4
Silhueta de uma nuvem de pontos via superfícies implícitas

Com objetivo de extrair a silhueta de uma nuvem de pontos, em alternativa à reconstrução local de malhas poligonais, proposta por Olson (11) e exposta no capítulo 3, neste capítulo propomos aplicar uma reconstrução local usando aproximação por função implícita.

O método proposto inicia determinando uma função algébrica que aproxima a nuvem N em torno de um ponto $P \in N$. Isso é feito construindo uma *bounding box* definida pelos k vizinhos mais próximos de P e aplicando dois métodos de reconstrução (*Gradient one fitting* e *Ridge regression*).

Em seguida, para determinar pontos sobre a silhueta numa vizinhança de P, utilizamos o método de continuação numérica de Euler-Newton, com passo adaptativo.

Por fim, para extrair a curva silhueta da nuvem de pontos, buscamos dentre todas as *bounding boxes* construídas uma primeira *bounding box* que tenha um pedaço de silhueta. Então, procuramos silhueta nas *bounding boxes* vizinhas e, dessa forma, perseguimos a curva pela nuvem.

4.1
Reconstrução local das superfícies

A reconstrução utilizada foi baseada no método proposto por Mederos(10), no qual é apresentado um modo de aproximar a nuvem por uma superfície algébrica.

Definição 4.1 *Um subconjunto $O \subset \mathbb{R}^3$ é uma* ***superfície implícita*** *se existem uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $O \subset \mathbb{R}^3$, e um número real $c \in \mathbb{R}$ tais que $O = F^{-1}(c)$. A superfície implícita é* ***regular*** *se F é diferenciável e satisfaz a condição de que, em cada ponto $x \in F^{-1}(c)$, o gradiente de F não se anula em x.*

Para a reconstrução local, usaremos uma superfície implícita algébrica que é imagem inversa de um polinômio, definidos como segue:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

Definição 4.2 *Um* ***polinômio de grau d*** *definido em* $\mathbb{R}^3$ *é uma função* $P_d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dado pela seguinte expressão:*

$$P_d(x, y, z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Definição 4.3 *Uma* ***superfície algébrica de grau d*** *é a superfície implícita* $P_d^{-1}(0)$*, cuja notação vetorial adotada será*

$$P_d(x, y, z) = \boldsymbol{v}_{(x,y,z)}^t . \boldsymbol{a}$$

onde

$$\boldsymbol{v}_{(x,y,z)} = [1, x, x^2, ..., x^d, y, xy, ..., x^{d-1}y, y^2, xy^2, ..., z, xz, ..., z^d]^t$$

e

$$\boldsymbol{a} = [a_{0,0,0}, ..., a_{d,0,0}, a_{0,1,0}, ..., a_{d-1,1,0}, ..., a_{0,0,1}, ..., a_{0,0,d}]^t.$$

Os elemetos de $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^l$ *são os coeficientes de* P_d *e os elementos do vetor* $\boldsymbol{v}_{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^l$ *são os monômios de* P_d*, sendo* $l = \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6}$.

Aproximação por superfícies algébricas

Superfícies, em geral, podem ser bem aproximadas por superfícies algébricas e, de acordo com Mederos (10), podemos aumentar o grau algébrico ou utilizar reconstruções locais de superfícies para obter maior precisão na aproximação. Como nosso objetivo é extrair a silhueta local da nuvem de pontos, optamos por não fazer a reconstrução global da superfície implícita.

Vamos utilizar uma aproximação por superfícies algébricas que minimizam o erro das distâncias até os pontos da nuvem, baseado no que foi proposto por Mederos (10). Por conta disso, a reconstrução retorna um resultado satisfatório mesmo em nuvens com ruídos, como veremos no capítulo de resultados.

Definição da vizinhança de um ponto para a reconstrução

Diferente do que propõe Mederos (10), que usa a estrutura de *octree*, optamos por reconstruir uma superfície implícita em torno de cada ponto da nuvem. Assim, para cada ponto P da nuvem, construímos uma *bounding box*, denotada por bb_P e delimitada pelos k pontos da nuvem mais próximos de P, fixado $k \in \mathbb{N}$, segundo a distância euclidiana. O valor de k é fixo e em nossos exemplos testamos diferentes valores.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

Para uma boa reconstrução, é necessário um número razoável de pontos dentro de cada *bounding box*, dado que a superfície é uma aproximação desses pontos. Porém, uma vez que pontos próximos têm muitos vizinhos em comum, há auto-interseção das *bounding boxes* (Figura 4.1) e, consequentemente, das superfícies reconstruídas. Na seção 4.2 mostraremos que, para extrair a silhueta e evitar sobreposições de linhas, não é necessário reconstruir superfícies em todos os pontos da nuvem e que a vizinhança em torno de cada ponto será reduzida.

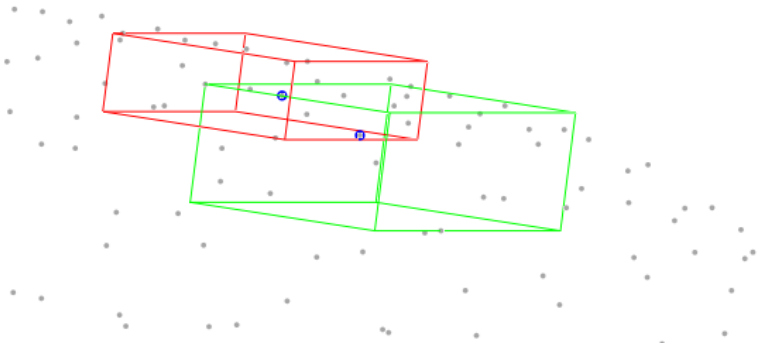


Figura 4.1: Pontos vizinhos têm muitos pontos próximos em comum, o que gera auto-interseção de suas *bounding boxes*. Aqui, mostramos as caixas de dois pontos vizinhos destacados em azul.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

Métodos de reconstrução

Dada uma *bounding box*, aplicamos dois métodos de reconstrução: *Gradient one fitting* (3) e *Ridge regression* (13).

Para aplicar estes métodos, consideramos como dado de entrada uma nuvem de pontos com suas normais unitárias.

O método *Gradient one fitting* é descrito como um problema de mínimos quadrados com pesos, utilizado para evitar problemas de continuidade e sensibilidade causados por pequenas perturbações que podem ser feitas na nuvem de pontos (10). Dessa forma, a utilização deste método se mostra bastante conveniente para a nossa proposta de extrair a silhueta de uma nuvem de pontos com ruídos.

Reconstruir a superfície $P_d^{-1}(0)$ que aproxima a nuvem em cada *bounding box* depende da determinação do vetor dos coeficientes do polinômio P_d, o vetor $\mathbf{a}$. Para isso, em cada *bounding box* baseado em Mederos (10), resolvemos o

problema dado por:

$$min_{\mathbf{a}}\{\mathbf{a}^t(\mathbf{S}+\mu\mathbf{S_N})\mathbf{a} - 2\mu\mathbf{a}^t\mathbf{g_N} + \mu k\},$$

onde:

- k é o número de pontos na *bounding box*;
- $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i^t$ é uma matriz $l \times l$
- $\mathbf{g_N} = \sum_{i=1}^{k} D_i n_i$, sendo $D_i = [\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x}\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y}\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial z}]$ e n a normal do ponto;
- $\mathbf{S_N} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{g_N}\mathbf{g_N^t}$ é uma matriz $l \times l$.

A solução deste problema é obtida pela resolução do sistema linear

$$(\mathbf{S}+\mu\mathbf{S_N})\mathbf{a} = \mu\mathbf{g_N}$$

Desta forma, usando apenas o método *Gradient one fitting*, já temos uma reconstrução da superfície na vizinhança de cada ponto da nuvem. Porém, em alguns exemplos foi determinada mais de uma componente em uma mesma *bounding box*, o que não desejamos. Para evitar isto, utilizamos uma combinação dos métodos *Gradiente one fitting* e *Ridge regression*, semelhante ao que foi proposto em (10), com algumas simplificações.

Ao combinar estes dois métodos, o sistema a ser resolvido passa a ser

$$(\mathbf{S}+\mu\mathbf{S_N}+\gamma\Lambda)\mathbf{a} = \mu\mathbf{g_N}$$

onde γ é uma constante real que determina o peso dado ao novo termo e Δ é uma matriz diagonal $l \times l$, como propõe (13):

$$\Lambda = diag(\delta_i), \delta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \gamma}$$

onde σ_i são os autovalores da matriz $\mathbf{S}$.

Nos exemplos utilizados neste trabalho, em geral foi considerado $\gamma = 0$ e $\mu = 0.01$.

Desta forma, dada uma *bounding box*, determinamos uma função implícita que aproxima os pontos da nuvem nesta região.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

4.2
Extração local da silhueta de uma nuvem de pontos

Nesta seção apresentamos um método de extração local da silhueta de uma nuvem de pontos, baseada no método preditor-corretor de Euler-Newton. Para determinar e visualizar a silhueta, utilizamos as superfícies reconstruídas como descrito na seção 4.1.

4.2.1
Determinação da silhueta em uma bounding box

Dado um ponto P da nuvem de pontos, considere que temos reconstruída uma superfície descrita por uma função implícita f_P conhecida, definida na *bounding box* bb_P, caixa delimitada pelos k vizinhos mais próximos do ponto P. Dessa forma, podemos calcular as normais explicitamente em qualquer ponto da superfície, derivando o polinômio.

Seja $\mathbf{g}$ o gradiente de f_P e $g = \|\mathbf{g}\|$. Então, a normal à superfície é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{g}^t/g$.

A determinação da silhueta sobre essa superfície depende de encontrarmos os pontos $\mathbf{s}$ tais que:

- $f_P(\mathbf{s}) = 0$ e
- $I(\mathbf{s}) = 0$, ou seja, $n_s.\mathbf{v} = 0$, sendo n_s a normal à superfície em $\mathbf{s}$ e v o vetor observador.

Portanto, definimos a função $F_P : bb_P \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F_P(x, y, z) = (f_P(x, y, z), I(x, y, z))$$

e a curva silhueta C fica definida por $C = F_P^{-1}(0, 0)$.

Para determinar a curva silhueta C em bb_P, seguimos dois passos:

1. Encontrar um ponto inicial p_0 tal que $F_P(p_0) = (0, 0)$;
2. Utilizar um método de continuação numérica para percorrer a curva.

Para encontrar o ponto inicial p_0 sobre a curva, utilizamos o método de Newton em F_P, tendo o ponto P da nuvem como ponto de partida do método. Consideramos o ponto P uma boa escolha para inicializar o método, já que a *bounding box* bb_P foi construída com os pontos mais próximos de P. Se o método não convergir com esta condição inicial, sorteamos outro ponto em bb_P e reaplicamos Newton. Repetimos esse processo n vezes (n fixo) e, caso não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

haja convergência, consideramos que não há silhueta nesta caixa. Além disso, pedimos que o ponto p_0 esteja próximo de P.

O método de Newton (Figura 4.2(a)), para resolver uma equação do tipo $f(x) = 0$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se apresenta na forma

$$p_{i+1} = p_i - f'(p_i)^{-1} f(p_i).$$

Porém, no nosso caso, a matriz Jacobiana de F_P não é uma matriz quadrada e, por isso, não podemos calcular sua inversa.

Considere $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Aplicamos o método de Newton, como sugere (1):

$$p_{i+1} = p_i - [f'(p_i)]^+ f(p_i),$$

sendo que $[f'(p_i)]^+$ corresponde à pseudo-inversa, a inversa de Moore-Penrose.

Definição 4.4 *Seja A uma matriz $n \times (n+1)$ com posto máximo. Então, a* ***inversa de Moore-Penrose*** *de A é dada por*

$$A^+ = A^t (A A^t)^{-1}$$

O produto $X = A^+ b$, no nosso caso $X = [f'(p_i)]^+ f(p_i)$, pode ser resolvido utilizando a decomposição QR da seguinte forma (1):

$A^t = Q \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} R^t & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Daí, $A^+ = Q \begin{pmatrix} (R^t)^{-1} \\ \mathbf{0}^t \end{pmatrix}$.

Porém, em vez de determinar $(R^t)^{-1}$, podemos:

- Resolver o sistema $R^t y = b$ por substituição progressiva, dado que R^t é triangular inferior e
- Efetuar a multiplicação $X = Q \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Assim, temos que $p_{i+1} = p_i - Q \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Uma vez que encontramos o ponto p_0, primeiro ponto determinado sobre a curva silhueta, vamos aplicar o método preditor-corretor de continuação numérica de Euler-Newton.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

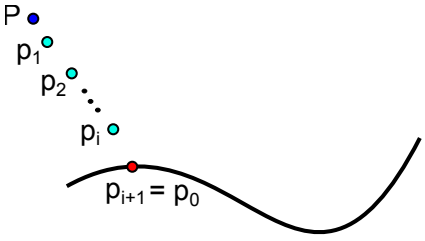
Para percorrer a curva, aplicamos em p_0 o método de Euler:

$$p_{i+1} = p_i + \lambda \mathbf{t}(p_i), i = 0, 1, 2, ...$$

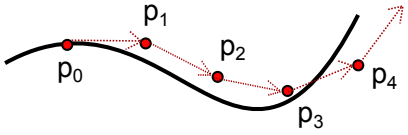
sendo:

- $\lambda \in \mathbb{R}$ é o tamanho do passo do método de Euler;
- $\mathbf{t}$ o vetor tangente à curva $F_P^{-1}(0,0)$, obtido pelo produto vetorial dos gradientes ∇f_P e ∇I em p_i.

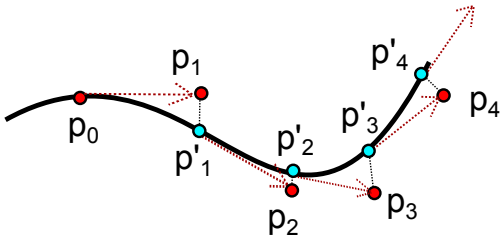
Contudo, o ponto obtido após aplicarmos o método de Euler, em geral, não pertence à curva silhueta (Figura 4.2(b)). Portanto, para retornarmos para a curva, aplicamos o método de Newton descrito anteriormente para corrigir esta distância e, assim, obtermos um ponto na curva novamente, como mostra o esquema da Figura 4.2(c).



4.2(a): Método de Newton



4.2(b): Método de Euler



4.2(c): Método Euler-Newton

Figura 4.2: Método preditor corretor de Euler-Newton.

Assim, poderíamos aplicar o método de Euler-Newton até que toda a curva fosse percorrida, ou seja, até que o método nos retornasse um ponto fora da *bounding box*. Com essa estratégia, observamos um excessivo número de linhas em uma mesma vizinhança, causado pela auto-interseção de *bounding boxes* de pontos muito próximos. Portanto, para evitar isto, extraímos a silhueta apenas em uma vizinhança reduzida do ponto inicial p_0 (Figura 4.3).

Esta vizinhança é delimitada por uma bola centrada em p_0, cujo raio é proporcional ao comprimento da diagonal da *bounding box*.

Utilizamos também um passo adaptativo para o método de Euler: se, após alguma iteração do método de Euler-Newton não conseguirmos a convergência,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

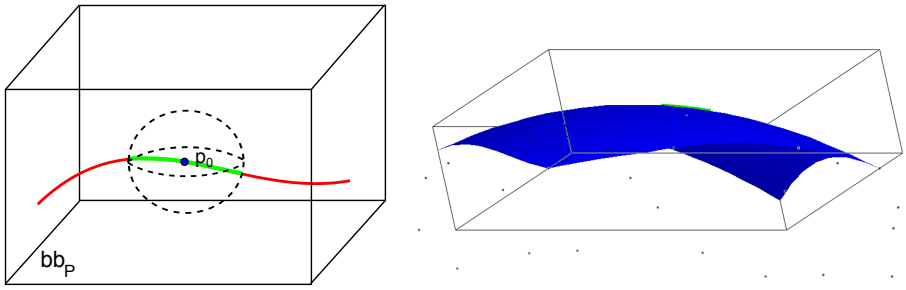


Figura 4.3: A curva em vermelho ilustra a silhueta que seria extraída se considerássemos como vizinhança toda a *bounding box*. Para reduzir sobreposições, determinamos a silhueta apenas em uma pequena vizinhança do ponto p_0 (curva em verde). Na Figura à direita, temos a superfície que foi reconstruída nesta caixa e a parte da silhueta considerada.

voltamos ao último ponto obtido sobre a silhueta e aplicamos novamente o método, reduzindo o passo utilizado. Dessa forma, conseguimos um melhor resultado, visto que, em regiões de alta curvatura, se o passo for muito grande, o método pode não convergir. Se mesmo assim, após um número de tentativas estipulado o método não convergir, finalizamos a determinação da silhueta nesta caixa.

4.2.2
Silhueta da nuvem de pontos

Para determinar a curva silhueta, definimos uma estratégia de percorrimento evitando processar as *bounding boxes* de todos os pontos da nuvem, ou seja, esta estratégia evita reconstruir a superfície e buscar pontos sobre a silhueta nas *bouding boxes* de todos os pontos da nuvem.

Inicialmente, buscamos uma primeira caixa que contenha uma curva silhueta. Para tanto, em cada uma destas caixas, devemos reconstruir a superfície e aplicar o método preditor-corretor de Euler-Newton.

Uma vez que encontramos uma *bounding box* bb_P com silhueta, vamos percorrer agora as *bounding boxes* dos vizinhos de P que estão em bb_P. Isto é, sabendo que bb_P foi delimitada pelos pontos P_1, P_2, ..., P_k vizinhos de P, vamos percorrer as caixas bb_{P_1}, bb_{P_2}, ..., bb_{P_k}, pois é natural supor que a curva silhueta passe por alguma delas, dada sua continuidade. Dessa forma, percorremos a curva, executando o processo de reconstrução apenas nas caixas de pontos vizinhos a outras caixas que contenham silhueta.

Cada caixa já visitada é sinalizada, evitando que a busca da curva silhueta seja feita novamente. Assim, se encontramos uma bounding box bb_P, cujas caixas de todos os vizinhos $P_1, P_2, ..., P_k$ já foram visitadas, finalizamos a extração desta linha da silhueta.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA

Para determinar outras linhas silhueta desta mesma nuvem, buscamos, dentre as caixas ainda não visitadas, outra caixa inicial com silhueta e repetimos o processo. Essa busca é feita uma quantidade fixada de vezes.

O algoritmo 4.2.2 mostra resumidamente o método descrito nesta seção.

No capítulo de resultados serão discutidas outras estratégias que foram adotadas para percorrer a curva silhueta. Além disso, mostraremos as vantagens da utilização deste método para a determinação de silhuetas em nuvens com ruídos.

Algoritmo 4.2.2:	Perseguindo a silhueta
1:	Para cada ponto Q da nuvem, gerar bb_Q.
2:	Para cada bb_Q, reconstruir a superfície implícita; aplicar o método de Euler-Newton; se encontrar silhueta, guardar os vizinhos de Q não visitados no vetor u; fim Para.
3:	Enquanto bb_P for uma caixa não visitada, para cada $P \in u$, reconstruir a superfície implícita; aplicar o método de Euler-Newton; se encontrar silhueta, guardar os vizinhos de P não visitados no vetor u; retirar P de u.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1113694/CA