3.1.1 Neutrinos de Weyl

Neutrinos de Weyl são partículas de spin 1/2 e massa nula que apresentam um único estado de helicidade.² Helicidade não é conservada sob

²A partícula terá sempre helicidade negativa, enquanto a antipartícula será sempre de helicidade positiva. Estes são os dois graus de liberdade que apresenta um neutrino de Weyl.

transformações de Lorentz, portanto a única forma de um neutrino preservar sua identidade para qualquer observador inercial, é mover se à velocidade da luz, ou seja ter massa nula.

Os neutrinos de Weyl são descritos por um espinor de duas componentes, que são as projeções quirais de um operador de campo de quatro componentes $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$, através dos operadores de projeção:

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2}, \\ P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

que satisfazem: $P_R + P_L = 1$, $(P_R)^2 = P_R$, $(P_L)^2 = P_L$ e $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Consequentemente um neutrino de Weyl será:

$$P_L \Psi = \begin{cases} \Psi & \text{se a helicidade é } -1, \\ 0 & \text{se a helicidade é } +1, \end{cases} \quad (3.12)$$

e seu correspondente antineutrino:

$$P_R \Psi = \begin{cases} \Psi & \text{se a helicidade é } +1, \\ 0 & \text{se a helicidade é } -1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Para verificar que um espinor de Weyl tem só duas componentes independentes, é preciso escrever os operadores de projeção na representação quiral e por conseguinte:

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

Se além disso o espinor de quatro componentes é escrito nesta representação como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_R \\ \xi_L \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

sendo ξ_R e ξ_L espinores de duas componentes, com (3.14) sobre (3.15), se mostra que os campos de quiralidade esquerda Ψ_L e de quiralidade direita Ψ_R só têm duas componentes independentes:

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \xi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_L \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

O modelo padrão das partículas elementares é uma teoria muito sofisticada que identifica as partículas elementares e suas interações com grande sucesso. Por outro lado, a descoberta da oscilação de sabor dos neutrinos, ao longo de sua propagação no vácuo ou na matéria, implica que neutrinos são

partículas massivas, portanto não podem ser descritos por espinores de Weyl. Assim, a necessidade de determinar de que forma estas partículas adquirem massa, e obviamente quais são os valores destas massas, isto indica que o modelo padrão precisa ser modificado ou estendido. Como os neutrinos têm massa, eles deveriam ser como qualquer outro férmion e por conseguinte ser representados por espinores de Dirac. Além disso, existe outra diferença fundamental entre neutrinos e os demais férmions. Neutrinos não têm carga elétrica então eles poderiam ter espinores de Majorana ao invés de Dirac.

3.2

Neutrinos massivos

A massa dos neutrinos é um tópico de muito interesse na física de neutrinos. Desde a proposta de Pauli, a massa dos neutrinos tem sido estudada, tanto em teoria como na parte experimental. Experimentos como: Homestake, IMB, Kamiokande, Super-Kamiokande entre outros, confirmaram a existência de oscilações de sabor. Hoje devido a esses experimentos, sabemos que os neutrinos têm massa. Ainda não se conhecem quais são os valores das massas, mas há os seguintes limites superiores para as massas dos neutrinos: ν_e, ν_μ, ν_τ , obtidos em inúmeros e variados experimentos cinemáticos [55]:

$$m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}, \quad m_{\nu_\mu} < 0,19 \text{ MeV}, \quad m_{\nu_\tau} < 18,2 \text{ MeV}. \quad (3.17)$$

Os resultados dos experimentos de oscilação também fornecem medidas para as diferenças quadradas das massas dos neutrinos:

$$\Delta m_{21}^2 = 7,9_{-0,8}^{+1,0} \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad (3.18)$$

$$\Delta m_{32}^2 = 2,2_{-0,8}^{+1,1} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.19)$$

$$\Delta m_{31}^2 \approx 2,2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.20)$$

Para hierarquia normal $m_3 > m_2 > m_1$, Δm_{32}^2 indica que a massa m_3 é maior ou igual a 0.045 eV e Δm_{21}^2 mostra que m_2 seria maior ou igual a 0.009 eV. Embora se consegue colocar limites de massa inferiores para m_2 e m_3 , não se pode dizer nada da massa m_1 que pode ser zero.

Por outro lado, a cosmologia também pode dar informação sobre o limite superior de massa dos neutrinos, mas estes resultados dependem do modelo cosmológico usado, o que causa grandes imprecisões.

3.2.1 Neutrinos de Dirac

Neutrinos são partículas de spin 1/2 e por conseguinte descritos por uma densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \quad (3.21)$$

onde m é a massa do neutrino e $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$ um espinor de quatro componentes; dois estados de quiralidade (esquerda e direita) para os estados de partícula e antipartícula:

$$\Psi_L = P_L \Psi, \quad \Psi_R = P_R \Psi, \quad \Psi_L^C = P_R \Psi^C, \quad \Psi_R^C = P_L \Psi^C, \quad (3.22)$$

onde $\Psi^C = \xi_c C \bar{\Psi}^T$ é o espinor conjugado (transformado sob conjugação da carga) com $|\xi_c|^2 = 1$, $C = i\gamma^2 \gamma^0$ e $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

Usando as propriedades do operador projeção definido em (3.11) e os campos quirais de mão esquerda e mão direita, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_R &= \overline{(P_R \Psi)} = (P_R \Psi)^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger P_R \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\Psi} P_L, \\ \bar{\Psi}_L &= \overline{(P_L \Psi)} = (P_L \Psi)^\dagger \gamma^0 = \Psi^\dagger P_L \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\Psi} P_R, \end{aligned} \quad (3.23)$$

assim os seguintes produtos na Lagrangeana são nulos:

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L &= i\bar{\Psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_L \Psi = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu P_R P_L \Psi = 0, \\ i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R &= i\bar{\Psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_R \Psi = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu P_L P_R \Psi = 0, \\ m\bar{\Psi}_R \Psi_R &= m\bar{\Psi} P_L P_R \Psi = 0, \\ m\bar{\Psi}_L \Psi_L &= m\bar{\Psi} P_R P_L \Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e finalmente a densidade Lagrangeana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R + i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - m (\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R). \quad (3.25)$$

A dinâmica do neutrino é dada pela equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0, \quad (3.26)$$

ou

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R = m\Psi_L, \quad (3.27)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L = m\Psi_R, \quad (3.28)$$

Da teoria quântica de campos se conhece que a solução mais geral para a equação de Dirac corresponde a uma expansão de Fourier em termos de ondas planas, associadas com a soma de todos os estados de momento e de spin. Portanto o campo $\Psi(x)$ pode se escrever como:

$$\Psi_D(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (a_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + b_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}), \quad (3.29)$$

onde $a_s(p)$ é um operador que aniquila uma partícula de momento p e spin s na direção do movimento. De forma similar, $b_s^\dagger(p)$ cria uma antipartícula. Os espiniores u_s e v_s são as soluções de onda plana para energia positiva e negativa, respectivamente.

No modelo padrão as massas dos neutrinos podem ser obtidas extendendo o conteúdo de partículas da teoria, onde além dos campos já existentes (equações (3.3) e (3.4)), se considera aos neutrinos de mão direita como singletos de $SU(2)$

$$\nu_{eR}, \quad \nu_{\mu R}, \quad \nu_{\tau R}, \quad (3.30)$$

de forma tal que possa ser construído um termo de massa do tipo:

$$\mathcal{L}_D = - \sum_{i,j=e,\mu,\tau} \bar{\Psi}_{iR} M_{ij} \Psi_{jL} + h.c, \quad (3.31)$$

onde $h.c$ denota ao conjugado Hermitiano do primeiro termo. Definindo as matrizes

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

o termo de massa de Dirac pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_D = -\bar{\Psi}_R M \Psi_L + h.c, \quad (3.33)$$

Este termo pode se reduzir à forma padrão diagonalizando a matriz de massa M através de uma transformação biunitária $M = VmU^\dagger$, onde V e U são matrizes unitárias e m uma matriz cujos elementos são definidos como:

$$m_{ij} = m_j \delta_{ij} \quad \text{com} \quad m_j \geq 0. \quad (3.34)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_D &= -\bar{\Psi}_R V m U^\dagger \Psi_L + h.c., \\
 &= -\bar{\Psi}'_R m \Psi'_L + h.c., \\
 &= -\bar{\Psi}' m \Psi',
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

onde:

$$\Psi'_R = V^\dagger \nu_R, \quad \Psi'_L = U^\dagger \nu_L \quad \text{e} \quad \Psi' = \Psi'_R + \Psi'_L.
 \tag{3.36}$$

Este tipo de termo de massa conecta as componentes de mão esquerda e direita do mesmo campo e além disso é invariante de Lorentz e Hermitiano, assim os autovalores de m que representam a massa dos neutrinos de Dirac são reais.

3.2.2 Neutrinos de Majorana

Um neutrino é de Majorana se é sua própria antipartícula. Isto se reflete no número de graus de liberdade: enquanto um neutrino de Dirac tem quatro, o neutrino de Majorana só tem dois:

$$\Psi_R = \Psi_L^C, \quad \Psi_L = \Psi_R^C.
 \tag{3.37}$$

Para entender melhor considere um neutrino de helicidade negativa em nosso sistema de referência. Supondo que o neutrino tem massa, então há um observador que se move mais rápido que ele e portanto vê um neutrino de helicidade positiva. Por outro lado, se a teoria que descreve neutrinos é invariante sob CPT, deve existir o conjugado CPT³: um neutrino de helicidade positiva. Como os neutrinos não possuem carga elétrica, partícula e antipartícula são iguais e o observador está vendo o conjugado CPT do neutrino de helicidade negativa. Assim o neutrino de Majorana tem dois graus de liberdade: neutrino de helicidade negativa, neutrino de helicidade positiva.

Aplicando conjugação da carga na equação (3.29) tem-se:

$$\Psi^c(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (\xi_c b_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + \xi_c a_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x}).
 \tag{3.38}$$

Assim é possível comparar (3.38) e (3.29) obtendo: $a_s = \xi_c b_s$ e $b_s^\dagger = \xi_c a_s^\dagger$, quando substituídos na Eq. (3.29), obtemos o campo de Majorana

³Simetria carga-paridade-inversão temporal.

$$\Psi_M(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} \sum_{s=\pm 1/2} (a_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + \xi_c a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip \cdot x}). \quad (3.39)$$

Vê-se que, comparando com a Eq.(3.29), se escreveu $\xi_c a_s^\dagger$ em lugar de a_s^\dagger , significando que partícula é igual a antipartícula, exceto por um fator de fase. Ao postular que o neutrino seja sua própria antipartícula poderia se esperar que: $\Psi = \xi_c \bar{\Psi}^C$, de modo esta fase pode ser entendida como fase de criação da partícula de Majorana.

Neutrinos, como já foi mencionado, constituem uma exceção importante. Ao não ter carga elétrica é possível considerar outros tipos de termos de massa além do termo partícula antipartícula dado anteriormente. Estes novos termos de massa contêm dois campos de neutrino (ou dois de antineutrinos), e portanto violam o número fermiônico, mas são permitidos por invariância de Lorentz.

Se são incluídos os campos conjugados de carga Ψ^c tem-se os seguintes invariantes: $\bar{\Psi}^c \Psi^c$, $\bar{\Psi} \Psi^c$ e $\bar{\Psi}^c \Psi$. O termo $\bar{\Psi}^c \Psi^c$ é equivalente ao termo de Dirac $\bar{\Psi} \Psi$, os termos $\bar{\Psi} \Psi^c$ e $\bar{\Psi}^c \Psi$ são Hermitianos conjugados, assim pode-se escrever o termo de massa de Majorana como:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} (m \bar{\Psi} \Psi^c + m^* \bar{\Psi}^c \Psi) = -\frac{1}{2} m \bar{\Psi}^c \Psi + h.c. \quad (3.40)$$

Usando as projeções quirais de mão esquerda e direita pode-se escrever dois termos da Lagrangeana que dotaram de massa as partículas, sendo estes

$$\mathcal{L}_M^R = -\frac{1}{2} m_R (\bar{\Psi}_L^c \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L^c) = -\frac{1}{2} m_R \bar{\Psi}_L^c \Psi_R + h.c., \quad (3.41)$$

$$\mathcal{L}_M^L = -\frac{1}{2} m_L (\bar{\Psi}_R^c \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R^c) = -\frac{1}{2} m_L \bar{\Psi}_R^c \Psi_L + h.c. \quad (3.42)$$

Este tipo de termo de massa conecta as componentes de mão esquerda e direita de campos conjugados, sendo m a massa de Majorana. Em geral os dois termos de massa, do tipo Dirac e Majorana podem existir ao mesmo tempo e, assim a partir das equações (3.35), (3.41) e (3.42) tem-se uma Lagrangeana mais geral que é formada pelos termos de Dirac e Majorana:

$$\mathcal{L}_{D+M} = -m_D (\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R) - \frac{1}{2} m_M^R (\bar{\Psi}_L^c \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L^c) - \frac{1}{2} m_M^L (\bar{\Psi}_R^c \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R^c). \quad (3.43)$$

Neste caso, existe um mecanismo interessante que explica porquê as massas dos neutrinos são muito pequenas. Este mecanismo é chamado o mecanismo de Seesaw [56, 57].

3.3 Oscilações de neutrinos no vácuo

A oscilação de neutrinos foi proposta por Bruno Pontecorvo no final dos anos 50 [58]. Sabemos que a oscilação é um fenômeno quântico onde a probabilidade de medir um determinado sabor tem uma dependência periódica com a propagação do neutrino. Como consequência, um neutrino originalmente criado como neutrino eletrônico pode ser detectado como neutrino muônico ou taônico. Experimentos parecem confirmar que o fenômeno de oscilação é a melhor explicação para o chamado problema do neutrino solar [17], descoberto pelo experimento de Homestake em 1968, e também para o problema do neutrino atmosférico [59].

Neutrinos são criados como autoestados de sabor ν_e, ν_μ e ν_τ que podem ou não corresponder a autoestados da Hamiltoniana definidos como ν_1, ν_2 e ν_3 e, por conseguinte:

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle, \quad (3.44)$$

com autovalor de energia $E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2}$ e massas m_1, m_2 e m_3 . Isto leva a duas bases, a partir das quais o estado $|\nu_\alpha\rangle$ que descreve um neutrino de sabor α e que evolui para um sabor β após um tempo t , pode se representar como uma superposição de estados de massa, isto é:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{k=1}^3 e^{-iE_k t} U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad \text{com } \alpha = e, \mu, \tau \quad (3.45)$$

tal que

$$|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle, \quad (3.46)$$

Aqui U é chamada de matriz matriz de Maki-Nakagawa-Sakata (MNS) e descreve a mistura dos diferentes sabores de neutrinos. Como existem três sabores, a matriz MNS é 3×3 e está constituída por rotações parametrizadas pelos ângulos de mistura θ_{12}, θ_{13} e θ_{23} em acordo com a Figura (3.2). Assim a matriz U_{MNS}^D para neutrinos de Dirac é definida como:

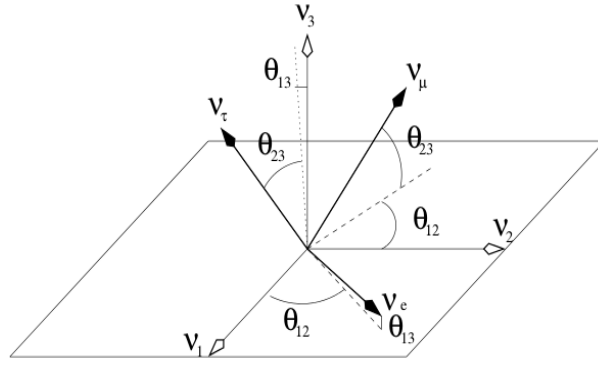


Figura 3.2: Representação gráfica da relação entre sabores de neutrinos e autoestados de massa, através dos ângulos de mistura θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} .

$$\begin{aligned}
 U_{MNS}^D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\phi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\phi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\phi} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\phi} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\phi} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

onde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ para mistura de dois neutrinos massivos i, j . ϕ é a fase de violação da simetria carga-paridade (CP). No caso de neutrinos de Majorana à matriz de mistura são adicionadas duas fases complexas (α_1 e α_2), de violação CP e, portanto, definida por:

$$U_{MNS}^M = U_{MNS}^D \times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Por outro lado, como a matriz de mistura é unitária: $\sum_k U_{ki}^* U_{kj} = \delta_{ij}$, é possível expressar os autoestados de massa como uma superposição de sabores e substituir estes na Eq.(3.45) para assim obter:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \quad \text{com } \alpha = e, \mu, \tau. \quad (3.49)$$

Da equação anterior pode-se definir a amplitude $A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$, da transição do sabor

α para o sabor β da seguinte forma:

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}, \quad (3.50)$$

por conseguinte a probabilidade desta transição ocorrer é dada por:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (3.51)$$

Admitindo que os neutrinos são partículas ultra-relativísticas, a energia pode-se aproximar como: $E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}$. Se além disso define-se a diferença quadrada de massa por

$$\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2, \quad (3.52)$$

a probabilidade pode ser expressa como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t}. \quad (3.53)$$

Em experimentos de oscilação, o tempo de vôo do neutrino não é medido mas sim o comprimento entre a fonte e o detector; portanto, ao ser o neutrino uma partícula relativística se pode aproximar o tempo ao comprimento x e escrever a probabilidade como:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(x) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} x}. \quad (3.54)$$

Para que exista oscilação entre sabores de neutrinos, obrigatoriamente $U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \neq 0$ e $\Delta m_{kj}^2 \neq 0$, ou seja os neutrinos têm que possuir massa.

3.4

Cosmologia de neutrinos

Cosmologia de neutrinos é o estudo de todos os efeitos em observáveis cosmológicos devido à presença dos neutrinos cósmicos de fundo e das propriedades intrínsecas que eles possuem. De acordo com o modelo padrão da física de partículas e a cosmologia, os neutrinos em um começo estavam em equilíbrio térmico com o plasma cosmológico, ou seja a taxa de interação com as outras partículas que compõem o plasma é maior que a taxa de expansão do universo, deste modo, os neutrinos contribuem para a densidade de energia total do universo, regulando assim a taxa de expansão. Na época da nucleossíntese, as contribuições à densidade de energia por parte de bárions, matéria escura e energia escura são desprezíveis comparadas com as contribuições dos fótons, elétrons, e neutrinos. Assim, neutrinos e antineutrinos eletrônicos jogam um papel importante na regulação da produção dos elementos formados neste período da evolução do universo, principalmente ^4He , o segundo elemento mais abundante no universo. Um excesso de neutrinos com

relação ao número de antineutrinos ou vice-versa, mudaria a razão de nêutrons a prótons durante a nucleossíntese primordial, portanto modificando a predição deste elemento. Hoje, a nucleossíntese primordial e a CMB provêm as únicas provas do fundo cósmico de neutrinos.

Neutrinos ao possuir massa pequena e participar só das interações fracas, são as segundas partículas mais abundantes no universo depois dos fótons. Na atualidade a densidade de número de fótons em acordo com as medidas da CMB Eq.(2.45) é:

$$n_\gamma = \frac{\rho_{\gamma,0}}{3k_B T} \approx 370 \text{ cm}^{-3}, \quad (3.55)$$

por conseguinte na cosmologia padrão, a densidade de número de neutrinos cósmicos para qualquer sabor pode ser expresada em termos de n_γ como:

$$n_\nu + n_{\bar{\nu}} = \frac{3}{11} n_\gamma \approx 100 \text{ cm}^{-3}. \quad (3.56)$$

Igual que os fótons, os neutrinos foram criados nos primórdios do universo e estavam em equilíbrio térmico com as outras partículas quando a temperatura caiu para $kT \approx 1 \text{ MeV}$ [1], eles se desacoplaram do plasma cósmico. A uma temperatura de $kT \approx 0,5 \text{ MeV}$, pares elétron-pósitron foram aniquilados e os raios γ resultantes incrementam a temperatura dos fótons, mas não a temperatura dos neutrinos, que já estavam desacoplados naquela época, consequentemente a temperatura dos neutrinos é menor que a correspondente aos fótons por uma quantidade determinada pela conservação da entropia:

$$(S_e + S_\gamma)_{antes} = (S_\gamma)_{depois}, \quad (3.57)$$

onde S_e é a entropia do par elétron-pósitron, S_γ a entropia dos fótons e as palavras *antes* e *depois* se referem ao tempo antes e depois da aniquilação dos pares elétron-pósitron. Para determinar a entropia, considere que em um universo em expansão, a primeira lei da termodinâmica, aplicada a um elemento de volume co-móvil $V = a^3$, implica que:

$$TdS = d(\rho V) + pdV = d[(\rho + p)V] - Vdp, \quad (3.58)$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão. Além disso a condição de integrabilidade $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ produz:

$$T \frac{dp}{dT} = \rho + p. \quad (3.59)$$

assim, substituindo a Eq.(3.59) na Eq.(3.58) se obtém:

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{(\rho + p)V}{T^2} dT = d \left[\frac{(\rho + p)V}{T^2} + \text{constante} \right]. \quad (3.60)$$

Isto é, exceto por uma constante, a entropia por unidade de volume co-móvil:

$$s = \frac{\rho + p}{T}. \quad (3.61)$$

Devido que os componentes do plasma primordial⁴ estarem todos em equilíbrio térmico, pode-se definir a temperatura deste como sendo aquela dos fótons e, portanto, ter sua densidade de energia dada por:

$$\rho = \frac{g\pi^2}{30} T_\gamma^4, \quad (3.62)$$

onde g é o número de graus de liberdade total devido as partículas que compõem nesse momento o plasma primordial, isto é:

$$g = \sum_i^{\text{Bose}} g_i + \frac{7}{8} \sum_i^{\text{Fermi}} g_i. \quad (3.63)$$

- Antes do aniquilamento: $g = g_\gamma + \frac{7}{8}(g_{e^+} + g_{e^-}) = 2 + \frac{7}{8}(2 + 2) = \frac{11}{2}$.
- Após do aniquilamento: $g = g_\gamma = 2$.

Lembrando a equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$, para um gas de partículas relativísticas e usando as equações (3.61), (3.62) e (3.57), a relação da temperatura do plasma antes e depois da aniquilação será:

$$(gT_\gamma^3)_{\text{antes}} = (gT_\gamma^3)_{\text{depois}}, \quad (3.64)$$

Substituindo os valores encontrados em (3.63) na Eq.(3.64) e considerando que a temperatura dos neutrinos e dos fótons antes do aniquilamento eram iguais, se obtém:

$$T_{\gamma, \text{depois}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_{\gamma, \text{antes}} \rightarrow T_\gamma = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\nu. \quad (3.65)$$

Devido à expansão do universo, a temperatura decai com o inverso do fator de escala, a temperatura atual dos neutrinos de fundo cósmico é:

$$T_{\nu,0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma,0} = (1,9454 \pm 0,0004) \text{ K}. \quad (3.66)$$

3.4.1

Densidade de energia dos neutrinos

Neutrinos no universo primordial estão em equilíbrio térmico com as outras componentes do plasma cósmico; isto é devido à grande densidade de número de

⁴Partículas relativísticas tais como fótons, elétrons y pósitrons, exceto neutrinos que já estavam desacoplados do plasma cósmico

partículas (n), cuja taxa de interação ($\Gamma \sim \langle \sigma n \rangle$; σ : seção transversal) é maior que a taxa de expansão do universo. Enquanto neutrinos estão em equilíbrio, sua função de distribuição está dada pela estatística de Fermi-Dirac:

$$f_\nu(E_\nu, T_\nu) = \frac{1}{e^{(E_\nu - \mu_\nu)/T_\nu} + 1}, \quad (3.67)$$

onde $E_\nu = \sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2}$ é a energia do neutrino e μ_ν seu potencial químico. Em equilíbrio térmico, partícula e antipartícula têm potenciais de igual magnitude e sinais opostos, portanto:

$$\mu + \bar{\mu} = 0. \quad (3.68)$$

No caso do neutrino, se existir uma assimetria partícula-antipartícula, o potencial químico associado com os neutrinos de fundo cósmico será diferente de zero, mas se esta diferença existe espera-se seja muito pequena, da ordem do número bariônico: 10^{10} . Assim a assimetria mencionada não tem conseqüências observáveis, portanto é uma boa aproximação dizer que $\mu_\nu \approx 0$ [60].

Por outro lado, neutrinos devido à expansão do universo desacoplam-se do plasma primordial preservando a forma da função de distribuição Eq.(3.67). Isto é, se num tempo t_0 se tem uma quantidade $dN = f_\nu d^3\vec{r} d^3\vec{p}$ de neutrinos num volume próprio $d^3\vec{r}$ e com momentum entre \vec{p} e $\vec{p} + d\vec{p}$, depois de um tempo dt , o número de neutrinos deve ser o mesmo, dado que eles não interagem com as demais componentes do plasma cósmico. Enquanto, o volume que os contem é incrementado num fator $\left(\frac{a(t_0+dt)}{a(t_0)}\right)^3$, o momentum diminui de acordo com $\frac{a(t_0)}{a(t_0+dt)}$, conseqüentemente a função de distribuição é conservada no tempo.

Com a Eq.(3.67) e os resultados discutidos anteriormente podemos definir a função densidade de energia dos neutrinos de fundo cósmico [1], como:

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^2 \sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2}}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1} dp_\nu. \quad (3.69)$$

É possível ter soluções analíticas desta equação, segundo a natureza do neutrino a saber: como partícula relativística ($m_\nu \ll T_\gamma$) e portanto antes do desacoplamento ou como partícula não relativística ($m_\nu \gg T_\gamma$) após desacoplamento.

3.4.1.1

Neutrino não-relativístico

Depois do desacoplamento, quando a temperatura do universo torna-se comparável com a massa do neutrino e por conseguinte $m_\nu \gg T_\gamma$, o neutrino é uma partícula não relativística $p_\nu \ll m_\nu$. Mesmo que neutrinos sejam hoje não relativísticos, eles são descritos pela função de distribuição da Eq.(3.67), a qual é usada para descrever a distribuição de neutrinos relativísticos. Para achar uma

solução neste caso, se faz uma expansão em séries da raiz $\sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2}$ em torno da quantidade p_ν/m_ν , que é pequena quando comparado com 1:

$$\sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2} \approx m_\nu \left(1 + \frac{p_\nu^2}{2m_\nu^2} + \dots \right). \quad (3.70)$$

Conservando só os dois primeiros termos da expansão, a densidade de energia pode ser expressa como:

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu m_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1} + \frac{g_\nu}{4\pi^2 m_\nu} \int_0^\infty \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1}. \quad (3.71)$$

A fim de resolver as integrais presentes na equação anterior, é útil definir as variáveis adimensionais $R = m_\nu/T_\nu$ e $\xi = p_\nu/T_\nu$; substituindo estas novas variáveis na Eq.(3.71) temos:

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu R T_\nu^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{g_\nu T_\nu^4}{4R\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi + 1}. \quad (3.72)$$

Estas integrais podem se calcular usando a fórmula 3.411.3 da referência [61]:

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \underbrace{\frac{3Rg_\nu T_\nu^4 \zeta(3)}{4\pi^2}}_{\rho_1} + \underbrace{\frac{45g_\nu T_\nu^4 \zeta(5)}{8\pi^2 R}}_{\rho_2}, \quad (3.73)$$

onde $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemman, definida por $\zeta(n) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$, com $\zeta(2) = 1,6449$, $\zeta(3) = 1,20205$, $\zeta(4) = 1,0823$ e $\zeta(5) = 1,03692$. Usando (3.66), hoje a densidade de neutrinos não relativísticos é:

$$\rho_\nu(m_\nu) = \left[\underbrace{345,132 m_\nu}_{\rho_1} + \underbrace{\frac{6,2796 \times 10^{-5}}{m_\nu}}_{\rho_2} \right] \frac{\text{eV}}{\text{cm}^3}, \quad (3.74)$$

onde o valor da massa é medido em eV.

Devido a que a Eq.(3.74) constitui só uma solução aproximada da Eq.(3.69) no caso em que $T_\nu \ll m_\nu$, é necessário investigar onde a função tem validade, para isto fixamos a precisão do valor da densidade de energia tal que a contribuição do segundo termo da Eq.(3.74) seja dum ordens de grandeza menor que o primeiro, ou seja:

$$\begin{aligned} 10^{-2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, \\ 10^{-2} &= \frac{1,8195 \times 10^{-7}}{m_\nu^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

A Figura (3.3) mostra a dependência da fração ρ_2/ρ_1 com relação à massa do neutrino. Se $m_\nu < 4,26 \times 10^{-3}$ eV, o valor da fração é muito maior que 0,01 e a aproximação deixa de ser válida já que o segundo termo de Eq.(3.74) poderia ser comparável com o primeiro termo e assim deveria levar-se em conta mais termos na série.

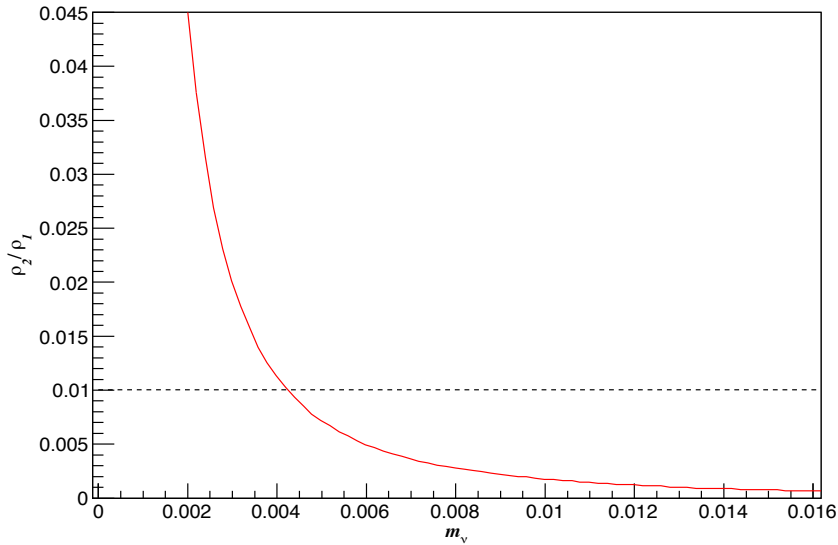


Figura 3.3: Gráfico da variação da fração ρ_2/ρ_1 com relação à massa do neutrino para $T_\gamma \ll m_\nu$. A linha tracejada mostra o valor $\rho_2/\rho_1 = 0,01$ que estamos usando para cortar a função da densidade de energia.

Por outra parte, sabemos que é possível dar à massa do neutrino um limite superior usando argumentos cosmológicos. A combinação de CMB, estruturas a grande escala e medidas de distância excluem um vasto intervalo de massas comparado com os valores dados pelos experimentos de decaimento beta, mas a escolha do modelo cosmológico e a combinação de dados experimentais variam fortemente o tamanho do intervalo. Para um modelo plano e com três famílias de neutrinos, a melhor restrição para a massa total do neutrino $\sum m_\nu$ (somada para todos os auto-estados de massa) está em torno de 0,3 eV com uma confiabilidade do 95% [11]. Entretanto, como $\sum m_\nu$ deve ser do que 0,06 eV para hierarquia normal o intervalo de validade da equação (3.74) se reduz aproximadamente para $0,06 \leq m_\nu \leq 0,3$ eV. Assim, como a densidade de energia do neutrino é uma função da temperatura e implicitamente da massa, podemos fixar alguns valores tais como: $m_\nu = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,01$ eV para ver o comportamento da densidade em função da temperatura. Este comportamento é indicado na Figura (3.4).

3.4.1.2 Neutrino relativístico

Em equilíbrio térmico no plasma primordial neutrinos, fótons e elétrons são partículas relativísticas e portanto $p_\nu \gg m_\nu$. Neste caso a solução da Eq.(3.69) pode ser estimada fazendo a seguinte aproximação:

$$\sqrt{m_\nu^2 + p_\nu^2} \approx p_\nu \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2p_\nu^2} + \dots \right). \quad (3.76)$$

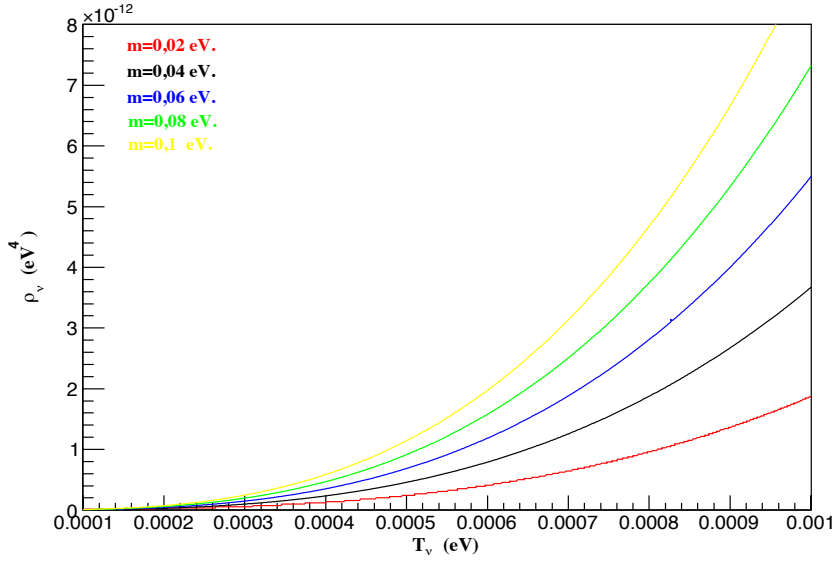


Figura 3.4: Densidade de energia em função da temperatura para diferentes massas do neutrino: $m_\nu = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$ eV.

Novamente, só levamos em conta os dois primeiros termos da expansão devido que m_ν/p_ν ser uma quantidade muito pequena quando comparada com 1. Desta forma a densidade de energia é aproximadamente:

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^3 dp_\nu}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1} + \frac{g_\nu m_\nu^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu dp_\nu}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1}, \quad (3.77)$$

ou escrita em termos das variáveis R e ξ como:

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu T_\nu^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{g_\nu R^2 T_\nu^4}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1}, \quad (3.78)$$

Estas integrais podem-se calcular usando a fórmula 3.411.3 da referência [61], assim tem-se:

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \frac{21g_\nu T_\nu^4 \zeta(4)}{8\pi^2} + \frac{g_\nu R^2 T_\nu^4 \zeta(2)}{8\pi^2}. \quad (3.79)$$

Finalmente usando (3.66) podemos expressar a densidade de energia em função da temperatura dos fótons:

$$\rho_\nu(R, z) = \left[\underbrace{0,1823(1+z)^4}_{\rho_1} + \underbrace{0,0132(1+z)^4 R^2}_{\rho_2} \right] \frac{\text{eV}}{\text{cm}^3}. \quad (3.80)$$

Mesmo que no caso não relativístico a Eq.(3.79) constitui uma solução aproximada da Eq.(3.69) quando $T_\nu \gg m_\nu$, portanto a validade desta equação pode-se estabelecer fazendo $\rho_2/\rho_1 = 10^{-2}$, isto é:

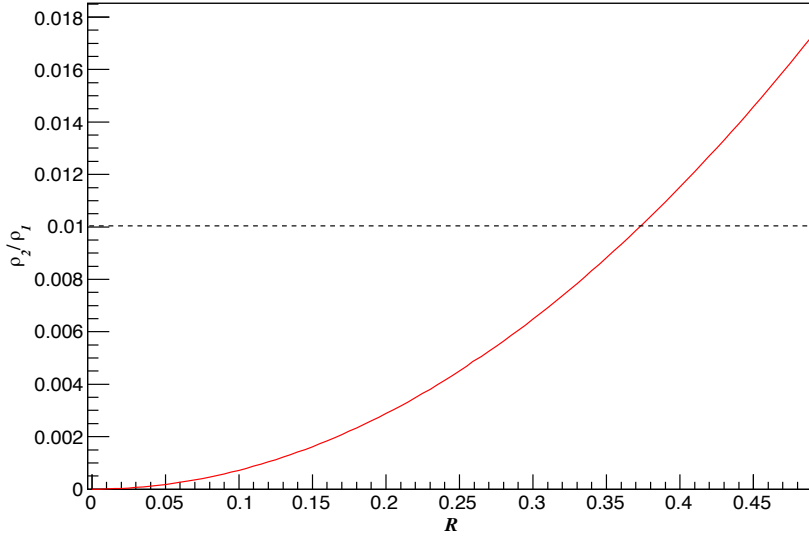


Figura 3.5: Gráfico da variação da fração ρ_2/ρ_1 respeito de R para $T_\nu \gg m_\nu$. A linha tracejada mostra o valor $\rho_2/\rho_1 = 0.01$ que estamos usando para cortar a função da densidade de energia.

$$\begin{aligned} 10^{-2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, \\ 10^{-2} &= 0,072 R^2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

A Figura (3.5) mostra a dependência da fração ρ_2/ρ_1 com relação a R . Se $R > 0,3717$, o valor da fração é muito maior que 0,01 e a aproximação deixa de ser válida.

Com os resultados dados pelas equações (3.73) e (3.79), podemos agora definir nossa função densidade de energia de neutrinos como função do parâmetro R e assim analisar o comportamento do neutrino com qualquer valor de massa.

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \begin{cases} \frac{21g_\nu T_\nu^4 \zeta(4)}{8\pi^2} + \frac{g_\nu R^2 T_\nu^4 \zeta(2)}{8\pi^2} & R \leq 0,37 \\ \frac{g_\nu T_\nu^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + (\frac{R}{\xi})^2}}{e^\xi + 1} \xi^3 d\xi & 0,37 \leq R \leq 25,44 \\ \frac{3Rg_\nu T_\nu^4 \zeta(3)}{4\pi^2} + \frac{45g_\nu T_\nu^4 \zeta(5)}{8\pi^2 R} & R \geq 25,44. \end{cases} \tag{3.82}$$

4

Lentes Gravitacionais

A propagação da luz em nosso Universo é influenciada pelos campos gravitacionais de objetos massivos, este fenômeno é conhecido como lenteamento gravitacional ou miragens gravitacionais [62].

Parece ter sido Newton o primeiro em perceber que os raios de luz podem ser curvados na vizinhança de um objeto massivo, assim é manifestado em seu livro *Opticks* publicado em 1704 [2].

O primeiro cálculo conhecido acerca da deflexão da luz foi realizado por Henry Cavendish em 1784, no entanto esta conta não foi publicada. Soldner em 1801, em seu artigo "Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht"¹, calculou a órbita de um corpo com velocidade constante V , que passa próximo de uma massa esférica M , com um parâmetro de impacto b , e encontrou que o caminho do corpo é desviado um ângulo²

$$\alpha = \frac{2GM}{bV^2}. \quad (4.1)$$

Em 1911 Einstein obteve o mesmo valor do ângulo de deflexão para o caso da luz a partir do princípio de equivalência e a suposição de uma métrica espacial Euclidiana. Em 1912 ele encontra as equações fundamentais para o lenteamento estelar a partir da relatividade geral e o ângulo de desvio, sendo este duas vezes o valor Newtoniano [63].

Em 1921, durante o eclipse total do 29 de maio, duas equipes lideradas por Arthur Eddington realizaram medições simultâneas em duas regiões equatoriais diferentes: Sobral no Brasil e Ilha do Príncipe no golfo de Guinéa.

Comparando as posições relativas das estrelas durante o eclipse com as posições das mesmas estrelas medidas na ausência do campo do sol, verificou-se que as estrelas mais próximas ao sol são ligeiramente deslocadas de suas posições normais. Os dois grupos de astrônomos mediram valores semelhantes, correspondendo a uma pequena variação de 1,75". Os resultados destas expedições fizeram da relatividade geral uma teoria confiável e popular.

¹Relativo à deflexão de um raio de luz do seu caminho reto, devido à atração de um corpo massivo.

²Este resultado é conhecido como o valor Newtoniano do ângulo de deflexão.

As contribuições neste campo da ciência têm sido significativas. Entre elas estão os trabalhos de Laplace, Cavendish, Eddington, Mandel quem foi a primeira pessoa a dizer que a ação da gravidade de um corpo massivo sobre a luz era semelhante à refração desta produzida por uma lente óptica e chamou ao arranjo: lente gravitacional (LG).

Em 1984 Chwolson previu a existência de estrelas duplas fictícias pelo lenteamento gravitacional estrela-estrela e disse que se houvesse um alinhamento entre as estrelas e o observador, seria gerada uma imagem tipo anel. Esta foi a primeira vez em que o fenômeno hoje conhecido como anel de Einstein foi observado.

Em 1937 Fritz Zwicky no artigo "Nebulae as gravitational lens", menciona a possibilidade de usar lentes gravitacionais como um telescópio cósmico e indica como as galáxias podiam curvar a luz e criar múltiplas imagens da fonte. Zwicky também faz referência à amplificação do fluxo e a utilização deste fenômeno para estudar a estrutura em grande escala do Universo. Contudo, a primeira evidência observacional [64] de lentes gravitacionais só foi obtida por Walsh et al. em 1979, com a descoberta de imagens múltiplas de QSOs. As primeiras observações de arcos gravitacionais, produzidos pela região central de aglomerados de galáxias, foram feitas por Soucail et al. em 1987 (Abell 370) e por Lynds e Petrosian (1986, 1989, Cl2244).

Nos últimos anos, com os avanços na tecnologia, numerosos trabalhos neste campo têm produzido mudanças na forma de ver o universo, tanto em grande escala quanto em nossa vizinhança galáctica. Em particular, o lenteamento gravitacional é uma ferramenta muito útil que compreende a descoberta de planetas, análise da radiação cósmica de fundo, matéria escura entre outras.

4.1

Teoria do lenteamento gravitacional

Uma situação característica considerada no lenteamento gravitacional é apresentada na Figura (4.1), Onde uma distribuição de massa a um redshift z_L (ou distância do diâmetro angular D_L), desvia os raios de luz emitidos por uma fonte que está em um redshift z_S (ou distância do diâmetro angular D_S). Se não houver outros defletores perto da linha de visada,³ e se a extensão da massa ao longo desta é muito menor do que a distância de diâmetro angular D_L da lente ao observador e a distância D_{LS} do deflector à fonte, os raios de luz curvados na vizinhança do defletor podem ser aproximados por dois raios retos com uma dobra perto do defletor. A magnitude e a direção desta dobra são descritas pelo ângulo de deflexão $\hat{\alpha}$, o qual depende da distribuição da massa do deflector Σ e do parâmetro de impacto ξ do raio de luz (distância de máxima aproximação do raio à lente).

Na descrição geral da teoria das lentes gravitacionais, é conveniente definir dois planos hipotéticos transversais à linha de visada do observador. Os planos são

³Linha que tem como pontos ao observador e à lente, também é conhecida como eixo ótico.

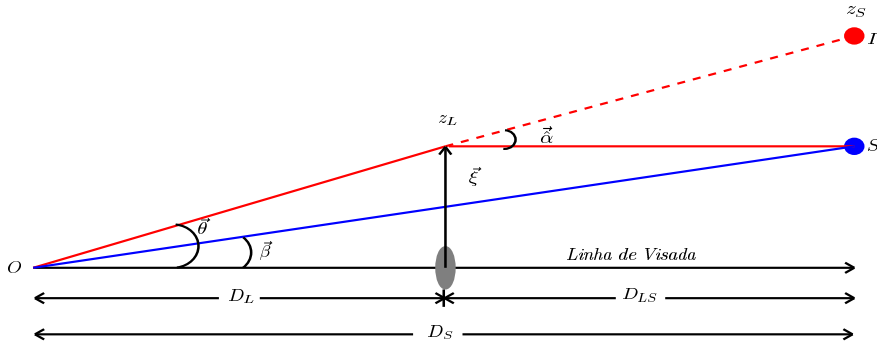


Figura 4.1: Desvio gravitacional da luz devido à presença de uma distribuição de massa (lente). A fonte é observada em uma posição aparente $\hat{\theta}$, distante um ângulo $(\hat{\theta} - \hat{\beta})$ da posição verdadeira $\hat{\beta}$. A distância $|\vec{\xi}|$ medida no plano da lente entre o eixo ótico e a trajetória não perturbada do raio de luz é o parâmetro de impacto e $\hat{\alpha}$ é o ângulo de deflexão.

descritos em coordenadas cartesianas e passam através da fonte e do defletor, por conseguinte, são chamados plano da fonte e plano da lente.

A posição da fonte em relação a um sistema de coordenadas cartesianas estrategicamente localizado no seu próprio plano é (ζ_x, ζ_y) . Da mesma forma no plano da lente, a posição para uma das imagens associadas com a fonte é (ξ_x, ξ_y) . Como as componentes acima são muito pequenos em comparação com as distâncias a cada um dos planos,⁴ a posição pode ser escrita em termos dos ângulos que a fonte e a imagem fazem com o eixo ótico, assim as coordenadas da fonte e da imagem são (β_x, β_y) e (θ_x, θ_y) respectivamente.

4.1.1 Ângulo de deflexão para uma massa pontual

O ângulo de deflexão pode ser obtido a partir do conhecimento da trajetória dos raios de luz. Estes na presença de um campo gravitacional, movem-se de tal forma que a ação é maximizada ao longo do seu caminho x^μ , o qual pode-se parametrizar com um parâmetro afim⁵ λ . Nestas condições, as equações de movimento correspondem a geodésicas nulas da métrica e, portanto:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \tag{4.2}$$

Este conjunto de equações requerem o conhecimento da métrica e, conseqüentemente, da distribuição de massa que atua como lente. Para determinar o ângulo de deflexão considera-se primeiro a deflexão por uma massa pontual. Neste

⁴Aproximação de ângulo pequeno.

⁵No caso de uma partícula massiva, o intervalo infinitesimal entre dois pontos ao longo do caminho seguido por ela tem uma dependência linear no parâmetro afim.

caso a métrica é esfericamente simétrica e o elemento de linha é dado pela métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.3)$$

Devido à simetria da lente, pode-se estudar somente o comportamento de um raio de luz que esteja confinado no plano formado pelo observador, a lente e a fonte. Assim, assumindo a massa pontual no centro das coordenadas, podemos adotar o plano $\theta = \pi/2$ para o caminho da luz [65]. Definido este plano, as geodésicas nulas da métrica de Schwarzschild são obtidas achando primeiro as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel e, por conseguinte:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{MG}{r(c^2 r - 2MG)}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{MG}{c^4 r^3} (c^2 r - 2MG), & \Gamma_{11}^1 &= \frac{-MG}{r(c^2 r - 2MG)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\left(r - \frac{2MG}{c^2}\right), & \Gamma_{33}^1 &= -\left(r - \frac{2MG}{c^2}\right), & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Assim, a equação (4.2) para as geodésicas se transforma no seguinte conjunto de quatro equações acopladas:

$$\frac{cd^2 t}{d\lambda^2} + \frac{MG}{r(c^2 r - 2MG)} \left(\frac{cdt}{d\lambda}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{cdt}{d\lambda} \right] = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} - \left(r - \frac{2MG}{c^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 - \frac{MG}{r(c^2 r - 2MG)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{MG}{c^4 r^3} (c^2 r - 2MG) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = 0. \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}\right) = 0. \quad (4.8)$$

Como os componentes da métrica de Schwarzschild não dependem das coordenadas t e ϕ , as equações (4.5) e (4.8), têm associadas as seguintes integrais de movimento:

$$\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{cdt}{d\lambda} = E, \quad (4.9)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L, \quad (4.10)$$

onde a constante E pode ser associada com a energia e a constante L com o momento angular. Ainda é possível adicionar outra grandeza que se conserva [6]. A derivada

covariante da quantidade $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$, ao longo da trajetória percorrida pelo raio de luz,

$$\begin{aligned} & \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)_{;\mu} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \left[\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)_{;\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \right] + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \left[\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)_{;\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \right] \right. \\ & \quad \left. + g_{\alpha\beta;\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right\}, \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \left[\frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \left[\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] = 0, \end{aligned}$$

mostra que efetivamente, $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$, é uma constante de movimento e para fótons é igual a zero. Assim:

$$\begin{aligned} & g_{00} \left(\frac{cdt}{d\lambda} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \\ & \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) \left(\frac{cdt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplicando a Eq.(4.12)r por $\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)$ e substituindo as relações para o momento angular e a energia escalada como $E = c^2$, e após ter combinando o resultado obtido com a Eq.(4.10), acha-se que a dependência de ϕ com a coordenada radial é dada pela seguinte equação:

$$d\phi = \left(\frac{L}{r^2} \right) \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2MG}{rc^2} \right)}}. \quad (4.12)$$

A máxima aproximação do raio à fonte ocorre a uma distância $r = r_m$, com $\phi = \phi_m$ e $\frac{dr}{d\phi} = 0$. Nestas condições, o momento angular pode ser escrito em função de r_m como:

$$L = \frac{r_m}{\sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2 r_m}}}. \quad (4.13)$$

Neste ponto, é conveniente fazer uma mudança de variável $x = \frac{r_m}{r}$, para assim simplificar a Eq.(4.12).

$$\phi_m - \phi_\infty = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{r_s}{r_m} (1 - x^3)}}, \quad (4.14)$$

onde ϕ_∞ é o valor assintótico da coordenada ϕ e $r_s = \frac{2MG}{c^2}$ é o radio de Schwarzschild. Quando $r_m \gg r_s$, é possível obter a seguinte solução [4]:

$$\phi_m - \phi_\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{r_s}{r_m}. \quad (4.15)$$

A variação total em ϕ quando r diminui de infinito para r_m e depois novamente aumenta ao infinito, é o dobro da mudança de infinito para r_m , isto é $2|\phi_m - \phi_\infty|$. Em ausência de gravidade, a luz segue um caminho em linha recta, assim este valor corresponde a π , portanto, o ângulo de deflexão da órbita, quando o raio passa através de um espaço-tempo curvo, é:

$$\hat{\alpha} = 2|\phi_m - \phi_\infty| - \pi. \quad (4.16)$$

Substituindo Eq.(4.15) em Eq.(4.16), o ângulo da deflexão do raio de luz sob influência de um objeto massivo com simetria esférica é dado pela igualdade

$$\hat{\alpha} = \frac{4MG}{c^2 r_m}. \quad (4.17)$$

4.1.2

Ângulo de deflexão para distribuições de massa

Se, ao invés de uma fonte pontual, a lente é uma distribuição de massa estendida $\rho(\vec{x})$, o ângulo de deflexão pode ser obtido integrando os desvios individuais devido a todos os elementos que constituem a lente. Se a extensão da massa ao longo da linha de visão é pequena em comparação com as distâncias D_L e D_{LS} , é uma boa aproximação considerar a massa projetada sobre o plano da lente e, portanto, considerar que os raios de luz são desviados somente neste plano. Esta simplificação é chamada aproximação de lentes finas.

A massa projetada é descrita por $\Sigma(\vec{\xi})$ (densidade de superfície), que pode ser calculada pela integração da densidade de volume $\rho(\vec{x})$, ao longo do eixo óptico, o qual para facilitar as contas se faz coincidir com eixo z , portanto:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int dz \rho(\vec{\xi}, z). \quad (4.18)$$

O ângulo de deflexão é uma superposição de ângulos de Einstein (4.17) para massas pontuais $dm = \Sigma(\xi) d^2\xi$. De modo que este pode ser expresso como um vetor em duas dimensões. Uma boa explicação para a seguinte igualdade encontra-se na referência [66]:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (4.19)$$

Na teoria das lentes gravitacionais o ângulo de desvio Eq.(4.19), é freqüentemente escrito em função do potencial gravitacional, projetado no plano da lente:

$$\psi(\vec{\xi}) = \int dz \Phi(\vec{\xi}, z). \quad (4.20)$$

Na igualdade anterior, $\Phi(\vec{x})$ é o potencial gravitacional em 3 dimensões gerado pela distribuição de massa que atua como defletor. A densidade de superfície $\Sigma(\vec{\xi})$ relaciona-se com este potencial através da equação de Poisson: $\nabla_{\xi}^2 \psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi})$, a qual pode escrever-se como uma equação integral se é considerada a função de Green $G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|$, associada com a equação diferencial $\nabla_{\xi}^2 G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = 2\pi G \delta^2(\vec{\xi} - \vec{\xi}')$. Consequentemente:

$$\psi(\vec{\xi}) = 2G \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}') \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|. \quad (4.21)$$

Lembrando a relação vetorial $\nabla |r| = \frac{\vec{r}}{|r|}$ e tomando o gradiente de $\psi(\vec{\xi})$, é possível obter uma equação que conecte o ângulo de desvio com o potencial. Tal relação é mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \psi(\vec{\xi}) &= 2G \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}') \nabla_{\xi} \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \\ &= 2G \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|} \nabla_{\xi} |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \\ &= 2G \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \\ \vec{\alpha}(\vec{\xi}) &= \frac{2}{c^2} \nabla_{\xi} \psi(\vec{\xi}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.1.3 Equação da lente

É possível achar uma relação entre a posição angular de uma fonte não lenteada e a posição das imagens, se os raios de luz emitidos a partir da fonte são perturbados por um campo gravitacional. Tendo em mente o esquema da Figura (4.1), a equação da lente pode ser escrita em forma geral como:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}, \quad (4.23)$$

onde $\vec{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\hat{\alpha}}$ e $\vec{\theta} = \frac{\xi}{D_L}$. A equação acima representa a condição para que um raio de luz que vem da fonte e passa perto da lente chegue até o observador.

A fim de escrever a Eq.(4.23) em termos do potencial projetado, é conveniente redimensionar $\psi(\vec{\xi})$ como segue:

$$\Psi(\vec{\xi}) = \left(\frac{2}{c^2} \right) \left(\frac{D_{LS}}{D_S D_L} \right) \psi(\vec{\xi}). \quad (4.24)$$

Isto permite escrever $\vec{\alpha} = \nabla_{\theta} \Psi(\theta)$ e portanto a equação da lente como função do potencial gravitacional reduzido Ψ é:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_\theta \Psi(\theta). \quad (4.25)$$

Para uma distribuição de massa em particular, a equação da lente pode ter mais de uma solução devido que ela não é linear em $\vec{\theta}$, é possível ter mais de uma imagem para uma posição determinada da fonte. Em geral, só se tem imagens múltiplas se a densidade superficial da lente for superior à densidade crítica definida como $\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}$. Está é a condição para o fenômeno de lentes fortes. Como a densidade crítica diminui com o inverso da distância $D = \frac{D_L D_{LS}}{D_S}$, é mais fácil observar imagens múltiplas de fontes mais distantes.

A aplicação mais simples da equação da lente é para uma massa de Shwarzschild, em cujo caso a Eq.(4.23) se reduz a:

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0, \quad (4.26)$$

onde $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S}}$ é o ângulo de Einstein (ele produz uma escala natural para descrever o lenteamento), sua projeção no plano da lente define um anel de radio $R_E = \theta_E D_L$, correspondente à imagem observada no caso de uma fonte localizada em $\beta = 0$. A Eq.(4.24) em geral tem duas soluções reais correspondentes a duas imagens físicas da fonte:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Estas estão localizadas em lados opostos da fonte e têm uma separação angular:

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = [\beta^2 + 4\theta_E^2]^{1/2}. \quad (4.28)$$

4.1.4

Convergência, cisalhamento e magnificação

É conhecido que, durante a deflexão da luz, não há emissão ou absorção de energia, assim de acordo com o teorema de Liouville [2], o lenteamento gravitacional conserva o brilho superficial mas altera o ângulo sólido aparente da fonte. O fluxo total recebido pelo observador de uma imagem produzida pelo lenteamento muda em proporção à razão entre as áreas da imagem e da fonte, resultando em uma magnificação dada por:

$$\mu = \frac{I_o}{I_e} = \frac{\text{área da imagem}}{\text{área da fonte}}, \quad (4.29)$$

onde I_o é o fluxo total emitido pela fonte e I_e é o fluxo observado, correspondente a sua imagem. Assim, considerando uma fonte infinitesimal em $\vec{\beta}$ subtendendo um

ângulo sólido Ω_S , e uma imagem em $\vec{\theta}$ que subtende um ângulo sólido Ω_i , pode obter-se a seguinte expressão analítica para a magnificação:

$$\begin{aligned}\mu^{-1} &= \frac{A_S}{A_L} \left(\frac{D_L}{D_S} \right)^2, \\ &= \left| \det \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \right|,\end{aligned}\tag{4.30}$$

onde A_S e A_L são áreas medidas no plano da fonte e no plano da lente, associadas como os ângulos Ω_S e Ω_i respectivamente.

As imagens que vemos são distorcidas respeito à forma que apresenta a fonte na ausência de lenteamento. Esta distorção é descrita pela matriz Jacobiana:

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} [\theta_i - \alpha_i(\vec{\theta})], \\ &= \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j}, \\ &= \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j},\end{aligned}\tag{4.31}$$

que pode ser escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - k + \gamma_1 \end{pmatrix}\tag{4.32}$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2} (\Psi_{,11} - \Psi_{,22}), \\ \gamma_2 &= \Psi_{,12} = \Psi_{,21},\end{aligned}\tag{4.33}$$

são as componentes do cisalhamento e k está relacionado com a equação de Poisson da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}k(\vec{\theta}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\vec{\theta}}^2 \Psi(\vec{\theta}), \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_{,11} + \Psi_{,22}),\end{aligned}\tag{4.34}$$

e é chamado de convergência. Logo a magnificação é dada por:

$$\mu = \frac{1}{(1 - k)^2 - |\gamma|^2}.\tag{4.35}$$

k somente afeta o tamanho da imagem e portanto sua magnificação e γ somente a distorce. Para uma lente de Schwarzschild a magnificação em função da localização da imagem e o ângulo de Einstein é:

$$\mu^{-1} = 1 - \left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^4. \quad (4.36)$$

Como se mostra na Eq.(4.36), o fator de magnificação é uma função de $\vec{\theta}$ e, por conseguinte, no plano da lente pode ter sinal positivo ou negativo. Dependendo do sinal de μ , as imagens da fonte têm paridade positiva, negativa ou zero no caso especial em que a magnificação tende ao infinito.

No plano da lente, há regiões onde μ têm sinais opostos e estão separadas por curvas em que $\mu \rightarrow \infty$. Estas curvas são chamadas curvas críticas e suas imagens no plano da fonte são conhecidas como cóusticas. Assim, a cóustica é a imagem da curva crítica formada pela ação do mapeamento do plano da lente no plano de visualização do observador.

4.2

Princípio de Fermat

Como a fonte e o observador estão fixos em $z = z_s$ e $z = 0$ para um caso típico de lenteamento gravitacional, é possível construir uma integral de caminho que meça o tempo de chegada dos raios ao observador para cada um dos possíveis trajetos. O princípio de Fermat afirma que a luz só irá viajar ao longo do caminho que minimize este tempo e, portanto

$$\delta \int dt = \delta \int \left(1 - \frac{2\Phi(x)}{c^2} \right) \left[g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda = 0, \quad (4.37)$$

é válido para um raio de luz que segue uma trajetória $x^i(\lambda)$ em um espaço-tempo representado pela métrica linearizada (aproximação de campo fraco),

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) g_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.38)$$

O potencial Newtoniano $\Phi(\vec{x})$, na maioria dos casos é da ordem de 10^{-5} [67]. Considere-se agora uma família de raios de luz propagando-se através de geodésicas nulas da métrica (4.38), começando o seu percurso na fonte e terminando em pontos localizados no plano da lente e em seguida, ao longo de geodésicas nulas até o observador, quem os recebe na posição angular denotada por $\vec{\theta}$. Para um destes caminhos há duas contribuições que aumentam o tempo de chegada ao observador em relação ao tempo em ausência da lente. Isto é mostrado a seguir.

4.2.1

Tempo de atraso geométrico

Com base nas aproximações que têm sido feitas, pode-se supor que os raios de luz se comportam como se estivessem viajando através de um meio de índice de refração $n(\vec{x}) = 1 - \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}$. Para minimizar o tempo, a luz tende a evitar as regiões

em que o potencial é "negativo", então é desviada em torno da distribuição de massa da lente.

Como o ângulo de deflexão é pequeno, o caminho defletido é muito próximo da linha OLS da figura (4.2), assim, $p \simeq D_L(\theta - \beta)$ e $w \simeq \delta D_L(\theta - \beta)$, portanto o tempo de atraso geométrico medido por um observador no plano da lente é $t_{geo} \simeq \delta D_L(\theta - \beta)/c$. Igualmente a Figura (4.2) mostra que $\delta = \hat{\alpha}/2$, $Q \simeq D_S(\theta - \beta) \simeq \hat{\alpha}D_{LS}$ e finalmente a expressão aproximada de t_{geo} medida pelo observador é escrita como:

$$t_{geo} = (1 + z_L) \frac{D_S D_L}{2c D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2, \quad (4.39)$$

onde o fator $(1+z)$ é devido ao desvio para o vermelho que a luz sofre como resultado da expansão do universo.

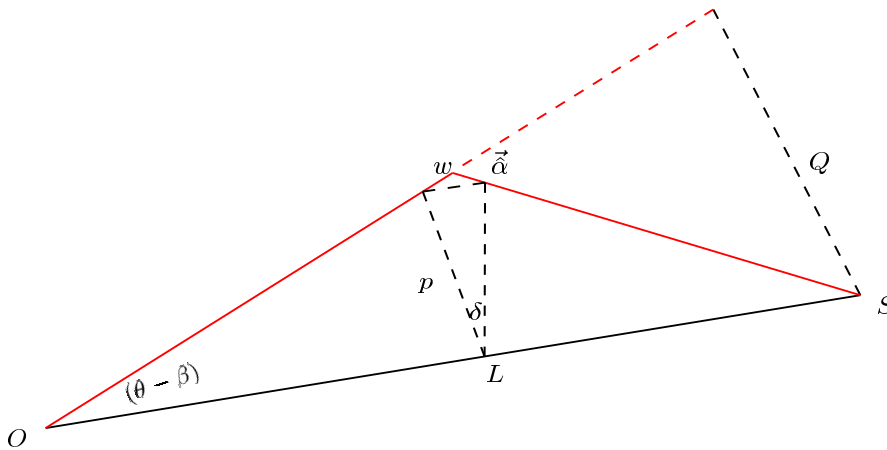


Figura 4.2: Aumento no comprimento do caminho que segue a luz, como medido no plano da lente.

4.2.2 Tempo de atraso gravitacional

Devido a que o espaço-tempo é curvo na presença de massas, o tempo de viagem de um sinal de luz é maior do que seria em um espaço plano, isto é porque o potencial associado com a distribuição de massa (lente) que gera o campo gravitacional reduz a velocidade efetiva de propagação dos sinais. Esta idéia foi proposta em 1964 por Shapiro como evidência para a teoria da relatividade geral, e desde então tem sido verificada com grande sucesso.

Para calcular o tempo de Shapiro consideramos um raio de luz que viaja entre dois pontos A e B em uma região onde há um campo gravitacional descrito pela Equação (4.38). Assim, escrevendo em coordenadas cartesianas o intervalo espacial e assumindo também que o raio se propaga ao longo do eixo z tem-se:

$$\begin{aligned}
 t_B - t_A &\simeq \frac{1}{c} \int_{z_A}^{z_B} dz - \frac{2}{c^3} \int_{z_A}^{z_B} \Phi dz. \\
 t_B - t_A &\simeq \frac{1}{c} \int_{z_A}^{z_B} dz - \frac{2}{c^3} \psi(\vec{\xi}).
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

O segundo termo da equação anterior corresponde ao tempo extra que a luz emprega em atravessar a região [65], por conseguinte no referencial do observador o tempo de atraso gravitacional é:

$$t_{grav} = (1 + z_L) \frac{2}{c^3} \psi(\vec{\xi}).
 \tag{4.41}$$

O tempo de atraso total o qual define uma superfície em duas dimensões é obtido pela soma das equações (4.39) e (4.41):

$$t_{atraso} = (1 + z_L) \frac{D_S D_L}{c D_{LS}} \left(\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi \right).
 \tag{4.42}$$

De acordo com o princípio de Fermat, para uma posição $\vec{\beta}$ da fonte, as imagens $\vec{\theta}_i$ estão localizadas em pontos estacionários de t_{atraso} em relação a variações de $\vec{\theta}$. Na ausência da lente, t_{atraso} é simplesmente um parabolóide e gera só uma imagem localizada em $\vec{\theta} = \vec{\beta}$. Com o aumento da densidade superficial de massa correspondente à lente, aparecem novos máximos, mínimos ou pontos de sela, associados com novas imagens da fonte [65, 68]. Como exemplo a figura (4.3) a seguir ilustra como é esta superfície, quando a massa defletora é uma lente pontual: $\Psi = \theta_E^2 \ln |\vec{\theta}/\theta_E|$.

4.3

Modelos de lentes

As propriedades do lenteamento gravitacional de qualquer distribuição de massa podem ser escritas em termos de integrais em duas dimensões da densidade de massa projetada no plano da lente e, portanto Equações: (4.18), (4.21), (4.22), (4.25) e (4.42). Em geral estas integrais não podem ser calculadas analiticamente, mas dependendo do problema, oferecem simplificações devido à simetria.

4.3.1

Esfera isotérmica com núcleo

Supondo que a distribuição de massa corresponde a uma galáxia, um modelo de lente simples e útil para começar é uma esfera isotérmica, ou seja, um modelo com densidade proporcional a r^{-2} e curvas de rotação planas. Para os fins deste trabalho, o modelo que foi escolhido para estudar o comportamento do tempo de atraso é uma esfera isotérmica com núcleo. Ela tem uma densidade volumétrica de massa dada pela distribuição:

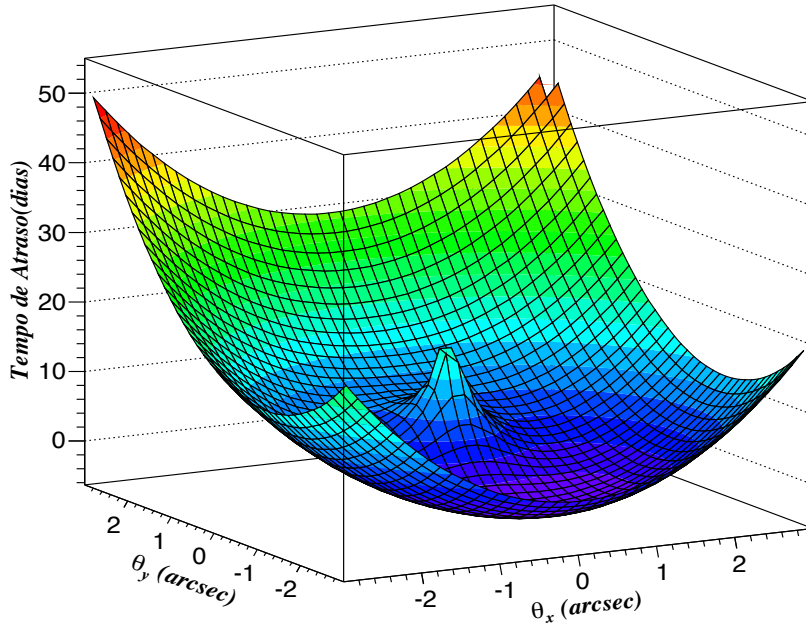


Figura 4.3: Superfície do tempo de atraso para a Cruz de Einstein $QSO2237+0305$, A luz de um quasar distante forma quatro imagens ao passar pelo campo gravitacional de uma galáxia entre o quasar e a Terra [69, 70]. O quasar está num desvio para o vermelho $z_S = 1,695$ ou aproximadamente $D_S = 1791,5 Mpc$ de nós, enquanto que a galáxia está a $z_L = 0,0394$ ou $D_L = 167,3 Mpc$, a distância entre o quasar e a galáxia é $D_{LS} = 1730 Mpc$. A lente é modelada como uma massa pontual com $1.5 \times 10^{10} M_\odot$.

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G(r^2 + a^2)}, \quad (4.43)$$

onde o parâmetro σ é a velocidade de dispersão das estrelas que formam a galáxia, medida ao longo da linha de visada do observador. O raio a corresponde ao núcleo da galáxia que é introduzido para evitar a singularidade em $r = 0$.

Escolhendo o eixo óptico ao longo do eixo z de um sistema de coordenadas cartesianas com origem no plano da lente, pode-se achar a densidade projetada integrando a Eq.(4.43) em relação a z no intervalo $[-\infty, \infty]$. O procedimento é mostrado a seguir:

$$\Sigma = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\xi_x^2 + \xi_y^2 + z^2 + a^2}. \quad (4.44)$$

Como $\xi_x^2 + \xi_y^2 = \xi^2$, é a magnitude do vetor de posição no plano da lente, a densidade projetada fica em função de ξ como:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\xi^2 + z^2 + a^2} = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(\xi^2 + a^2) + z^2}. \quad (4.45)$$

A integral pode ser calculada usando a fórmula 17.6.1 da referência [71]

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2G\sqrt{\xi^2 + a^2}} \quad \text{ou,} \quad (4.46)$$

$$\Sigma(\theta) = \frac{\sigma^2}{2GD_l\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}}, \quad (4.47)$$

onde foi tomado $\xi = D_L\theta$, assim como $a = D_L\theta_c$. Uma galáxia real não poderia seguir a distribuição de massa dada por (4.46), porque a massa total da galáxia seria infinita[64]. Este pequeno problema pode ser resolvido se ξ é cortado em um valor $\xi = \xi_T$ e portanto a massa encerrada em um círculo de radio ξ_T é :

$$M(\xi_T) = 2\pi \int_0^{\xi_T} \xi \Sigma(\xi) d\xi = \frac{\pi\sigma^2}{G} \int_0^{\xi_T} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + a^2}}. \quad (4.48)$$

O resultado desta integral pode ser obtido usando a fórmula 17.9.2 em [71].

$$M(\xi_T) = \frac{\pi\sigma^2}{G} \left[\sqrt{\xi^2 + a^2} - a \right] \quad \text{ou,} \quad (4.49)$$

$$M(\theta_T) = \frac{\pi\sigma^2 D_L}{G} \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right]. \quad (4.50)$$

Para calcular o potencial projetado reduzido $\Psi(\xi)$, se tem em conta a simetria esférica da lente, de modo que não importa em que direção se escolhe o parâmetro de impacto $\vec{\xi}$. Por conveniência na simplificação das integrais, é considerando ao longo do eixo ξ_x , sentido positivo. Seja $\vec{\xi} = \xi \hat{i}$ e $\vec{\xi}' = \xi'_x \hat{i} + \xi'_y \hat{j}$, então $|\vec{\xi} - \vec{\xi}'| = \sqrt{(\xi - \xi'_x)^2 + \xi'^2_y} = \sqrt{\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi\xi'_x}$ ou em coordenadas polares $|\vec{\xi} - \vec{\xi}'| = \sqrt{\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi}$. Com estes resultados a Eq.(4.24) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \frac{4G}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \int d^2\xi' \Sigma(\xi') \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \\ &= \frac{4G}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \int_0^\infty d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi} d\varphi, \\ &= \frac{2G}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \left\{ \int_0^\xi d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \int_0^{2\pi} \ln(\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi) d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_\xi^\infty d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \int_0^{2\pi} \ln(\xi'^2 + \xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi) d\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Estas integrais podem ser calculadas usando a fórmula 4.224.14 em [61]. Para a primeira integral o parâmetro de impacto ξ é o maior entre ξ e ξ' , enquanto que para a segunda integral o maior é ξ' ,

$$\Psi(\xi) = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \left\{ \int_0^\xi d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \ln \xi + \int_\xi^\infty d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \ln \xi' \right\}. \quad (4.52)$$

Devido a que a adição de uma constante no potencial não afeta o valor do ângulo de deflexão, pode ser incluído dentro dos parênteses o termo constante $-\int_0^\infty d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \ln \xi'$, com a finalidade de simplificar a integração [64]:

$$\Psi(\xi) = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \int_0^\xi d\xi' \Sigma(\xi') \xi' \ln \left| \frac{\xi}{\xi'} \right|. \quad (4.53)$$

Substituindo o valor da densidade superficial de massa dada pela Eq.(4.46), a expressão para o potencial toma a forma a seguir:

$$\Psi(\xi) = \frac{\theta_0}{D_L} \left(\ln \xi \int_0^\xi \frac{\xi' d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + a^2}} - \int_0^\xi \frac{\xi' \ln \xi' d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + a^2}} \right), \quad (4.54)$$

onde,

$$\theta_0 = 4\pi \frac{D_{LS}}{D_S} \left(\frac{\sigma}{c} \right)^2. \quad (4.55)$$

Assim finalmente, integrando por partes a segunda integral em Eq.(4.54) é possível achar o potencial Ψ para o modelo da esfera isotérmica com núcleo:

$$\Psi(\xi) = \frac{\theta_0}{D_L} \left[\sqrt{\xi^2 + a^2} - a \ln(a + \sqrt{\xi^2 + a^2}) \right] \quad \text{ou}, \quad (4.56)$$

$$\Psi(\theta) = \theta_0 \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \ln(\theta_c + \sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}) \right], \quad (4.57)$$

onde se utilizaram a definição $\xi = D_L \theta$ e $a = D_L \theta_c$, e também foi omitido o termo $D_L \theta_c \ln D_L$ por ser uma constante aditiva no potencial.

Com base na Equação (4.56), o ângulo de deflexão reduzido $\alpha(\theta) = |\nabla_\theta \Psi(\theta)|$ é:

$$\alpha(\theta) = \frac{\theta_0}{\theta} \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right] \quad \text{ou}, \quad (4.58)$$

$$\alpha(\xi) = \theta_0 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\xi} \right)^2} - \frac{a}{\xi} \right]. \quad (4.59)$$

Os raios de luz que deixam a fonte e chegam ao observador devido à ação de uma lente modelada com esfera isotérmica como núcleo seguem a equação da lente:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} \left[1 - \frac{\theta_0}{\theta^2} \left(\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right) \right]. \quad (4.60)$$

O tempo de atraso experimentado pelos raios de luz que chegam ao observador pode ser calculado a partir da Equação (4.42). Para facilitar os cálculos, é conveniente reescrevê-la como uma função do ângulo de deflexão reduzido. Assim, a diferença do tempo de atraso entre duas imagens da fonte é:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (1 + z_l) \frac{D_L D_S}{c D_{LS}} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) - (\Psi_2 - \Psi_1) \right\}. \quad (4.61)$$

Substituindo os valores das equações (4.56) e (4.59) em Eq.(4.61) se obtém:

$$\begin{aligned} \Delta t = (1 + z_l) \frac{D_L D_S}{c D_{LS}} \left\{ \frac{\theta_0^2}{2} \left[\left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\xi_2} \right)^2} - \frac{a}{\xi_2} \right)^2 - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\xi_1} \right)^2} - \frac{a}{\xi_1} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{\theta_0}{D_L} \left[\sqrt{\xi_2^2 + a^2} - \sqrt{\xi_1^2 + a^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{\xi_2^2 + a^2}}{a + \sqrt{\xi_1^2 + a^2}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Quando a fonte está em $\beta = 0$, a esfera isotérmica faz que os raios no plano da lente formem um anel (curva crítica) de radio angular θ_E , dado por:

$$\theta_E^2 = \theta_0 \left[\sqrt{\theta_E^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right], \theta_E = \theta_0 \sqrt{1 - \frac{2\theta_c}{\theta_0}}. \quad (4.63)$$

Outra curva crítica do modelo é obtida quando $\frac{d\beta}{d\theta} = 0$. A curva tem um raio angular de:

$$\theta_R = \sqrt{\theta_0 \theta_c} \left[1 - \frac{\theta_c}{2\theta_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\theta_0}{\theta_c}} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.64)$$

Dependendo da localização da fonte, a equação (4.60) tem uma ou três imagens como soluções. Quando a posição angular da fonte é maior do que θ_R só é formada uma imagem, pelo contrário, se $\theta < \theta_R$ são formadas três imagens.

4.3.2 Esfera isotérmica singular

Uma simplificação do modelo da esfera isotérmica com núcleo é a esfera isotérmica singular, que corresponde ao caso onde $a = 0$. A distribuição de massa é dada pela seguinte densidade superficial:

$$\Sigma = \frac{\sigma^2}{2G\xi}, \quad (4.65)$$

A massa total para a lente, tendo em conta as restrições impostas em Eq.4.49 é:

$$M(\xi_T) = \frac{\pi \sigma^2 \xi}{G}. \quad (4.66)$$

Uma distribuição deste tipo gera um potencial gravitacional dado por:

$$\Psi(\xi) = \frac{\theta_0 \xi}{D_L}. \quad (4.67)$$

Um raio de luz na presença desta lente sofre um desvio dado pela seguinte igualdade

$$\alpha = \theta_0. \tag{4.68}$$

Para $\beta < \theta_0$, a esfera isotérmica produz duas imagens colineares de raios angulares $\theta_1 = \beta + \theta_0$ e $\theta_2 = \beta - \theta_0$, localizadas em lados opostos da fonte. A imagem θ_1 é um mínimo da superfície do tempo de atraso e θ_2 corresponde a um ponto de sela. A diferença de tempo de atraso entre as imagens se pode calcular pela relação:

$$\Delta t = (1 + z_l) \frac{D_S \theta_0}{c D_{LS}} |\xi_2 - \xi_1|. \tag{4.69}$$

Quando $\beta > \theta_0$, só uma imagem é formada e corresponde ao ponto mínimo da superfície do tempo de atraso.

O comportamento da Eq.(4.69) é mostrado nas Figuras (4.4) e (4.5). Estes dois gráficos foram feitos na estrutura orientada a objetos para análise de dados ROOT, desenvolvida pelo CERN. Para isto foi necessário implementar a sub-rotina Simpson na linguagem C++ para calcular numericamente a distância do diâmetro angular para a lente, a fonte e a distância lente-fonte. A Figura (4.4) mostra o isocontorno da superfície da diferença do tempo de atraso projetado no plano da lente, compilado para um sistema lente gravitacional formado por uma fonte num desvio para o vermelho $z_s = 1,0$ e uma lente modelada como esfera isotérmica singular localizada em $z_L = 0,6$ e com velocidade de dispersão de seus componentes $\sigma = 124,356$ km/s.

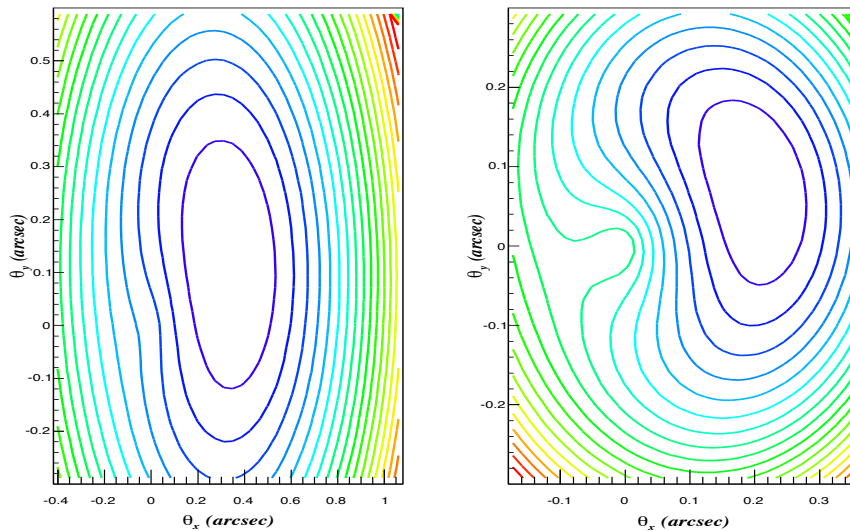


Figura 4.4: Isocontorno da superfície da diferença do tempo de atraso para um sistema lente gravitacional formado por uma fonte em $z_s = 1,0$ e uma lente modelada como esfera isotérmica singular em $z_L = 0,6$ e com velocidade de dispersão $\sigma = 124,356$ km/s.

O gráfico da esquerda corresponde a $\beta > \theta_0$, ou seja quando a posição da fonte ($R_\beta = 1,5 \times 10^{-3}$ Mpc) está fora do raio de Einstein $R_E = D_L \theta_0 = 1 \times 10^{-3}$ Mpc. Neste caso a imagem é observada em $(\theta_x, \theta_y) = (0.354'', 0.072'')$. O gráfico da direita corresponde a $\beta < \theta_0$ e, portanto $R_\beta = 0,5 \times 10^{-3}$ Mpc. Aqui, são observadas duas imagens localizadas em $(\theta_{1x}, \theta_{1y}) = (0.20'', 0.08'')$ e $(\theta_{2x}, \theta_{2y}) = (-0.065'', -0.030'')$ respectivamente. A Figura (4.5) é um zoom da Figura (4.4), com a finalidade de ver melhor a formação de imagens nos casos $\beta > \theta_0$ e $\beta < \theta_0$.

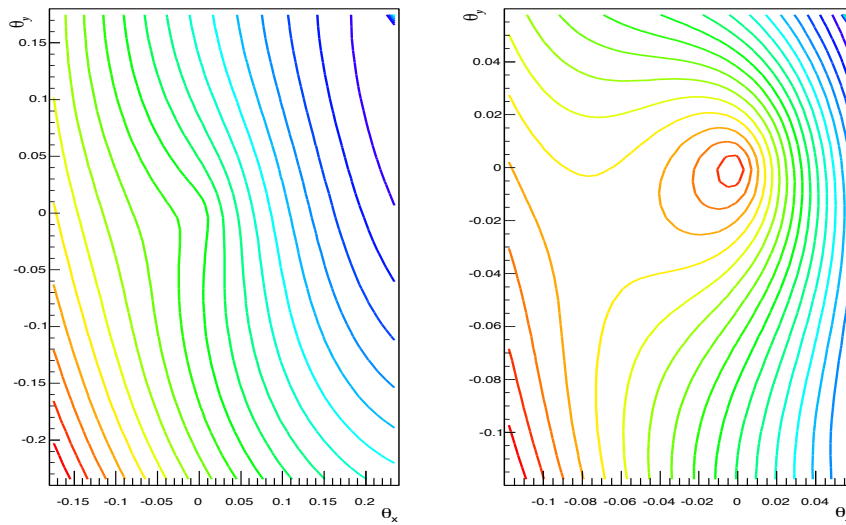


Figura 4.5: Zoom da Figura (4.4).

5 Resultados

Neste capítulo vamos apresentar os resultados deste trabalho. O objetivo é estudar a possível influência da massa dos neutrinos em algumas aplicações astrofísicas tais como a medida do tempo de atraso gravitacional para sinais de luz que viajam até nós passando perto de uma galáxia, assim como o lenteamento por buraco negro de uma fonte transitória de neutrinos associada com explosão de raios gama. A análise será feita para diferentes modelos de lente: esfera isotérmica singular e esfera isotérmica com núcleo quando a sinal é de luz e massa pontual para o lenteamento de neutrinos. Assim de acordo com as Equações (4.26), (4.62) e (4.69) o impacto da massa do neutrino na determinação dessas grandezas está associado com a variação da distância do diâmetro angular, por conseguinte primeiro apresentados um estudo da medida da distância do diâmetro angular levando em conta a função densidade de energia para os neutrinos relíquia que hoje permeiam nosso universo. Para isto graficamos em função do desvio para o vermelho da lente a diferença fracionária da distância, onde a distância para uma determinada massa é comparada com o valor da distância quando a massa do neutrino é considerada zero. Isto é:

$$\frac{\Delta D_A(m_\nu, z)}{D_A(0, z)} = \frac{|D_A(m_\nu, z) - D_A(0, z)|}{D_A(0, z)}. \quad (5.1)$$

Finalmente, analisamos se a variação da distância de diâmetro angular, devido à massa dos neutrinos, tem algum efeito sobre a medição do tempo de atraso gravitacional definido nas seções 4.2 e 4.3.

5.1 Distância do diâmetro angular

Uma vez definida a função densidade de energia dos neutrinos relíquia e estabelecido os limites de suas aproximações, Eq.(3.73) e Eq.(3.79), podemos agora calcular a expressão para o parâmetro densidade de energia de neutrinos definido como

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c}, \quad (5.2)$$

Devido a que nosso principal objetivo consiste em investigar a influência da massa do neutrino na medição do tempo de atraso gravitacional de um sinal de luz que é lensado por um objeto massivo cujo desvio para o vermelho é pequeno, é suficiente considerar a aproximação não relativística dado que hoje pelo menos dois dos tipos de neutrinos são não relativísticos. Isto é:

$$\Omega_\nu = \underbrace{\frac{3m_\nu g_\nu T_{\nu,0}^3 \zeta(3)}{4\pi^2 \rho_c}}_{\Omega_\nu^1} (1+z)^3 + \underbrace{\frac{45g_\nu T_{\nu,0}^5 \zeta(5)}{8\pi^2 m_\nu \rho_c}}_{\Omega_\nu^2} (1+z)^5, \quad (5.3)$$

e assim, das equações Eq.(2.52), Eq.(2.65) e Eq.(2.67), a expressão final para a distância do diâmetro angular pode se escrever como:

$$D_A(z) = \frac{D_H}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (5.4)$$

com

$$E(z) = [\Omega_{\nu,0}^2(1+z)^5 + \Omega_{\gamma,0}(1+z)^4 + \Omega_{\nu,0}^1(1+z)^3 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{1/2}, \quad (5.5)$$

e

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 + \Omega_{\gamma,0} + \Omega_\Lambda = 1. \quad (5.6)$$

De acordo com a Eq.(5.6), podemos considerar dois casos para a análise da distância: caso 1) $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$, e caso 2) $\Omega_\Lambda + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$.

5.1.1

Condição de normalização quando são fixos os parâmetros densidade de energia de radiação e constante cosmológica

Os coeficientes $\Omega_{\nu,0}^1$ e $\Omega_{\nu,0}^2$ na Eq.(5.5) dependem do valor da massa do neutrino, portanto a Eq.(5.4) será em geral uma função da massa e do desvio para o vermelho, $D_A(m_\nu, z)$ como mostrado na Figura (5.1). Para ver o efeito da massa do neutrino na medida da distância do diâmetro angular, grafica se esta em função do desvio para o vermelho para diferentes valores de massa, por exemplo: 0,06; 0,1; 0,3 eV¹, estes gráficos são mostrados na Figura (5.2). Como é difícil ver o efeito da massa dos neutrinos na medida da distância na Figura (5.2), para visualizar a grandeza do efeito, será necessário fazer o gráfico da diferença fracionária definida na Eq.(5.1). Para isso, devemos primeiro calcular a forma que tem o parâmetro densidade da energia dos neutrinos no caso em que a massa é zero. Fazendo $m_\nu = 0$ na Eq.(3.69) tem-se:

¹Neste capítulo, a massa m_ν implica a soma das massas dos três tipos de neutrinos.

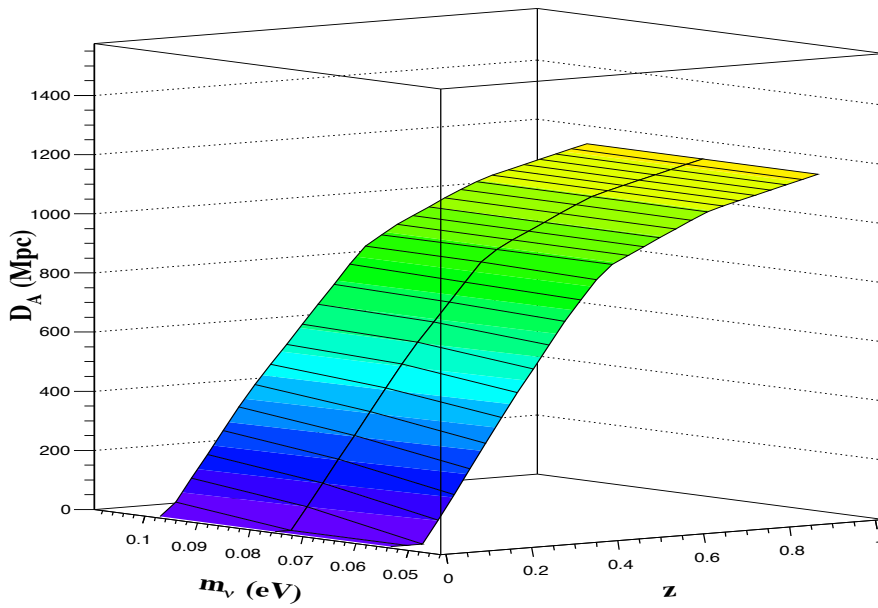


Figura 5.1: Dependência da distância do diâmetro angular no desvio para o vermelho e na massa do neutrino.

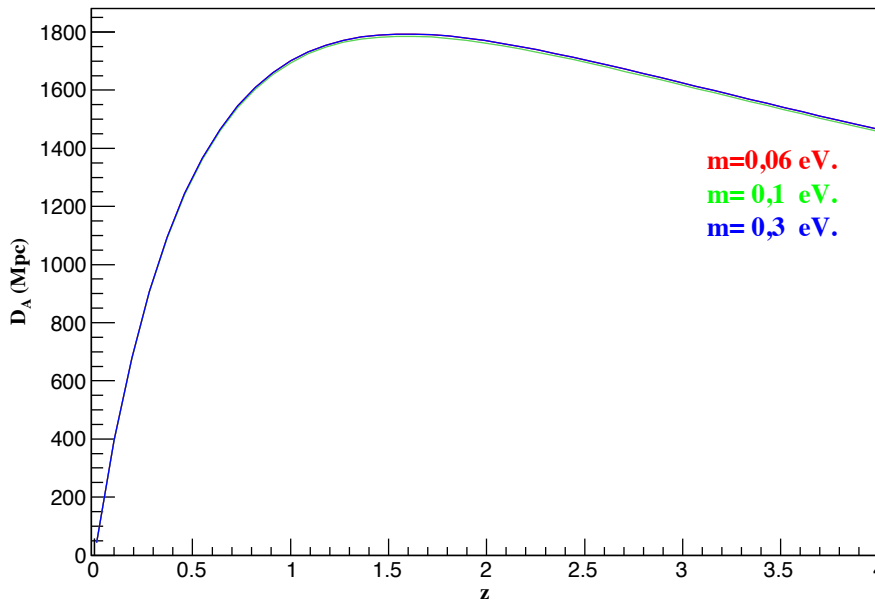


Figura 5.2: Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e Ω_Λ são fixos.

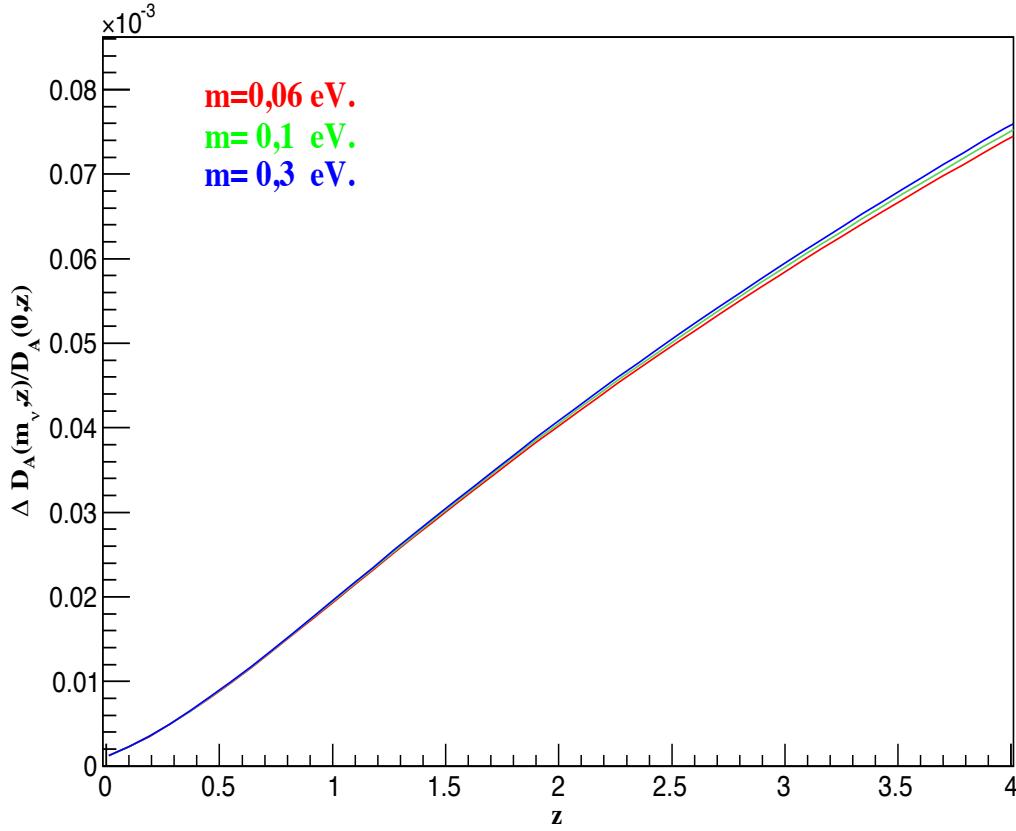


Figura 5.3: Diferença fracionária da distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e Ω_Λ são fixos.

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^3}{e^{p_\nu/T_\nu} + 1} dp_\nu. \quad (5.7)$$

Para encontrar o parâmetro densidade de energia, dividimos a solução da Eq.(5.7) para o valor da densidade crítica e, assim, obtemos:

$$\Omega_\nu(T_\nu, z) = \frac{21g_\nu T_\nu^4 \zeta(4)}{8\pi^2 \rho_c}. \quad (5.8)$$

A Figura (5.3) mostra a diferença fracionária da distância do diâmetro angular em função do redshift para diferentes valores de massa. Podemos ver que dependendo do valor da massa do neutrino, o valor da distância aumenta, mas a diferença fracionária é muito pequena, quase zero. Como exemplo temos que para $z = 1$ e a massa dos neutrinos $m_\nu = 0.3$ eV, a diferença fracionária é do ordem de $10^{-3}\%$.

5.1.2

Condição de normalização quando são fixos os parâmetros densidade de energia de radiação e matéria não relativista

Esta hipótese nos permite abordar o caso extremo em que é esperado que o efeito da massa do neutrino na medição da distância seja máximo pois Ω_ν^1 escala com a função de $(1+z)^3$, enquanto que Ω_Λ é constante. As Figuras (5.4) e (5.5) mostram que realmente a distância aumenta com a massa do neutrino e que este aumento é bem maior que o achado com a primeira suposição. Como exemplo temos que para $z = 1$ e a massa dos neutrinos $m_\nu = 0,3\text{eV}$, a diferença fracionária é aproximadamente 1%

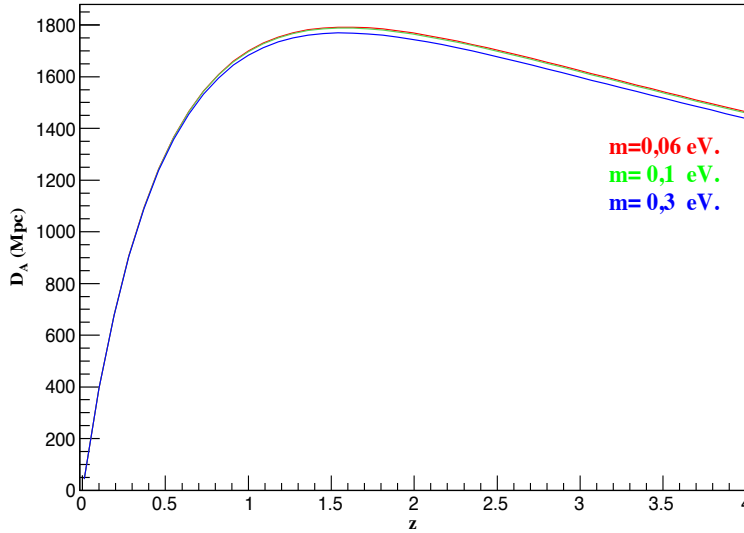


Figura 5.4: Distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são fixos.

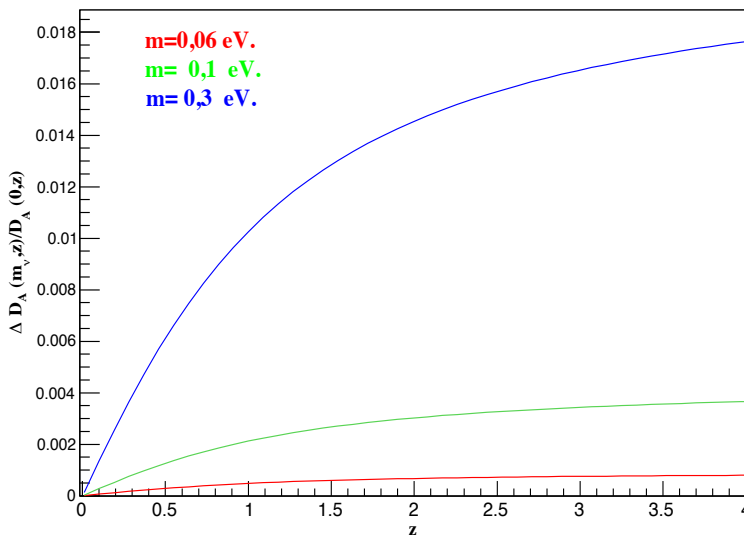


Figura 5.5: Diferença fracionária da distância do diâmetro angular em função do desvio para o vermelho, para diferentes massas dos neutrinos. $\Omega_{\gamma,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são fixos.

5.2 Deflexão da luz por uma galáxia

A luz de objetos distantes pode fazer curva ao passar perto de uma distribuição de massa (lente). O efeito é maior quanto maior é a massa da lente e as distâncias entre ela, a fonte e o observador. O efeito é máximo se $D_L \approx D_{LS}$.

Quando a lente é uma galáxia típica ou um aglomerado de galáxias, ela pode gerar um ou mais imagens cuja separação é possível detectar pelos telescópios terrestres. Além disso, as imagens são magnificadas varias vezes fazendo das lentes gravitacionais uma ferramenta poderosa para sondar o universo.

Nas últimas décadas, inúmeros trabalhos tanto teóricos quanto experimentais têm tentado explorar ao máximo o potencial desta ferramenta cósmica. Entre eles estão os artigos associados com a medição do tempo de atraso de sinais de luz que chegam de fontes distantes, os quais são desviados devido à presença de uma galáxia entre a fonte e o observador [72]. Nesta seção, vamos analisar a influência da massa

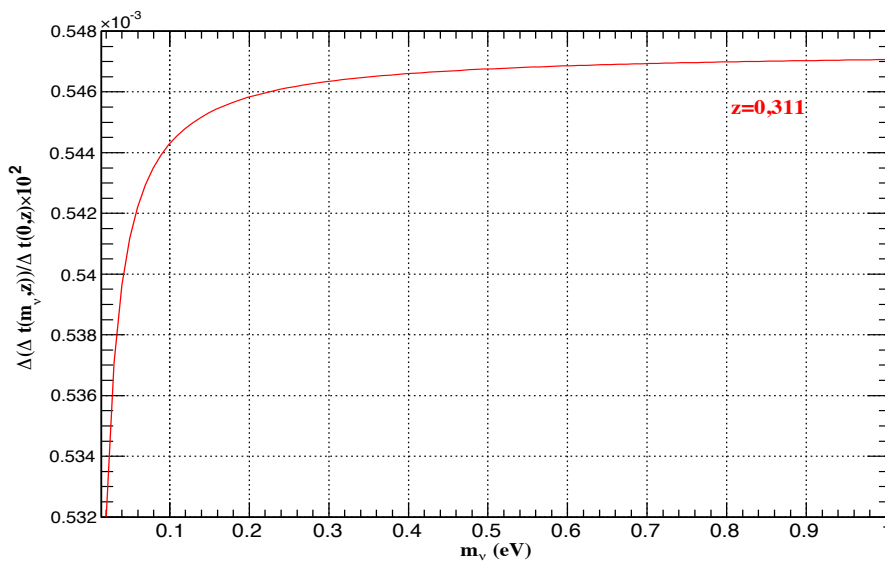


Figura 5.6: Medida no plano da lente da variação respeito à massa do neutrino da diferença do tempo de atraso de dois sinais de luz. A lente é modelada como esfera isotérmica singular e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$.

do neutrino na estimativa desta medida quando a galáxia é modelada primeiro como esfera isotérmica singular e depois como uma esfera isotérmica com núcleo.

Para esta finalidade se estudou o sistema lente gravitacional QsO PG 1115+080 que consiste de um quasar a uma distância de cerca de 8 bilhões de anos-luz ($z_s = 1,722$) na constelação de Leo e olha-se através de uma galáxia elíptica a uma distância de 3 bilhões de anos-luz ($z_l = 0,311$). O quasar é uma fonte de luz variável e a luz de cada uma de seus imagens atravessa um caminho diferente para chegar à

Terra. A diferença de tempo de atraso entre as imagens estudadas é aproximadamente de 13 dias [73, 74].

5.2.1

Tempo de atraso gravitacional: modelo esfera isotérmica singular

Na Seção 4.3.2, vimos que a diferença de tempo de atraso gravitacional entre dois sinais luminosos emitidos pela mesma fonte e dada pela equação (4.69), onde o ângulo de Einstein é dado por a Eq.(4.55). Isto é:

$$\Delta t(m_\nu, z_L) = (1 + z_L) \frac{4\pi\sigma^2}{c^3} |\theta_2 - \theta_1| D_L(m_\nu, z_L). \quad (5.9)$$

Assim, para investigar se a massa do neutrino afeta esta diferença de tempo, é útil fazer um gráfico da diferença fracionária da grandeza dada pela equação (5.9) em função da massa do neutrino.

Quando $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$, a Figura (5.6) mostra que a porcentagem de variação da diferença de tempo do atraso é muito pequena, da ordem de $10^{-4}\%$, portanto o efeito da massa do neutrino é insignificante embora seja tomado $\sum m_\nu \approx 1$ eV para a soma das massas dos três tipos de neutrinos [11].

Quando $\Omega_\Lambda + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$, o efeito é maior que no caso anterior, mas o valor da diferença fracionária é pequeno, da ordem de um por cento para o limite superior da soma da massa do neutrino. Este comportamento é mostrado na Figura (5.7).

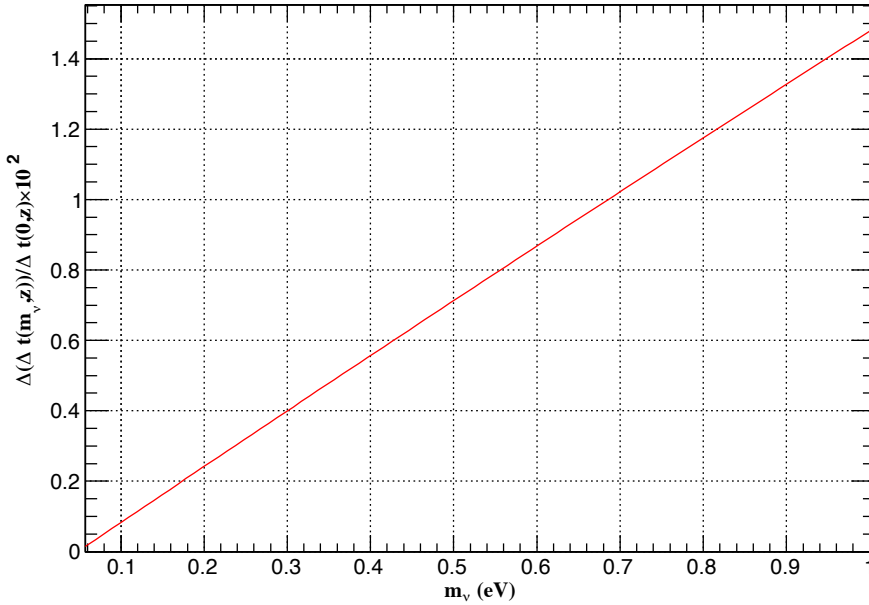


Figura 5.7: Medida no plano da lente da variação respeito à massa do neutrino da diferença do tempo de atraso de dois sinais de luz. A lente é modelada como esfera isotérmica singular e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_\Lambda + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$.

5.2.2

Tempo de atraso gravitacional: modelo esfera isotérmica com núcleo

Quando a distribuição de massa que atua como lente é modelada como esfera isotérmica com núcleo, a medida da diferença dos tempos de atraso de dois raios de luz emitidos pela mesma fonte é dada pela Equação (4.62). Lembrando que: $\xi = D_L\theta$, $a = D_L\theta_c$ e que o ângulo de Einstein é dado por a Eq.(4.55), podemos escrever Δt como uma função do desvio para o vermelho da lente e, portanto, como uma função implícita da massa do neutrino. Isto é:

$$\Delta t = (1 + z_L) \left\{ \frac{8D_L D_{LS} \pi^2 \sigma^4 (B - A)}{D_S c^5} - D_L \left(\sqrt{\theta_2^2 + \theta_c^2} - \sqrt{\theta_1^2 + \theta_c^2} - C\theta_c \right) \right\}, \quad (5.10)$$

onde A , B e C são definidas como:

$$A = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\theta_c}{\theta_1} \right)^2} - \frac{\theta_c}{\theta_1} \right)^2, \quad (5.11)$$

$$B = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\theta_c}{\theta_2} \right)^2} - \frac{\theta_c}{\theta_2} \right)^2, \quad (5.12)$$

$$C = \ln \left(\frac{\theta_c + \sqrt{\theta_2^2 + \theta_c^2}}{\theta_c + \sqrt{\theta_1^2 + \theta_c^2}} \right), \quad (5.13)$$

com o objetivo de facilitar a implementação da rotina em C++, permitindo ver a dependência de Δt em função do redshift da lente, deixando constante o desvio para o vermelho da fonte.

As Figuras (5.8) e (5.9) mostram a variação da diferença fracionária da

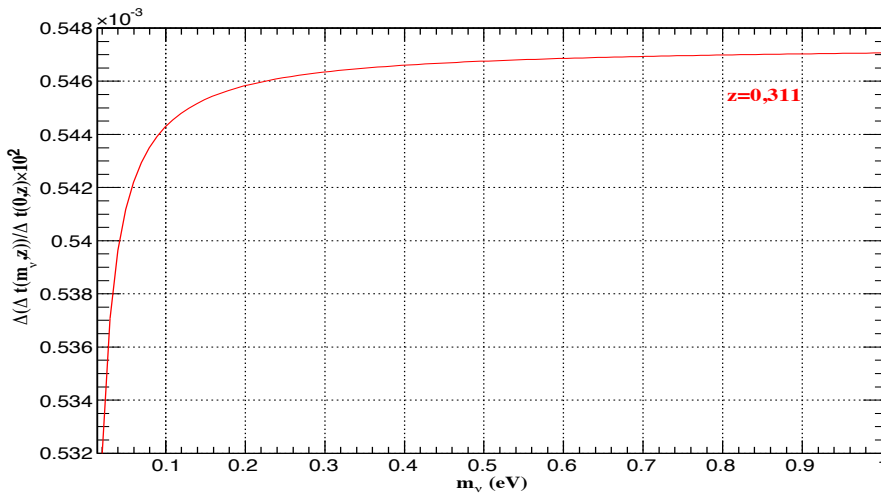


Figura 5.8: Medida no plano da lente da variação respeito à massa do neutrino da diferença do tempo de atraso de dois sinais de luz. A lente é modelada como esfera isotérmica com núcleo e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$.

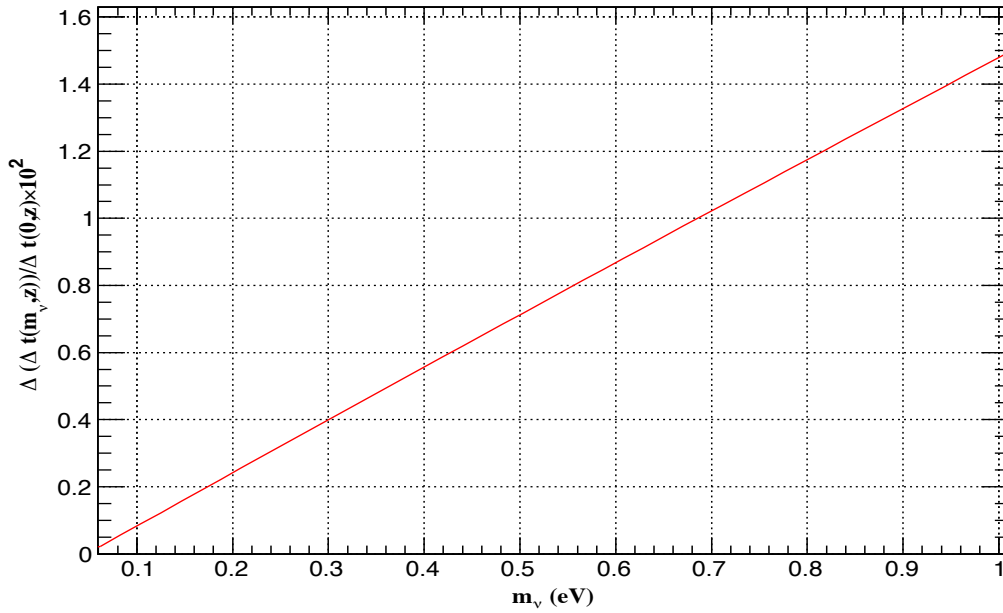


Figura 5.9: Medida no plano da lente da variação respeito à massa do neutrino da diferença do tempo de atraso de dois sinais de luz. A lente é modelada como esfera isotérmica com núcleo e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_\Lambda + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$.

diferença do tempo de atraso com relação à massa do neutrino para os casos $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$ e $\Omega_\Lambda + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$ respectivamente. Mais uma vez vemos que o efeito da massa do neutrino na medição do tempo de atraso gravitacional é muito pequeno, desprezível para o primeiro caso e da ordem de uma porcentagem para o segundo.

Comparando as Figuras (5.6) com (5.8) ou (5.7) com (5.9), que mostram a dependência na massa da diferença fracionária da razão da diferença do tempo de atraso para dois sinais de luz no sistema QsO PG 1115+080, vemos que são estritamente as mesmas.

5.3

Deflexão de um feixe de neutrinos por um buraco negro supermassivo

Devido a sua interação fraca, os neutrinos podem escapar de regiões muito densas como: o núcleo do Sol, as galáxias ou outras fontes cosmológicas de neutrinos, e podem viajar até nós transportando informação sobre a sua origem. Assim os neutrinos são a única prova dos fenômenos de grande energia no universo.

Até hoje, foram observados neutrinos solares, que levam 8 minutos em viajar do centro do Sol até a fotosfera, ao contrário dos fótons que levam 100000 anos para fazer a mesma viagem [21, 22]. Também em 1987 foram observados neutrinos atribuídos à supernova SN1987A situada na Grande Nuvem de Magalhães [37, 39] e agora em 2013 no IceCube foram encontrados dois eventos em energias de 1 PeV,

que é muito provável que esses eventos correspondem a neutrinos que vem de fora da galáxia [75].

A observação destes eventos torna a astrofísica de neutrinos uma área cada vez mais importante. Por esta razão é necessário ampliar o estudo de lentes gravitacionais para incluir lenteamento de neutrinos pois, como outras formas de matéria e energia, também estão sujeitos à interação gravitacional. Estudos deste tipo já foram feitos para o lenteamento gravitacional de neutrinos por estrelas e galáxias [76], para lenteamento de neutrinos de supernovas [77] e para fontes de neutrino transitórias associadas com explosões de raios gama.

Nesta seção, com base no artigo de Ernesto Eiroa e Gustavo Romero [3], estudamos a influência da massa do neutrino na medição do tempo de atraso gravitacional para neutrinos lentados por um buraco negro de Schwarzschild quando o parâmetro de impacto do neutrino é bem maior do que o raio da fotosfera $r_f = 3GM/c^2$. Além disso, assumimos que os neutrinos seguem geodésicas nulas da métrica de Schwarzschild devido ao fato que a massa deles é muito pequena, então na vizinhança do buraco os neutrinos seguem órbitas circulares inestáveis. Sob estas hipóteses o ângulo de deflexão é muito pequeno e pode ser aproximado em $\hat{\alpha} = 4GM/(c^2 r_f)$. Portanto pode-se modelar a lente como uma massa pontual, que é o modelo mais simples que pode ser usado para descrever uma distribuição de massa com simetria esférica.

De acordo com as equações (4.17), (4.23), (4.26) e (4.42), para um neutrino que satisfaça as condições acima o atraso no tempo de chegada do neutrino ao observador é:

$$t_{\text{atraso}} = (1 + z_L) \frac{2GM}{c^3} \left[\left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^2 - 2 \ln \left| \frac{\theta}{\theta_E} \right| \right], \quad (5.14)$$

com

$$\theta_E^2 = \left(\frac{4GM}{c^2} \right) \frac{D_{LS}}{D_L D_S}. \quad (5.15)$$

Devido que as explosões de raios gama (GRBs) são bom candidatos para a produção de neutrinos atmosféricos como resultado do decaimento em píons e muons dos raios cósmicos de alta energia emitidos neste processo, considerarmos uma fonte transitória de neutrinos em $z_S \approx 1$ formando um ângulo $\beta = 0,02''$ com a linha da visada, portanto para uma lente de massa $3,3 \times 10^8 M_\odot$ localizada em $z_L = 0,3$, temos as imagens $\theta_1 = -0,0322''$ e $\theta_2 = 0,0522''$ cuja diferença no tempo de atraso entre elas é $\Delta t = 7771,72$ s

As Figuras (5.10) e (5.11) mostram o comportamento da diferença fracionária em função da massa do neutrino da diferença do tempo de atraso $\Delta t = |t_2 - t_1|$ entre as duas imagens de deflexão fraca lentadas pelo buraco de $3,3 \times 10^8 M_\odot$ presente na galáxia.

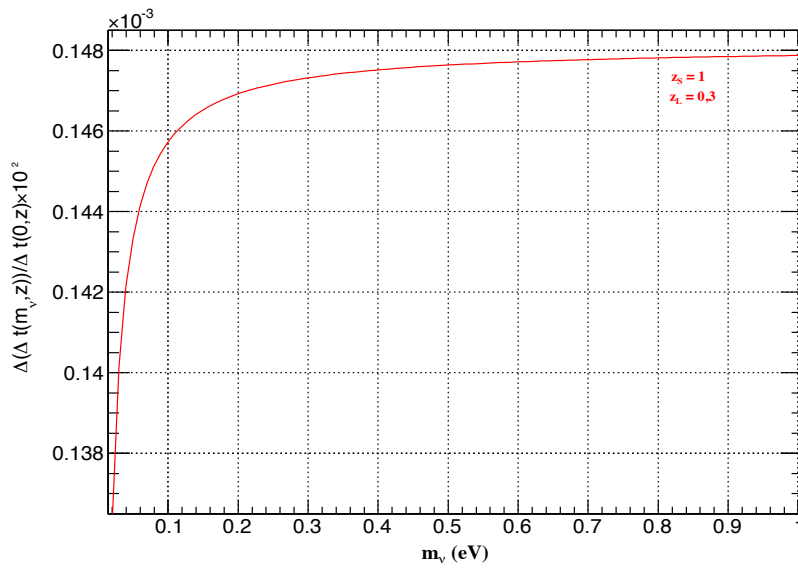


Figura 5.10: Medida no plano da lente da variação da diferença do tempo de atraso de dois sinais com relação à massa do neutrino. A lente é modelada como massa pontual e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$.

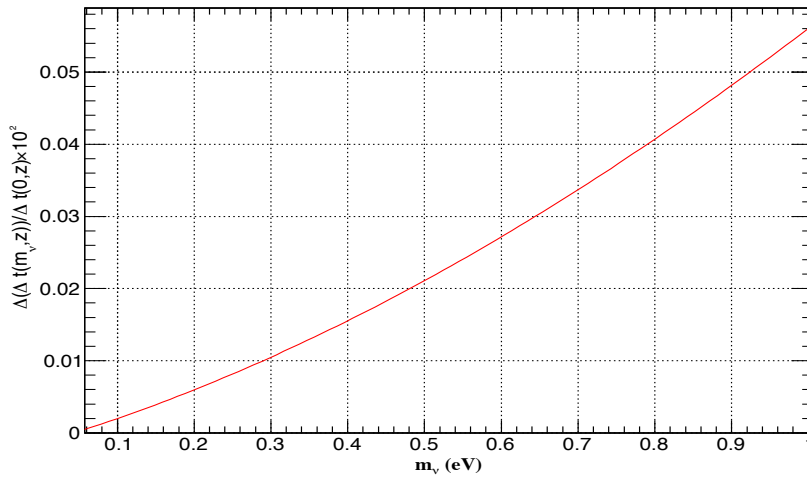


Figura 5.11: Medida no plano da lente da variação da diferença do tempo de atraso de dois sinais com relação à massa do neutrino. A lente é modelada como massa pontual e é imposta a condição de normalização dos parâmetros cosmológicos: $\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$.

Observamos que a porcentagem da variação é da ordem de $10^{-5}\%$ para $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$ e $10^{-3}\%$ para $\Omega_{\Lambda} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,6859$, o qual faz desprezível o efeito de massa do neutrino na medida de Δt .

6 Conclusão

A observação de sistemas de lente gravitacional e sua aplicação ao estudo de diferentes tópicos em astrofísica e cosmologia é um campo da física que tem atraído muito interesse desde 1937, quando Fritz Zwicky menciona a possibilidade de usar lentes gravitacionais como telescópios cósmicos. Hoje a deflexão da luz de fontes distantes devido a objetos maciços é uma das maiores ferramentas em cosmologia, é um método de valor inestimável para a investigação da fonte e da distribuição de massa do objeto defletor, independentemente de se trata de matéria escura ou visível, assim como também para a determinação de parâmetros cosmológicos [78].

Nesta dissertação foi estudado uma das propriedades do lentamento gravitacional: o tempo de atraso, como ferramenta cosmológica para estudar o possível efeito de atribuir massa aos neutrinos. O valor do atraso no tempo que leva um feixe de luz em chegar à Terra, quando ele passa através da zona de influência gravitacional de uma distribuição de massa, depende da medida da distância do diâmetro angular que nós fornecemos para a lente, a fonte e a distância lente-fonte, portanto, no Capítulo 2, definimos esta distância para o modelo cosmológico padrão sob a condição de normalização $\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0} + \Omega_{\gamma,0} + \Omega_{\Lambda} = 1$.

Hoje, pela cosmologia e pelos experimentos de oscilação de neutrinos sabemos que pelo menos dois neutrinos são massivos, por conseguinte dos resultados obtidos na seção 3.4 para a densidade de energia de neutrinos não relativísticos se obtém que $\Omega_{\nu,0}$ é uma função da massa do neutrino com valor diferente de zero. Diante desse resultado, consideramos dois casos para a análise de distância: o primeiro quando na condição de normalização são fixos os parâmetros densidade de energia de radiação e constante cosmológica ($\Omega_{\gamma,0} = 5,42 \times 10^{-5}$, $\Omega_{\Lambda} = 0,6825$) e o segundo caso no qual se fixam os parâmetros densidade de energia de radiação e matéria não relativista ($\Omega_{\gamma,0} = 5,42 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0,314$).

Em ambos casos, observa-se que há variação no valor da distância do diâmetro angular quando a massa do neutrino aumenta. Este efeito foi verificado fazendo a diferença fracionária da razão da distância do diâmetro angular para os valores de massa do neutrino: 0,06, 0,1 e 0,3 eV o que mostro que realmente existe diferença entre qualquer valor da distância calculado com valor de massa do neutrino e o valor da distância quando a massa é zero. Para o primeiro caso, quando a massa do neutrino não é desprezível, igual ou maior do que 0,06 eV, a suposição

$\Omega_{m,0} + \Omega_{\nu,0}^1 + \Omega_{\nu,0}^2 = 0,317$ faz que o efeito de massa de neutrino seja muito pequeno pois $\Omega_{\nu,0}^1$ varia em função de $(1+z)^3$ na expressão da distância do diâmetro angular o a igual que $\Omega_{m,0}$, então o único efeito notável é dado por $\Omega_{\nu,0}^1$ já ele varia como $(z+1)^5$. Como exemplo temos que para $z = 1$ e $m_\nu = 0,3\text{eV}$, a porcentagem da variação é aproximadamente 0,002%. No segundo caso, devido a que Ω_Λ é constante na expressão da distância do diâmetro angular, o efeito de massa do neutrino é bem maior já que $\Omega_{\nu,0}^1$ e $\Omega_{\nu,0}^2$. Portanto para $z = 1$ e $m_\nu = 0.3\text{ eV}$ tem-se uma porcentagem de variação de aproximadamente 1%.

Com os resultados obtidos para o efeito da massa de neutrinos na medida da distância do diâmetro angular, foi estimada a diferença fracionária da razão da diferença do tempo de atraso. Primeiro isto foi feito para sinais de luz emitidas pela fonte do sistema de lente gravitacional QsO PG 1115+080 onde a lente foi modelada primeiro como esfera isotérmica singular e depois como esfera isotérmica com núcleo. Segundo, para neutrinos que passam pela vizinhança de um buraco negro com um parâmetro de impacto muito maior do que o raio de Schwarzschild, em cujo caso o buraco pode ser modelado como uma massa pontual e gera dois imagens não relativísticas da fonte.

Podemos afirmar que independentemente do modelo de lente adotado e do tipo de sinal estudado, o impacto da massa do neutrino para o tempo de atraso gravitacional pode ser ignorado para o caso quando $\Omega_{\gamma,0}$ e Ω_Λ são fixo. Tampoco é possível tirar alguma informação significativa sobre a massa do neutrino se só estudamos o tempo de atraso para algum sistema de lente gravitacional quando $\Omega_{\gamma,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são fixos na condição de normalização para os parâmetros densidade de energia das componentes de nosso universo, devido a que o efeito é pequeno.

Referências Bibliográficas

- [1] Carlo Giunti and Chung W. Kim. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford University Press, New York, 2007. 1, 3.4, 3.4.1
- [2] P. Schneider, J. Ehlers, and E. Falco. *Gravitational lenses*. Springer, New York, 1999. 1, 4, 4.1.4
- [3] Ernesto F. Eiroa and Gustavo E. Romero. Gravitational lensing of transient neutrino sources by black holes. *Phys. Lett. B*, 663:377–381, 2008. 1, 5.3
- [4] Weinberg Steven. *Cosmology*. Oxford University Press, New York, 2008. 2.1, 2.2.1, 4.1.1
- [5] Wendy L. Freedman et al. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 553:47–72, 2001. 2.1
- [6] Hans C. Ohanian. *Gravitation and spacetime*. W. W. Norton and Company, New York, 1976. 2.1, 4.1.1
- [7] Saul Perlmutter et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications. *Nature*, 391:51–54, 1998. 2.1
- [8] Saul Perlmutter et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517:565, 1999. 2.1
- [9] Adam Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astrophysical Journal*, 116:1009, 1998. 2.1
- [10] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.* 2.1
- [11] Planck Collaboration. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *arxiv:1212.6154v1*, 2013. 2.3, 2.3, 2.3, 3.4.1.1, 5.2.1
- [12] George Ellis. On the definition of distance in general relativity: I. m. h. etherington. *Philosophical Magazine ser. 7*, 15:761, 1933. 2.4.5
- [13] Fred L. Wilson. Fermi's theory of beta decay. *American Journal of Physics*, 36(12):1150–1160, 1968. 3

- [14] G. Danby, J. Gaillard, Konstantin Goulianos, L. Lederman, Nari B. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Physical Review Letters*, 9:36–44, 1962. 3
- [15] C. Cowan, F. Reines, F. Harrison, H. Kruse, and A. McGuire. Detection of the free neutrino: A confirmation. *Science*, 124:103, 1956. 3
- [16] K. Kodama et al. Final tau-neutrino results from the donut experiment. *Phys. Rev D*, 78, 052002, 2008. 3
- [17] Davis, Raymond, D. S, Harmer, and K. C, Hoffman. Search for neutrinos from the sun. *Physical Review Letters*, 20:1205–1209, 1968. 3, 3.3
- [18] M. Altmann et al. Complete results for five years of gno solar neutrino observations. *Physics Letters B*, 616, 3-4:174–190, 2005. 3
- [19] J. Abdurashitov et al. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal iii: results for the 2002-2007 data-taking period. *Phys. Rev. C*, 80, 615807, 2009. 3
- [20] F. Kaether, W. Hampel, G. Heusser, J. Kiko, and T. Kirsten. Reanalysis of the gallex solar neutrino flux and source experiments. *Physics Letters B*, 685, 1:47–54, 2010. 3
- [21] S. Fukuda et al. Solar 8b and hep neutrino measurements from 1258 days of super-kamiokande data. *Physical Review Letters*, 86:5651–5655, 2001. 3, 5.3
- [22] K. Abe. Calibration of the super-kamiokande detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics research Section A: Acceleradores, Spectrometers, Detectors and Associated equipment*, 737:253–272, 2014. 3, 5.3
- [23] Hiroyuki Sekiya et al. Solar neutrino analysis of super-kamiokande. *arXiv:1307.3686v1*, 2013. 3
- [24] Y. Fukuda and others [Super-Kamiokande Collaboration]. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562, 1998. 3
- [25] B. Aharmim et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 011301, 2002. 3
- [26] Q. Ahmad and SNO Collaboration. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8b solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 071301, 2001. 3
- [27] V. Arasimham. Perspectives of experimental neutrino physics in india. *Proc. Indian Natl. Sci. Acad.*, 70 A(1):11–25, 2004. 3

- [28] Christoph Berger and others [FREJUS Collaboration]. A study of atmospheric neutrino oscillations in the frejus experiment. *Phys. Lett. B*, 245:305–310, 1990. 3
- [29] W. Allison and others [Soudan-2 Collaboration]. The atmospheric neutrino flavor ratio from a 3.9 fiducial kiloton year exposure of soudan-2. *Phys. Lett. B*, 449:137, 1999. 3
- [30] M. Aglietta et al. Experimental study of atmospheric neutrino flux in the nusex experiment. *Europhys. Lett*, 8:611–614, 1989. 3
- [31] Y. Susuki and Y. Totsuka. *Neutrino physics and astrophysics*. Elsevier Science, Amsterdam, 1999. 3
- [32] M. Ambrosio et al. Matter effects in upward-going muons and sterile neutrino oscillations. *Physical Review Letters*, B517:59–66, 2001. 3
- [33] P. Adamson and others [MINOS Collaboration]. Charge-separated atmospheric neutrino-induced muons in the minos far detector. *Phys. Rev. D*, 75: 092003, 2007. 3
- [34] E. Ables et al. A long-baseline neutrino oscillation experiment at fermilab. *Fermilab Proposal*, page 875, 1995. 3
- [35] Y. Fukuda et al. Atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in the multigeV energy range. *Physical Review Letters*, B335:237–245, 1994. 3
- [36] D. Casper et al. Measurement of atmospheric neutrino composition with imb-3. *Physical Review Letters*, 66:2561–2564, 1991. 3
- [37] M. Koshiba et al. Observation in the kamiokande-ii detector of de neutrino burst from supernova sn1987a. *Physical Review Letters D*, 38(2):448–458, 1988. 3, 5.3
- [38] R. M. Bionta, G. Blewitt, C. B. Bratton, D. Casper, and A. Ciocio. Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987a in the large magellanic cloud. *Physical Review Letters*, 58:1494–1496, 1987. 3
- [39] Thomas J. Loredo and Don Q. Lamb. Bayesian analysis of neutrinos observed from supernova sn 1987a. *Phys. Rev. D*, 65: 063002, 2002. 3, 5.3
- [40] E. N. Alekseev, L. N. Alekseeva, I. V. Krivosheina, and V. I. Volchenko. Detection of the neutrino signal from SN1987A in the LMC using the inr baksan underground scintillation telescope. *Phys. Lett. B*, 205:209, 1988. 3
- [41] G. Fiorentini, G. L. Fogli, E. Lisi, F. Mantovani, and A. M. Rotunno. Mantle geoneutrinos in kamland and borexino. *Phys. Rev. D*, 86: 033004, 2012. 3

- [42] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Palazzo, and A. M. Rotunno . Geoneutrino analysis in kamland: input and desiderata. *arXiv:hep-ph/0405139*, 2004. 3
- [43] John G. Learned . Detection of geoneutrinos: can we make the gnus work for us? *Journal of Physics: conference Series*, 136: 022007 doi:10.1088/1742-6596/136/2/022007, 2007. 3
- [44] Y. Declais, J. Favier, A. Metref, H. Pessard, B. Achkar, M. Avenier, G. Bagieu, R. Brissot, et al. Search for neutrino oscillations at 15-meters, 40-meters, and 95-meters from a nuclear power reactor at bugey. *Nucl. Phys. B*, 434:503, 1995. 3
- [45] G. Zacek, F. Feilitzsch, R. L. Mossbauer, L. Oberauer, et al. Neutrino-oscillation experiments at the gosgen nuclear power reactor. *Physical Review Letters D*, 34(9):2621–2636, 1986. 3
- [46] V. I. Kopeikin, L. A. Mikaelyan, and S. A. Fayans. Search for massive neutrinos at the rovno nuclear power station reactor. *JETP Lett.*, 51:86–89, 1990. 3
- [47] Robert G, Arns. Detecting the neutrino. *Physics in Perspective*, 3:314–334, 2001. 3
- [48] M. Apollonio and others [CHOOZ Collaboration]. Limits on neutrino oscillations from the chooz experiment. *Phys. Lett. B*, 466:415, 1999. 3
- [49] H. Pessard et al. The opera experiment. *Physica Scripta*, 59: doi: 10.1238/Physica:Topical.093a00059, 2001. 3
- [50] Kevin S. McFarland. Minerva: a dedicated neutrino scattering experiment at numi. *Nuclear Physics B- Proceedings Supplements.*, 159: 063002:107–112, 2006. 3
- [51] Bari
Osmanov. Minerva detector: Description and performance. *arXiv:1109.2855*, 2011. 3
- [52] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar. Helicity of neutrinos. *Physical Review Letters*, 109:1015, 1958. 3.1
- [53] Tsao, Chang. Parity violation and neutrino mass. *Nucl. Sci. Technol.*, 13:129–133, 2002. 3.1
- [54] C. S. Wu. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Physical Review Letters*, 105:1413–1415, 1957. 3.1
- [55] J. Beringer et al. Neutrino properties. *Physical Review Letters*, D86(010001):1–21, 2012. 3.2

- [56] P. Minkowski. $\mu \rightarrow e \gamma$ at a rate of one out of 1-billion muon decays? *Phys. Lett. B*, 67:421, 1977. 3.2.2
- [57] Manfred Lindner, Tommy Ohlsson, and Gerhart Seidl. See-saw mechanisms for dirac and majorana neutrino masses. *Phys. Rev. D*, 65: 053014, 2002. 3.2.2
- [58] B. Pontecorvo. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. *Sov. Phys., JETP* 26:984, 1968. 3.3
- [59] SuperKamiokande Collaboration, S, Fukuda, et al. Solar neutrinos. *Physical Review Letters*, 85:3999, 2000. 3.3
- [60] Julien Lesgourgues and Sergio Pastor. Neutrino mass from cosmology. *Adv. High Energy Phys.*, 608515, 2012. 3.4.1
- [61] I. Gradshteyn and I. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego, California, 1980. 3.4.1.1, 3.4.1.2, 4.3.1
- [62] John A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge University Press, New York, 1999. 4
- [63] Tilman Sauer. The challenge of editing einstein’s scientific manuscripts. *arXiv:physics/0412142v1*, 2008. 4
- [64] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss. *Gravitational lensing: strong, weak and micro*. Springer-Verlag, Berlin Heideberg, 2006. 4, 4.3.1, 4.3.1
- [65] Silvia Mollerach and Esteban Roulet. *Gravitational lensing and microlensing*. World Scientific Publishing, London, 2002. 4.1.1, 4.2.2, 4.2.2
- [66] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340:291–472, 2001. 4.1.2
- [67] Edmund Bertschinger and Rennan Barkana. Gravitational lensing from hamiltonian dynamics. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Ave Cambridge, MA 02139, Estados Unidos, 1999. 4.2
- [68] Roger Blandford and Ramesh Narayan. Fermat’s principle, caustics, and the classification of gravitational lens images. *The Astrophysical Journal*, 310:568–586, 1986. 4.2.2
- [69] V. Vakulik, R. Schild, V. Dudinov, S. Nuritdinov, V. Tsvetkova, O. Burkhonov, and T. Akhunov. Observational determination of the time delays in gravitational lens system q2237+0305. *Astronomy and Astrophysics*, 447:905–913, 2006. 4.3
- [70] D. Alcalde, E. Mediavilla, O. Moreau, A. Munoz, C. Libbrecht, L. Goicoechea, J. Surdej, E. Puga, Y. De Rop, R. Barrena, R. Gil-Merino, B. McLeod, V. Motta, A. Oscoz, and M. Serra-Ricart. Qso 2237+0305 vr light curves from gravitational

- lenses international time project optical monitoring. *The Astrophysical Journal*, 572:729–734, 2002. 4.3
- [71] Murray Spiegel, Seymour Lipschutz, and John Liu. *Mathematical handbook of formulas and tables*. McGraw-Hill, New York, 2009. 4.3.1, 4.3.1
- [72] Danuta Paraficz and Jens Hjorth. The hubble constant inferred from 18 time-delay lenses. *The Astrophysical Journal*, 712:1378–1384, 2010. 5.2
- [73] F, Iwamuro, K, Motohara, T, Maihara, J, Iwai, H, Tanabe, et al. Infrared imaging of the gravitational lens pg 1115+080 with the subaru telescope. *Publication of the Astronomical Society of Japan*, 52:25, 2000. 5.2
- [74] Paul L, Schechter et al. The quadruple gravitational lens pg 1115+080: time delays and models. *The astrophysical journal letters*, 475(2):L85–L88, 1997. 5.2
- [75] IceCube Collaboration. Evidence for high-energy extraterrestrial neutrinos at the icecube detector. *Science*, 342:1–7, 2013. 5.3
- [76] Robert Bijunath and J. Nemiroff. Gravitational lensing characteristics of the transparent sun. *Astrophysical Journal*, 685, doi: 10.1086/588805, 2008. 5.3
- [77] Olga Mena, Irina Mocioiu, and Chris Quigg. Gravitational lensing of supernova neutrinos. *Astroparticle Physics*, 28:348–356, 2007. 5.3
- [78] Dan, Coe and Leonidas A, Moustakas. Cosmological constraints from gravitational lens time delay. *The Astrophysical Journal*, 706(1), 2009. 6