



William Fernando Lopez Candela

**Modelo Matemático Simplificado para
Migração de Bolhas de Gás em Fluido
Viscoplastico**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Mônica Feijó Naccache

Rio de Janeiro
Abril de 2013

William Fernando Lopez Candela

**Modelo Matemático Simplificado para
Migração de Bolhas de Gás em Fluido
Viscoplastico**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Mônica Feijó Naccache

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Prof. Andre Leibsohn Martins

CENPES/PETROBRAS

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de abril de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

William Fernando Lopez Candela

Graduou-se em Engenharia Mecânica na Universidad Industrial de Santander-UIS em 2001.

Ficha Catalográfica

Lopez Candela, William Fernando

Modelo matemático simplificado para migração de bolhas de gás em fluido viscoplastico / William Fernando Lopez Candela ; orientadora: Mônica Feijó Naccache. – 2013.

147 f. : il. ; 30 cm

1. Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2013.

Inclui bibliografia

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Bolha de gás. 3. Fluido viscoplastico. 4. Modelo matemático simplificado. I. Naccache, Mônica Feijó. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

A minha família por seu incondicional apoio.
A minha namorada por seu amor e companhia.

Agradecimentos

A minha orientadora Mônica Feijó Naccache pelo apoio e incentivo para a realização deste trabalho.

A Petrobras por seu constante apoio à pesquisa Brasileira.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido, indispensável na realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Aos Colegas e Amigos que conheci no Brasil por seus conselhos e ajuda sempre que precisei.

Resumo

Candela, William Fernando Lopez; Naccache, Mônica Feijó. **Modelo matemático simplificado para migração de bolhas de gás em fluido viscoplastico**. Rio de Janeiro, 2013. 147p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, um estudo do deslocamento ascendente de uma única bolha de gás num fluido não newtoniano é realizado , a fim de simular o escoamento de bolhas de gás em pasta de cimento durante a cimentação de poços de petróleo. O fluido é modelado como um fluido não Newtoniano tipo Herschel-Bulkley com reologia variável no tempo. A partícula imersa no fluido não necessariamente é gasosa, também pode ser sólida ou líquida, fazendo algumas considerações para cada caso. Para desenvolver o modelo matemático foi feita uma análise dinâmica da partícula esférica imersa no fluido, e junto com as equações de Ansley e Plesley (1967), foi finalizado o modelo. O sistema de equações foi solucionado usando um método numérico de Runge Kutta de baixa ordem. O modelo numérico foi implementado usando o programa Matlab da empresa Mathworks. Os cálculos foram feitos para bolha esférica, número de Reynolds baixo (<3), temperatura constante, efeito de parede desprezível e sem efeito de população. O modelo foi validado comparando os resultados numéricos com os resultados experimentais de múltiplos autores. Foram consultados os dados experimentais dos autores Raymond (2000), Hervé Tabuteau (2007) e Neville Dubash (2003). Foi analisado o efeito da massa da bolha e da tensão superficial da interface líquido-gás na cinemática da partícula, a fim de definir em que condições é possível desprezar seus efeitos. Finalmente, os efeitos dos parâmetros reológicos na cinemática da partícula são analisados. Além disso, considerou-se a dependência da reologia com o tempo a fim de analisar o processo de deslocamento da bolha durante a cura do cimento.

Palavras-chave

bolha de gás; fluido viscoplastico; modelo matemático simplificado.

Abstract

Candela, William Fernando Lopez; Naccache, Mônica Feijó (Advisor). **Simplified mathematical model for migration of gas bubbles in viscoplastic**. Rio de Janeiro, 2013. 147p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, a study of the rising movement of single gas bubble in non-Newtonian fluid is performed, in order to simulate the behavior of a gas bubble in a cement paste during oil well cementing. The fluid is modeled as a non-Newtonian fluid type Herschel-bulkley with varying rheology in the time. The particle immersed in the fluid is not necessarily gaseous, it also could be liquid or solid, with some restrictions for each case. To develop the mathematical model, it was done a dynamic analysis of the spherical particle immersed in the fluid, and also, using the Ansley and Plesley's equations (1967), was finished the model. The equation systems was solved using a low order numerical method of Runge Kutta. The numerical model was implemented using Matlab program of the Mathworks Company. The calculations were made for spherical bubble, low Reynolds number (<3), constant temperature, wall effect neglected and without effect population. The model was validated comparing the numerical data with experimental results of multiple authors. Experimental data was consulted of Raymond & Rosant (2000), Hervé Tabuteau (2007) and Neville Dubash (2003) authors. It was analyzed the bubble mass effect and the surface tension of the liquid-gas interface in the kinematic particle, to define under what conditions it is possible to neglected its effects. Finally, the effects of rheological parameters on particle kinematics was analyzed. furthermore, the dependence of the rheology in the time to determine the bubble displacement process in the curing cement was analyzed.

Keywords

gas bubble; Viscoplastic Fluid; Simplified mathematical model.

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Objetivos	20
2	Revisão bibliográfica	21
3	Formulação Matemática	25
3.1	Calculo do coeficiente de arrasto	29
3.2	Calculo da equação para o diâmetro da bolha de gás	31
3.3	Modelo Matemático Simplificado	36
3.4	Modelo Matemático Adimensional	38
4	Formulação Numérica	41
5	Validação do Modelo Matemático	45
5.1	Bolha de Gás em Fluido Newtoniano	46
5.2	Esfera Rígida em Fluido Viscoplastico	48
5.3	Bolha de Gás em Fluido Viscoplastico	51
6	Resultados	55
6.1	influência da Tensão Superficial nos Resultados	56
6.2	Influência da Massa da bolha de Gás nos Resultados	60
6.3	Comportamento do Modelo Matemático para Reologia Constante no Tempo	63
6.4	Comportamento do Modelo Matemático para Reologia Variável no Tempo	76
6.5	Comportamento do Modelo Adimensional para Reologia Constante no Tempo	80
7	Conclusões e Recomendações	86
7.1	Conclusões	86
7.2	Recomendações para Trabalhos Futuros	89
	Referências Bibliográficas	90
A	Glossário.	93
A.1	Reologia dos Fluidos de Interesse	93
A.2	Força de Arrasto	96
B	Equações Consultadas de Outros Autores.	98
B.1	Equações para Coeficientes de Arrasto Fornecidas na Literatura Consultada	99
B.2	Equações para Diametro de Bolha Fornecidas na Literatura Consultada	101
B.3	Equações para Velocidade de Ascenso Fornecidas na Literatura Consultada	104

C	Código Computacional para Solução Numérica do Modelo Matemático	106
C.1	Rotina de Painel de Controle	108
C.2	Sub-Rotina Principal	111
C.3	Sub-Rotina para cálculo da Equação de Dinâmica da partícula considerando sua massa	144
C.4	Sub-Rotina para cálculo da Equação de Dinâmica da Partícula desprezando sua massa	145
C.5	Sub-Rotina para cálculo da Equação de Diâmetro da Bolha de Gás	146

Lista de figuras

1.1	Tensão de Cisalhamento para Diferentes Tipos de Fluidos Não Newtonianos em Função da Taxa de Cisalhamento	18
3.1	Balanço de Forças em Bolha de Gás.	26
3.2	Balanço de Forças em Partícula Solida.	28
3.3	Bolha de Gás em Duas Posições 1,2.	32
3.4	Balanço de Forças em Meia Bolha de Gás	34
4.1	Diagrama de Funcionamento da Rotina em Matlab para o cálculo dos Resultados neste Trabalho	43
5.1	Velocidade para Bolha de Gás em Fluido Newtoniano - Comparação com os experimentos de Raymond e Rosant (2000).	47
5.2	Numero de Reynolds para Bolha de Gás em Fluido Newtoniano - Resultados Numéricos do Modelo Matemático	47
5.3	Deslocamento para Esferas Solidas de Densidade Diferente em Fluido viscoplástico - Experimentos de Hervé Tabuteau (2007).	49
5.4	Reynolds Generalizado para Esfera Rígida em Fluido viscoplástico - Experimentos de Hervé Tabuteau (2007).	50
5.5	Numero de Froude para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico - Experimentos de Dubash (2003).	52
5.6	Reynolds Generalizado para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico - Experimentos de Dubash (2003).	53
6.1	Profundidade de uma Bolha de Gás para várias Tensões Superficiais	57
6.2	Porcentagem no desvio da velocidade de uma bolha ao desprezar a tensão superficial para diferentes diâmetros iniciais da bolha.	58
6.3	Aumento de Pressão no Interior da Bolha de Gás desde a formação até a Separação da Fonte de Gás - Adamson (1997)	59
6.4	Velocidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.0578 \left[\frac{kg}{mol} \right]$	62
6.5	Profundidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.0578 \left[\frac{kg}{mol} \right]$	62
6.6	Profundidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.1 \left[\frac{kg}{mol} \right]$	63
6.7	Influência da Tensão Limite na Tendência no Deslocamento de uma Esfera Sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.	65
6.8	Influência da Tensão Limite na tendência no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico	66
6.9	Influência do Índice de Consistência k na tendência no Comportamento do Deslocamento de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.	68
6.10	Influência do Índice de Consistencia no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico	69

6.11	Influência do Índice Power-Law na tendência no Comportamento do Deslocamento de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico	70
6.12	influência do Índice Power-Law na tendência no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.	71
6.13	Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico para Diferentes Valores de Tensão Limite τ_o	73
6.14	Velocidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico para Diferentes Valores de Tensão Limite	74
6.15	Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico para Vários Índices de Consistência	74
6.16	Velocidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law	75
6.17	Profundidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law	75
6.18	Velocidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law	76
6.19	Profundidade para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice de Consistência - Índice H	78
6.20	Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice de Consistência - Índice B	79
6.21	Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice C	80
6.22	Coeficiente de Arrasto Cd em Função do número de Reynolds Re para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico	81
6.23	Força G em Função da Relação de diâmetros d^* para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico	82
6.24	Numero de Froude Fr em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico	83
6.25	Coeficiente de Arrasto Cd em Função do número de Reynolds Re para Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo	84
6.26	Força G em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo	85
6.27	Numero de Froude Fr em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo	85
A.1	Tensão de Cisalhamento para os Fluidos Utilizados neste Trabalho	93
C.1	Diagrama de Funcionamento da Rotina em Matlab para o cálculo dos Resultados neste Trabalho	107

Lista de tabelas

5.1	Propriedades dos Fluidos Utilizados de Raymond e Rosant (2000)	46
5.2	Propriedades dos Fluidos de Trabalho de Hervé Tabuteau (2007)	49
5.3	Densidades das Esferas de Trabalho de Hervé Tabuteau (2007).	49
5.4	Propriedades dos Fluidos de Trabalho de Neville Dubash (2003)	51
6.1	Propriedades do Fluido utilizado no Trabalho de Dubash (2003)	56
6.2	Tensão Superficial de Diferentes Fluidos a 293.15 K	56
6.3	Propriedades do Fluido Utilizado de Raymond e Rosant (2000)	58
6.4	Propriedades do Fluido Utilizado na Simulação para Pasta de Cimento	61
6.5	Propriedades do Fluido S1 Utilizado no Trabalho de Tabuteau (2007)	65
6.6	Propriedades Físicas dos Fluidos de Trabalho de Dubash (2003)	72
6.7	Propriedades Físicas do Fluido com Reologia Variável no Tempo	78
6.8	Propriedades Físicas de um dos Fluidos de Trabalho de Dubash (2003)	81
6.9	Propriedades Físicas do Fluido utilizado com Reologia Variável no Tempo	84

Lista de Símbolos e Abreviaturas

Símbolos

a : Aceleração da partícula no fluido $\left[\frac{m}{sg^2}\right]$

A : Área transversal da partícula imersa no fluido $[m^2]$

H^* : Coeficiente adimensional para simplificar equação de aceleração $[-]$.

B : Parâmetro de controle da função de índice de consistência em função do tempo. $[N]$

B^* : Coeficiente adimensional para simplificar equação de aceleração.

Bi_{HB} : número de Bingham para Herschel-Bulkley, também conhecido como número de Bingham Generalizado ou Tensão limite de escoamento adimensional $[-]$

c : Subíndice que indica que a propriedade em análise pertence à fase continua. Neste trabalho a fase continua vai ser sempre líquida.

d : Subíndice que indica que a propriedade em análise pertence à fase dispersa. Neste trabalho a fase dispersa pode ser gasosa ou sólida.

C : Parâmetro de controle da função de tensão limite em função do tempo. $[-]$

C^* : Coeficiente adimensional para simplificar equação de aceleração $[-]$.

C_d : Coeficiente de arrasto da partícula imersa no fluido $[-]$

d : Diâmetro da partícula imersa fluido $[m]$

d_c : Diâmetro da coluna de fluido $[m]$

F_b : Força de empuxo ou flutuação $[N]$

F_w : Peso da partícula $[N]$

F_d : Força de arrasto $[N]$

F_{pd} : Força causada pela pressão do gás na interface da bolha $[N]$

F_{pc} : Força causada pela pressão do fluido na interface da bolha $[N]$

F_r : número de Froude $[-]$

g : Gravidade $\left[\frac{m}{sg^2}\right]$

h : Profundidade da partícula ou bolha $[m]$

H : Parâmetro de controle da função de Índice de consistência em função do tempo $[N]$.

k : Índice de consistência do fluido $[Pa.sg^n]$.

m : Massa da partícula $[kg]$.

M : Massa molar do ar $\left[\frac{kg}{mol}\right]$.

n : Índice de comportamento ou power-law $[-]$.

P_d : Pressão da bolha de gás ou fase dispersa $[Pa]$.

P_o : Pressão atmosférica ao nível do mar=101325 $[Pa]$.

P_h : Pressão hidrostática do fluido a uma determinada profundidade $[Pa]$.

P_d : Pressão interna da bolha de gás para uma determinada profundidade $[Pa]$.

P_c : Pressão do fluido ou fase continua para uma determinada profundidade $[Pa]$.

P_γ : Aumento da pressão causada pela tensão superficial γ do fluido na bolha de gás $[Pa]$

R : Constante universal dos gases $[\frac{J}{K.mol}]$

T : temperatura do gás $[K]$

Re_{pl} : Reynolds Power-Law, também conhecido como Reynolds generalizado $[-]$

x : Fator de correção de superfície ou polimento da partícula $[-]$

y : Fator de correção reológico do fluido $[-]$

Símbolos Gregos

γ : Tensão superficial do fluido $[\frac{N}{m}]$

τ_o : Tensão limite do fluido $[Pa]$

$\dot{\gamma}$: Taxa de cisalhamento do fluido $[s^{-1}]$

μ : Viscosidade em Fluido Newtoniano $[Pa.s]$

μ_0 : Viscosidade Inicial em Fluido com reologia variavel no tempo $[Pa.s]$

ν : Velocidade da partícula imersa no fluido $[\frac{m}{sg}]$

ρ : Termo geral para indicar densidade do fluido $[\frac{kg}{m^3}]$

ρ_o : Termo geral para indicar densidade inicial do fluido $[\frac{kg}{m^3}]$

ρ_c : Densidade do fluido da fase continua $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

\forall : Volume da partícula imersa no fluido $[m^3]$

ρ_d : Densidade da partícula ou fase dispersa $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

τ_o : Tensão limite de escoamento do fluido $[Pa]$

τ_{oo} : Tensão limite inicial de escoamento do fluido $[Pa]$

σ_{ν_i} : Porcentagem do desvio da velocidade da bolha ao desprezar a tensão superficial $[\%]$

ν_{γ_i} : Velocidade da bolha levando em conta a tensão superficial $\left[\frac{m}{sg}\right]$

$\nu_{s\gamma_i}$: velocidade da bolha desprezando a tensão superficial $\left[\frac{m}{sg}\right]$

1

Introdução

Escoamentos multifásicos tem sido alvo de uma ampla variedade de estudos nas ultimas décadas, o interesse no campo da engenharia está na aplicação em inúmeros processos industriais como no processamento de alimentos, em metalúrgicas, bebidas, aplicações medicas, na extração de petróleo e até bio-engenharia e turbomáquinas. Como exemplos cita-se o caso de injeção de gás durante o processo de fabricação de bebidas, adição de material particulado na preparação de alimentos, a circulação de fluidos de perfuração em poços de petróleo, a fabricação de medicamentos, e a migração de gás no interior de um poço de petróleo durante o processo de cimentação. Dessa forma, observa-se que o campo de aproveitamento das pesquisas nesta área são muitas e podem gerar grandes benefícios ao setor industrial trazendo melhorias na qualidade de vida da população.

No entanto o estudo dos escoamentos multifásicos não é fácil, depende de vários parâmetros reológicos, cinemáticos e geométricos. Um exemplo é a reologia da fase continua de um sistema multifasico, pode ser newtoniana ou não-newtoniana. A fase dispersa pode ser gasosa, sólida ou líquida, e no caso de ser gasosa, as bolhas têm diâmetro variável. Além disso, pode haver recirculação de gás no interior da bolha, e seu formato pode variar em função da velocidade, reologia, etc. Adicionalmente, temos que considerar outros fatores como a velocidade da partícula, a temperatura do sistema, difusão de gás e troca de calor entre as fases. Também existem fatores externos como a vazão de injeção de gás, impurezas presentes nos fluidos e até o formato do injetor de gás, que podem afetar consideravelmente o fenômeno do deslocamento da bolha. Em conclusão, está é uma área ainda em desenvolvimento, que tem muito por ser pesquisado e descoberto. Este trabalho se insere neste contexto, e pretende oferecer um pequeno avanço na análise destes sistemas multifasicos.

Nesta pesquisa estamos interessados especialmente por um fenômeno, a migração de bolhas de gás durante o processo de cimentação de poços de petróleo, porem é importante ressaltar que o alcance deste trabalho vai além de bolhas de gás em pastas de cimento, já que o modelo desenvolvido também pode ser aplicado a partículas sólidas, líquidas ou gasosas, em fluidos

newtonianos e viscoplásticos.

Nesta pesquisa simulamos fluidos Newtonianos e viscoplásticos. Nos fluidos newtonianos a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação e não possui tensão limite de escoamento que cause uma resistência inicial ao escoamento. Os fluidos viscoplásticos como Herschel-Bulkley e Bingham possuem uma tensão limite de escoamento τ_o , i. e., só escoam após a aplicação de tensão superior a este valor crítico. Outro comportamento interessante se apresenta nos fluidos Power-Law (pseudoplasticos ou dilatantes) e Herschel-Bulkley onde a tensão de cisalhamento experimentada pelo fluido está relacionada de forma não linear com a taxa de cisalhamento, este parâmetro conhecido como índice Power-Law n mede o grau de pseudoplasticidade do fluido ou desvio do comportamento newtoniano. Mais detalhes dos fluidos comentados são detalhados na seção (A).

Na figura 1.1 observa-se a relação entre a tensão de cisalhamento e taxa de deformação dos diferentes fluidos analisados.

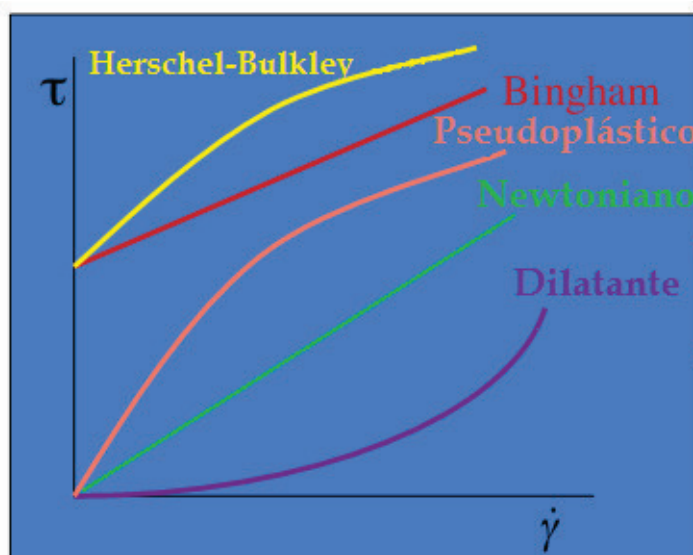


Figura 1.1: Tensão de Cisalhamento para Diferentes Tipos de Fluidos Não Newtonianos em Função da Taxa de Cisalhamento

Agora falando de nosso processo industrial de interesse, as operações de cimentação têm grande importância na construção de poços de petróleo: elas permitem isolamento hidráulico entre as zonas permeáveis, promovem sustentação mecânica ao poço e reduzem a corrosão do revestimento. Uma operação de revestimento mal sucedida poderá requerer correções, o que em muitos casos é de difícil solução e pode resultar na perda de controle do poço, com seus custos adicionais. Grande parte destes problemas são causados pelo ineficiente deslocamento do fluido de perfuração antes da cimentação, porém falhas também podem ocorrer pela migração de gás durante a cimentação ou

durante o canhoneio do poço. Em ambos casos podem-se intercomunicar várias zonas com isolamento hidráulico, que pode levar à perda de controle sobre os fluidos produzidos e injetados, e para o caso das operações de fraturamento hidráulico e acidificação, pode-se inclusive causar colapso do revestimento.

A motivação neste trabalho está no maior conhecimento dos fenômenos físicos envolvidos para melhorar os processos relacionados à cimentação de um poço, uma maior compreensão deste fenômeno vai permitir um melhor planejamento e controle do processo de cimentação, atingindo maiores patamares de eficiência na produção e reduzindo os custos relacionados a manutenção e reparação do poço.

Para abordar este problema foi desenvolvido um modelo matemático simplificado, que leva em consideração os fatores mais importantes no fenômeno de escoamento de fluidos bifásicos. Este modelo foi validado para partículas gasosas e sólidas, considerando partículas esféricas em todo momento e migração para baixos números de Reynolds (≤ 0.3). O modelo matemático foi solucionado numericamente utilizando ferramentas computacionais, o método utilizado é conhecido como Runge kutta de baixa ordem (Low order method) de Bogacki & Shampine (1989). Para validar a confiabilidade nos resultados e a metodologia de solução, foram feitas validações com resultados experimentais da literatura, sendo que os experimentos avaliados possuem condições experimentais variadas, que asseguram a qualidade das respostas.

A presente dissertação está dividida em 8 capítulos. Neste primeiro capítulo (1) se apresentam a introdução, a motivação da pesquisa e os objetivos. No segundo capítulo (2) se apresenta a revisão bibliográfica, indicando as principais fontes de informação e suas características. No terceiro capítulo (3) se desenvolve o modelo matemático para escoamento multifásico, assim como o modelo simplificado e o adimensional. No quarto (4) se apresenta a metodologia de solução do modelo, e os detalhes do programa utilizado para solucionar o modelo numericamente. No quinto (5) se apresenta a validação dos resultados com a literatura consultada. No sexto (6) se oferecem os resultados da pesquisa com relação à cinemática da bolha e seu comportamento frente a diferentes reologias como as suportadas numa pasta de cimento. No capítulo sete (7) temos as conclusões da pesquisa e as sugestões para trabalhos futuros. Finalmente referencias bibliográficas utilizadas neste trabalho e varios anexos como por exemplo um pequeno glossário (A) de termos e definições, também foram anexadas várias tabelas (B) para o cálculo rápido do diâmetro, velocidade e coeficiente de arrasto para diferentes sistemas multifásicos e finalmente a rotina desenvolvida (C) para simular a cinemática e dinâmica dos sistemas multifásicos de interesse neste trabalho.

1.1

Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático simplificado para a migração de bolhas de gás em pastas de cimento. Deseja-se simular as diferentes condições de migração de uma bolha de gás durante o processo de cimentação de um poço de petróleo.

Vai-se estudar o efeito causado pela massa da bolha de gás e a tensão superficial do fluido no comportamento cinemático da bolha.

Deseja-se analisar os efeitos de outros parâmetros reológicos como índice de consistência k , índice Power-Law n e tensão limite de escoamento τ_o na cinemática da bolha .

Desenvolver um modelo adimensional para o modelo matemático deste trabalho.

Finalmente vai ser simulado o efeito causado por condições reológicas variáveis no tempo como no caso das pastas de cimento que sofrem um processo de curado no tempo.

2

Revisão bibliográfica

Existe uma grande quantidade de pesquisas relacionadas com o trabalho desenvolvido aqui. Algumas pesquisas analisadas abordaram temas como a cinemática e dinâmica de bolhas de gás se deslocando em distintos tipos de fluidos. Outros autores se interessaram por analisar partículas sólidas com diferentes formatos e até partículas líquidas não miscíveis na fase contínua. Também foram analisados trabalhos de autores interessados no crescimento de bolhas de gás e suas características, tais como o diâmetro e formato da bolha. As técnicas de solução também são muito variadas, desde as tradicionais técnicas experimentais usando câmeras fixas, até o uso de câmeras deslocáveis de alta velocidade e partículas traçadoras no fluido. Da mesma forma existem técnicas computacionais baseadas em elementos finitos ou outras mais complexas com matemática mais robusta. Outros trabalhos revisados, estão orientados ao análise do processo industrial de interesse neste trabalho, o deslocamento de bolhas de gás em pastas de cimento, isto com a intenção de fazer o modelo aplicável às condições existentes durante a cimentação de um poço de petróleo.

O principal objetivo desta seção é apresentar uma pequena mostra da variedade de trabalhos revisados e a variedade de soluções possíveis para o caso de bolhas de gás em fluidos não newtonianos. Atualmente existem muitas pesquisas sendo desenvolvidas neste campo da reologia, e não necessariamente o modelo apresentado aqui é único ou tem uma solução definitiva ao problema proposto. Ainda falta trabalho para conseguir resultados conclusivos, mas o avanço nesta pesquisa é um aporte significativo.

Saffman (1969) desenvolveu um trabalho na área de bolhas de gás se deslocando num reservatório com líquido. As bolhas foram captadas com a ajuda de câmeras fixadas em determinadas posições. Desta forma conseguiu fazer um análise do movimento das bolhas de gás.

Grace (1973) confirmou que é possível relacionar as propriedades das bolhas de gás com parâmetros como o número de Reynolds, a diferença de densidades das fases, a tensão superficial, a viscosidade do fluido e o formato da partícula. Os resultados foram comparados satisfatoriamente com dados

experimentais de vários autores.

Harper (1972) & Clift (1978) apresentaram duas revisões sobre o estado da arte do escoamento de bolhas de gás em fluidos. Os dois trabalhos se tornaram referencia para futuras pesquisas.

Braga et al. (1981) fizeram um trabalho experimental usando uma câmera deslocante de alta velocidade, a velocidade da câmera era muito próxima à da bolha, permitindo identificar formas geométricas da bolha e movimentos secundários. Neste trabalho se apresentam resultados relacionados com à características da esteira da bolha, coeficientes de arrasto e velocidade da bolha.

Karamanev (1994) apresentou uma equação semi-analítica para o movimento de uma única bolha de gás de formato e tamanho quaisquer num fluido com presença de partículas simulando contaminação. Fez duas considerações; a recirculação da bolha não interfere nos resultados, e o coeficiente de arrasto pode ser calculado só com base nas características geométricas da bolha. O autor conseguiu boa concordância com os resultados experimentais consultados.

Duineveld (1995) fez ensaio com bolhas de gás em água altamente purificada, neste trabalho o autor calculou o diâmetro das bolhas em base ao volume de gás injetado nas bolhas. Foram comparados os resultados com os obtidos por Moore (1965), para raios de bolha acima de 0.6 mm os resultados não foram conclusivos.

Maganudet (1995), usando a técnica de volumes finitos resolveu as equações de Navier-Stokes em termos da velocidade e a pressão. Ele analisou o caso de esferas rígidas e bolhas de gás esféricas não viscosas em fluidos variados para um Reynolds entre 0.1 e 300. Posteriormente foram comparados os resultados com os dados experimentais de alguns autores, conseguindo boa concordância.

Atapattu et al. (1995) desenvolveu um trabalho experimental para escoamento de esferas solidas em carbopol. O interessante deste trabalho foram as equações utilizadas para desenvolver o modelo matemático, que coincidem em parte com as utilizadas neste trabalho e foi uma fonte importante de informação experimental.

Beaulne et al. (1986) desenvolveu um trabalho experimental similar ao trabalho de Atapattu et al. (1995). Foi utilizado um fluido Heschel-Bulkley para escoamento de esferas solidas. Os resultados concordaram ao comparar com a literatura. As equações utilizadas no modelo matemático são similares às utilizadas neste trabalho.

Blackery et al. (1997) também desenvolveu um trabalho experimental, mas aplicado em fluidos tipo Bingham para escoamento de esferas sólidas.

Os dados foram adquiridos usando uma esfera fixa e gerando um escoamento de fluido viscoplástico em torno dela. Os resultados concordaram com as comparações feitas com a literatura.

Silveira (1998) fez uma pesquisa numérica de escoamento turbulento não disperso utilizando o método de simulação de grandes vórtices. Este trabalho permitiu a visualização a recirculação interna nas bolhas de gás.

Raymond (2000) fez um trabalho numérico e experimental para bolhas em fluidos viscosos. O trabalho numérico foi baseado nas equações de Navier-Stokes. O trabalho experimental concorda com a literatura consultada.

Viais (1999) desenvolveu um trabalho numérico e experimental de bolhas de gás se deslocando num meio líquido. Na parte experimental foi utilizada uma câmera fixa para adquirir os dados e na parte numérica solucionou as equações de Navier-Stokes com a técnica de elementos finitos. Também determinou uma técnica para visualizar as linhas de corrente ao redor e no interior da bolha. Os resultados concordaram como uma incerteza razoável.

Chhabra (1999) descreve a teoria e apresenta resultados de problemas envolvendo o escoamento de bolhas e partículas em fluidos não newtonianos. Adicionalmente o autor enfoca seu livro ao setor industrial e suas aplicações. O autor além de apresentar a teoria relacionada com esta pesquisa, também fez vários trabalhos de aplicação no setor industrial. Foi possível conferir alguns resultados das simulações com os exemplos indicados no livro.

Dewsbury (2000) desenvolveu um trabalho muito completo em todos os aspectos relacionados ao deslocamento de partículas sólidas e gasosas em fluidos viscoplasticos para uma ampla faixa de aplicação de número de Reynolds. Fez estudos experimentais para conseguir resultados como: coeficiente de arrasto, trajetória da partícula, velocidade limite, etc. Adicionalmente determinou novas equações para coeficiente de arrasto, e analisou o efeito de parede nos resultados experimentais.

Dubash (2003) desenvolveu um modelo matemático baseado nas equações de Navier-Stokes, e desenvolveu algumas simplificações dele. Também determinou as condições necessárias para uma bolha de gás reduzir sua velocidade até parar num fluido viscoplástico. Adicionalmente, fez testes experimentais de bolhas de gás em fluido tipo Herschel-Bulkley.

Gonzalo et al. (2005) desenvolveram um trabalho experimental para determinar as condições sobre as quais acontece a migração de gás no interior de poços de petróleo durante a cimentação. Artigo muito bom para determinar as condições reológicas e de operação nas quais um modelo matemático tem que funcionar.

Funfschilling (2006) trabalhou numa pesquisa experimental para anali-

sar a influência causada pela injeção periódica de bolhas de gás, fenômeno que também é conhecido como efeito de população. Fez teste com diferentes períodos de injeção em glicerol e identificou vários comportamentos interessantes na cinemática da partícula.

Chhabra (2006) aborda o tema da reologia de fluidos desde um ponto de vista mais teórico e detalhado que na referencia do mesmo autor (1999). é uma importante fonte de consulta teórica neste trabalho de pesquisa.

Tabuteau et al. (2007) fez um trabalho experimental para partículas esféricas em fluido viscoplástico.

Sikorski et al. (2009) fez um trabalho experimental para deslocamento de bolhas de gás em fluidos viscoplásticos. A pesquisa dele foi orientada a determinar a influência do formato da bolha na cinemática da partícula. O autor trabalhou especificamente no estudo da influência da geometria da bolha.

Rocha (2010) fez um trabalho orientado a caracterizar o fenômeno físico relacionado com a migração de bolhas de gás. A pesquisa foi feita desde um ponto de vista mais operacional, por exemplo tipos de cimento, pressões no poço petrolífero, tipos de migração de gás, problemas causados pela migração, dispersantes e aditivos, etc.

Kelbaliyev (2011) fez uma ótima compilação de equações para o cálculo do coeficiente de arrasto C_d , detalhou as características e a forma como foram calculadas cada uma das equações. Um resumo é adequado para quem deseja analisar novas e possíveis equações de coeficiente de arrasto e suas aplicações.

Pinto et al. (2011) desenvolveram um modelo matemático simplificado e fizeram vários testes no reômetro para adquirir informações relacionadas ao comportamento de pastas de cimento em função da taxa de cisalhamento e o tempo.

3

Formulação Matemática

Para desenvolver o modelo matemático e prever o comportamento de múltiplos fluidos em interação, existem duas metodologias comumente usadas, uma metodologia analítica e outra experimental. Existem vantagens e desvantagens relacionadas com o custo e tempo requerido na pesquisa que foram analisadas para determinar a formulação mais conveniente para este trabalho de pesquisa.

A metodologia experimental consiste em realizar vários experimentos e adquirir os resultados para desenvolver um modelo que forneça resultados para as condições estudadas, sendo assim, a principal vantagem da metodologia experimental está nos tempos menores necessários para conseguir respostas, mas também possui a desvantagem de que as respostas são válidas unicamente para as condições específicas da pesquisa e os custos do estudo são maiores devido ao investimento em equipamentos. Neste caso, como o modelo desenvolvido é criado a partir de dados experimentais, os resultados são válidos somente para a faixa dos dados obtidos e são de difícil extrapolação para outras condições.

A metodologia analítica consiste em desenvolver um modelo matemático baseado nos fenômenos físicos que afetam a dinâmica e interação dos fluidos, esta metodologia possui a vantagem de que o modelo pode ser aplicado para uma faixa maior de processos, além os custos do estudo são menores. A desvantagem desta metodologia está no maior tempo de pesquisa necessária para conseguir resultados certos, pois é necessário entender a profundidade do fenômeno. Para esta pesquisa a prioridade é desenvolver um modelo que funcione para uma ampla faixa de condições reológicas, assim, é possível aplicar aos diferentes tipos de cimentos utilizados nos processos de cimentação. Com esta metodologia podemos determinar os fatores que afetam significativamente a migração de bolhas de gás e simplificar o modelo. Por todas estas razões foi utilizada uma técnica analítica neste trabalho, esta metodologia vai permitir analisar melhor os diferentes fenômenos existentes no escoamento de fluidos multifásicos durante a cimentação, e também vai permitir validar o modelo com uma maior quantidade de dados experimentais presentes na literatura existente.

O modelo matemático desenvolvido neste trabalho está baseado numa análise dinâmica feita numa bolha de gás isolada submersa num meio líquido conforme mostrado na figura 3.1.

Para começar o análise foi feito um DCL (Diagrama de corpo livre) de uma partícula com uma densidade menor que a densidade do fluido onde está submersa, neste caso pode ser bolha de gás submersa é isolada se deslocando num meio líquido conforme Figura 3.1. Mais na frente vai se desenvolver um modelo genérico que pode ser usado para qualquer fluido bifásico onde a fase discreta (bolha de gás ou partícula sólida) seja esférica, como por exemplo uma bolha de gás num meio líquido, ou uma partícula sólida se deslocando num meio líquido, ou uma partícula líquida num meio gasoso, etc.

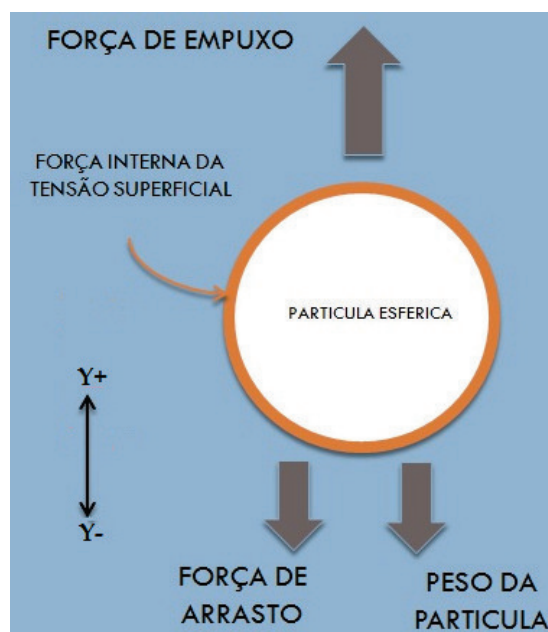


Figura 3.1: Balanço de Forças em Bolha de Gás.

O somatório de forças da bolha de gás na Figura 3.1 é dado por.

$$\sum F = m.a \quad (3-1)$$

Vai-se considerar a direção vertical ascendente como positiva e a direção vertical descendente como negativa nas figuras e equações.

Para este modelo matemático vão se levar em conta três forças principais, a força de flutuação ou empuxo F_b , o peso da bolha F_w e a força de arrasto F_d assim.

$$F_b - F_w - F_d = m.a \quad (3-2)$$

onde m é a massa e a é a aceleração da bolha.

A força de flutuação é dada por

$$F_b = g \cdot \forall \cdot \rho_c \quad (3-3)$$

Onde g é a gravidade, \forall é o volume da bolha e ρ_c é a densidade da fase continua, ou seja o fluido onde a bolha está submersa.

O volume da bolha de gás esférica é dada por

$$\forall = \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \quad (3-4)$$

Onde d é o diâmetro da bolha.

Substituindo a equação (3-4) em (3-3) conseguimos determinar a equação final para força de empuxo F_b . Assim

$$F_b = \frac{g \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho_c}{6} \quad (3-5)$$

O peso da bolha F_w é dado por

$$F_w = g \cdot \forall \cdot \rho_d \quad (3-6)$$

onde ρ_d é a densidade da bolha esférica, também chamada fase dispersa.

Substituindo a equação (3-4) em (3-6) chega-se a seguinte expressão como a equação de peso da bolha.

$$F_w = \frac{g \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho_d}{6} \quad (3-7)$$

somando a força de empuxo (3-5) e o peso da bolha (3-7) se chega a

$$F_b - F_w = \frac{g \cdot \pi \cdot d^3 \cdot (\rho_c - \rho_d)}{6} \quad (3-8)$$

Para o cálculo da força de arrasto se utiliza a seguinte equação por definição

$$F_d = \frac{1}{2} \cdot \rho_c \cdot \nu^2 \cdot A \cdot C_d \quad (3-9)$$

Onde ν é a velocidade da bolha no fluido e A é a área transversal da bolha esférica e C_d é o coeficiente de arrasto.

A área transversal da bolha esférica é dada por

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (3-10)$$

Substituindo a equação de área transversal (3-10) na força de arrasto (3-9) se chega à seguinte expressão

$$F_d = \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot \nu^2 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot C_d \quad (3-11)$$

Ao combinar as equações de força de empuxo (3-5), força de arrasto (3-11) e peso da bolha (3-7) no DCL (3-2) se chega na seguinte expressão.

$$m \cdot a = \frac{g \cdot \pi \cdot d^3 \cdot (\rho_c - \rho_d)}{6} - \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot \nu^2 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot C_d \quad (3-12)$$

Onde a massa da bolha é dada por

$$m = \frac{\rho_d \cdot \pi \cdot d^3}{6} \quad (3-13)$$

Adicionando a equação de massa da bolha (3-13) em (3-12) se chega a

$$\frac{g \cdot \pi d^3 \cdot (\rho_c - \rho_d)}{6} - \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot \nu^2 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot C_d = \frac{\rho_d \cdot \pi \cdot d^3}{6} \cdot a \quad (3-14)$$

Fatorizando e simplificando a equação anterior conseguimos calcular a equação final de aceleração a de uma bolha esférica num fluido.

$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_c \cdot \nu^2 \cdot C_d}{\rho_d \cdot d} \quad (3-15)$$

A equação (3-15) aplica para uma partícula onde a densidade é menor que a densidade do fluido, neste caso usamos uma bolha de gás mas pode ser qualquer partícula sólida, líquida ou gasosa. Este modelo também pode ser usado em partículas onde sua densidade seja maior que a densidade do fluido, neste caso usamos uma partícula sólida de densidade maior. Para isso é necessário algumas modificações nas equações. Na figura (3.2) se mostra o DCL para este caso.

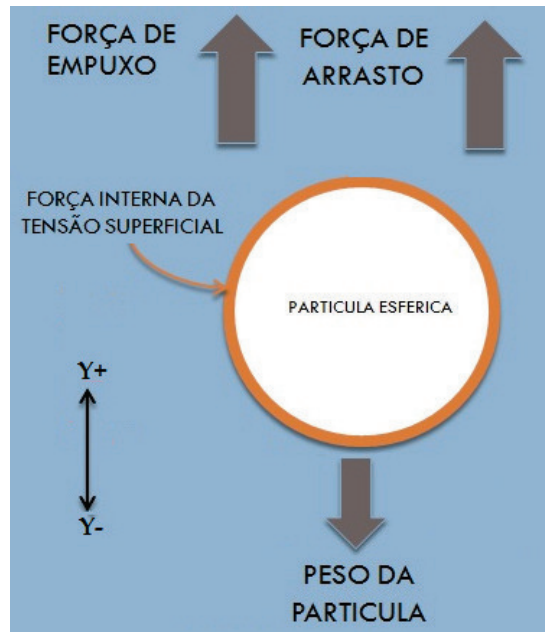


Figura 3.2: Balanço de Forças em Partícula Sólida.

Para o DCL da figura (3.2) a equação de aceleração sofre uma mudança de sinal no termo de coeficiente de arrasto. Como a partícula sólida está descendo, a força de arrasto tem direção contrária, vertical positiva. O movimento descendente da partícula é causada pela densidade maior à densidade do fluido. A equação de aceleração para partícula sólida (3-16) possui uma mudança de sinal com relação à equação (3-15), o resto da equação continua igual.

$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_c \cdot \nu^2 \cdot C_d}{\rho_d \cdot d} \quad (3-16)$$

Finalmente, com o objetivo de generalizar os resultados para partículas sem importar sua densidade basta usar a seguinte equação (3-17). Nela é determinada a direção da força de arrasto em função da diferença de densidades e por isso pode ser usada para partícula esférica com densidade maior ou menor que a do fluido.

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \frac{\rho_c \cdot v^2 \cdot C_d}{\rho_d \cdot d} \quad (3-17)$$

Esta equação ainda tem duas incógnitas, o coeficiente de arrasto C_d e o diâmetro da bolha d . Nos seguintes capítulos vão ser definidas as equações para estas incógnitas.

3.1

Calculo do coeficiente de arrasto

O Coeficiente de Arrasto representa a força adimensional usada para quantificar o arrasto ou resistência de uma partícula ao avanço num meio fluido, entre maior o coeficiente, maior a força de arrasto que vai sofrer a partícula.

Para o cálculo do coeficiente de arrasto C_d existe uma grande variedade de modelos com diferentes características e calculados por diferentes metodologias. Por essa razão não vamos desenvolver uma nova equação de coeficiente de arrasto, vamos identificar na literatura consultada o melhor coeficiente de arrasto para nosso modelo matemático. Para escolher o coeficiente adequado para este trabalho, foram levados em conta alguns critérios importantes e assim conseguir um modelo que cumpra nossas exigências. O primeiro critério é que seja uma equação simples que não utilize muitos parâmetros para o cálculo do coeficiente de arrasto, o segundo critério é que se aplique a uma ampla faixa de fluidos newtonianos e não newtonianos, e o terceiro critério é que os resultados tenham uma baixa incerteza ($\leq 10\%$) e a tendência dos resultados numéricos coincida com os resultados experimentais.

Uma vez analisados os diferentes modelos existentes na literatura, e revisadas suas vantagens e desvantagens se decidiu utilizar o modelo de du Plessis e Ansley (2006). O modelo citado foi selecionado principalmente pela flexibilidade do modelo, permite ser usado para diferentes tipos de fluidos como Herschel Bulkley, Bingham, Power-Law e Newtoniano. Adicionalmente pode ser usado em diferentes sistemas multifásicos sólidos, líquidos ou gasosos. Nesta pesquisa validamos os resultados para bolha de gás imersa numa fase líquida e também partícula sólida imersa em fase líquida. Este modelo em teoria pode ser usado para outras combinações como partícula líquida imersa em fase líquida ou partícula sólida imersa em fase gasosa, mas não foi validado neste trabalho.

Na seção (B.1) se apresenta um pequeno compilado de algumas das equações de arrasto comumente usadas, o resumo foi feito pelos autores Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005). No compilado existe uma ampla variedade de equações para cálculo do coeficiente de arrasto, todas elas para variadas condições reológicas e de operação do sistema, que faz possível mudar de equação de coeficiente de arrasto caso as condições do sistema de interesse não correspondam com as apresentadas aqui, nesse caso teria que conferir se a nova equação fornece resultados certos.

Este modelo está baseado nas equações para esfera sólida em fluido viscoplástico, mas foi determinado que as equações de du Plessis e Ansley podem ser aplicadas para bolhas de gás em fluidos viscoplásticos, sendo necessário adicionar um fator de correção da superfície da partícula x que corrige o efeito de recirculação de gás presente nas bolhas, algo já pesquisado por du Plessis e Ansley (2006). É importante levar em conta que este modelo pode ser aplicado em vários tipos de fluidos como Herschel-Bulkley, Power-Law, Bingham e Newtoniano, além de ser simples e atingir resultados na faixa de incerteza desejada para esta pesquisa ($\leq 10\%$).

Antes de continuar vamos lembrar algumas características dos diferentes tipos de fluido em análise neste trabalho. O fluido newtoniano está caracterizado pela viscosidade constante μ , mas como este parâmetro vai ser usado em fluidos viscoplasticos como power-law, bingham e herschel-bulkley, de forma geral a viscosidade vai ser chamada como índice de consistência k . A tensão limite τ_o aplica para os fluidos Bingham e Herschel-Bulkley, e representa a tensão necessária para o fluido começar a escoar. E finalmente temos o índice power-law n que mede o grau de pseudoplasticidade do fluido ou afastamento do comportamento newtoniano. Mais detalhes sobre os fluidos de interesse pode encontrar na seção (A).

O coeficiente de arrasto no modelo de du Plessis e Ansley é dado por

$$Cd = \frac{24}{Re_{pl}} \cdot x \cdot (1 + y \cdot Bi_{hb}) \quad (3-18)$$

Onde Re_{pl} é o número de Reynolds power-law, também conhecido como número de Reynolds Generalizado, Bi_{hb} é o número de Bingham para fluido Herschel-Bulkley, também conhecido como número de Bingham Generalizado, x é o fator de correção de superfície e y é o fator de correção reológico. Este fator de correção reológico corrige os efeitos causados por utilizar o modelo com diferentes características reológicas.

O número de Reynolds generalizado é dado por

$$Re_{pl} = \frac{\nu^{2-n} \cdot d^n \cdot \rho_c}{k} \quad (3-19)$$

O número de Bingham generalizado é dado por

$$Bi_{hb} = \frac{\tau_o}{k} \cdot \left(\frac{d}{\nu} \right)^n \quad (3-20)$$

Onde τ_o é a tensão limite do fluido, k é o índice de consistência do fluido e n é o índice de comportamento ou power-law.

A equação de coeficiente de arrasto tem dois fatores de correção, o fator de correção x leva em conta o polimento da superfície da partícula esférica e a recirculação de gás no caso de bolha de gás. É importante observar que este fator não muda exclusivamente pelas características da superfície, outros fatores podem influir, porém em menor medida.

O fator de correção y leva em conta as variações na reologia do fluido da fase contínua, é importante notar que este fator não muda exclusivamente pelas características da reologia, outros fatores podem influir porém em menor medida.

Da equação de aceleração (3-17) e substituindo a equação de coeficiente de arrasto de du Plessis e Ansley (3-18) se chega à seguinte expressão

$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \frac{\rho_c \cdot \nu^2}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{24}{Re_{pl}} \cdot x \cdot (1 + y \cdot Bi_{hb}) \quad (3-21)$$

Substituindo Re_{pl} (3-19), Bi_{hb} (3-20) em (3-21).

$$a = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \frac{\rho_c \cdot \nu^2}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{24 \cdot k}{\nu^{2-n} \cdot d^n \cdot \rho_c} \cdot x \cdot \left(1 + \frac{y \cdot \tau_o}{k} \cdot \left(\frac{d}{\nu} \right)^n \right) \quad (3-22)$$

Fatorizando e simplificando a equação se chega na seguinte expressão de aceleração.

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (3-23)$$

Esta equação ainda tem uma incógnita, o diâmetro da partícula. Quando a partícula é uma esfera sólida, o diâmetro é constante e nesse caso não existe problema. Mas quando a partícula é uma bolha de gás, o diâmetro da bolha aumenta com o deslocamento, nesse caso temos que calcular uma nova expressão para o cálculo do diâmetro da bolha.

3.2

Calculo da equação para o diâmetro da bolha de gás

Quando a partícula no fluido não é sólida e sim uma bolha de gás, o diâmetro da bolha aumenta com o deslocamento desta, e por essa razão se faz necessário o cálculo da equação do diâmetro da bolha em função da profundidade. Embora existam vários modelos para o cálculo do diâmetro

da bolha, decidiu-se construir uma expressão própria com o objetivo de desenvolver um modelo mais simplificado. Entretanto, é possível usar outra equação de diâmetro de bolha se assim o desejar, existe uma ampla variedade de equações para outras condições reológicas e de operação que podem ser usadas neste modelo e simular seu caso de interesse, nesse caso teria que conferir que o modelo forneça resultados certos para seu sistema em análise. Na seção (B.2) vai encontrar um compilado de equações para cálculo de diâmetro da bolha dos autores Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005).

Para começar o modelo de cálculo do diâmetro de bolha é necessário primeiro calcular a pressão no interior da bolha de gás, e vamos começar aproximando o comportamento do gás da bolha como um gás ideal. Neste caso podemos usar a equação (3-24) de gás ideal, dada por

$$P_d \cdot V = M \cdot R \cdot T \quad (3-24)$$

Onde M é a massa molar do gás, para o caso de ar a massa molar seria $M = 0.0289 \frac{kg}{mol}$, e R é a constante universal dos gases $R = 8.314472 \frac{J}{K \cdot mol}$.

Para começar o cálculo da equação de diâmetro vamos imaginar a mesma bolha de gás em diferentes profundidades, conforme a figura (3.3) e a uma temperatura constante.

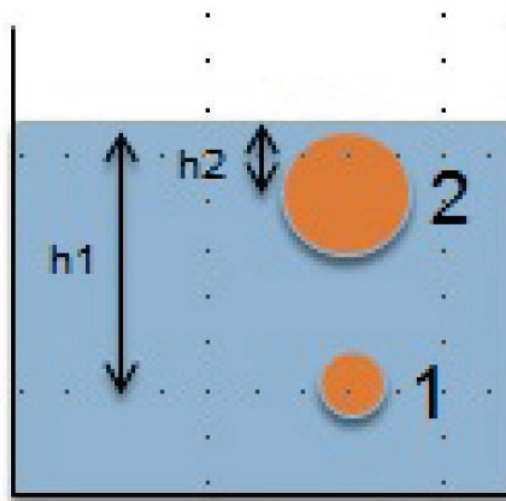


Figura 3.3: Bolha de Gás em Duas Posições 1,2.

Analisando a equação de gás ideal (3-24) encontramos que o valor do lado direito da equação de gás ideal (3-24) é sempre o mesmo para qualquer profundidade da bolha se consideramos temperatura constante ($T_1 = T_2 = T_3 = T_n = cte$) e massa molar também constante ($M_1 = M_2 = M_3 = M_n = cte$). Como M , R e T não mudam, é possível igualar as equações de gás ideal calculadas para profundidades diferentes sem problema, assim

Profundidade 1

$$P_{d1} \cdot \forall = M_1 \cdot R_1 \cdot T_1 \quad (3-25)$$

Profundidade 2

$$P_{d2} \cdot \forall = M_2 \cdot R_2 \cdot T_2 \quad (3-26)$$

Profundidade 3

$$P_{d3} \cdot \forall = M_3 \cdot R_3 \cdot T_3 \quad (3-27)$$

Para as 3 equações (3-25), (3-26) e (3-27) o lado direito é igual, então se chega na seguinte expressão.

$$M_1 \cdot R_1 \cdot T_1 = M_2 \cdot R_2 \cdot T_2 = M_3 \cdot R_3 \cdot T_3 = M_n \cdot R_n \cdot T_n = cte \quad (3-28)$$

Assim, igualando o lado direito das equações de gás ideal (3-25), (3-26) e (3-27).

$$P_{d1} \cdot \forall_1 = P_{d2} \cdot \forall_2 = P_{dn} \cdot \forall_n = cte \quad (3-29)$$

Onde P_d é a pressão interna da bolha de gás

Agora, para o cálculo da pressão da bolha de gás P_d numa profundidade determinada, levamos em conta vários fatores que alteram a pressão na bolha. Assim.

$$P_d = P_o + P_h + P_\gamma \quad (3-30)$$

Onde P_o é a pressão atmosférica, P_h é a pressão hidrostática e P_γ é o aumento de pressão causado pela tensão superficial γ da fase contínua ou meio líquido.

A pressão hidrostática P_h é dada por

$$P_h = -\rho_c \cdot g \cdot h \quad (3-31)$$

Onde h é a profundidade da bolha de gás.

Para o cálculo do aumento da pressão na bolha causado pela tensão superficial P_γ vamos usar de novo um diagrama de corpo livre-DCL mas agora vai ser aplicado sobre a metade superior de uma bolha de gás conforme a seguinte figura (3.4). Sobre esta metade agem 3 forças, uma força radial causada pela pressão interna do gás da bolha F_d , outra força radial causada pela pressão externa do fluido F_c externo e uma força que age tangencialmente à superfície da bolha causada pela tensão superficial F_γ , assim.

Ao fazer o somatório de forças e considerando a massa da meia bolha desprezível, temos

$$\sum F_{bolha} = F_d - F_c - F_\gamma = m \cdot a \approx 0 \quad (3-32)$$

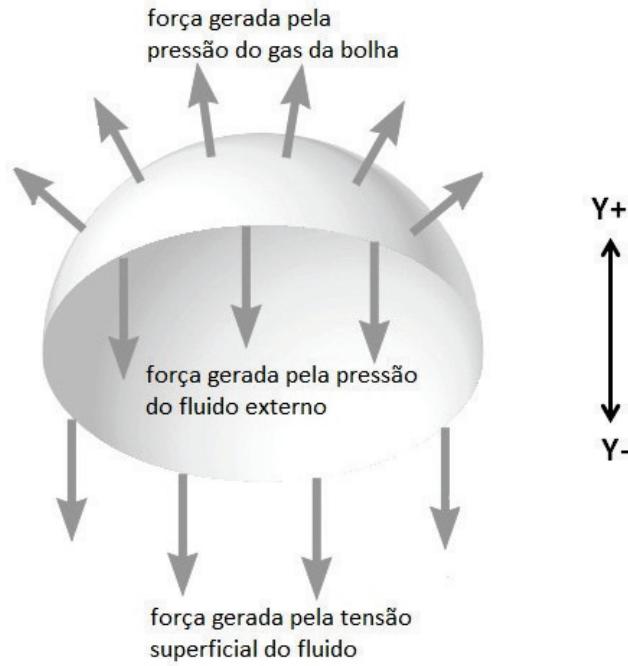


Figura 3.4: Balanço de Forças em Meia Bolha de Gás

Onde a força na direção vertical positiva F_d causada pela pressão interna da bolha, é dada por

$$F_d = P_d \cdot A \quad (3-33)$$

A força na direção vertical negativa F_c causada pela pressão do meio líquido, é dada por

$$F_c = P_c \cdot A \quad (3-34)$$

A área transversal da partícula esférica A , é dada por

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad (3-35)$$

além, a força na direção vertical negativa F_γ causada pela tensão superficial na interface, é dada por

$$F_\gamma = \pi \cdot d \cdot \gamma \quad (3-36)$$

Substituindo (3-33), (3-34), (3-35) e (3-36) no somatório de forças (3-32), obtemos a seguinte expressão.

$$\sum F_{bolha} = P_d \cdot A - P_c \cdot A - \pi \cdot d \cdot \gamma = 0 \quad (3-37)$$

Agora, levando em conta que a diferença de pressão entre o gás da bolha e o meio líquido da coluna de fluido é dada por

$$P_\gamma = P_d - P_c \quad (3-38)$$

Substituindo a equação (3-38) na equação (3-37) e fatorizando se calcula a diferença de pressão causada pela tensão superficial P_γ . Assim.

$$P_\gamma = \frac{\pi \cdot d \cdot \gamma}{A} = \frac{4 \cdot \gamma}{d} \quad (3-39)$$

Substituindo esta equação (3-39) na equação de pressão da bolha (3-30)

$$P_d = P_o + P_h + P_\gamma = P_o + \rho_c \cdot g \cdot h + \frac{4 \cdot \gamma}{d} \quad (3-40)$$

E substituindo na equação de gás ideal (3-29).

$$\left(P_o + \rho_c \cdot g \cdot h_0 + \frac{4 \cdot \gamma}{d_0} \right) \cdot V_o = \left(P_o + \rho_c \cdot g \cdot h + \frac{4 \cdot \gamma}{d} \right) \cdot V_n \quad (3-41)$$

lembrando que

$$V_{bolha} = \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \quad (3-42)$$

Substituindo (3-42) em (3-41) e fatorizando para deixar na forma de polinômio de grau 3 em função do diâmetro da bolha d e a profundidade h . Assim

$$(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h) \cdot d^3 + 4 \cdot \gamma \cdot d^2 - \left(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_0 + \frac{4 \cdot \gamma}{d_0} \right) \cdot d_0^3 = 0 \quad (3-43)$$

A equação final para o cálculo do diâmetro da bolha é expressada por

$$d^3 + \frac{4 \cdot \gamma}{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h)} \cdot d^2 - \left(\frac{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_0) \cdot d_0^3 + 4 \cdot \gamma \cdot d_0^2}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right) = 0 \quad (3-44)$$

Com a equação (3-44) o modelo matemático está finalizado. Agora se conta com duas equações, uma equação diferencial parcial, não homogênea, de ordem dois e tipo stiff (3-45), e um polinômio de grau 3 (3-46). Com estas duas equações vai se basear a pesquisa neste trabalho, é importante ressaltar que este modelo foi desenvolvido para baixos números de Reynolds (≤ 3) e bolha de gás ou partícula sólida esférica, fora destes limites o modelo não deve ser aplicado. Além o modelo só funciona para bolhas ou partículas isoladas, não foi considerado o fenômeno de população ou aglomeração nas equações e também não foi considerado o efeito de parede no caso de colunas de fluido. A seguir as duas equações finais do modelo simplificado são apresentadas.

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (3-45)$$

$$d^3 + \frac{4 \cdot \gamma}{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h)} \cdot d^2 - \left(\frac{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_0) \cdot d_0^3 + 4 \cdot \gamma \cdot d_0^2}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right) = 0 \quad (3-46)$$

3.3

Modelo Matemático Simplificado

O modelo matemático desenvolvido anteriormente tem uma desvantagem, as equações devem ser solucionadas com o apoio de ferramentas computacionais e programas especializados em resolver sistemas de equações diferenciais tipo stiff, como no caso das equações (3-45) e (3-46). Por isso foram feitas algumas aproximações com o objetivo de fornecer uma alternativa de solução rápida, fácil e sem precisar o uso de programas especializados. Esta vantagem pode ser muito útil no setor industrial onde pode ser difícil contar com acesso próximo a um computador no lugar de trabalho, ou não existe a facilidade para utilizar programas especializados para solução de sistemas de equações diferenciais.

Neste capítulo vai ser simplificado o modelo matemático, para isto vamos analisar dois parâmetros que oferecem a possibilidade de ser desprezados sem causar desvios significativos nos resultados: a tensão superficial do meio líquido e massa da bolha de gás. Neste capítulo só vai ser simplificado o modelo matemático, mas os resultados numéricos com a análise da influência deste dois parâmetros serão apresentados posteriormente. A avaliação da influência da tensão superficial pode ser consultada na seção (6.1), e a avaliação da influência da massa da bolha pode ser consultada na seção (6.2).

Inicia-se a simplificação com a equação de aceleração (3-45) do capítulo anterior.

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d).g}{\rho_d} + \frac{18.x}{\rho_d.d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k.\nu^n}{d^n} + y.\tau_o \right) \quad (3-47)$$

Primeiro vai ser multiplicada a equação de aceleração (3-47) pela densidade da bolha ρ_d para não ter problemas no denominador no caso de desprezar a massa da bolha.

$$a.\rho_d = (\rho_c - 1).g + \frac{18.x}{d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k.\nu^n}{d^n} + y.\tau_o \right) \quad (3-48)$$

Agora vai se desprezar a densidade do gás da bolha ρ_d que é o mesmo que desprezar massa da bolha m conforme as equações (3-49) e (3-50).

$$\rho_d \approx 0 \quad (3-49)$$

$$m \approx 0 \quad (3-50)$$

Ao aplicar esta aproximação na equação de aceleração da bolha (3-45) se consegue simplificar de forma importante o modelo, que é dado por

$$0 = \rho_c.g + \frac{18.x}{d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k.\nu^n}{d^n} + y.\tau_o \right) \quad (3-51)$$

Fatorizando a anterior equação (3-51), se chega na seguinte expressão (3-52) onde é possível calcular diretamente a velocidade da bolha sem solucionar equações diferenciais de nenhum tipo.

$$\nu = d. \left[\frac{y \cdot \tau_o}{k} - \frac{\rho_c \cdot g \cdot d}{18 \cdot x \cdot k} \cdot \frac{|\rho_d - \rho_c|}{(\rho_d - \rho_c)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (3-52)$$

A velocidade calculada na equação (3-52) não corresponde com a velocidade real da bolha de gás, ela tem uma diferença importante. Como foi desprezada a massa da bolha conforme a equação (3-50), a bolha não tem inércia e em consequência ante qualquer perturbação a aceleração dela é infinita até atingir uma velocidade de equilíbrio dinâmico. Neste trabalho chamamos essa velocidade como velocidade limite transiente, porque se refere à velocidade máxima que pode ser obtida para o diâmetro da bolha nesse instante, e como o diâmetro está em contínuo aumento, o comportamento é transiente e não permanente. Em poucas palavras, a equação (3-52) fornece a velocidade limite da bolha, uma velocidade onde existe o equilíbrio entre a força de arrasto C_d e a força de flutuação da bolha F_b para o diâmetro da bolha nesse instante, sem levar em conta o peso da bolha F_d . Se a massa estivesse sendo considerada a bolha se movimentaria a uma velocidade um pouco menor devido à desaceleração causada pela inércia da bolha. Outra observação importante da equação (3-52), é que a bolha é acelerada pelo aumento no diâmetro da bolha e não pela força de flutuação. Isto acontece porque ela está viajando sempre à velocidade limite em regime transiente, onde sempre existe equilíbrio de forças.

Existem várias equações na literatura para o cálculo da velocidade em bolhas de gás, na seção (B.3) pode consultar uma ampla variedade de equações compiladas pelos autores Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005) caso deseje utilizar para condições reológicas e de operação diferentes às deste trabalho.

Agora vai ser simplificada a equação de diâmetro da bolha (3-46).

$$d^3 + \frac{4 \cdot \gamma}{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h)} \cdot d^2 - \left(\frac{(P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_o) \cdot d_o^3 + 4 \cdot \gamma \cdot d_o^2}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right) = 0 \quad (3-53)$$

Assumindo a tensão superficial do fluido desprezível $\gamma \simeq 0$, e aplicando na equação de diâmetro da bolha (3-46), chegamos na seguinte expressão

$$d = \left(\frac{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_o}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot d_o \quad (3-54)$$

A equação (3-54) fornece o cálculo do diâmetro da bolha de gás sem levar em conta a variação causada pela tensão superficial.

Agora o modelo matemático composto pelas equações (3-52) e (3-54) está

simplificado, falta pesquisar em que condições pode ser aplicado este modelo sem que o erro seja significativo, os resultados podem ser consultados na seção (6). Tem que ser determinada a faixa onde o modelo matemático pode ser utilizado, i. e. a reologia do meio líquido, a velocidade máxima que pode atingir a bolha, o tipo de fluido onde o modelo simplificado funciona, etc. Além o efeito da tensão superficial e a massa da bolha tem que entrar no análise, assim é possível fazer um estudo integral e definir quais equações são as adequadas para este trabalho.

3.4

Modelo Matemático Adimensional

Uma importante etapa do processo de pesquisa é adimensionalizar as equações e os resultados. Esta etapa permite generalizar o problema em estudo e assim generalizar a solução do problema. Também faz possível reduzir o número de parâmetros que governam o problema. Por exemplo, permite definir novos modelos e experimentos com a mesma relação de parâmetros, permite fazer experimentos e testes com diferentes proporções geométricas, reológicas e dinâmicas. A adimensionalização permite um estudo mais profundo do fenômeno de interesse e até faz possível identificar novas relações e padrões que sem adimensionalizar não poderiam ter sido encontradas.

Neste capítulo é feita a adimensionalização da equação de aceleração (3-12) e da equação de diâmetro simplificada (3-54). A equação de aceleração utilizada será a versão sem simplificação porque segundo os resultados da seção (6.2), não é recomendado simplificar a massa da partícula esférica sem um análise prévio. Para o caso do diâmetro vamos utilizar a equação simplificada, já que segundo os resultados da seção (6.1), a tensão superficial pode ser desprezada em quase a totalidade dos casos, só em alguns casos excepcionais e pouco prováveis pode ser necessário considerar.

Nesta seção vão ser adimensionalizadas as equações, mas só na seção (6.5) vão ser calculados os resultados do modelo adimensional.

vai-se começar com a equação de aceleração (3-12) assim

$$m.a = \frac{g.\pi d^3.(\rho_c - \rho_d)}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d.\rho_c|} . \nu^2 . \pi . d^2 . C_d \quad (3-55)$$

Agora vão se definir algumas variáveis adimensionais. Primeiro se define a relação de densidades ρ^* entre a fase contínua ρ_c e a fase discreta ρ_d .

$$\rho^* = \frac{\rho_d}{\rho_c} \quad (3-56)$$

Na equação (3-57) se adimensionaliza a aceleração da partícula esférica, este termo é conhecido como força G . A força G representa o número de vezes

que a partícula está sofrendo a aceleração da gravidade.

$$G = \frac{a}{g} \quad (3-57)$$

Ao substituir as equações (3-56) e (3-57) em (3-55) se chega na seguinte expressão.

$$m.G.g = \frac{g.\pi.d^3.\rho_d}{6} \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} - 1\right) + \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right)}{\left|1 - \frac{1}{\rho^*}\right|} \cdot \frac{\rho_d.\nu^2.\pi.d^2.C_d}{8.\rho^*} \quad (3-58)$$

ao dividir por $\rho_d.g$

$$\frac{m.G}{\rho_d} = \frac{\pi.d^3}{6} \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} - 1\right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right)}{\left|1 - \frac{1}{\rho^*}\right|} \cdot \frac{\nu^2.\pi.d^2.C_d}{g.\rho^*} \quad (3-59)$$

Onde a massa da partícula é dada por

$$m = \frac{\rho_d.\pi.d^3}{6} \quad (3-60)$$

E onde o autor William Froude define o número de Froude como:

$$Fr = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{d}{2}.g}} \quad (3-61)$$

O número de Froude é uma expressão que pode mudar em função da área de aplicação. Na mecânica de fluidos o valor adimensional indica a relação entre as forças gravitacionais e as inerciais de um objeto submerso num fluido, ou seja uma relação entre o seu peso e a inercia do objeto relacionado à velocidade deste. A influência da inércia do objeto é maior com um número de Froude maior, e a influência do peso do objeto ou força gravitacional é maior com um número de Froude menor. Esta expressão também é utilizada para determinar a resistência ao movimento de objetos de diferentes tamanhos e submersos num fluido. Alguns autores também utilizam o número de Froude para determinar a relação entre a força potencial e cinética do sistema.

substituindo as equações (3-60) e (3-61) na equação (3-59) e fatorizando, conseguimos adimensionalizar a equação de aceleração da partícula.

$$\rho^*.G = 1 - \rho^* + \frac{3}{8} \cdot \frac{(\rho^* - 1)}{|\rho^* - 1|} \cdot Fr^2.C_d \quad (3-62)$$

Agora vai se adimensionalizar a equação de diâmetro da partícula, lembrando a equação (3-54)

$$d = \left(\frac{P_o - \rho_c.g.h_o}{P_o - \rho_c.g.h} \right)^{\frac{1}{3}} . d_o \quad (3-63)$$

Para adimensionalizar definimos o quociente entre o diâmetro da bolha d , e o diâmetro inicial da bolha no tempo zero ($t=0$). Assim.

$$d^* = \frac{d}{d_o} \quad (3-64)$$

E ao fatorizar chegamos à seguinte expressão

$$\frac{d}{d_o} = \left(\frac{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_o}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3-65)$$

Finalmente das equações (3-64) e (3-65), podemos calcular a equação de diâmetro adimensional, assim

$$d^* = \left(\frac{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h_o}{P_o - \rho_c \cdot g \cdot h} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3-66)$$

4

Formulação Numérica

Neste capítulo vai se analisar a metodologia de solução do modelo matemático composto pelas equações (3-45) e (3-46). Ao analisar as características do modelo matemático observa-se que o mesmo é composto por dois tipos de equações: Um polinômio de grau 3 utilizado para calcular o diâmetro da bolha; e uma equação diferencial parcial, de ordem 2, não homogênea e tipo "stiff moderada" que é utilizada para calcular a cinemática da partícula.

Após utilizar diferentes técnicas matemáticas analíticas para tentar resolver o modelo, chegou-se à conclusão que o mesmo não possui solução analítica. Por esta razão se optou por utilizar uma técnica numérica para resolver o sistema. Foi desenvolvida uma rotina computacional no programa Matlab da empresa MathWorks para tal fim. Foi importante levar em conta que a equação diferencial é tipo "stiff moderada", isto significa que possui algum ou alguns termos que causam uma rápida variação nos resultados num diferencial de tempo baixo. Este alto gradiente nos resultados causa instabilidades e demoras no cálculo dos resultados quando é possível solucionar o sistema de equações. Neste caso, existem duas opções para tentar atingir uma resposta. A primeira opção é utilizar um passo de tempo extremadamente pequeno, fazer isto não vai garantir uma resposta e vai causar um aumento importante no tempo de solução do sistema. Além disso, vai precisar usar variáveis tipo "long" com até 15 algarismos significativos que vão retardar ainda mais a resposta e consumir grande parte de recursos computacionais. Por isso foi preciso recorrer à segunda opção e utilizar o método numérico de Runge Kutta de baixa ordem, que se baseia nas equações de Bogacki e Shampine (1989) e se caracteriza por conseguir variar o passo de tempo. Nas partes com um alto gradiente o passo se reduz e nas partes com um gradiente baixo o passo aumenta. Esta característica reduz o tempo de calculo, faz eficiente a rotina no consumo de recursos e fornece uma resposta com um desvio máximo de $1 * 10^{-12}$, este desvio máximo foi definido nesta pesquisa como o máximo admissível para todas as iterações.

A rotina desenvolvida pode ser utilizada nos seguintes casos:

- Fase contínua modelada como Fluido Newtoniano, Fluido Power-Law,

Fluido Bingham ou Fluido Herschel-Bulkley.

- Fase dispersa modelada como partícula esférica que pode ser gasosa ou sólida. Em teoria a partícula também pode ser líquida mas não foi conferido este caso com a literatura. Para o caso de partícula gasosa (bolha de gás), o diâmetro da partícula é variável. Para o caso de esfera sólida ou líquida o diâmetro é constante. Neste trabalho não foi considerada a difusão de massa que pode causar mudança no diâmetro da partícula.
- Para o caso de partícula gasosa (bolha de gás), a massa da partícula pode ou não ser levada em conta. A massa da bolha de gás é tão baixa que em alguns casos é possível desprezar.
- Adicionalmente o rotina foi feita para calcular a cinemática de uma bolha de gás isolada, sem efeito de população e sempre a uma temperatura constante.
- Para o caso de partícula sólida, a massa não pode ser desprezada porque o erro seria importante.

As equações de Bogacki e Shampine (1989) são utilizadas como base da solução numérica no software Matlab, elas estão compiladas na função ODE23 do programa e por isso não foi necessário programar elas na rotina, mas é importante saber como trabalha a função no Matlab para assegurar os resultados. A seguir se descreve a função ODE23 nas equações (4-1) - (4-8).

$$y' = f(t, y) \quad (4-1)$$

$$h_n = t_{n+1} - t_n \quad (4-2)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (4-3)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}h_n.k_1\right) \quad (4-4)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3}{4}h_n, y_n + \frac{3}{4}h_n.k_2\right) \quad (4-5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}h_n.k_1 + \frac{1}{3}h_n.k_2 + \frac{4}{9}h_n.k_3 \quad (4-6)$$

$$k_4 = f(t_n + h_n, y_{n+1}) \quad (4-7)$$

$$z_{n+1} = y_n + \frac{7}{24}h_n.k_1 + \frac{1}{4}h_n.k_2 + \frac{1}{3}h_n.k_3 + \frac{1}{8}h_n.k_4 \quad (4-8)$$

Onde $y' = f(t, y)$ é a equação diferencial a solucionar, y_n denota a solução numérica no tempo t_n , e no passo h_n . O passo é definido como $h_n = t_{n+1} - t_n$. k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são constantes do modelo numérico.

z_{n+1} é uma aproximação de segunda ordem para a solução exata, assim como y_{n+1} é uma aproximação de terceira ordem para a solução exata. A diferença entre estas duas aproximações z_{n+1} e y_{n+1} , permite ao método adaptar o tamanho do passo de tempo ao necessário para reduzir o erro causado pelas altas variações do modelo. Quando a diferença entre z_{n+1} e y_{n+1} é importante, o passo de tempo se reduz. E quando a diferença entre z_{n+1} e y_{n+1} é baixa, o passo de tempo aumenta. Esta importante característica é a que permite solucionar a equação diferencial rapidamente e com uma incerteza baixa ($\leq 1 * 10^{-12}$).

Na Figura (4.1) mostra-se o fluxograma da rotina computacional em matlab.

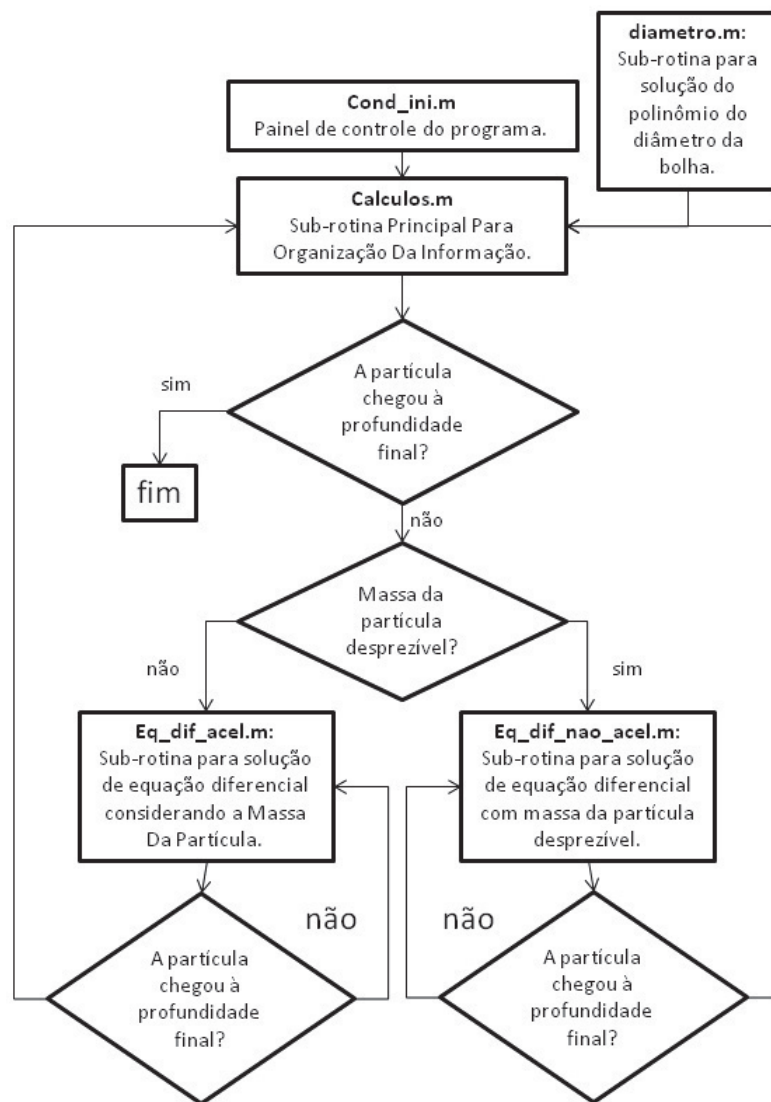


Figura 4.1: Diagrama de Funcionamento da Rotina em Matlab para o cálculo dos Resultados neste Trabalho

Da rotina em matlab, são duas subrotinas as mais importantes. A rotina *diametro.m* que calcula um vetor de resultados do diâmetro em função da

profundidade, que é utilizada para fazer estes cálculos é o polinômio de ordem três (3-46). Nesta rotina é utilizada a função *ROOT* para calcular as raízes reais para a faixa de deslocamento da bolha de gás. A outra subrotina importante é a *Eq_dif_acel.m*, onde são calculados os resultados da equação diferencial não linear tipo stiff em função do diâmetro e a velocidade da bolha, para este trabalho foi utilizada a função *ODE23* que foi descrita anteriormente. Como as equações utilizadas pelas duas sub-rotinas são função de parâmetros diferentes, foi necessário fazer uma série de iterações e interpolações até o sistema de equações convergir. O erro máximo aceitável foi definido em $1 * 10^{-12}$.

Para conhecer a rotina computacional no Software Matlab veja o Anexo (C).

5

Validação do Modelo Matemático

A validação dos resultados é de enorme importância nos projetos de pesquisa pois permite avaliar a confiabilidade nos resultados e determinar os seus limites e alcances. Neste capítulo se utilizam os dados experimentais disponíveis na literatura para avaliar os resultados do modelo matemático. Para fazer isto, se simulam computacionalmente no programa Matlab vários experimentos feitos por diversos autores. Os experimentos selecionados possuem diferentes características reológicas, geométricas e condições variadas de operação, para assim definir a qualidade nos resultados e faixa de aplicabilidade do modelo. Também foram calculados os erros absolutos e desvios relacionados aos resultados numéricos com respeito aos resultados experimentais, foi assim como certificamos que o modelo funciona corretamente. Finalmente foram determinados os alcances do modelo desenvolvido neste trabalho para diferentes reologias e condições dinâmicas da partícula.

Para validar este modelo foram simulados três experimentos feitos previamente por três diferentes autores. O primeiro caso a validar foram os experimentos de Raymont e Rosant (2000). Eles fizeram vários experimentos para calcular a velocidade limite em regime transiente de uma bolha de gás de diâmetro inicial constante em diferentes fluidos newtonianos. O segundo caso de validação é feito com os experimentos feitos por Hervé Tabuteau (2007). Ele calculou o deslocamento de esferas sólidas do mesmo diâmetro mas com diferentes densidades. Além disso, utilizou fluidos viscoplásticos com diferentes características reológicas. O ultimo caso utilizado para comparação foram os experimentos feitos por Neville Dubash (2003). Neles foi utilizada uma coluna com fluido viscoplástico para observar o deslocamento de bolhas de gás submersas nestes tipos de fluido. É possível perceber que todos os experimentos possuem características bem diferentes. Isto foi feito para assegurar que os resultados sejam confiáveis e que o modelo funcione em condições variadas.

Em seguida são apresentadas as características mais importantes dos experimentos anteriormente citados e que foram utilizados para avaliar o comportamento do modelo.

5.1

Bolha de Gás em Fluido Newtoniano

Como primeiro caso de validação para o modelo desenvolvido neste trabalho, foram simulados os experimentos feitos por Raymond e Rosant (2000). Foi utilizada uma coluna de fluido de 50 cm de profundidade e uma seção transversal quadrada de 30 cm x 20 cm. A coluna foi preenchida de um fluido newtoniano composto de uma mistura de água e glicerol em diferentes concentrações a uma temperatura de 292.85 K. Para injetar o gás foi colocado um injetor a uma profundidade de 30 cm medida desde a superfície livre do fluido até a ponta do injetor. O injetor tem uma válvula para controlar o vazão de gás e assim tentar controlar o diâmetro inicial da bolha ao se separar da fonte de gás. Para medir o diâmetro e a velocidade da bolha, foi colocada uma câmera de vídeo numa profundidade de 10 cm, medida desde a superfície livre do fluido.

Os detalhes da reologia dos fluidos utilizados por Raymond e Rosant (2000) são apresentados na tabela (5.1).

Series	Concentração água em peso	Viscosidade $\mu = k \left[\frac{Pa}{s} \right]$	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Tensão superficial $\Upsilon \left[\frac{N}{m} \right]$
S1	traços	0.70	1250	0.063
S2	2%	0.46	1245	0.063
S3	7%	0.24	1230	0.063
S4	12%	0.16	1222	0.063
S5	18%	0.075	1205	0.064
S6	24%	0.042	1190	0.064
S7	31%	0.024	1172	0.064
S8	40%	0.013	1150	0.064

Tabela 5.1: Propriedades dos Fluidos Utilizados de Raymond e Rosant (2000)

Na Figura (5.1) foram comparados os resultados de velocidade limite em regime transiente para bolha de gás em fluido newtoniano. As medidas de velocidade e diâmetro foram tomadas quando a bolha passava na frente da câmera de vídeo. Também foi calculado o erro absoluto, e o número de Reynolds para determinar o alcance do modelo.

Nas figuras mostradas neste trabalho as linhas pontilhadas correspondem a dados experimentais fornecidos pelos autores da literatura consultada. As linhas sólidas correspondem aos resultados numéricos calculados neste trabalho. Os marcadores que acompanham as linhas de cada figura correspondem à série de dados em análise, se duas linhas tem o mesmo marcador significa que correspondem à mesma série de dados e estão sendo comparados.

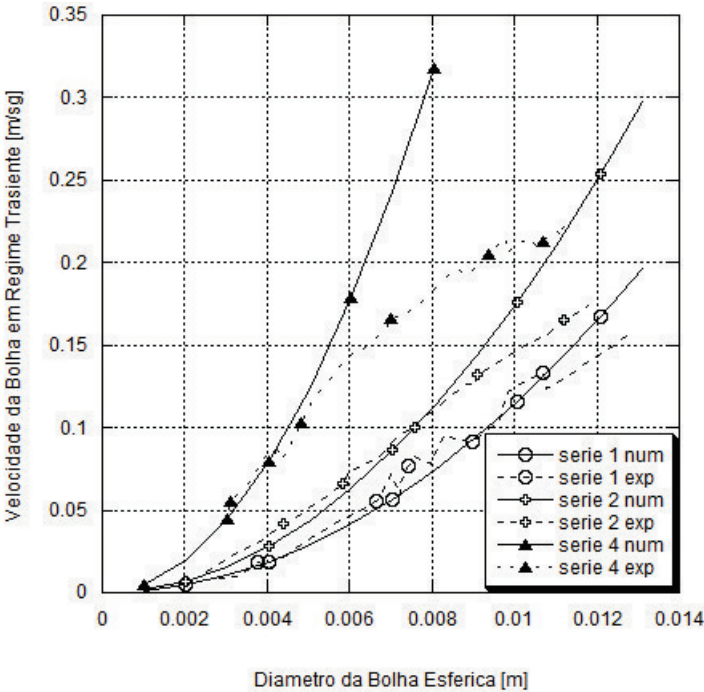


Figura 5.1: Velocidade para Bolha de Gás em Fluido Newtoniano - Comparação com os experimentos de Raymond e Rosant (2000).

É possível notar na figura (5.1) que o modelo fornece bons resultados até uma determinada velocidade, depois a velocidade calculada de nosso modelo cresce de forma constante e se afasta dos resultados experimentais.

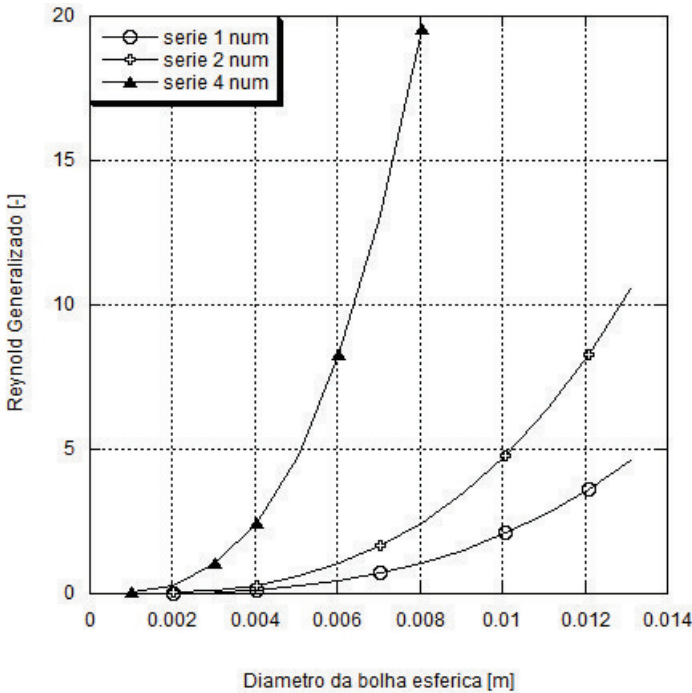


Figura 5.2: Numero de Reynolds para Bolha de Gás em Fluido Newtoniano - Resultados Numéricos do Modelo Matemático

Ao analisar os resultados da figura (5.2) de número de Reynolds generalizado Re em função do diâmetro da bolha d , conclui-se que o modelo desenvolvido pode ser aplicado para o caso de bolha de gás em fluido newtoniano para baixo Reynolds ($Re \leq 3$) com um erro máximo de 10%, que foi definido como o erro máximo admissível. Para números de Reynolds maiores, os resultados experimentais se afastam dos resultados numéricos, a principal razão é que o formato da bolha não é circular para Reynolds maiores de três, sendo que é uma condição do modelo desenvolvido neste trabalho que a bolha seja circular. Algumas causas para que o formato da bolha não seja circular são o atrito que aumenta com a velocidade do fluido, o regime turbulento da fase líquida para altas velocidades, a difusão e troca de massa da bolha na fase líquida, etc.

5.2

Esfera Rígida em Fluido Viscoplastico

Como segunda validação vão-se simular os experimentos feitos por Hervé Tabuteau (2007). Nesse trabalho foi utilizada uma coluna de fluido de 25 cm de profundidade e uma seção transversal quadrada de 25 cm x 25 cm. A coluna foi enchida com um fluido viscoplastico, Carbopol ETD 2050 a uma temperatura de 295.15 K. Este experimento funciona diferente do caso anterior, pois neste caso tem-se várias esferas sólidas com o mesmo diâmetro de 3.96 cm, e com densidade variável. O Carbopol por ser viscoplastico, possui uma tensão limite τ_o de escoamento que permite o deslocamento da partícula quando o empuxo vencer o arraste mínimo causado por esta tensão. Neste caso o carbopol foi modelado como fluido tipo Herschel Bulkley. Para vencer esta tensão inicial e assegurar uma velocidade inicial de deslocamento, as esferas foram liberadas de uma altura inicial de 5 cm sobre a superfície livre do fluido. Com isto a esfera atinge o fluido com uma velocidade maior do que a zero e consegue vencer a tensão limite. Como a densidade das esferas é maior do que a densidade do fluido, a esfera vai se deslocar em descida até o fundo da coluna. Para medir o deslocamento da esfera, o autor posicionou uma câmera de vídeo numa profundidade de 10 cm medida desde a superfície livre do fluido.

Na tabela (5.2) é apresentada a reologia de um dos fluidos utilizados por Hervé Tabuteau (2007). Foi usada a série S1 com uma concentração de 0.5%.

Na Tabela (5.3) se mostram as densidades das esferas utilizadas.

A validação do modelo matemático para o caso de esfera sólida em fluido viscoplastico tipo Herschel Bulkley é mostrada na Figura (5.3). Foram comparadas as séries de dados experimentais com os resultados numéricos, as séries de densidades de esferas utilizadas foram as S1, S3 e S6 (ver Tabela (5.2)).

Series	Carbopol em peso	Índice consistência k $[Pa.sg^n]$	Índice comportamento n $[-]$	Tensão limite $\tau_o [Pa]$	Densidade $\rho_c [\frac{kg}{m^3}]$
S1	0.5%	6	0.5	7	1000

Tabela 5.2: Propriedades dos Fluidos de Trabalho de Hervé Tabuteau (2007)

Esfera	Densidade esfera $[\frac{kg}{m^3}]$
Serie 1	1411
Serie 2	1476
Serie 3	1541
Serie 4	1606
Serie 5	1670
Serie 6	1736
Serie 7	1801
Serie 8	1866
Serie 9	1931

Tabela 5.3: Densidades das Esferas de Trabalho de Hervé Tabuteau (2007).

O tempo de deslocamento foi medido desde que a esfera entra em contato com o fluido até atingir o fundo da coluna.

Na Figura (5.3) são mostrados os resultados experimentais e numéricos do deslocamento de uma partícula sólida em fluido viscoplástico.

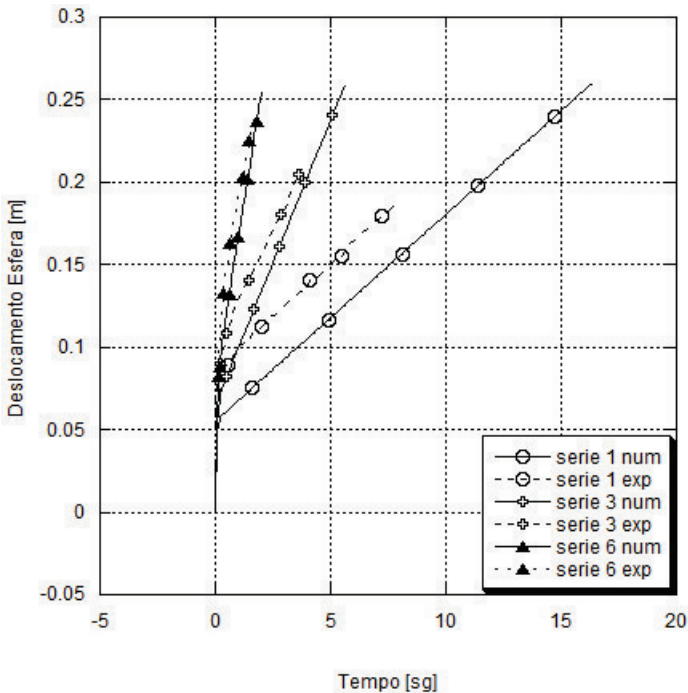


Figura 5.3: Deslocamento para Esferas Solidas de Densidade Diferente em Fluido viscoplástico - Experimentos de Hervé Tabuteau (2007).

Na figura (5.3) observa-se que nos três casos o erro no deslocamento não supera o 10%. Considerando que a inclinação da curva é a velocidade, é possível dizer que as velocidades concordam para os três casos comparados. Como nesta seção o diâmetro da partícula é constante, uma velocidade limite é atingida, uma diferencia importante com relação à seção anterior onde foi analisada uma bolha de gás, nesse caso como diâmetro estava em constante aumento, a bolha tinha uma aceleração.

Na Figura (5.4) foram calculados os resultados para número de Reynolds Generalizado e assim conseguir determinar o alcance do modelo. Na equação (5-1) se define o número de Reynolds Generalizado, que é o mesmo número de Reynolds para fluido Newtonianos mas aplicado em fluidos Não-Newtonianos.

$$Re_{pl} = \frac{\nu^{2-n} \cdot d^n \cdot \rho_c}{k} \quad (5-1)$$

A seguir, na figura (5.4) vão se mostrar os resultados para o cálculo do número de Reynolds Re em função do tempo t , lembrando que o sistema simulado é uma esfera rígida num fluido viscoplastico, isto significa que o diâmetro da partícula é constante. Também foi necessário assegurar o escoamento da esfera num fluido viscoplástico no tempo zero ($t=0$), por isso foi necessário liberar a partícula desde uma altura de 5cm para atingir uma velocidade inicial antes de entrar em contato com o fluido.

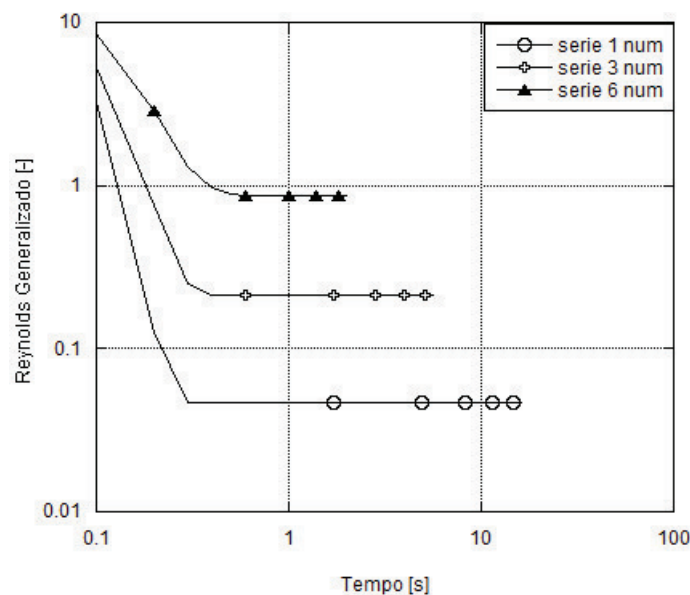


Figura 5.4: Reynolds Generalizado para Esfera Rígida em Fluido viscoplástico - Experimentos de Hervé Tabuteau (2007).

Ao analisar a Figura (5.4) em escala logarítmica se observa que a esfera inicialmente entra em contato com o fluido a uma alta velocidade como é demonstrado pelo número de Reynolds alto. Mas nesse momento a força de arrasto é maior que o peso da esfera e por isso sofre uma desaceleração até

atingir uma velocidade constante ou velocidade limite como é provado pelo número de Reynolds constante na figura. Esta velocidade limite é atingida porque existe um balanço entre a força de arrasto e a força de flutuação da esfera. Concluimos que o modelo pode ser aplicado para o caso de esfera sólida em fluido viscoplástico tipo Herschel-Bulkley. Neste caso não existe um limite de um Reynolds máximo como no caso com partícula gasosa em fluido Newtoniano. Isto acontece porque existe uma velocidade limite máxima e também porque o formato da partícula sempre é esférico. Porém é importante ressaltar que o escoamento da partícula sólida se desenvolve em regime laminar, se a bolha superar este limite, vamos ter um fluxo turbulento onde existem outros fenômenos físicos relacionados ao comportamento da bolha. O erro máximo da velocidade atingido na simulação foi de 10%, confirmando nossa hipótese para este caso.

5.3

Bolha de Gás em Fluido Viscoplastico

Como terceiro caso de simulação foram simulados os experimentos feitos por Neville Dubash (2003). Nesse trabalho foi utilizada uma coluna de fluido de 182.9 cm de profundidade e uma seção transversal circular de 3.81 cm de diâmetro. A coluna foi enchida com dois fluidos viscoplásticos, Carbopol 940 e Carbopol EZ2 a uma temperatura de 292.15 K. Para injetar o gás foi colocado um injetor no fundo da coluna com um cilindro pneumático. Este cilindro permite o controle do vazão de gás e assim um controle aproximado do diâmetro inicial da bolha ao se separar da fonte de gás. Para medir o diâmetro e a velocidade da bolha, foi colocada uma câmera de vídeo numa profundidade de 1.3288 m medida desde a superfície livre do fluido.

Na Tabela (5.4) são apresentados os detalhes da reologia dos fluidos utilizados por Dubash (2003).

Series	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Índice comportamento [—]	Índice consistência $[Pa.sg^n]$	Tensão limite $[Pa]$
S1	1068	0.37	4.3	2.3
S2	1067	0.35	6.8	4.0
S3	1066	0.36	7.5	5.5
S4	1158	0.39	5.8	2.5
S5	1189	0.46	2.5	5.2
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 5.4: Propriedades dos Fluidos de Trabalho de Neville Dubash (2003)

No grafico (5.5) são mostrados os resultados para o caso de bolha de gás em fluido viscoplástico tipo Herschel-Bulkley. Foram comparados os resultados de número do Froude da bolha de gás Fr em função da relação de diâmetros $(\frac{d}{d_c})$ entre a bolha de gás e a coluna de fluido.

Na equação (5-2) é definido o número de Froude, lembremos que o número de Froude relaciona as forças gravitacionais e inerciais q agem sobre a bolha de gás, para mais detalhes consulte a seção (6.5).

$$Fr = \frac{v^2}{d \cdot g} \quad (5-2)$$

Os dados foram adquiridos numa profundidade de 1.3288 m, uma região em que a bolha já atingiu a velocidade limite em regime transiente. Neste trabalho a velocidade limite em regime transiente é o estado onde a bolha atingiu sua velocidade máxima para o diâmetro desse instante. Neste estágio a aceleração da bolha é baixa, causada pelo aumento no diâmetro da bolha, isto causa um aumento da força de empuxo e por isso a bolha é acelerada constantemente. A bolha de gás não atinge uma velocidade limite como as esferas solidas, e sim uma velocidade a baixa aceleração, nesse momento o comportamento da bolha se torna estável. Também foi calculado o erro absoluto e o número de Reynolds para determinar o alcance do modelo.

A seguir os resultados são apresentados na Figura (5.5) mostra-se o número de Froude em função da relação de diâmetros.

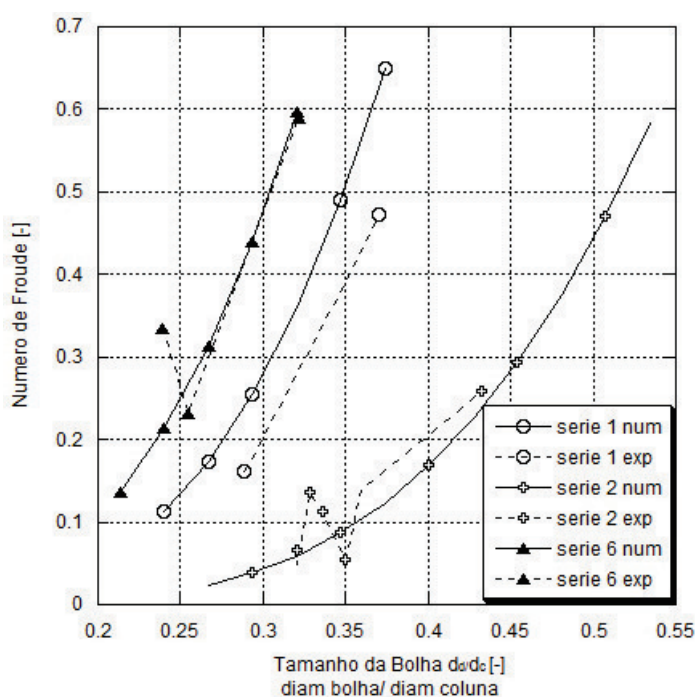


Figura 5.5: Numero de Froude para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico - Experimentos de Dubash (2003).

O autor calculou os resultados em função da relação de diâmetros $\frac{d}{d_c}$ entre a bolha de gás e a coluna de fluido onde foram feitos os testes experimentais. Nesta pesquisa não foi levado em conta o diâmetro da coluna, mas para conseguir comparar os resultados, foi dividido o diâmetro calculado nas simulações pelo diâmetro da coluna informada por Dubash (2003), o diâmetro da coluna usada pelo autor é de 3.81 cm.

Analisando a Figura (5.5) se conclui que existe uma boa correlação entre os resultados numéricos e os experimentais. Para o caso de uma bolha de gás em fluido viscoplástico o modelo funciona com um erro máximo de 10%. Neste caso não foi possível utilizar os dados experimentais para uma relação de diâmetros maior, o autor informa do aparecimento de um efeito de parede em aproximadamente uma relação de diâmetro de 0.5, este efeito altera os resultados, por esta razão não foi usada toda a serie de dados do autor.

Na figura (5.6) vai se calcular o número de Reynolds generalizado Re em função do diâmetro da bolha d para determinar o alcance do modelo matemático em bolhas de gás submersas em fluidos viscoplasticos. É importante lembrar que em bolhas de gás o diâmetro da bolha não é constante, e ao contrário aumenta com o deslocamento da bolha no fluido.

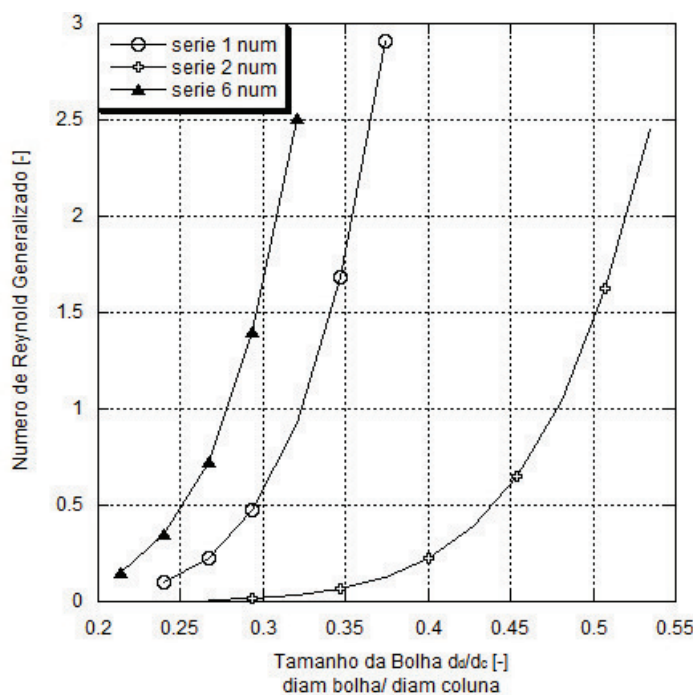


Figura 5.6: Reynolds Generalizado para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico - Experimentos de Dubash (2003).

Ao analisar os resultados da Figura (5.6) concluímos que o modelo pode ser aplicado para o caso de bolha de gás em fluido viscoplástico para baixo Reynolds ($Re \leq 3$), o erro máximo atingido para a simulação foi de 10%.

confirmando nossa hipótese para este caso. Para números de Reynolds maiores, os resultados experimentais se afastam dos resultados numéricos, a principal razão é que para Reynolds maiores o formato da bolha não é circular, e esta é uma condição que o modelo apresentado neste trabalho utiliza para calcular a força de arrasto. Algumas causas para que o formato da bolha mude são o atrito crescente com a velocidade do fluido, a turbulência da fase líquida, a difusão e troca de massa da bolha com a fase líquida.

6 Resultados

No capítulo anterior foi validado o modelo matemático fazendo três simulações para comparar nossos resultados numéricos com os resultados experimentais. As três simulações tiveram características diferentes para comprovar o bom funcionamento do modelo em diferentes condições. A primeira simulação foi para uma bolha de gás num fluido newtoniano, a segunda simulação foi para uma esfera rígida em fluido viscoplástico e a terceira para uma bolha de gás em fluido viscoplastico. Os resultados indicaram que o modelo funciona para as condições de operação impostas e o erro máximo é aceitável de 10%.

Com a certeza que o modelo funciona adequadamente, agora neste capítulo vão ser analisados alguns parâmetros que afetam os resultados das simulações, estes são a tensão superficial da interface gás-líquido e a massa da bolha de gás. Deseja-se determinar se estes fatores afetam os resultados de forma considerável, ou ao contrario, podem ser desprezados e eliminados das simulações. Vamos calcular o desvio atingido ao considerar e ao desprezar estas variáveis do modelo e assim determinar a importância destes.

Adicionalmente o modelo vai ser submetido a variações nas condições reológicas para determinar a resposta e a tendência nos resultados das simulações. Deseja-se conhecer a influência dos parâmetros como a tensão limite τ_o , o índice power-law n e o índice de consistência k na dinâmica da partícula. O interesse desta seção ao fazer estas simulações está na informação que pode ser usada por pesquisadores para determinar quais parâmetros alterar no fluido em análise e predizer a resposta aproximada na cinemática da partícula.

Também deseja-se identificar os parâmetros reologicos mais importantes e influentes nos resultados, esta informação pode ser útil para determinar quais são os parâmetros que podem causar um desvio maior no comportamento e assim não investir recursos em fatores que podem não causar o efeito esperado.

Outro objetivo deste capítulo é definir os limites onde pode ser aplicado o modelo matemático mantendo um erro aceitável. Também se faz necessário determinar quais fatores podem ser desprezados no modelo matemático sem cair no erro de simplificar demais e simular um sistema diferente ao sistema de interesse com erros importantes nos resultados.

Finalmente, são realizadas as simulações do modelo adimensional em busca de novas informações e resultados mais gerais para o caso de bolha de gás em fluido viscoplástico e bolha de gás em pasta de cimento.

6.1

influência da Tensão Superficial nos Resultados

Um dos objetivos deste trabalho é analisar a influência da tensão superficial na cinemática da bolha de gás. É importante determinar este resultado porque pode influenciar fortemente o comportamento da bolha de gás, e um tamanho maior da bolha vai causar um aumento da força de empuxo e em consequência uma aceleração maior, um tamanho menor vai causar o efeito contrario. Dessa forma deseja-se definir se a tensão superficial pode causar um efeito considerável no diâmetro da bolha, ou ao contrário pode ser desprezada.

Foram feitas várias simulações com as mesmas condições reológicas e de operação do capítulo (5.3), mas com alterações da tensão superficial do liquido. Foram utilizadas as tensões superficiais de diferentes líquidos existentes na natureza. As características do fluido viscoplástico utilizado são as mesmas da serie S6 da seção (5.3) e que se apresentam na tabela (6.1). A continuação lembramos essa serie de dados.

Serie	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Índice comportamento n [-]	Índice consistência k[Pa.sg ⁿ]	Tensão limite τ_o [Pa]
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 6.1: Propriedades do Fluido utilizado no Trabalho de Dubash (2003)

As tensões superficiais utilizadas são as dos fluidos da tabela (6.2), ressaltando que utilizamos como máxima tensão superficial nas simulações a do mercúrio, não existe na natureza uma tensão superficial maior que a do mercúrio. Todas os dados de tensão foram obtidos a 293.15 K.

Fluido	Tensão Superficial $\left[\frac{N}{m} \right]$
Acetona	0.0237
Glicerina	0.0594
Aguá	0.0722
Mércurio	0.4650

Tabela 6.2: Tensão Superficial de Diferentes Fluidos a 293.15 K

A Figura (6.1) apresenta a curva de profundidade da bolha de gás em função do tempo para diferentes tensões superficiais de diferentes fluidos e com

um diâmetro inicial igual em todas as series.

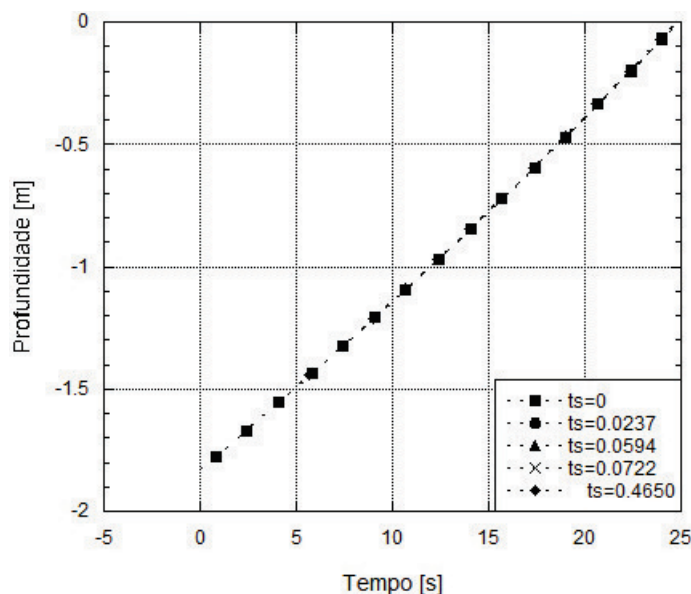


Figura 6.1: Profundidade de uma Bolha de Gás para várias Tensões Superficiais

Os resultados da figura (6.1) indicam sobreposição das curvas de todas as simulações feitas, isto acontece porque a tensão superficial por si só não afeta os resultados. Ao utilizar a equação (6-1) de cálculo do aumento da pressão na bolha causada pela tensão superficial, é possível observar que a variação no resultado é pouco devido a que na natureza a tensão superficial dos fluidos não variam muito. Por isso ao variar a tensão superficial, a cinemática da bolha não é afetada.

$$P_{\gamma} = \frac{\pi \cdot d \cdot \gamma}{A} = \frac{4 \cdot \gamma}{d} \quad (6-1)$$

O outro parâmetro que pode alterar a pressão da bolha e que está relacionado com a tensão superficial é o diâmetro inicial da bolha. Ao reduzir o diâmetro inicial, a pressão na bolha aumenta; e aumentando o diâmetro inicial, a pressão na bolha se reduz, conforme a equação (6-1).

Para determinar o efeito do diâmetro inicial no aumento da pressão na bolha e na cinemática da bolha, vamos fazer simulações com vários diâmetros iniciais de bolha. Para garantir que a bolha consiga se deslocar inclusive com diâmetros muito baixos, vai ser utilizado um fluido Newtoniano, devido a que não possui uma tensão limite τ_0 que impeça o deslocamento inicial da bolha. As condições reológicas são essencialmente as do mercúrio, devido a que possui a maior tensão superficial da natureza. As características geométricas e operacionais são similares às do capítulo (5.1). Nesta simulação são injetadas bolhas de gás a uma profundidade de 30cm num fluido a uma temperatura constante de 292.85K, a reologia do fluido se mostra na tabela (6.3).

Serie	Concentração água em peso	Índice consistência $k \left[\frac{Pa}{s} \right]$	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Tensão superficial $\gamma \left[\frac{N}{m} \right]$
S1	traços	0.70	1250	0.465

Tabela 6.3: Propriedades do Fluido Utilizado de Raymond e Rosant (2000)

Para calcular os resultados da figura (6.2) foram feitas várias simulações com diâmetro inicial diferente (0.0005m, 0.001m, 0.005m e 0.01m). Para cada diâmetro inicial foi feita uma simulação considerando a tensão superficial e outra sem considerar, e foi calculado o desvio σ_{ν_i} entre elas para os diferentes diâmetros iniciais conforme a equação (6-2).

$$\sigma_{\nu_i}(\%) = \left(\frac{\nu_{\gamma_i} - \nu_{s\gamma_i}}{\nu_{\gamma_i}} \right) * 100 \tag{6-2}$$

Onde $\sigma_{\nu_i}(\%)$ é a porcentagem do desvio da velocidade da bolha ao desprezar a tensão superficial, ν_{γ_i} é a velocidade da bolha considerando a tensão superficial e $\nu_{s\gamma_i}$ é a velocidade da bolha desprezando a tensão superficial para o mesmo diâmetro inicial.

A seguir na figura (6.2), é calculado o desvio nos resultados ao utilizar diferentes diâmetros iniciais de bolha com a mesma tensão superficial.

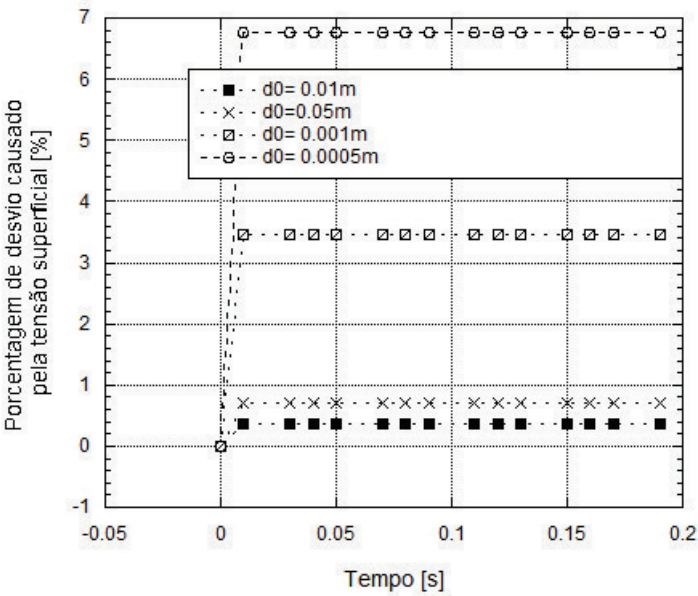


Figura 6.2: Porcentagem no desvio da velocidade de uma bolha ao desprezar a tensão superficial para diferentes diâmetros iniciais da bolha.

Revisando o trabalho de Adamson et al. (1997), o autor indica que o efeito da tensão superficial é desprezível quando o diâmetro da bolha é relativamente alto e é considerável quando é relativamente baixo. Ao analisar a expressão

(6-1), a figura (6.2) e a figura (6.3) é possível entender o que acontece com a pressão no interior da bolha.

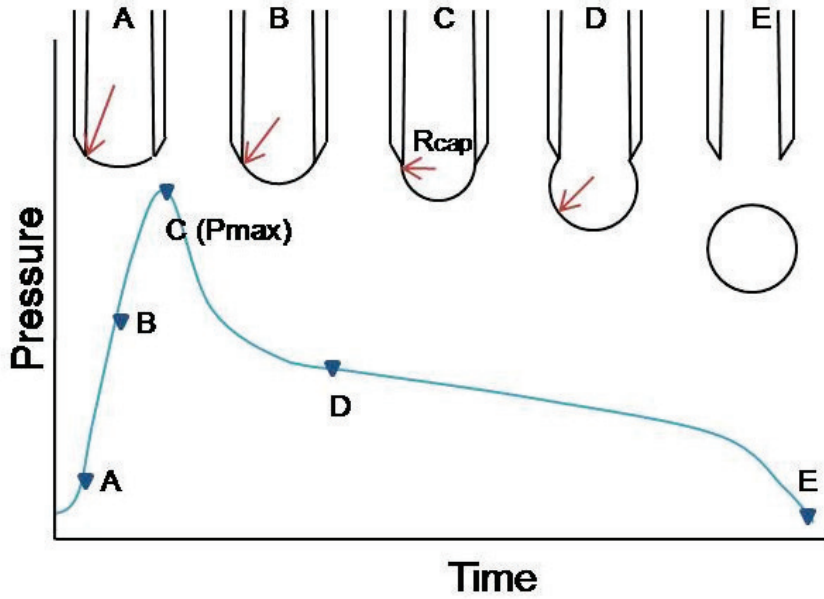


Figura 6.3: Aumento de Pressão no Interior da Bolha de Gás desde a formação até a Separação da Fonte de Gás - Adamson (1997)

Na figura (6.3) se apresenta a curva de pressão da bolha de gás para diferentes etapas da formação e crescimento da bolha, Conclui-se que o maior aumento de pressão da bolha de gás está no ponto C, onde o raio de curvatura da bolha é o menor, que coincide com o diâmetro do capilar. Para os estágios A, B, D, E é possível observar como a pressão da bolha é menor com o aumento do diâmetro da bolha.

A equação (6-4) calcula uma aproximação do desvio causado ao desprezar a tensão superficial σP_i . Utiliza a variação na pressão da bolha ao desprezar a tensão superficial γ . É um cálculo aproximado da alteração da cinemática em função da pressão da bolha.

$$\sigma P_i(\%) = \left(1 - \frac{P_o + P_{hi}}{P_o + P_{hi} + P_{\gamma i}} \right) * 100 \quad (6-3)$$

Substituindo

$$\sigma P_i(\%) = \left(1 - \frac{P_o + \rho_c \cdot g \cdot h_i}{P_o + \rho_c \cdot g \cdot h_i + \frac{4 \cdot \gamma}{d_i}} \right) * 100 \quad (6-4)$$

Concluindo, a tensão superficial pode ser importante em bolhas de gás de um diâmetro muito pequeno, em nossas simulações determinamos um desvio de 7% para um diâmetro inicial de $5 \mu\text{m}$ com a tensão superficial do mercúrio de $0.7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Na grande maioria das aplicações industriais as bolhas tem um diâmetro maior, além, se o fluido onde a bolha está submersa é viscoplastico,

o diâmetro da bolha precisa ser considerável para vencer a tensão limite e começar o movimento. Então como conclusão, só para uma aplicação em fluidos newtonianos com um diâmetro de bolha bem baixo da ordem das micras, é necessário analisar o efeito da tensão superficial. Para definir o diâmetro necessário para causar um efeito importante é preciso analisar o sistema multifásico, não é possível indicar um valor de diâmetro onde os resultados vão ser alterados de forma importante, porque isso vai depender de outros parâmetros como a reologia do fluido, a profundidade da bolha, etc. Mas sim é possível dizer que só em casos excepcionais e pouco comuns é necessário analisar a tensão superficial. Por isso neste trabalho consideramos adequado desprezar a tensão superficial se assim se deseja.

6.2

Influência da Massa da bolha de Gás nos Resultados

O seguinte resultado de interesse para este trabalho é determinar a importância da massa da bolha de gás durante o cálculo da cinemática da partícula. A densidade de uma bolha de gás é muito baixa comparada com a densidade do fluido onde está submersa, por essa razão este termo em ocasiões é desprezado. Deseja-se determinar neste capítulo se é possível desprezar a massa de bolha ou não, e se for possível, em que condições e quais são os limites desta aproximação.

A primeira tarefa a fazer foi definir uma expressão para calcular a diferença entre o a cinemática da bolha considerando a massa e sem considerar a massa. Para isto foi utilizada a equação de balanço de forças (3-1) e e aplicada aos dois casos. No caso 1 se considera a massa e no caso 2 a massa é desprezada.

$$m_1 \cdot a_1 - m_2 \cdot a_2 = \sum F_1 - \sum F_2 \quad (6-5)$$

Agora, desprezando a massa da bolha no caso 2 e utilizando a equação de balanço de forças para uma bolha de gás (3-12) se chega na seguinte expressão.

$$m_1 \cdot a_1 = \frac{g \cdot \pi d_1^3 \cdot (\rho_c - \rho_d)}{6} - \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot \nu_1^2 \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot C_{d1} - \frac{g \cdot \pi d_2^3 \cdot \rho_c}{6} - \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot \nu_2^2 \cdot \pi \cdot d_2^2 \cdot C_{d2} \quad (6-6)$$

A equação (6-6) não pode ser simplificada, o diâmetro d , a velocidade ν e o coeficiente de arrasto C_d são diferentes para o caso 1 e o 2. Adicionalmente só é conhecido o valor da velocidade ν , aceleração a , diâmetro d e profundidade h no tempo zero ($t=0$). Na equação (6-6) para tempo zero, a velocidade da bolha é zero e a diferença na aceleração entre casos 1 e 2 é a aceleração da gravidade como se mostra nas equações (6-7) e (6-8). Para um tempo posterior, quase imediatamente a aceleração da bolha cai fortemente, esta queda é causada pela

força de arrasto que é função da velocidade da bolha.

$$m \cdot a_{t=0} = -\frac{g \cdot \pi d_1^3 \cdot \rho_d}{6} \quad (6-7)$$

$$a_{t=0} = -g \quad (6-8)$$

Por esta razão, vamos calcular os resultados numericamente utilizando uma rotina em Matlab desenvolvida nesta pesquisa para comparar os resultados de profundidade h e velocidade ν . Nas simulações foram utilizadas as equações de aceleração (3-17) da seção (3) onde a massa é levada em conta, e a equação de velocidade (3-52) da seção (3.3) onde a massa é desprezada. A seguir são lembradas as equações.

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (6-9)$$

$$\nu = d \cdot \left[\frac{y \cdot \tau_o}{k} - \frac{|\rho_d - \rho_c|}{(\rho_d - \rho_c)} \cdot \frac{\rho_c \cdot g \cdot d}{18 \cdot x \cdot k} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (6-10)$$

É importante considerar que como na equação (6-10) foi desprezada a massa, a bolha não possui inércia, isto faz com que ante qualquer perturbação a bolha possua uma aceleração infinita e instantaneamente atinja a velocidade limite. Esta velocidade é a máxima possível para o diâmetro da bolha nesse instante. após atingir instantaneamente a velocidade limite, a bolha é acelerada só pelo aumento no diâmetro da bolha. O anterior faz que a bolha com massa desprezível possua uma velocidade sempre maior o igual que a bolha onde foi considerada a massa.

Para calcular numericamente a diferença entre os dois casos vão ser feitas várias simulações com as condições aproximadas às quais é submetida uma bolha de gás durante a cimentação de um poço de petróleo. Para evitar possíveis problemas no deslocamento inicial da bolha vamos considerar o cimento como um fluido newtoniano altamente viscoso conforme a tabela (6.4).

Fluido	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Viscosidade $[Pa \cdot s]$
Fluido Newtoniano	1250	3

Tabela 6.4: Propriedades do Fluido Utilizado na Simulação para Pasta de Cimento

O gás usado foi Butano com uma massa molar de $0.0578 \frac{kg}{mol}$, a bolha foi injetada numa profundidade de 1600 m com um diâmetro inicial de 1 cm .

Na figura (6.4) se mostra a velocidade de uma bolha de gás ao se deslocar $1000s$ considerando a massa e desprezando a massa.

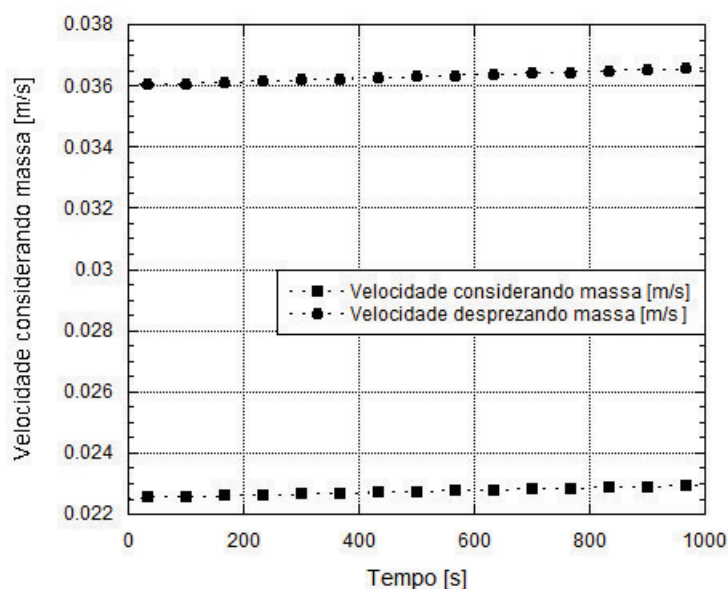


Figura 6.4: Velocidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.0578 \left[\frac{kg}{mol} \right]$

Na figura (6.4) se observa uma importante diferença nos resultados próxima de 38% ao desprezar a massa da bolha. É interessante ver como para este caso os resultados podem variar tanto só com desprezar a massa da bolha de um gás denso de 1 *cm* de diâmetro a 1600 *m* de profundidade.

Na figura (6.5) é mostrada a profundidade em função do tempo.

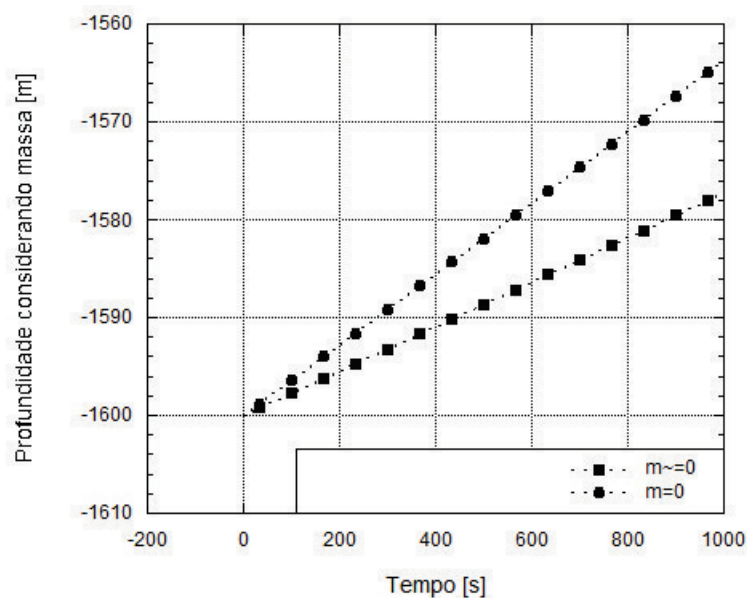


Figura 6.5: Profundidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.0578 \left[\frac{kg}{mol} \right]$

Na figura (6.5) se mostra o desvio no comportamento ao desprezar a massa, o erro atinge 38%, um desvio de 14 *m* num deslocamento total de 36 *m*.

Um desvio considerado alto em condições próximas às de um poço.

Foram feitas variadas simulações com outros gases e outras profundidades e o desvio nos resultados sempre variaram em função das condições do sistema. Na seguinte figura (6.6) foi utilizado um gás com uma massa molar de $0.1 \frac{kg}{mol}$ numa profundidade de $100m$ com um diâmetro inicial de $5 mm$.

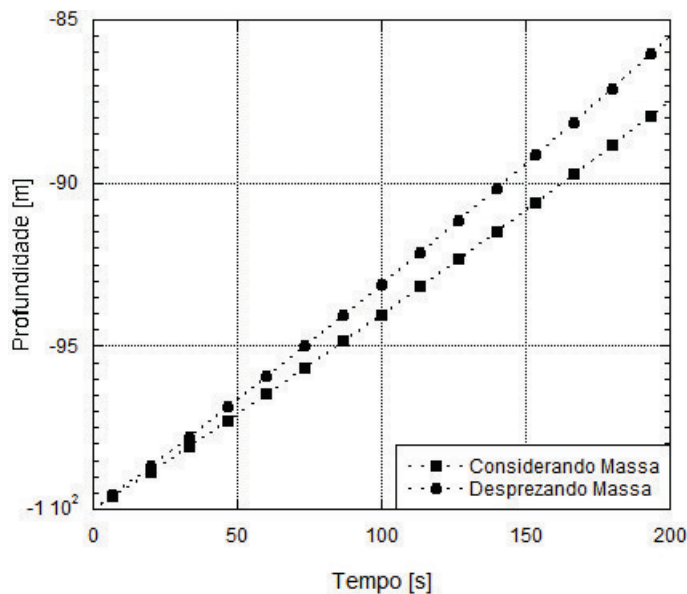


Figura 6.6: Profundidade de uma Bolha de Gás Considerando e Desprezando a Massa da Partícula: Massa Molar do Gás $0.1 \frac{kg}{mol}$

Na figura (6.6) a massa molar é bem menor, assim como a profundidade inicial de deslocamento. O erro acumulado após se deslocar $200s$ foi de 10%, ainda continua sendo um erro importante.

Conclui-se que a massa só pode ser desprezada após uma análise profunda. Como foi mostrado, os resultados podem variar de forma importante segundo as características do sistema. O desvio nos resultados depende essencialmente da profundidade de injeção da bolha, da massa molar do gás e do diâmetro inicial da bolha. todos estes parâmetros vão influir no resultado final, é por isso que não é possível indicar um valor no qual é aceito desprezar a massa. A recomendação é não desprezar a massa da bolha se não for preciso, mas se deseja vai precisar analisar os fatores anteriormente indicados.

6.3

Comportamento do Modelo Matemático para Reologia Constante no Tempo

Para continuar com o análise do modelo matemático, além de comparar os resultados numéricos com resultados experimentais, também é importante determinar e entender o comportamento na tendência das equações do modelo.

Conhecer esta informação oferece várias vantagens, inicialmente permite conferir se o modelo se comporta segundo o esperado para um sistema multifásico. Por exemplo, aumentando a viscosidade do fluido se espera uma redução na velocidade da bolha, este princípio pode ser extrapolado a vários parâmetros do modelo para confirmar se o modelo está funcionando corretamente.

Outra vantagem está em determinar a sensibilidade e estabilidade das respostas do modelo frente a variações na reologia. Deseja-se determinar quais são os parâmetros que afetam de forma importante a cinemática da partícula. Esta informação vai permitir identificar os parâmetros que causam um efeito significativo nas respostas e assim investir recursos nessa direção. Também são importantes estas informações porque permitem determinar como vai ser a variação nos resultados e assim modificar a reologia do fluido em função do efeito esperado ou a aplicação industrial desejada.

Existe uma última razão para esta seção, a necessidade de determinar se o modelo pode ser utilizado para variadas condições do sistema multifásico e assim determinar os limites das equações. Um objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo que funcione para uma ampla variedade de condições reológicas e condições de operação do sistema multifásico.

Foram realizadas duas simulações diferentes, a primeira para uma esfera rígida e a segunda para uma bolha de gás, a intenção é analisar os resultados para uma partícula de diâmetro constante e depois para uma partícula de diâmetro variável e determinar se os resultados concordam com o esperado para os dois casos.

6.3.1

Tendências para Esfera Rígida

Neste caso foi simulada uma esfera sólida se deslocando num fluido viscoplástico. Como o diâmetro da partícula sólida é constante, a força de flutuação e a força de arrasto são constantes, atingindo um velocidade limite constante, o que simplifica o análise dos resultados do modelo.

Como os fluidos viscoplásticos possuem uma tensão limite τ_o , o início do deslocamento só ocorre quando o peso da esfera F_b vencer a força de arrasto F_d somada à tensão limite τ_o . Assim, existe a possibilidade que uma esfera com velocidade inicial zero não consiga começar a se deslocar. Por essa razão o sistema foi simulado de tal forma que a partícula possua uma velocidade inicial antes de entrar em contato com o fluido viscoplastico. Para conseguir isto, a esfera foi simulada com uma velocidade inicial produto de uma queda desde uma altura inicial de 5cm desde a superfície livre do fluido, isto vai permitir que a esfera se desloque com uma velocidade inicial. Se a tensão limite τ_o somada

à força de arrasto F_d é maior que o peso partícula F_b , esta vai desacelerar até parar. Caso contrário a partícula vai se acelerar até atingir uma velocidade limite.

As características do fluido viscoplástico e das esferas simuladas são as mesmas do capítulo (5.2), a reologia do fluido é apresentada de novo na Tabela (6.5) onde foi analisado o comportamento de uma esfera rígida num fluido viscoplástico. A serie de esferas utilizadas para estas simulações é a Serie 1 da Tabela (5.3) com uma densidade de $1411 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$ e um diâmetro de 3.96 cm. A temperatura do fluido em todas as simulações é de 295.15 K.

Serie	Carbopol em peso	Índice consistência $k [Pa.sg^n]$	Índice comportamento $[-]$	Tensão limite $\tau_o [Pa]$	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3}\right]$
S1	0.5%	6	0.5	7	1000

Tabela 6.5: Propriedades do Fluido S1 Utilizado no Trabalho de Tabuteau (2007)

Para começar a análise se apresenta o gráfico de deslocamento da esfera em função do Tempo na Figura (6.7) para diferentes tensões limite do fluido. Em todos os casos, o diâmetro da esfera é constante ($d=3.96cm$), e a temperatura é mantida constante ($T=295.15 K$).

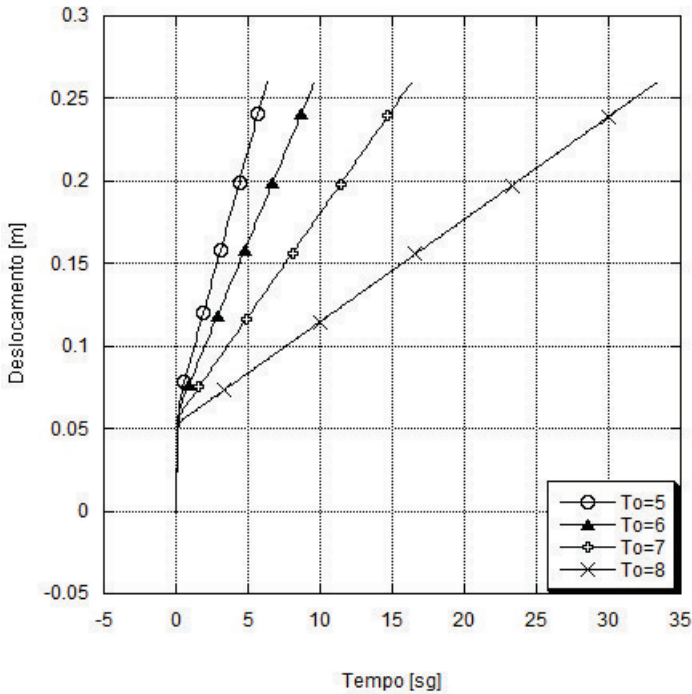


Figura 6.7: Influência da Tensão Limite na Tendência no Deslocamento de uma Esfera Sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.

Na figura (6.7) se observa que a tensão limite causa um efeito importante nos resultados, o tempo para o deslocamento de uma determinada distância é maior com o aumento da tensão limite, além disso, observando a inclinação de cada curva de deslocamento é a velocidade da esfera, podemos identificar que para todos os casos a velocidade inicial (tempo=0s) é a mesma. Com o aumento da tensão limite é possível observar dois efeitos, a desaceleração inicial da esfera (próximo a tempo=0 s) é maior e causa uma velocidade limite menor da esfera. Esta velocidade limite atingida é constante porque o diâmetro da esfera é constante, e como resultado a força de flutuação é constante.

Agora, na Figura (6.8) é analisado o comportamento da velocidade limite para a mesma esfera rígida, com aumento da tensão limite do fluido.

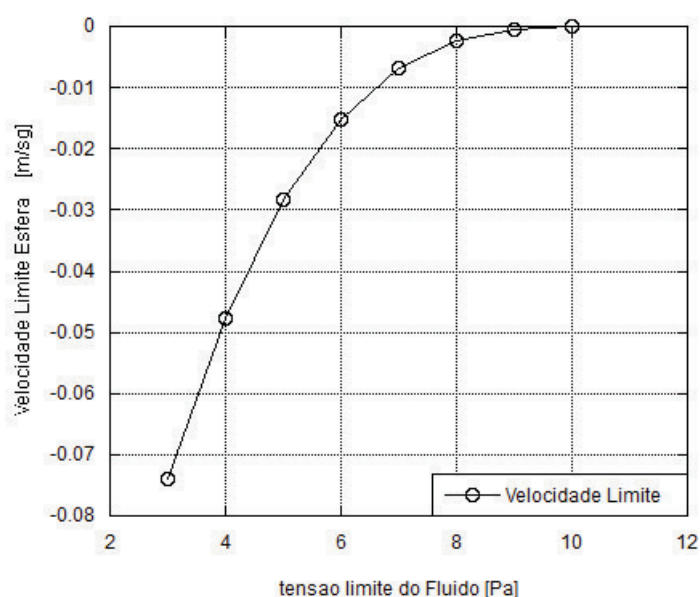


Figura 6.8: Influência da Tensão Limite na tendência no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico

Para analisar a figura (6.8) considere que a velocidade é negativa porque estamos analisando uma esfera rígida, a tendência da partícula é descer e não ascender como uma bolha de gás.

Os resultados da simulação da figura (6.8) são bem interessantes. Observa-se que com o aumento da tensão limite no fluido, a velocidade limite da esfera cai até atingir velocidade zero. Isto significa que com o aumento da tensão limite τ_0 , a bolha atinge uma velocidade limite cada vez menor até chegar num ponto que a esfera ao entrar em contato com o fluido vai parar imediatamente ou vai se deslocar alguns centímetros e se desacelerar até parar. Este é um resultado esperado para um sistema multifásico, com o aumento da tensão limite a esfera vai atingir uma velocidade limite menor e com uma diminuição da tensão limite a bolha atinja uma velocidade limite

maior. Também é possível perceber que com uma tensão limite maior, a desaceleração da partícula é maior até atingir a velocidade limite final. A relação entre a tensão limite e a velocidade limite não é linear, observe que com o aumento da tensão a taxa de redução na velocidade é cada vez menor.

Agora, deseja-se calcular um valor de interesse particular para os pesquisadores, a tensão limite τ_o e o diâmetro inicial da bolha que não permite à partícula começar seu deslocamento. Este resultado também pode ser usado para calcular a tensão limite que desacelera a partícula em movimento até parar. A seguinte análise se aplica para qualquer tipo de partícula sólida, líquida ou gasosa.

Para que uma partícula fique na sua posição inicial ou desacelere até parar, a condição cinemática é que a aceleração da partícula seja igual ou menor de zero ($a \leq 0$). Por isso vamos começar o análise com a equação de aceleração (3-23).

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (6-11)$$

Agora aplicamos a condição cinemática já comentada ($a \leq 0$) na equação (6-11)

$$\frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \leq 0 \quad (6-12)$$

Fatorizando a expressão (6-12) e isolando o termo de interesse, a tensão limite τ_o .

$$\tau_o \geq \frac{g \cdot d \cdot |\rho_d - \rho_c|}{18 \cdot x \cdot y} - \frac{k \cdot \nu^n}{y \cdot d^n} \quad (6-13)$$

Com a equação (6-13) é possível calcular a tensão limite τ_o mínima que faz com que uma partícula em movimento comece a se desacelerar e eventualmente atinja velocidade nula. Esta equação é função da velocidade da bolha ν , por essa razão é necessário conhecer a cinemática da partícula para determinar um valor da tensão limite.

O cálculo da tensão limite τ_o mínima para que a partícula não consiga se deslocar no momento inicial em repouso é mais fácil, neste caso a velocidade inicial ν é zero ($\nu = 0$), assim a equação (6-14) para uma bolha de gás na posição inicial é a seguinte.

$$\tau_o \geq \frac{g \cdot d \cdot |\rho_d - \rho_c|}{18 \cdot x \cdot y} \quad (6-14)$$

A tensão τ necessária para não permitir à partícula se movimentar da sua posição inicial no tempo zero ($t=0$) é maior que a tensão necessária para desacelerar a bolha até parar, quando já está em movimento. Neste caso analisado, a tensão τ_o mínima que não vai permitir o deslocamento da partícula

é de 14.06 Pa , é uma tensão maior que a tensão limite τ_o utilizada, de 7 Pa , isso significa que a bolha consegue começar seu deslocamento sem problema com a tensão limite τ_o do fluido. Isto acontece porque inicialmente a partícula tem que quebrar a microestrutura desalinhada do fluido viscoplastico, e adicionalmente, tem que vencer a inércia relacionada com a massa da partícula com velocidade inicial zero.

Quando a partícula já está em movimento, a inércia relacionada à velocidade da bolha ajuda a quebrar a microestrutura e reduzir o esforço necessário para o avanço, por isso a tensão limite para assegurar o deslocamento de uma partícula em movimento é menor.

A seguir vai ser apresentada a curva de deslocamento de uma esfera rígida em função do tempo mostrada na Figura (6.9) e para cinco diferentes índices de consistência.

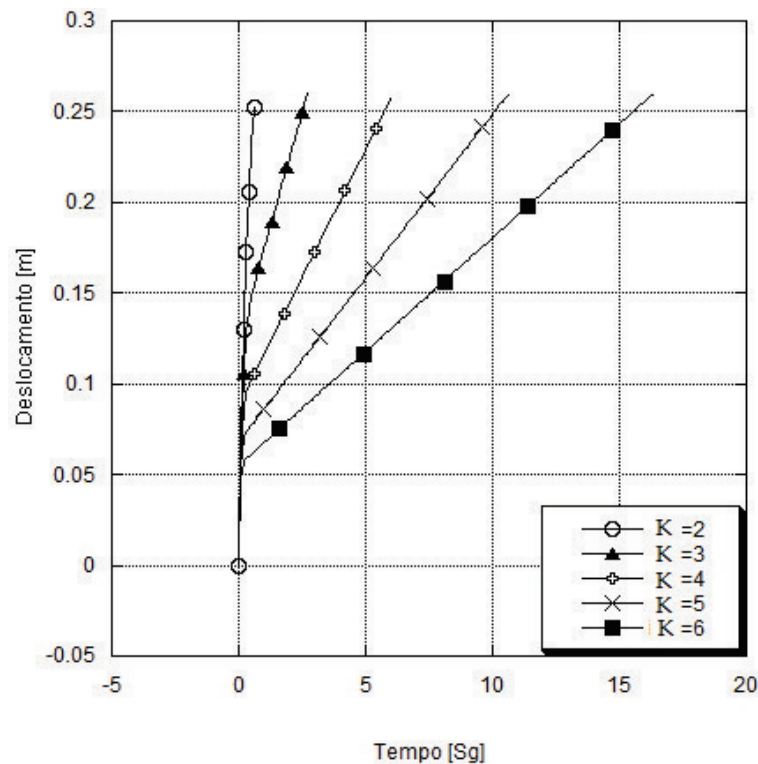


Figura 6.9: Influência do Índice de Consistência k na tendência no Comportamento do Deslocamento de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.

Observa-se que com o aumento do índice de consistência o tempo que a esfera leva para atingir a profundidade final de deslocamento é maior. Adicionalmente, para índices de consistência maiores, a desaceleração inicial da esfera é maior, fazendo com que a bolha atinja uma velocidade limite menor. O efeito causado pelo índice de consistência é significativo e tem que ser levado em conta sempre.

Na Figura (6.10) é analisado o comportamento da velocidade limite da esfera rígida com o aumento do índice de consistência k do fluido.

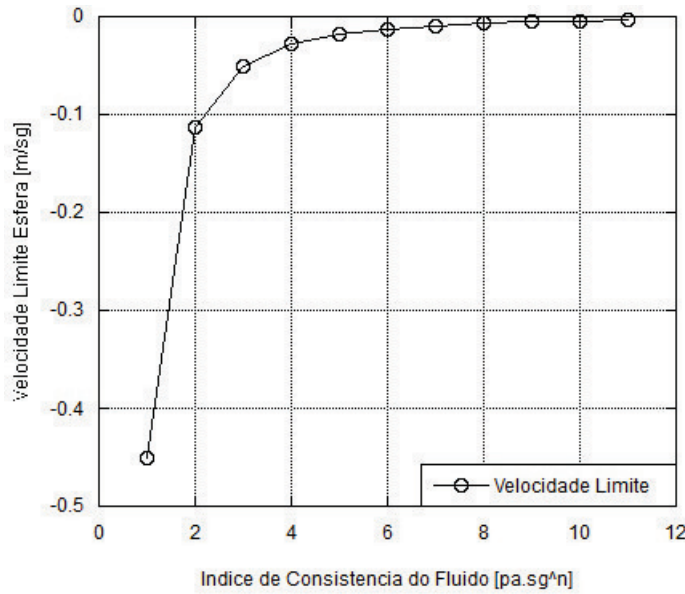


Figura 6.10: Influência do Índice de Consistência no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico

Na figura (6.10) se observa que com o aumento do índice de consistência a velocidade limite é menor até atingir velocidade zero. Para altos índices de consistência a bolha entra em contato com o fluido e é desacelerada até parar.

A Figura (6.11) mostra o efeito do índice Power-Law no deslocamento da esfera.

Neste caso o aumento do índice power-law não significa que a partícula se desacelere como em casos anteriores. A cinemática da partícula vai depender do índice power-law n e da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ segundo a equação (6-15). Lembremos que a equação de tensão de cisalhamento de um fluido viscoplástico é uma potência com a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ como base e o índice de power-law como expoente.

$$\tau = \tau_o + K \cdot \dot{\gamma}^n \quad (6-15)$$

Na figura (6.11) é possível observar que com o aumento do índice power-law o tempo que tarda a partícula em atingir a profundidade final é menor, é o mesmo que dizer que a velocidade limite atingida pela partícula é maior. É possível dizer isto ao observar o gradiente da curva de profundidade em função do tempo, esse gradiente corresponde com a velocidade da partícula.

Nos casos anteriores onde foi analisada a influência da variação do índice de consistência k e a tensão limite τ_o , o comportamento é o contrário ao da figura (6.11). Para entender melhor o que está acontecendo, vai ser feita

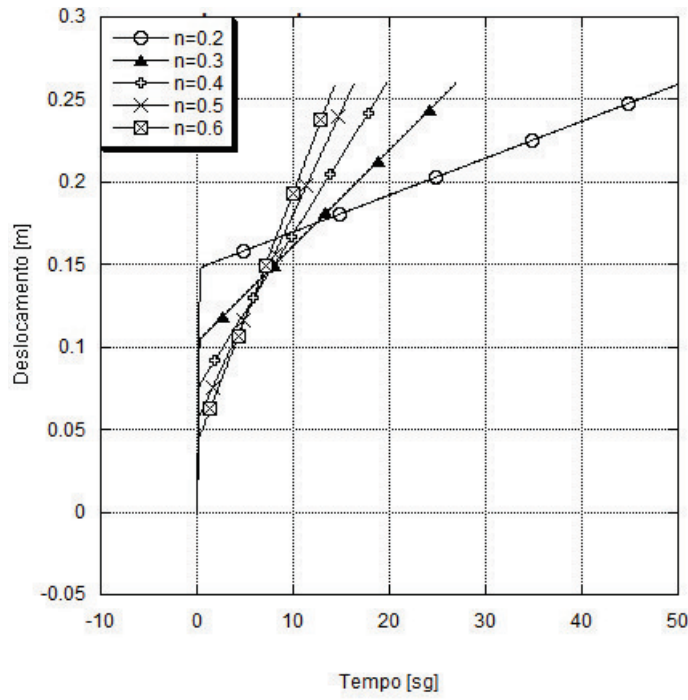


Figura 6.11: Influência do Índice Power-Law na tendência no Comportamento do Deslocamento de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico

uma nova simulação para calcular a velocidade limite atingida pela esfera em função do índice power-law n . Os resultados são mostrados na figura (6.12), com as condições reológicas e geométricas iguais que no caso anterior. Foi utilizada uma esfera rígida de 3.96 cm de diâmetro e uma densidade de 1411 $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ descendo numa coluna de 25 cm de profundidade com um fluido viscoplastico com a reologia da Tabela (6.5).

Na Figura (6.12) se calcula a velocidade limite da esfera em função do índice power-law.

É possível observar que a velocidade limite da esfera aumenta com o aumento do índice power-law n . Agora, para explicar a física do fenômeno de forma fácil e com o objetivo que as conclusões nesta seção possam ser conferidas matematica e experimentalmente, vai ser utilizada a equação (6-16) de aceleração da partícula desenvolvida neste trabalho. Ela é função do diâmetro d e a velocidade da partícula v . A seguir lembramos a equação de aceleração.

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot v^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (6-16)$$

Onde para uma partícula sólida de diâmetro d e densidade constante ρ num fluido de reologia constante, é possível simplificar a equação (6-16) usando dois constantes cte_1 e cte_2 , assim.

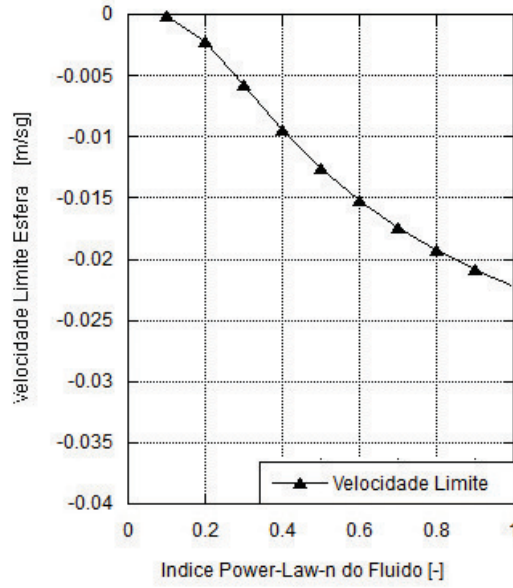


Figura 6.12: influência do Índice Power-Law na tendência no Comportamento da Velocidade Limite de uma Esfera sólida Imersa em Fluido Viscoplastico.

$$cte_1 = \frac{(\rho_c - \rho_d).g}{\rho_d} + \frac{18.x}{\rho_d.d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot y \cdot \tau_o \quad (6-17)$$

$$cte_2 = \frac{18.k.x}{\rho_d.d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \quad (6-18)$$

Onde cte_1 e cte_2 são dois constantes que vão depender das características reológicas do sistema. Devido à reologia constante do sistema, posso reduzir a equação de aceleração à seguinte expressão.

$$a = cte_1 + cte_2 \cdot \left(\frac{\nu}{d}\right)^n \quad (6-19)$$

Como experimentalmente é difícil medir a taxa de cisalhamento que age sobre a partícula para conferir o dito aqui, então são usados dos parâmetros análogos, a velocidade de deslocamento ν e o diâmetro d da esfera. Estes dois parâmetros determinam o valor da taxa de cisalhamento que age sobre a partícula e nesta ocasião vão ser utilizados para calcular o comportamento da cinemática na partícula.

É importante ressaltar que nos resultados das figuras (6.12) e (6.11) se está analisando o comportamento da velocidade limite da partícula ao variar a reologia do fluido, e não o comportamento da partícula em função do tempo. Nesta seção estamos assumindo tempo infinito e neste ponto a partícula atinge sua máxima velocidade, nesse ponto tomamos o valor da velocidade e posteriormente se varia a reologia para um novo cálculo da velocidade limite com um índice Power-law n diferente.

Ao analisar a equação (6-19) é possível deduzir que ao aumentar o índice power-law n e com um quociente $\frac{\nu}{d}$ entre a velocidade ν e o diâmetro da

partícula d maior a 1 s^{-1} ($\frac{\nu}{d} > 1$), a velocidade limite atingida pela partícula vai ser menor. No caso contrario, com o aumento do índice power-law e para um quociente $\frac{\nu}{d}$ menor a 1 s^{-1} ($\frac{\nu}{d} < 1$), a velocidade limite atingida pela partícula vai ser maior. Neste projeto só foram usados índices power-law n menores a 1, que correspondem a fluidos viscoplasticos.

Como conclusão final deste seção, podemos dizer que para o caso do índice power-law n , a influência na cinemática não depende só do valor de n , a partícula pode atingir uma velocidade limite maior ou menor em função do diâmetro desta. Este fato é importante porque em função do tamanho da partícula o efeito de variar o índice power-law na reologia do fluido, pode causar um resultado diferente ao esperado.

6.3.2

Tendências para Bolha de Gás

Nesta seção é analisado o comportamento de uma bolha de gás num fluido viscoplastico ao modificar a reologia do fluido. O interesse é confirmar os resultados da seção anterior mas para uma bolha de gás e analisar o efeito do aumento no diâmetro na cinemática da bolha. Nas simulações usamos a serie de dados S6 do capítulo na seção (5.3). A reologia do fluido utilizado é mostrada na Tabela (6.6), foi utilizado Carbopol EZ2 a uma temperatura de 292.15 K e foi injetado o gás a uma profundidade de 1.3288m.

Serie	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Índice comportamento [—]	Índice consistência [Pa.s g^n]	Tensão limite [Pa]
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 6.6: Propriedades Físicas dos Fluidos de Trabalho de Dubash (2003)

Na Figura (6.13) é simulada a profundidade em função do tempo para uma bolha de gás e para diferentes valores da tensão limite τ_o .

Com o aumento da tensão limite do fluido o tempo necessário para a bolha se deslocar é maior. Nas simulações para bolha de gás existe uma diferença fundamental comparado com o caso de esfera rígida: não é possível atingir uma velocidade limite constante, só é possível atingir uma velocidade quase constante com uma baixa aceleração, neste trabalho chamamos este estágio como velocidade limite de regime transiente. Na figura (6.13) é possível ver uma leve curvatura ascendente nos resultados, isto é consequência do aumento na velocidade da bolha.

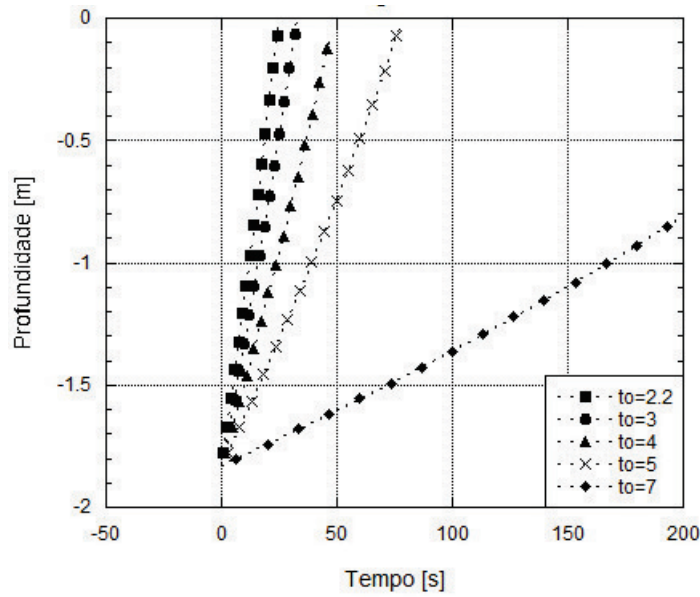


Figura 6.13: Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplastico para Diferentes Valores de Tensão Limite τ_o

Em bolhas de gás também é possível aplicar a equação para determinar a tensão limite τ_o mínima capaz de impedir o deslocamento inicial da bolha de gás. A seguir lembramos a equação.

$$\tau_o \geq \frac{g \cdot d \cdot |\rho_d - \rho_c|}{18 \cdot x \cdot y} \quad (6-20)$$

Como nas séries simuladas para bolha de gás o diâmetro inicial da bolha foi da ordem dos 5 mm, podemos dizer que em todos os casos a tensão limite τ_o necessária para impedir o deslocamento inicial da bolha é menor que para partícula sólida onde o diâmetro da esfera era de 3.96cm.

Na Figura (6.14) se mostra a velocidade da bolha em função do tempo.

A velocidade aumenta com o tempo porque o diâmetro da bolha aumenta com a força de flutuação. É importante observar que a aceleração da bolha mostrada na figura (6.14) é causada pelo aumento no diâmetro da bolha.

Na Figura (6.15) se apresenta a profundidade de uma bolha de gás em fluido viscoplastico, para vários índices de consistência.

Na figura (6.15) o tempo de deslocamento aumenta com o aumento do índice de consistência. Também é possível perceber uma leve curvatura ascendente causada pelo aumento no diâmetro da bolha que acelera a partícula.

A figura (6.16) mostra a velocidade da bolha para vários índices power-law.

Observa-se que a bolha está sendo acelerada pelo aumento no diâmetro da bolha que causa um aumento na força de flutuação assim como no caso anterior.

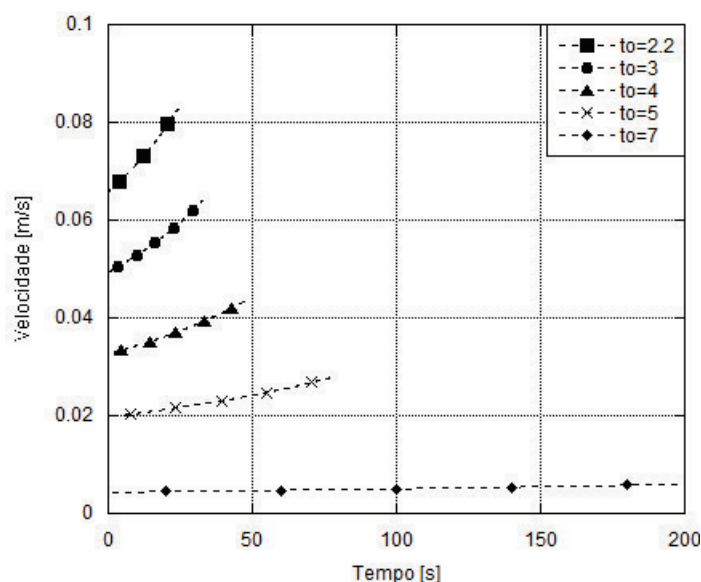


Figura 6.14: Velocidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplastico para Diferentes Valores de Tensão Limite

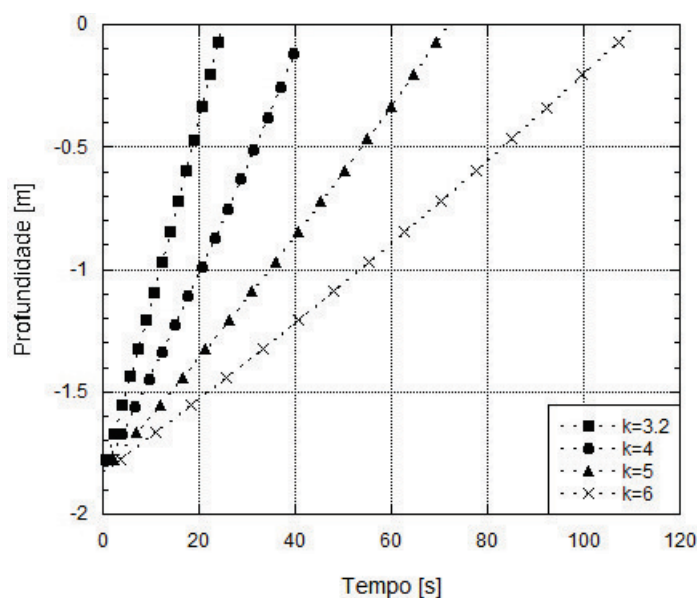


Figura 6.15: Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplastico para Vários Índices de Consistência

Como resultado final desta seção se apresenta a variação da profundidade em função do tempo de uma bolha de gás em fluido viscoplastico para vários índices de consistência, conforme a figura (6.17).

Observa-se que com o aumento do índice de consistência n o tempo de deslocamento é maior e em consequência a velocidade da bolha é menor.

Na figura (6.18) se observam dois importantes fatos, o primeiro é a influência do diâmetro da bolha na cinemática do sistema. Ao se deslocar a bolha, esta se acelera e não atinge uma velocidade limite por conta do aumento

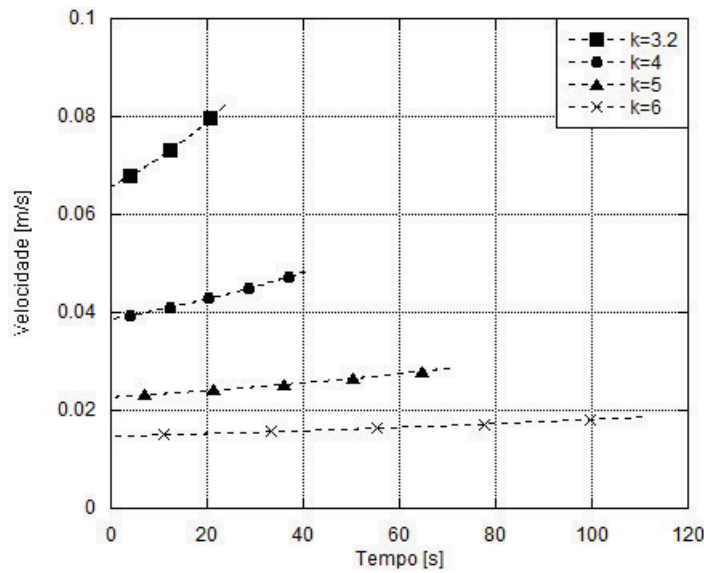


Figura 6.16: Velocidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law

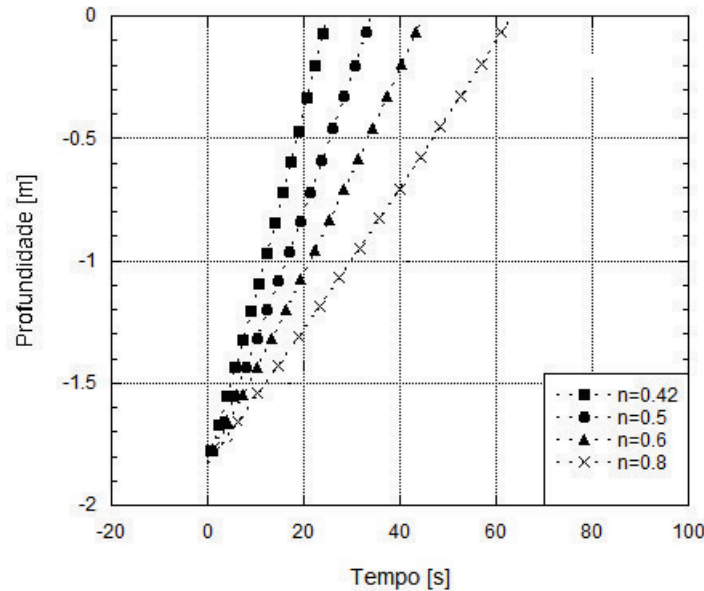


Figura 6.17: Profundidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law

constante no diâmetro da bolha. No modelo matemático, simular uma bolha de gás é como simular uma esfera sólida porém com diâmetro variável, e com recirculação de ar no interior da bolha, o que reduz o atrito. Os resultados são satisfatórios com um erro inferior ao 10%.

O segundo fato é a influência do índice power-law na cinemática da bolha e sua dependência com o diâmetro da bolha. o comportamento neste caso é contrário ao da partícula sólida. Com o aumento do índice power-law n a velocidade limite atingida pela bolha é menor. Este comportamento foi tratado

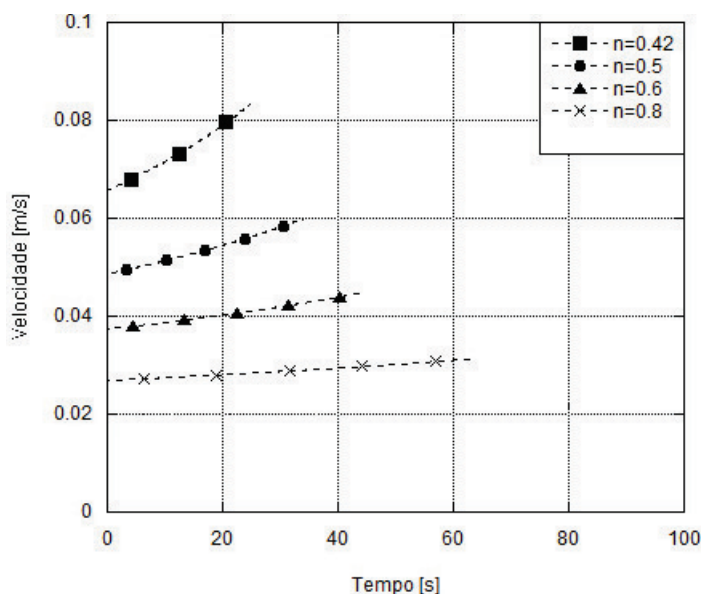


Figura 6.18: Velocidade em função do tempo para bolha de gás em fluido viscoplástico para vários índices power-law

na seção (6.3.1) onde foi analisada uma partícula sólida escoando em fluido viscoplástico com variação do índice power-law n . Na seção (6.3.1) foi determinado que para variações do índice power-law, a partícula sólida ou gasosa pode atingir uma velocidade limite maior ou menor, esse comportamento vai depender da taxa de cisalhamento, que analogamente é o mesmo que dizer que depende do diâmetro da bolha d . Em resumo, o quociente $(\frac{\nu}{d})$ vai determinar se a bolha atinge uma velocidade maior ou menor ao aumentar o índice power-law n . Se o quociente for maior que 1 s^{-1} ($(\frac{\nu}{d} > 1)$) a bolha vai atingir uma velocidade menor, e se for menor que 1 s^{-1} ($(\frac{\nu}{d} < 1)$) a bolha atinge uma velocidade maior.

Podemos concluir que os parâmetros (índice de consistência k , tensão limite τ_o e índice power-law n) afetam de forma importante a cinemática de uma partícula esférica como uma bolha de gás ou uma esfera rígida, e seus efeitos não podem ser desprezados. Nesta seção foram analisados os efeitos dos parâmetros reológicos de forma independente, sendo que na realidade os parâmetros são dependentes entre si em função da taxa de cisalhamento, temperatura, aditivos, etc. A relação existente entre os parâmetros reológicos do fluido são diferentes para cada fluido e só pode ser determinada experimentalmente.

6.4

Comportamento do Modelo Matemático para Reologia Variável no Tempo

O Objetivo principal desta pesquisa é desenvolver um modelo simplificado para calcular a cinemática de uma bolha de gás em pastas de cimento,

mas estas pastas tem uma importante característica, um processo de cura que causa mudanças da reologia em função do tempo. Por esta razão foram modificadas as equações do modelo para dar a capacidade de alterar a reologia em função do tempo. Com isto se deseja aproximar mais o comportamento do modelo ao comportamento de uma pasta de cimento real.

Esta seção tem dois objetivos, determinar a capacidade do modelo matemático de calcular resultados com uma reologia variável no tempo, e definir se os resultados se comportam com o esperado qualitativamente para uma pasta de cimento. Este modelo é só um modelo inicial para fluido com reologia variável no tempo, para simular pastas de cimento ainda é necessário desenvolver mais o modelo matemático e começar um trabalho experimental para melhorar as equações utilizadas neste capítulo. Nesta seção estamos explorando a possibilidade do modelo de ser aplicado em pastas de cimento.

Para modificar o modelo matemático e se aproximar à reologia de um cimento, foi utilizada a pesquisada dos autores G. Pinto, J. Rocha, G. Campos e A. Martins (2011). No trabalho fizeram alguns ensaios no reômetro para determinar um modelo qualitativo e descrever a reologia de uma pasta de cimento. Usamos a equação fornecida e adaptamos em nosso modelo, lembrando que o modelo deste trabalho depende de três parâmetros; o índice de consistência k , a tensão limite τ_o e o índice power law n . Modificamos só duas equações, a tensão limite τ_o e o índice de consistência n .

Foram definidas as equações de tensão limite τ_o com a expressão (6-21) e índice de consistência k com a expressão (6-22), as duas equações são exponenciais em função do tempo e com três parâmetros (H , B e C) para controlar o comportamento.

$$\tau_o = \tau_{o_0} \cdot e^{C \cdot t} \quad (6-21)$$

$$k = k_o + H \cdot e^{B \cdot t} \quad (6-22)$$

Onde k_o e τ_{o_0} são o índice de consistência e a tensão limite no tempo zero.

Estas equações (6-21) e (6-22) foram aplicadas na equação de aceleração da bolha de gás (3-45) para analisar a influência de uma reologia variável em função das constantes H , B e C .

$$a = \frac{(\rho_c - \rho_d) \cdot g}{\rho_d} + \frac{18 \cdot x}{\rho_d \cdot d} \cdot \frac{(\rho_d - \rho_c)}{|\rho_d - \rho_c|} \cdot \left(\frac{k \cdot \nu^n}{d^n} + y \cdot \tau_o \right) \quad (6-23)$$

Neste capítulo foram usadas condições reológicas e operacionais similares às do capítulo (5.3). Na tabela (6.9) se mostram os detalhes da reologia utilizada, que é próxima à do Carbopol EZ2. A diferença está em que o índice de comportamento também conhecido como índice power-law permanece

constante. O índice de consistência k e a tensão limite τ_o variam conforme as equações (6-21) e (6-22) . A temperatura das simulações é 292.15K para uma profundidade inicial de 182.9cm.

Serie	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Índice de comportamento $n[-]$	Índice de consistência $k_o [Pa.sg^n]$	Tensão limite $\tau_{o_o} [Pa]$
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 6.7: Propriedades Físicas do Fluido com Reologia Variável no Tempo

A Figura (6.19) mostra a simulação do cálculo da profundidade da bolha de gás em função do tempo para fluido viscoplastico. Na figura (6-22) foram calculados os resultados para diferentes valores do índice H da equação (6-22), os parâmetros B e C são mantidos constantes (B=10 e C=0).

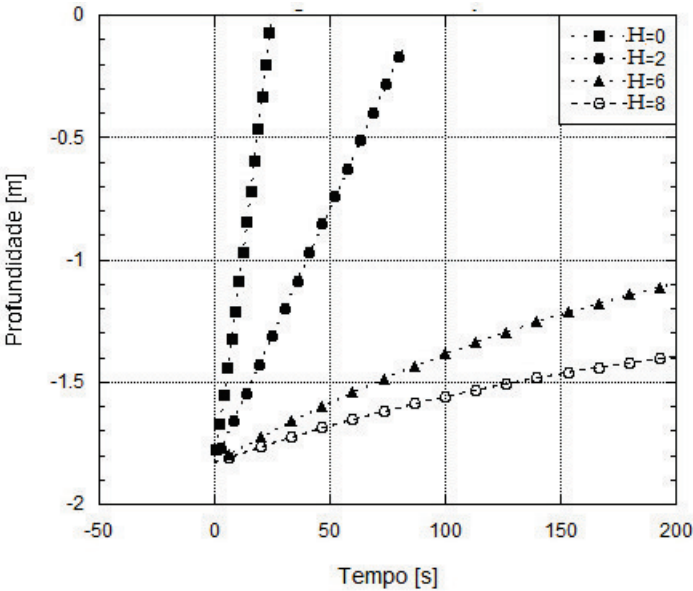


Figura 6.19: Profundidade para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice de Consistência - Índice H

Na figura (6.19) observa-se que com o aumento da constante H a velocidade da bolha é cada vez menor ao longo do tempo. Algo interessante deste caso é que a constante H altera principalmente de forma quantitativa os resultados. Qualitativamente o efeito é baixo, a tendência da curva muda pouco com o aumento de H . Isto ocorre porque H é um fator que afeta linearmente o índice de consistência k . Por essa razão a tendência da curva muda pouco, mas quantitativamente o resultado varia de forma importante.

A Figura (6.20) mostra a simulação do cálculo da profundidade da bolha de gás em função do tempo para fluido viscoplastico, os resultados foram

calculados para diferentes valores do índice B da equação (6-22) de índice de consistência, os parâmetros H e C são mantidos constantes ($H=0$ e $C=0$).

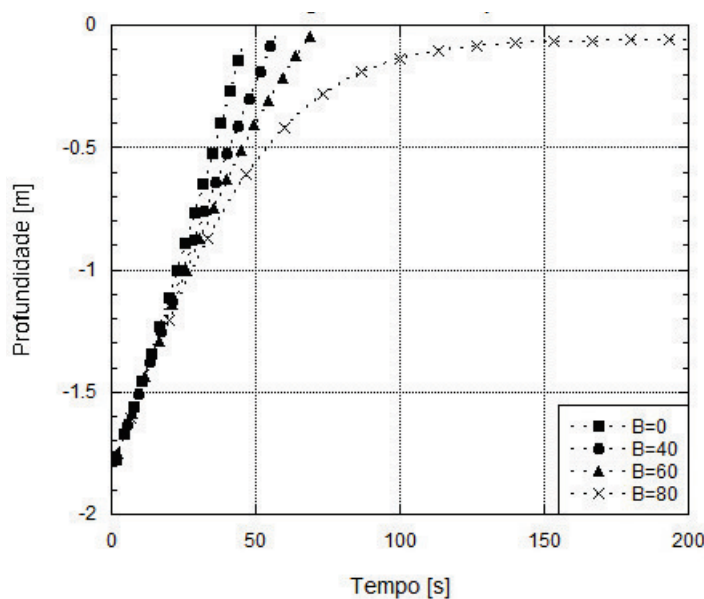


Figura 6.20: Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice de Consistência - Índice B

Como a constante B é uma potência da equação do índice de consistência (6-22), causa um efeito importante. Modifica de forma qualitativa e quantitativa os resultados. É fácil ver que com o aumento de B a tendência da curva muda de forma importante. Inicialmente a curva é linear para $B = 0$ com velocidade quase constante, mas com o aumento de B a redução da velocidade da bolha é maior com o avanço do tempo e a tendência da curva muda de forma importante. Fisicamente o fluido se torna mais viscoso num tempo menor com o aumento de n , isto acontece porque o aumento da viscosidade é exponencial, causando um aumento na força de arrasto e desacelerando a bolha até parar.

A terceira simulação se apresenta na figura (6.21) com os resultados para o cálculo da profundidade da bolha de gás em função do tempo para fluido viscoplástico. Os resultados foram calculados para diferentes valores do índice C da equação de tensão limite τ_o , os parâmetros B e H são mantidos constantes ($B=0$ e $H=0$).

Da figura (6.21) se observa que a constante C também é uma potência de características similares ao caso anterior, os resultados também são similares. Com o aumento da constante C a tendência da curva se altera de forma importante, passa de uma bolha com velocidade quase constante a uma bolha que reduz sua velocidade no tempo até parar. Este fenômeno é causado pelo aumento da tensão limite τ_o com o tempo. Como a relação entre o parâmetro

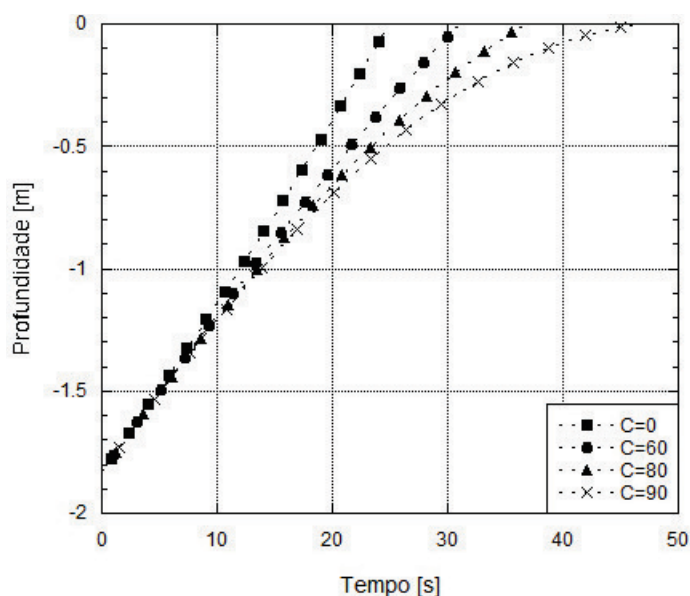


Figura 6.21: Profundidade em Função do Tempo para Bolha de Gás em Fluido viscoplástico com Reologia Variável no Tempo: Índice C

C e a tensão limite na equação (6-21) é exponencial, a mudança na tendência da curva é maior com o passo do tempo, alterando o comportamento da curva.

Fisicamente a redução na velocidade é causada pelo aumento na força de arrasto devido ao aumento da tensão limite τ_o , isto aumenta a desaceleração, até atingir velocidade zero.

Para concluir, é possível dizer neste ponto que o modelo matemático com reologia variável no tempo funciona bem. É necessário desenvolver as equações que representem adequadamente o comportamento da reologia do cimento e aplicar, para conseguir resultados qualitativamente e quantitativamente corretos.

6.5

Comportamento do Modelo Adimensional para Reologia Constante no Tempo

Nesta seção vão ser calculados e analisados os resultados do modelo adimensional da seção (6.5). O objetivo é generalizar os resultados, reduzir o número de parâmetros involucrados nos resultados e identificar novas relações na cinemática da bolha de gás.

Foram feitas várias simulações para um sistema de bolha de gás num fluido viscoplástico de reologia constante e também variável no tempo.

Foram utilizadas várias equações para esta seção, a equação (3-66) de Força G , a equação (3-62) de diâmetro adimensional d^* , a equação (3-18) de coeficiente de arrasto Cd , a equação (3-61) de número de Froude Fr , a equação

(3-19) de número de Reynolds Re , e a equação (3-20) de número de Bingham Bi para fazer as simulações e calcular os seguintes resultados.

A reologia utilizada é a mesma da serie 6 do capítulo (5.3) para bolha de gás em fluido Newtoniano.

Serie	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Índice comportamento $n [-]$	Índice consistência $k [Pa.sg^n]$	Tensão limite $\tau_o [Pa]$
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 6.8: Propriedades Físicas de um dos Fluidos de Trabalho de Dubash (2003)

O gás usado é ar com uma massa molar de $0.0289 \frac{kg}{mol}$ injetado a uma profundidade de 1600m com um diâmetro inicial da bolha de 1cm. A temperatura do fluido é de 292.85 K.

Na figura (6.22) se calcula o coeficiente de arrasto Cd em função do número de Reynolds Re em escala logaritmica.

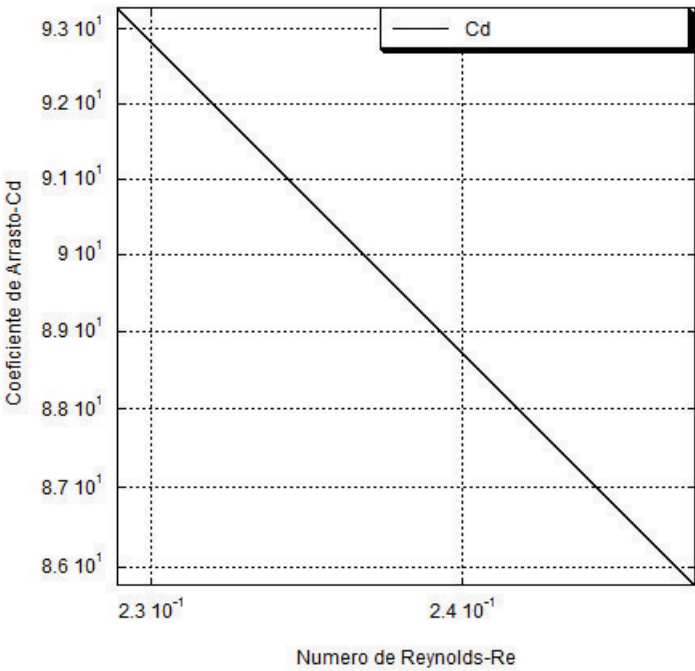


Figura 6.22: Coeficiente de Arrasto Cd em Função do número de Reynolds Re para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico

Na primeira figura (6.22) se atingem resultados similares aos encontrados num fluido Newtoniano, o coeficiente de arrasto Cd diminui linearmente com o aumento do número de Reynolds. Mas isto não significa que a força de arrasto diminuía com o tempo, ao contrario, a força de arrasto aumenta, isto acontece porque a área da interface gás-liquido cresce ao se deslocar, causando

um aumento da força de arrasto. Adicionalmente a força de arrasto também cresce com o aumento da velocidade da bolha. A seguir se apresenta a equação de Força de arrasto F_d .

$$F_d = \frac{1}{2} \cdot \rho_c \cdot \nu^2 \cdot A \cdot C_d \quad (6-24)$$

Na figura (6.23) se calcula a força G em função da relação de diâmetros para uma bolha de gás num fluido viscoplastico. Lembremos que a força G indica o número de vezes que a partícula é acelerada com a aceleração da gravidade.

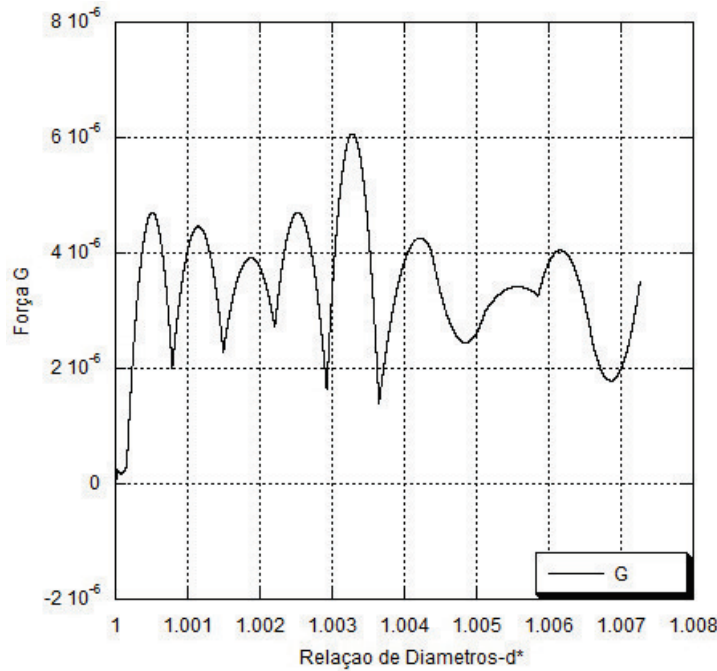


Figura 6.23: Força G em Função da Relação de diâmetros d^* para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico

Na Figura (6.23) obtivemos um resultado particular, é fácil observar como a Força G não é tão estável como pensaríamos. A curva sofre de variações no valor conforme a relação de diâmetros aumenta, mas existe um valor médio constante que limita uma faixa onde a bolha permanece, o valor é próximo a 3×10^{-6} . Este resultado com variações na força G mas com valor médio constante indica o esforço da bolha para manter o balanço de forças do sistema dinâmico. É possível entender esta instabilidade na força G se consideramos que o balanço de forças é afetado por parâmetros como o diâmetro da bolha em constante aumento, a velocidade crescente, a redução da pressão do gás ao se deslocar a bolha e a força de arrasto em contínuo aumento. A seguir se mostra a equação de Força G utilizada nos cálculos.

$$\rho^* \cdot G = 1 - \rho^* + \frac{3}{8} \cdot \frac{(\rho^* - 1)}{|\rho^* - 1|} \cdot Fr^2 \cdot C_d \quad (6-25)$$

Outra observação importante é que a força G é muito baixa, aproximadamente $3 \cdot 10^{-6}$. Isto indica que a força de arrasto limita de forma importante a aceleração causada pela força de flutuação da bolha e não permite uma aceleração descontrolada. Ao contrario, a aceleração da bolha é muito baixa comparada com a aceleração da gravidade.

Na figura (6.24) se apresenta a curva de número de Froude Fr em função da relação de diâmetros d^* . A seguir lembramos a equação de número de Froude.

$$Fr = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{d}{2} \cdot g}} \quad (6-26)$$

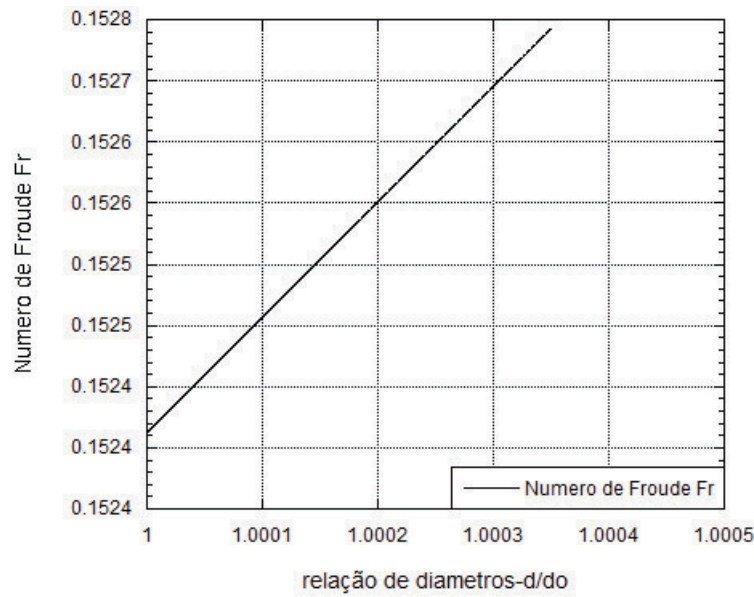


Figura 6.24: Numero de Froude Fr em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás num Fluido Viscoplastico

Na figura (6.24) se observa que o número de Froude cresce linearmente conforme aumenta a relação de diâmetros. Se consideramos que o número de Froude representa a relação entre as forças inerciais e gravitacionais, podemos dizer que ao longo do tempo a a cinemática da bolha é influenciada mais pela inércia da bolha relacionada com a velocidade e menos pela força gravitacional de empuxo. Como o número de Froude é baixo, significa que as forças gravitacionais são dominantes na cinemática da bolha, isso quer dizer que no sistema simulado a força de empuxo é muito maior que a inércia relacionada com a velocidade da bolha. Por isso é importante o número de Froude, permite determinar qual é o tipo de força dominante no sistema (gravitacional ou inercial) que vai influenciar o comportamento cinemático da partícula.

Para finalizar este capítulo, vão ser apresentadas algumas simulações para bolha de gás num fluido viscoplastico que se comporta similar a uma pasta de cimento. A intenção de conferir o efeito da reologia variável no tempo . A reologia é a mesma da seção (6.4) na tabela (6.9). A seguir se apresenta de novo a tabela.

Serie	Densidade $\rho_c \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Índice de comportamento n $[-]$	Índice de consistência k_o $[Pa.sg^n]$	Tensão limite τ_{oo} $[Pa]$
S6	1072	0.42	3.2	2.2

Tabela 6.9: Propriedades Físicas do Fluido utilizado com Reologia Variável no Tempo

A temperatura do fluido é de 292.25K e a profundidade de injeção da bolha é de 1600m, o gás é ar com uma massa molar de $0.0289 \frac{kg}{mol}$.

A seguir se apresentam as figuras de coeficiente de arrasto Cd (6.25), Força G (6.26) e número de Froude Fr (6.27).

Na figura (6.25) a tendência na curva logarítmica do coeficiente de arrasto é linear como no caso anterior. Isto acontece porque a variação na reologia afeta igualmente o coeficiente de arrasto Cd e o número de Reynolds Re .

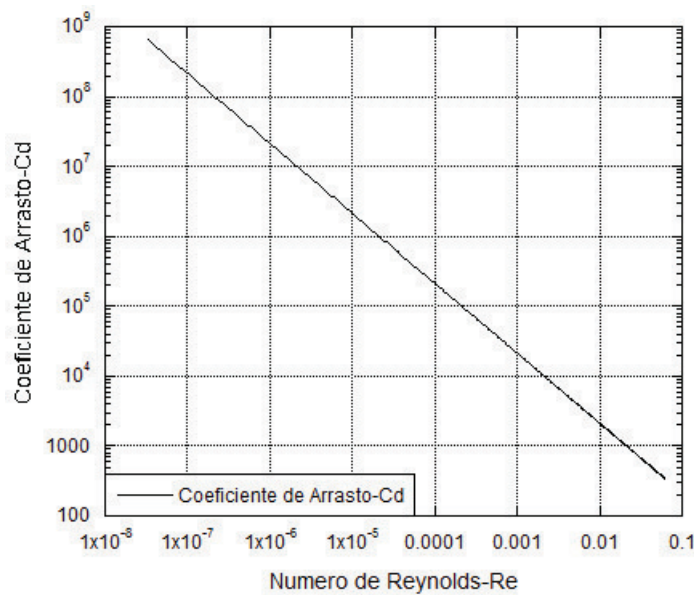


Figura 6.25: Coeficiente de Arrasto Cd em Função do número de Reynolds Re para Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo

Na figura (6.26) encontramos um resultado similar ao caso de reologia constante. A força G se mantém numa faixa constante, a única diferença está no ponto em que a bolha atinge velocidade zero, isto causa instabilidade nas simulações, mas não afeta de forma significativa os resultados.

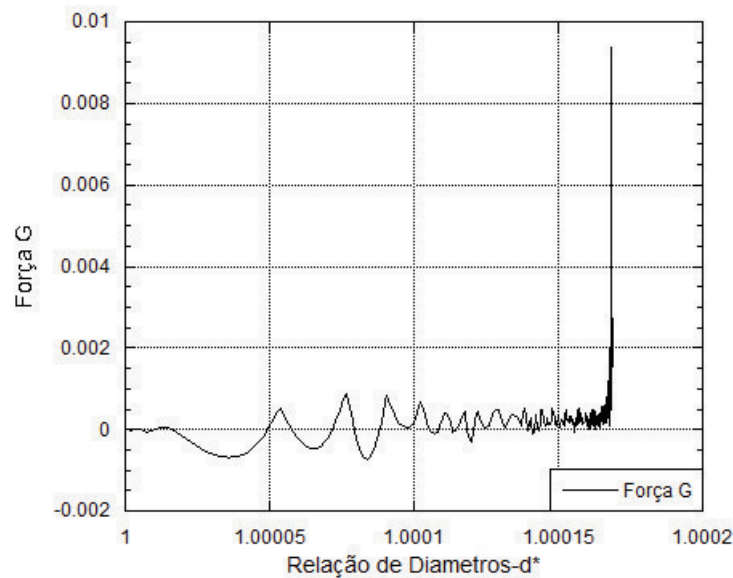


Figura 6.26: Força G em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo

Só na figura (6.27) se encontra uma diferença importante entre o comportamento com reologia constante e com reologia variável no tempo. O número de Froude varia de forma não linear a diferencia das simulações com reologia constante.

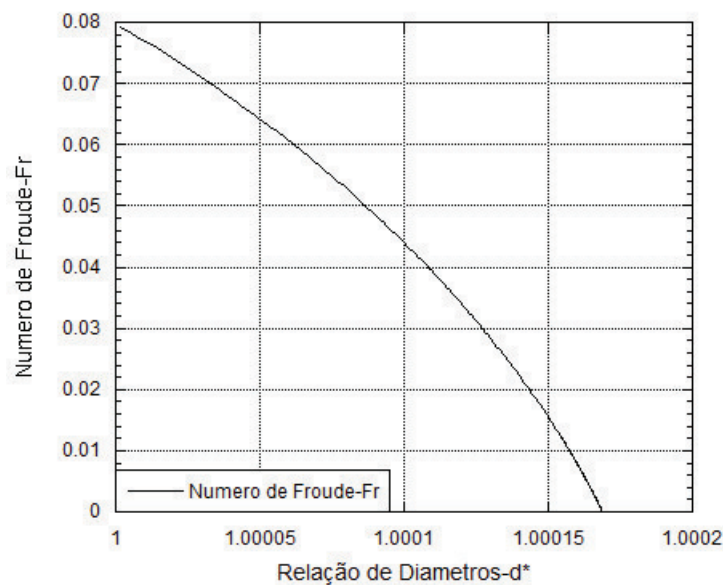


Figura 6.27: Número de Froude Fr em Função da Relação de Diâmetros d^* para uma Bolha de Gás com Reologia Variável no Tempo

7

Conclusões e Recomendações

7.1

Conclusões

- O modelo matemático foi validado com os resultados experimentais de vários autores, em todos os casos o modelo funcionou até um Reynolds Generalizado de três ($Re_{p-l} \leq 3$), com um erro máximo de 10 %. Para um número de Reynolds maior o erro é superior a 10%, considerando como um erro não admissível.
- O sistema de equações desenvolvido funciona adequadamente para partículas esféricas, esta condição é importante porque se o formato da partícula não for esférico as condições de arrasto mudam significativamente e o modelo não vai funcionar dentro do erro admissível.
- O modelo foi validado para diferentes tipos de partícula esférica, conseguiu-se provar que funciona para partículas sólidas e gasosas esféricas, sendo que também é possível funcionar para partículas líquidas. Esta hipótese não foi validada porque não é de interesse neste trabalho.
- Os resultados apresentados indicam que este modelo pode ser aplicado em várias condições reológicas, fluidos Herschel-Bulkley, Power-Law, Bingham e Newtoniano, onde foram atingidos resultados positivos com erros aceitáveis.
- Nos testes realizados para determinar a influência da tensão superficial no diâmetro e na pressão da bolha, verificou-se que o fator que determina a influência da tensão superficial nos resultados é o diâmetro da bolha. Um diâmetro baixo da bolha vai aumentar a influência da tensão superficial, e viceversa. O diâmetro aproximado que pode alterar os resultados é muito baixo, é necessário um diâmetro menor a 0,1mm para que a tensão superficial afete os resultados, e ainda neste caso o efeito é quase desprezível. Adicionalmente, para que uma bolha desse diâmetro consiga se deslocar é necessário que o fluido seja Newtoniano. Se o fluido for viscoplastico, a tensão limite τ_o pode não permitir q a bolha comece a

se deslocar. Como as condições são pouco prováveis, assumimos a tensão superficial desprezível nesta pesquisa.

- Foi analisado o efeito da massa da bolha nos resultados para o caso de bolha de gás se deslocando. Após várias simulações determinou-se que não é recomendado desprezar a massa da bolha. Parâmetros como a profundidade inicial, o diâmetro inicial de injeção da bolha e a massa molar do gás podem tornar importante a massa da bolha nos resultados e causar desvios superiores a 30% ou 40%. Recomenda-se analisar estes fatores antes de tomar uma decisão. Neste trabalho sempre foi levada em conta a massa da bolha. Também observou-se que os tempos de simulação e os recursos computacionais usados considerando a massa são quase os mesmos que desprezando a massa da bolha.
- Ao variar a tensão limite τ_o e o índice de consistência k em partículas solidas e gasosas submersas em fluido viscoplastico, observa-se que com o aumento destes parâmetros a velocidade atingida pela partícula se reduz. Isto acontece porque com o aumento no valor dos parâmetros a força de arrasto aumenta, causando uma desaceleração da bolha. Com a variação destes parâmetros a alteração nos resultados é importante, por isso se faz necessário usar estes parâmetros para modelar a reologia do cimento.
- Ao aumentar o índice power-law n na reologia do fluido e usando partículas solidas ou gasosas submersas no fluido viscoplastico, observa-se que os resultados variam de forma interessante. Ao aumentar o índice power-law, a velocidade limite atingida pela partícula, pode ser menor ou maior, isto depende da taxa de cisalhamento que é função da velocidade da partícula ν do diâmetro da partícula d . Se o quociente $\frac{\nu}{d}$ é maior de $1s^{-1}$ ($\frac{\nu}{d} > 1$) a partícula atinge uma velocidade limite menor, e para um quociente menor de $1s^{-1}$ ($\frac{\nu}{d} < 1$) a partícula atinge uma velocidade limite maior. É importante considerar que o índice power law não se comporta como a tensão limite τ_o ou o índice de consistência k , seu efeito depende além dos parâmetros já indicados.
- Ao variar o índice power-law n em partículas solidas e gasosas submersas em fluido viscoplastico, encontrou-se que com um índice n menor a 1, a magnitude da aceleração (ou desaceleração) da partícula aumenta, este é um comportamento que corresponde a um fluido Pseudoplastico. Caso contrário se o índice power-law n é maior a 1, a magnitude da aceleração (ou desaceleração) da partícula diminui, este comportamento corresponde com uma partícula num fluido dilatante.
- Foi analisado também o efeito causado pelo diâmetro da bolha na cinemática. Foi mostrado como a velocidade da bolha está em constante

aumento impulsionada pelo diâmetro crescente da bolha. Neste caso, a bolha não atinge uma velocidade limite como nas partículas sólidas, por isso foi definida a "velocidade limite transiente", que descreve a velocidade máxima (velocidade limite) que pode atingir a bolha para seu diâmetro no instante de tempo analisado.

- Foram alteradas as equações de tensão limite τ_o e o índice de consistência k para simular as condições reológicas de uma pasta de cimento. Neste caso, a reologia varia em função do tempo e simula o processo de cura de uma pasta de cimento. Os resultados iniciais indicam que a rotina desenvolvida consegue resolver o sistema de equações gerado e também os resultados atingidos concordam com o esperado. Com o passar do tempo durante a cura do cimento, o índice de consistência k e a tensão limite τ_o aumentam. Isto faz com que a força de arrasto aumente e o deslocamento da bolha se torna mais difícil, a tendência de desaceleração da bolha continua até atingir velocidade zero ($\nu=0$). É importante indicar que os modelos utilizados para simular a reologia do cimento são iniciais, só para conhecer a resposta do modelo matemático e definir se qualitativamente está certo. É necessário um extenso trabalho experimental para determinar os modelos adequados para aplicar na reologia do fluido e atingir resultados quantitativamente corretos.
- Foram analisados os resultados fornecidos pelo modelo adimensional. Na curva logarítmica de coeficiente de arrasto Cd e número de Reynolds Re foi confirmada uma relação linear entre estes dois parâmetros, além independente do tipo de reologia do fluido como fluidos newtonianos, viscoplasticos ou pastas de cimento a linearidade continua.
- Ao observar a curva de Força G se identificaram instabilidades significativas no balanço das forças que agem sobre a bolha. Os resultados permitem observar o esforço da partícula para manter o equilíbrio de forças no sistema multifásico. A aceleração da partícula não é tão estável como se pensava. Analisando a Força G da partícula é possível observar variações significativas na aceleração. Foi possível entender melhor e com mais detalhe a cinemática instável da bolha escoando num fluido.
- Finalmente, foi calculado o número de Froude de bolha de gás em diferentes reologias. O número de Froude é usado para determinar a relação entre as forças inerciais e gravitacionais que agem na bolha e determinar a força dominante no sistema. Para uma bolha de gás submersa num fluido de reologia constante no tempo, foi confirmada a importância da força de empuxo como força dominante na aceleração

da bolha. Também foi identificada a força dominante no sistema para diferentes sistemas bifásicos.

- O modelo matemático tem ainda bastante potencial por ser explorado, este trabalho pode ser usado para muitas outras aplicações industriais em diferentes setores como o farmacêutico, químico, petroleiro, alimentos, bebidas, etc. Nesta pesquisa aplicamos o modelo matemático no setor petroleiro, mas pode ser aproveitado em muitos outros campos do setor industrial.

7.2

Recomendações para Trabalhos Futuros

- Fazer novos estudos para explorar as possibilidades de aplicar o modelo em outras condições reológicas e operacionais. Por exemplo partículas sólidas ou líquidas se deslocando em gás, ou partículas líquidas se deslocando em outros líquidos não miscíveis.
- Recomenda-se para trabalhos futuros determinar o efeito do formato da bolha nos resultados. É possível determinar um modelo que permita corrigir a cinemática para uma partícula não esférica. Alguns autores formularam algumas expressões para corrigir o comportamento de uma partícula não esférica que podem ser aplicados em modelos de partículas esféricas.
- Nesta pesquisa foi iniciado o trabalho de cálculo da cinemática de uma bolha de gás em pastas de cimento, mas para conseguir validar os resultados é necessário um trabalho experimental extenso. Com os resultados experimentais é possível definir um modelo adequado para simular a cinemática de uma bolha de gás durante o processo de cimentação de um poço de petróleo.
- Também é possível analisar o efeito de população em partículas, que acontece quando várias partículas se deslocam próximas umas das outras. Este efeito pode causar variações na velocidade atingida pelas partículas.

Referências Bibliográficas

- ADAMSON, W.; GAST, A. P.. *Physical Chemistry of Surfaces*. Wiley Interscience, 1997.
- ATAPATTU, D. D.; CHHABRA, R. P. ; UHLHERR, P. H. T.. Creeping sphere motion in herschel-bulkley fluids: flow field and drag. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59:245–265, 1995.
- BEAULNE, M.; MITSOULIS, E.. Shapes and velocities of bubbles rising in infinite liquids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 170:116–120, 1986.
- BLACKERY, J.; MITSOULIS, E.. Creeping motion of a sphere in tubes filled with a bingham plastic material. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70:59–77, 1997.
- BOGACKI, P.; SHAMPINE, L.. A 3(2) pair of runge - kutta formulas. *Applied Mathematics Letters*, 2(4):321–325, 1989.
- BRAGA, D.; WEBER, M. E.. Bubble in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities. *Journal of Fluids Mechanics*, 105:61–85, 1981.
- CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F.. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries*. Butterworth-Heinemann, 1999.
- CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F.. *Bubble, Drops, and Particles in Non-Newtonian Fluids*. Taylor & Francis, 2006.
- CLIFT, R.; GRACE, J. R. ; WEBER, M.. *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, 1978.
- DEWSBURY, K. H.. *Hidrodynamic Study of Free Rise of Solid Particles and Gas Bubbles in Non-Newtonian Fluids*. Tese de Doutorado, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, 2000.
- DUBASH, N.. *Bubble Propagation Through Viscoplastic Fluids*. Tese de Doutorado, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2003.

DUINEVELD, P. C.. The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 292:325–332, 1995.

FUNFSCHILLING, D.; LI, Z.. Effects of the injection period on the rise velocity and shape of a bubble in a non-newtonian fluid. *Chemical Engineering Research and Design.*, 84(A10):875–883, 2006.

GONZALO, V.; AISKELY, B.; ALICIA, C. ; INTEVEP, P.. A methodology to evaluate the gas migration in cement slurries. Technical Report SPE94901, Society of Petroleum Engineers, 2005.

GRACE, J. R.. Creeping motion of a sphere in tubes filled with herschel–bulkley fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72:55–71, 1997.

HARPER, J. F.. The motion of bubbles and drops through liquids. *Advances in Applied Mechanics*, 12:25–53, 1972.

KARAMANEV, D. G.. Rise of bubbles in quiescent liquids. *AIChE Journal*, 40:1418–1421, 1994.

KELBALIYEV, G. I.. Drag coefficients of variously shaped solid particles, drops, and bubbles. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 45:248–266, 2011.

KULKARNI, A. A.; JOSHI, J. B.. Bubble formation and bubble rise velocity in gas-liquid systems: A review. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, (44):5873–5931, 2005.

MAGNAUDET, J.; RIVERO, M. ; FABRE, J.. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 284:97–135, 1995.

MOORE, D. W.. The boundary layer on a spherical gas bubble. *Journal of Fluids Mechanics*, 16:161–176, 1963.

NETO, S.. Simulação de grandes escalas de escoamentos bifasicos turbulentos. In: VII ENCIT, 1998.

PANTALEÃO, A. V.. Estudo Experimental e Numérico da Ascensão de Bolhas Gasosas. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil, 1999.

PINTO, G.; ROCHA, J.; CAMPOS, G. ; MARTINS, A.. Metodologia para avaliação da migração de gás após a cimentação de poços de petróleo. In: ENCONTRO NACIONAL DE HIDRÁULICA DE POÇOS DE PETRÓLEO E GÁS, 2011.

RAYMOND, F.; ROSANT, J. M.. A numerical and experimental study of the terminal velocity and shape of bubbles in viscous liquids. Chemical Engineering Science, 55:943–955, 2000.

ROCHA, J. S.. Estudo da migração de gases em pastas de cimento para uso em pocos de petróleo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.

SAFFMAN, P. G.. On the rise air bubbles in water. Journal of Fluid Mechanics, 1(249-275), 1969.

SIKORSKI, D.; TABUTEAU, H. ; DE BRUYN, J. R.. Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 159:10–16, 2009.

TABUTEAU, H.; COUSSOT, P. ; DE BRUYN, J. R.. Drag force on a sphere in steady motion through a yieldstress fluid. Journal of Rheology, 51(1):125–137, 2007.

A Glossário.

A.1 Reologia dos Fluidos de Interesse

Nesta seção vai se descrita a reologia dos fluidos utilizados nesta pesquisa. Na Figura (A.1) se mostra a tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação que sofrem os fluidos em análise.

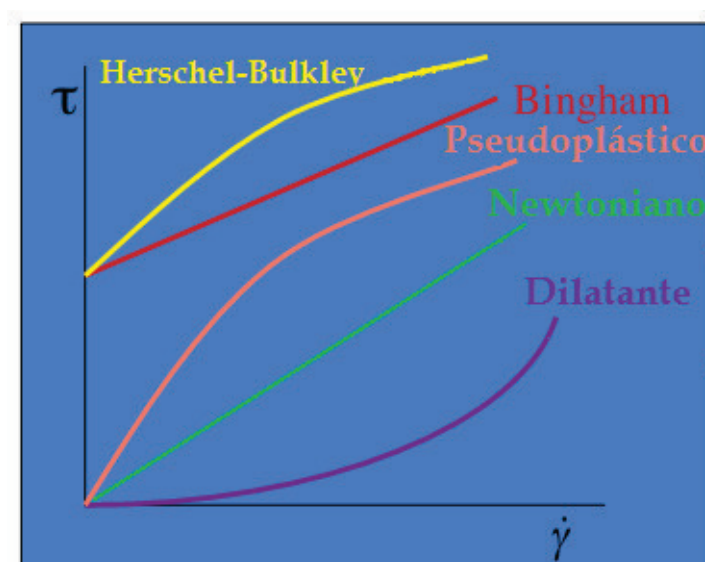


Figura A.1: Tensão de Cisalhamento para os Fluidos Utilizados neste Trabalho

A.1.1 Fluidos Não Dependentes do Tempo

Fluidos Newtonianos

Um Fluido Newtoniano é um fluido incompressível com viscosidade constante. A constante de proporcionalidade na equação de tensão cisalhante é a viscosidade. Nos fluidos newtonianos a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação como mostra a Figura (A.1). Como exemplo, pode-se citar a água e ar. Portanto, para um líquido Newtoniano, teremos

$$\rho = \rho_0 \quad (\text{A-1})$$

$$\mu = \mu_0 \quad (\text{A-2})$$

$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (\text{A-3})$$

Onde, τ é a tensão cisalhante que sofre o fluido. μ é a viscosidade do fluido. No modelo generalizado utilizado neste trabalho, também pode ser representada a viscosidade com a variável k de índice de consistência. $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação ou taxa de cisalhamento do fluido.

Fluidos Viscosos

Pseudoplasticos São substâncias que, em repouso, apresentam suas moléculas em um estado desordenado, e quando são submetidas a uma tensão de cisalhamento, suas moléculas tendem a se orientar na direção da força aplicada. E quanto maior esta força, maior será a ordenação e, consequentemente, menor será a viscosidade aparente. Este fluido pode ser descrito pelo Modelo de Ostwald-de-Waele ou Modelo Power Law (1923, 1925) como mostra a Figura (A.1), representado pela equação (A-4):

$$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n \quad (\text{A-4})$$

Na qual: K é o índice de consistência do fluido, τ é a tensão cisalhante que sofre o fluido, $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação ou taxa de cisalhamento do fluido. n é o índice de comportamento ou Power-law, define o grau de afastamento de um fluido newtoniano, neste caso, menor que 1. Se o índice tem valor de um, corresponde com a equação de fluido newtoniano.

Exemplo de fluido Pseudoplastico: polpa de frutas, caldos de fermentação, melão de cana.

Dilatantes São substâncias que apresentam um aumento de viscosidade aparente com a tensão de cisalhamento. No caso de suspensões, à medida que se aumenta a tensão de cisalhamento, o líquido intersticial que lubrifica a fricção entre as partículas é incapaz de preencher os espaços devido a um aumento de volume que frequentemente acompanha o fenômeno. Ocorre, então, o contato direto entre as partículas sólidas e, consequentemente, um aumento da viscosidade aparente como mostra a Figura (A.1). Também podem ser representados pelo Modelo de Orswado-de-Waele ou Modelo Power Law (Eq. 3.1). No entanto, para este caso, n é maior que a unidade. A equação que representa um fluido dilatante é a mesma do caso anterior.

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (\text{A-5})$$

Na qual: K é o índice de consistência do fluido, τ é a tensão cisalhante que sofre o fluido, $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação ou taxa de cisalhamento do fluido. n é o índice de comportamento ou Power-law, define o grau de afastamento de um fluido newtoniano, neste caso, menor que 1. Se o índice tem valor de um, corresponde com a equação de fluido newtoniano

Exemplo de fluido dilatante: suspensões de amid.

Fluidos Viscoplasticos

Bingham Este tipo de fluido apresenta uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, a partir do momento em que se atinge uma tensão de cisalhamento inicial como mostra a Figura (A.1). Este comportamento é descrito pelas equações (A-6) - (A-7):

$$\begin{aligned} &\text{se } \tau \text{ é maior que } \tau_o \\ &\tau = \tau_o + K \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$\begin{aligned} &\text{se } \tau \text{ é menor que } \tau_o \\ &\tau = \infty \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Na qual: τ é a tensão cisalhante que sofre o fluido, τ_o é a tensão de cisalhamento inicial, K é o índice de consistência. K uma constante análoga à viscosidade de fluidos newtonianos. $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação ou taxa de cisalhamento do fluido.

Exemplo de fluidos tipo Bingham: fluidos de perfuração de poços de petróleo, algumas suspensões de sólidos granulares.

Herschel-Bulkley Também chamado de Bingham generalizado. Este tipo de fluido também necessita de uma tensão inicial para começar a escoar. Entretanto, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear como mostra a Figura (A.1). Esta relação depende do expoente adimensional n , característico para cada fluido. A seguir se apresentam as equações do modelo.

$$\begin{aligned} &\text{se } \tau \text{ é maior que } \tau_o \\ &\tau = \tau_o + K \dot{\gamma}^n \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

$$\begin{aligned} &\text{se } \tau \text{ é menor que } \tau_o \\ &\tau = \infty \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

Na qual: τ é a tensão cisalhante que sofre o fluido, τ_o é a tensão de cisalhamento inicial, K é o índice de consistência. K uma constante análoga à viscosidade de fluidos newtonianos. $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação ou taxa de cisalhamento do fluido. n é o índice de comportamento ou Power-law, define o

grau de afastamento de um fluido newtoniano, neste caso, menor que 1. Se o índice tem valor de um, corresponde com a equação de fluido newtoniano

A.1.2

Fluidos Dependentes do Tempo

Os fluidos que possuem este tipo de comportamento apresentam propriedades que variam, além da tensão de cisalhamento, com o tempo de aplicação desta tensão, para uma velocidade de cisalhamento constante.

Tixotrópicos

Esta classe de fluidos tem sua viscosidade diminuída com o tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, voltando a ficar mais viscosos com quando esta cessa. Ex.: suspensões concentradas, emulsões, soluções proteicas, petróleo cru, tintas, ketchup.

Reopéticos

Já este tipo de fluido apresenta um comportamento inverso ao dos tixotrópicos. Desta forma, a viscosidade destes fluidos aumenta com o tempo de aplicação da tensão, retornando à viscosidade inicial quando esta força cessa. Ex.: argila bentonita.

A.2

Força de Arrasto

A Equação do arrasto permite determinar a força a que é sujeito um objeto ao se deslocar num fluido. Esta equação, atribuída a Lord Rayleigh, tem a seguinte expressão:

$$F_d = \frac{C_d \cdot \rho \cdot \nu^2 \cdot A}{2} \quad (\text{A-10})$$

onde F_d é a força do arrasto. C_d é o coeficiente de arrasto (uma unidade sem dimensões determinada experimentalmente) ρ é a densidade do fluido onde de desloca a partícula, ν é a velocidade do objecto em relação ao fluido, A é a área transversal da partícula.

A.2.1

Coeficiente de Arrasto

Em dinâmica dos fluidos, o coeficiente de arrasto C_d , é um número adimensional que é usado para quantificar o arrasto ou resistência de um objeto em um meio fluido tal como o ar ou a água, ou, em outras palavras, permite quantificar a força de resistência ao fluido por parte de uma dada

superfície. É usado na equação do arrasto, onde um coeficiente de arrasto mais baixo indica que o objeto terá menos arraste aerodinâmico ou hidrodinâmico. O coeficiente de arrasto de qualquer objeto compreende os efeitos de dois contribuidores básicos do arrasto fluidodinâmico: fricção de superfície e arrasto de forma. Equações para calcular o coeficiente de arrasto existem muitas, o uso de cada uma delas depende das características reológicas e de operação do sistema. Geralmente os parâmetros determinantes na seleção da equação são o número de Reynolds Re , o formato da partícula e a reologia do fluido, mas podem existir muitos mais parâmetros determinantes. No Anexo (B.1), são apresentadas as tabelas dos autores Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005) com um compilado muito detalhado de algumas das equações frequentemente usadas para o cálculo do coeficiente de arrasto.

B

Equações Consultadas de Outros Autores.

Neste anexo são apresentadas três seções com tabelas que contem as equações de alguns autores consultados durante a pesquisa. Estas equações foram compiladas pelos autores Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005) para o cálculo do coeficiente de arrasto C_d , diâmetro de bolhas de gás d e velocidade de ascenso ν para diferentes tipos de partículas. Nas tabelas, além de conhecer os autores e data de publicação, também pode consultar as faixas de aplicação para cada equação, a metodologia usada para a dedução da equação, as características do experimento usado para calcular as expressões e alguns comentários e recomendações sobre as equações.

Existem vários outros livros com tabelas de equações mas poucas tão detalhadas e bem organizadas como as fornecidas por Amol A. Kulkarni e Jyeshtharaj B. Joshi (2005), por essa razão se decidiu anexar neste trabalho.

O importante das tabelas apresentadas aqui, é que oferece ao leitor várias opções de equações para utilizar no modelo matemático. As expressões das tabelas em alguns casos podem ser utilizadas no modelo matemático desta pesquisa, isto com o objetivo de atingir outras condições de operação, ou para simular casos especiais de deslocamento de partículas, ou para usar expressões experimentais para conseguir simulações com um erro menor. Neste anexo se deseja que o leitor tenha a possibilidade de usar outras equações junto com nosso modelo para usar em outros processos industriais ou testes de laboratório onde as condições do sistema são diferentes as indicadas aqui.

Nas seguintes seções se apresentam as equações propostas por vários autores para diferentes condições. Na primeira seção (B.1) temos as expressões para cálculo do coeficiente de arrasto C_d , na segunda seção (B.2) estão as equações para cálculo de diâmetro d e na terceira seção (B.3) estão as equações para cálculo da velocidade de bolha de gás ν em ascenso.

B.1

Equações para Coeficientes de Arrasto Fornecidas na Literatura Consultada

Table 5. Correlations for Drag Coefficient (C_D)

investigator	systems under consideration/ bubble shapes	correlation	applicability
Levich ²¹⁵	Single clean bubble in water	$C_D = 48/Re$	Applicable for the systems, with free surface and energy transferred to liquid is directly dissipated into internal energy. Bubbles with $Re < 2$ rise rectilinearly. Applicable for the region where C_D decreases with Re . $Re > 2$, till the range where CD abruptly starts increasing with Re .
Peebles & Garber ¹⁸⁷	Single bubble rise in water, 2-propanol, ethyl ether, pyridine, nitrobenzene, aniline,	$C_D = 24Re^{-1}$	
	acetone, <i>n</i> -butanol, methanol, benzene, toluene, ethyl acetate, cotton seed oil, glacial acetic acid	$C_D = 18.7 Re^{-0.68} = \frac{8\gamma}{3V^{1/2}}$	
		$C_D = 0.0275 \left(\frac{g\mu}{\rho^{1/3}g} \right) Re^4, Re > 4.02Mo^{-0.21}$	
Moore ²¹⁷	Clean spherical bubbles	$C_D = 0.82 \left(\frac{g\mu}{\rho^{1/3}g} \right) Re$	Region, where C_D increases with Re and depends on the Mo to a noticeable extent. C_D is independent of Re , dominance of physicochemical properties of liquid is more than Re . Bubble is associated with a thin boundary layer and wake. The formulation takes into account the dissipation occurring in the above two regions. x is the deformation factor or the aspect ratio in the case of ellipsoidal bubbles.
		$C_D = \frac{48}{Re} \left(1 - \frac{2.21}{Re^{0.5}} \right) + O(Re^{-1.16})$	
		and $C_D = 5.66Mo^{0.2}We^{-3/5}\mu^{4/5}$	
		$We = 4x^{-4\alpha_1}(x^3 + x - 2) \left[\frac{x^2 \sec^{-1} x}{-(x^2 - 1)^{1/2}} \right]^2 (x^2 - 1)^3$ $f = 0.4x^{4\alpha_1} \left[\frac{(x^2 - 1)^{0.5}}{x^2 \sec^{-1} x - (2 - x^2)\sec^{-1} x} \right]$	
Taylor and Acrivos ²²³	Clean spherical bubbles $1.19e-7 < Mo < 1.04e2$	$C_D = \frac{16}{Re} + 2$	Limited applicability mainly in contaminated liquids with negligible internal circulation. Applicable for $Mo > 10^{-7}$, where C_D decreases with Re . $Mo < 10^{-7}$, $Re > 10$, where C_D increases with Re . Excellent match for various viscous liquids for $Mo > 0.004$. Applicable also for nonspherical bubbles in the range, where Takahashi's correlation cannot be applied. Prior knowledge of the shape factor is required. Applicable for rigid bubbles with $Re < 130$. Applicable for a bubble swarm with
		$C_D' = 1 + \frac{16}{Re}$	
		$C_D' = 13Re^{-0.7}$	
		$C_D = [2.42 + (16/Re)^{0.9}]^{0.9}$ $C_D' = 0.03(Re')^{-0.5}Mo^{0.3}$	
Bhaga and Weber ²²⁹ Miyahara & Takahashi ²⁰⁶	Bubbles in viscous fluids $Mo > 10^{-7}$	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.173Re^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300Re^{-1.09}}$	Formulation is yielded from the measured terminal velocity for successively increasing bubble diameters. Applicability is limited for the case where C_D increases with Re . For known bubble size, its velocity can be predicted at various gas void fractions in bubble swarm. Applicable for a wide range of bubble sizes rising through various viscous liquids.
		$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.657})$ for $Re < 1000$	
		$C_D = 0.44$ for $Re > 1000$	
		$C_D = e^{[2.1785 \ln(Re) - 15.054]}$	
Turton and Levenspiel ¹²⁰ DeInoj et al. ²³¹	Spherical bubbles in contaminated liquids, Spherical bubbles in water.	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.173Re^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300Re^{-1.09}}$	Suitable for bubbles in viscous non-Newtonian liquids. Modification is necessary to incorporate the region, specific to correlation by Miyahara and Takahashi.
		$C_D = 0.44$ for $Re > 1000$	
		$C_D = e^{[2.1785 \ln(Re) - 15.054]}$	
		$C_D = 0.44$ for $Re > 1000$	
Ford & Loth ²³²	Ellipsoidal clean bubble	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.173Re^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300Re^{-1.09}}$	Suitable for bubbles in viscous non-Newtonian liquids. Modification is necessary to incorporate the region, specific to correlation by Miyahara and Takahashi.
		$C_D = 0.44$ for $Re > 1000$	
		$C_D = e^{[2.1785 \ln(Re) - 15.054]}$	
		$C_D = 0.44$ for $Re > 1000$	
Kendoush ²³³ Rodrigue ¹⁵³	Bubble swarm in Newtonian liquid Viscous fluids	$C_D = 48/Re(1 - \alpha)^2$, α : void fraction	Suitable for bubbles in viscous non-Newtonian liquids. Modification is necessary to incorporate the region, specific to correlation by Miyahara and Takahashi.
		$C_D = \frac{16}{Re} \left[\frac{1}{2} + 32\Theta + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 128\Theta} \right]^{1/3} + \left(\frac{1}{2} + 32\Theta - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 128\Theta} \right)^{1/3} + 0.036 \left(\frac{128}{3} \right)^{1/3} Re^{8\Theta} Mo^{1/3}$	
		where $\Theta = (0.018)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} Re^{8\Theta} Mo^{1/3}$	
		$C_D = \frac{16}{Re} (1 + 0.173Re^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300Re^{-1.09}}$	
Margaritis et al. ¹⁷¹	Applicable for deformed bubbles		

Mei & Klausner ¹⁴⁴ Sadhal and Johnson ²³⁴ (1983) Tomiyama ¹⁸⁵	Clean spherical bubbles Clean bubble rising in contaminated liquid Newtonian liquids	$C_D = \frac{16}{Re} \left\{ 1 + \left[\frac{8}{Re} + \frac{1}{2} (1 + 3.315 Re^{-0.5}) \right]^{-1} \right\}$ $C_D = \frac{C_{D,rigid} - C_{D,mobile}}{2.7}$ $C_D = \frac{C_{D,rigid} - C_{D,mobile}(2\phi + \sin\phi - 2\sin(2\phi) - 0.33\sin(3\phi)) + C_{D,mobile}}{2.7}$ <p>where ϕ is cap angle dependent on the truncation point.</p> $C_D = \begin{cases} \frac{8}{3} \frac{(yE)^{2/3} (1 - E^2)^{-1} E_0 + 16E^{4/3} F^{-2}}{6\gamma^{-1/3}} & \text{for } E < 1 \\ \frac{8}{3} \frac{(yE)^{2/3} (E^2 - 1)^{-1} E_0 - 16E^{4/3} G^{-2}}{\gamma^{1/3} E_0} & \text{for } E = 1 \\ \frac{8}{3} \frac{(yE)^{2/3} (E^2 - 1)^{-1} E_0 - 16E^{4/3} G^{-2}}{\gamma^{1/3} E_0} & \text{for } E > 1 \end{cases}$ <p>where $E = b/a$, γ is the distortion factor</p> $F = \frac{1 - E^2}{\cos^{-1} E - E\sqrt{1 - E^2}} \text{ and}$ $G = \frac{E\sqrt{E^2 - 1} - \tanh^{-1}(E^{-1}\sqrt{E^2 - 1})}{E^2 - 1}$	Valid for all Re . Useful for analyzing the effect of contamination on the rise velocity of spherical cap shaped bubbles. Applicable for pure and contaminated bubbles of all possible shapes in Newtonian liquids.
Rodrigue ¹⁵⁷	Newtonian liquids	$C_D = \frac{16}{Re} \frac{(1 + 0.02 Y^{10/11})^{10/11}}{X^{2/176}}$ <p>where $X = (1 + 1.31 \times 10^{-5} Mo^{11/20} Y^{10/11})$</p> $Y = \left[\frac{3}{4} C_D Re^2 Mo \right]^{1/89}$	Suitable for all Newtonian inviscid and viscous liquids. It gives an excellent fit even for the region, where the effect of surface tension is taken over by the viscous forces that mobilize the bubble surface. Shows excellent comparison for the data for water, different concentrations of glycerin in water, ethanol, mercury, and molten silver.

B.2

Equações para Diâmetro de Bolha Fornecidas na Literatura Consultada

Table 3. Various Correlations for Bubble Sizes

investigators	model proposed through experimental observations	method of approach	assumptions used in formulation ^a	diameter/volume of bubble
Eversole et al. ⁴⁸	One stage model was observed for different size orifices.	Bubble volume was obtained by stroboscopic frequency measurements.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 20, 27a, 9a, 10, 39, 40, 48	$d_B = 81.18 \frac{\sigma}{P g}$
Krevelen and Hofstijzer ⁴⁹	Separate and chain bubble formation	Bubbles were classified as small, medium, and large. Ascending velocity was obtained from flow rate of gas. The same was studied for three different regimes of gas flow. Dimensional analysis was used to correlate results.	1, 9a, 6, 7, 8, 32, 13, 27a, 31, 48	$d_B = \frac{6d_h}{g \Delta \rho}$
Benzing and Mayers ⁵⁰	Static and dynamic region of bubble formation process were considered.	Dimensional analysis was carried out for Re, N_G , virtual mass. Force balance was applied on a bubble. Pressure equations were considered and solved for drag coefficient, bubble velocity, frontal area of bubble, and bubble volume this was verified for different NC.	1, 5, 6, 7, 8, 9a, 10, 11, 13, 16, 20, 46	$d_B = 1.82 \frac{d_o^{0.25}}{g d_h \rho_L}$
Hughes et al. ⁵¹	Process of bubble formation was considered to be a continuous one without any stages in it.	Force balance was applied on a bubble. Pressure equations were considered and solved for drag coefficient, bubble velocity, frontal area of bubble, and bubble volume this was verified for different NC. The bubble diameters were found at various experimental conditions and empirical formulas were derived using formula for orifice discharge coefficient.	1, 5, 6, 7, 8, 9a, 10, 11, 13, 20, 46	$V_B = 1.82 \frac{\pi g d_o \sigma}{g \Delta \rho}$
Leibson et al. ⁵²	Standard deviation and probability methods were used to find the range of sizes of bubbles. Effect of orifices dimensions and gas flow rate on dB was studied using stroboscopy.	The bubble diameters were found at various experimental conditions and empirical formulas were derived using formula for orifice discharge coefficient.	1, 5, 6, 7, 8, 9a, 20, 39,	$d_B = 0.19 D_o^{0.48} N_{Re}^{0.32}$
Davidson and Schuler ³ (Viscous liquids)	Single stage model was studied for constant flow and constant pressure conditions.	Equation of motion and virtual mass of bubble was used to find out size of bubble theoretically.	27a, 1, 8, 10, 11, 12, 13, 20, 32, 19, 48	$V = 1.772 \frac{G^{6/5}}{g^{3/5}}$
Davidson and Schuler ⁴ (Inviscid liquids)	Single stage model in unsteady state was studied for constant flow and constant pressure was considered.	Equation for upward motion is considered and solved under initial conditions to find out critical bubble volume. Assumptions used for model formulation are different with respect to gas flow rates.	27a, 1, 8, 10, 11, 12, 13, 20, 32, 19, 42, 2, 48	$R = \frac{16g}{11} \left[\frac{t^2}{4} + 2Q \frac{V_o}{2Q^2} \ln \left(\frac{Q t + V_o}{V_o} \right) \right]$ $V_o = 4.7 \sigma^{2/3}$
Kumar & co-workers ¹⁴⁻¹⁷	Two-stage model.	Force balance was carried out assuming negligible surface force.	27b, 1, 5, 19, 10, 48, 43, 32, 34, 20,	$V_F = \left(\frac{4\pi}{2} \right)^{0.25} \left(\frac{15\mu Q}{2\rho g} \right)^{0.75}$ $V = 1.09 Q^{6/5} g^{-3/5}$
Wraith ⁵³	Two-stage model.	Concept of velocity potential was applied for a hemispherical expanding bubble to find its volume. Model is based on the material balance and force balance using Tate's law.	6, 7, 8, 27b, 13, 44, 5, 16, 45, 48	$V_b = \frac{2\pi R_o \sigma}{\Delta \rho g}$
Park et al. ⁶⁵	Single stage model	Wave theory was applied to determine the volume of the bubble in dynamic detaching condition.	1, 6, 7, 8, 46, 48	$V_b = 0.976 \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{3/5}$
Acharya et al. ⁵⁴			1, 5, 6, 7, 8, 9a, 27a, 46, 44	

Rabiger and Vogelpohl ²⁰	Multistage bubble formation	Formation of primary and secondary bubbles was modeled by force balance	45, 20, 15, 11, 27c, 6, 7, 8, 18, 40, 32, 34, 22, 23, 48
Rice & Lakhani ⁷⁵	Two-stage model	For an elastic hole from rubber sheet bubble volume of bubble was found out applying small and large deflection theories	27a, 1, 8, 10, 11, 12, 13, 20, 32, 19, 42, 2, 48
Tsuge and Hibino ⁵	Two-stage model	Bubble volume is obtained by force balance including virtual mass of bubble. It is given in terms of dimensionless groups.	27b, 1, 5, 6, 7, 8, 9a, 16, 19, 20, 25, 28, 32, 34, 37, 21, 23, 48
Gaddis and Vogelpohl ²²	Multistage model	Bubble detachment diameter is developed by force balance in terms of a few dimensionless numbers.	27b, 5, 6, 7, 8, 20, 15, 1, 45, 28, 32, 34, 42, 48
Tsuge et al. ⁷	Two-stage model for bubble formed at downward facing orifice submerged in liquid.	Model is obtained by force balance, equation of motion of bubble for both wetted as well as nonwetted orifices for constant flow condition	26, 1, 10, 42, 14, 27b, 5, 19, 40, 24, 20, 5, 6, 7, 9a, 9b, 48
Sada ⁷⁴	Single stage model	Model is entirely based on the experimentally observed bubble dimensions.	27c, 9, 14, 17, 20, 23, 34, 48
Tsuge et al. ⁸	Continuous bubble growth model at high system pressure	Bubble surface is divided into a number of axisymmetric elements which are characterized radii of curvature. Under polytropic high-pressure system Modified Rayleigh equation and equation of motion are solved by finite differences.	15, 20, 25, 6, 7, 8, 9, 34, 17, 47, 10, 48
Marshall et al. ⁷⁶	Two-stage model	Potential flow theory was applied with Bernoulli's equation and equation of continuity to get volume of bubble formed under cross-flowing liquid.	23, 22, 21, 20, 11, 32, 33, 34, 35, 1, 27b, 36, 37, 19
Wilkinson & van Dierendonck ⁷⁷	Nonspherical two-stage bubble formation model	Thermodynamic equation of gas flow along with the equation of motion was solved.	20, 21, 27b, 44, 46, 25
Pamperin & Rath ⁷⁸	Two-stage quasi-static unsteady shape bubble formation under reduced gravity.	Force balance including virtual mass was used to find the detachment stage	27a, 27b, 35, 34, 37, 25, 38, 20, 9a
Buyevich et al. ⁷⁹	Two-stage spherical bubble model	Force balance neglecting the gravitational force was carried out for getting bubble size	5, 6, 7, 8, 9a, 35, 36, 46, 44
Tsuge et al. ¹⁰	Two-stage nonspherical bubble formation in quiescent liquid.	Equation of motion and modified Rayleigh equation were used to simplify the formula for bubble volume at reduced gravity.	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9a, 27b, 46

$$d_B = \sqrt[3]{3\alpha d_h + \sqrt{\left(\frac{3\alpha d_h}{\rho_L}\right)^2 + \frac{KV_G^2 d_h}{g}}}$$

$$V_b = \frac{8\pi\sigma r_H}{\rho_L g} + 2\frac{G^2}{g} \left(\frac{3}{4\pi V_L^2}\right)^{0.33}$$

$$V_b = \frac{MX - \left[\frac{4\rho_g Q^2 t^2}{\pi D_o^2} - 0.5C_D \rho_1 \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 \pi r^2 t^2\right]}{(\rho_1 - \rho_g)V_g g t}$$

$$d_B = \left[\left(\frac{6D_o \sigma}{\rho g}\right) + \frac{81rV}{\pi g} + \left(\frac{135V^2}{4\pi^2 g}\right)^{0.25}\right]$$

$$d_B = 6.9 \left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{0.5} u_g^{0.44}$$

$$d_B = (a^2 b)^{1/3}$$

a: maximum bubble diameter

b: minimum bubble diameter

$$V_B = \frac{\pi d_B^3 \sigma}{\Delta \rho g}$$

$$R_b = 0.48 R_o^{0.256} \left(\frac{Q_1 / \pi R_o^2}{U_1}\right)^{0.36}$$

$$V_B = \pi \alpha^3 / 12$$

$$d_B = D_o A \sqrt{(\rho_L - \rho_G)(We/(We - 8))}$$

$$A = \sqrt{\frac{4}{Re} + \frac{0.124}{\sqrt{Re}}}$$

$$Re = \frac{2v_B D_o}{\nu_f}$$

$$R_B = \frac{4}{11} g t^2 + \frac{8}{11} \frac{kQ}{\pi r_o^2} t$$

$$V_B = \frac{\pi d_B^3}{\rho_L g}$$

Table 3 (Continued)

investigators	model proposed through experimental observations	method of a approach	assumptions used in formulation ^a	diameter/volume of bubble
Tsuge et al. ⁹	Microgravity conditions for top submerged nozzle.	Bubble volume of is proportional to the inverse of gravitational acceleration for small gas flow rates. Growth rate increases with the gas flow rate. For $g/g_1 \sim 0.001$ no detachment takes place under constant flow conditions	33, 34, 35, 36, 46,	$V_B = \frac{\pi d_0^3 \sigma}{\rho_L g}$
Rielly et al. ⁴⁰	Two-stage hemispherical bubble formation.	Behavior of bubble during formation under liquid cross-flow is analyzed experimentally.	5, 6, 7, 8, 20, 16, 46, 27b	$d_B = \left(\frac{8' d_{h, \sigma}}{C_D V_o^2 \rho_L} \right)^{0.5}$
Forrester and Rielly ⁵¹	Liquid cross-flow condition over impeller blades.		33, 46, 44, 34, 27a, 20	$d_B = 2.4 \left(\frac{Q_0}{U_0} \right)^{0.5}$
Jamailamhadi et al. ⁴⁰	Neural network approach has been adopted to handle the nonlinear dependence of the various parameters on bubble size.	The results from the model are found to give an excellent agreement with the experimental results.		$d_B = d_0 = \left[\frac{5}{Bd_0^{1.08}} + \frac{9.26 Fr^{0.36}}{Ga^{0.39}} + 2.147 Fr^{0.51} \right]^{0.33}$

^a Numbered with reference to Table 2.

B.3

Equações para Velocidade de Ascenso Fornecidas na Literatura Consultada

Table 4. Correlations for Bubble Rise Velocity in Newtonian and Non-Newtonian Liquids

investigator	system	physicochemical properties	correlation	remarks
Stokes ¹⁸⁸	Pure gases- clean liquids		$V_T = \frac{2g\rho_B}{9\mu}$ $V_T = 1.02\sqrt{g r_B}$	Simple in formulation, however applicable only for the cases, where slip at interface as well as internal circulation in bubble is negligible. Although simple in formulation, not applicable to most of the systems, except where effect of physical properties is negligible.
Haberman & Morton ¹⁸⁹	Air-cold, hot water, mineral oil, varsol, turpentine, methanol, corn syrup-in water, glycerin-water, ethanol-water, olive oil	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$V_T = \sqrt{\frac{\sigma}{r_B \rho_L} + g r_B}$	Suits well for medium sized bubbles (> 2 mm) in most of the pure liquids. Modification is required for including very small bubbles and contaminated liquids.
Mandelson ¹⁹⁰	Published data of Haberman and Morton (1953)	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$V_{T1} = \frac{2g\rho_L r_B^2}{0.33g^{0.78} \rho_L^{0.52} r_B^{0.28}}$ $V_{T2} = \frac{10\mu^{0.52}}{2 < Re < 4.02 Mo^{-0.214}}$	Applicable for certain ranges of Re and Mo .
Peebles and Garber ¹⁸⁷	Measured data for: Air-water, acetic acid, ethyl ether, oil, ethyl acetate-oil, aniline, acetone, methanol, butanol, benzene, toluene, nitro benzene, pyridine, 2-propanol	$626 < \rho < 1071 \text{ kg/m}^3$ $0.016 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.22 < \mu < 31 \text{ cP}$	$V_{T3} = 1.35 \sqrt{\frac{og}{r_B \rho_L}}$ $V_{T4} = 1.18 \left(\frac{og^2}{\rho_L} \right)^{1/4}$ $V_{T5} = 1.53 \left[\frac{g \Delta \rho g^{1/4}}{\rho_L^2} \right]^{1/4}$, moderately distorted ellipsoids	Applicable for bubbles with $Re > 500$.
Harmathy ¹⁹¹			$V_{\infty} = \lambda \sqrt{\frac{g \Delta \rho D}{\rho_L}}$ for cylindrical slugs	
Astarita and Apuzzo ¹⁴⁶	Air-viscous liquids (Separan AP30, J100 in water)		Hadamard region $V_T = \frac{126 V_B^{0.66}}{42 V_B^{0.66} \nu}$ Levich region $V_T = \frac{126 V_B^{0.66}}{\nu}$	Known correlations are categorized for different regions in terms of shapes and bubble sizes. Since it is similar to Stoke's formulation, applicability is limited.
Angelino ¹⁹²	Air-Viscous liquids		Taylor region $V_T = \frac{2}{3} (g r_B)^{0.5}$ R^* - Radius of curvature $V_T = K(4r_B^2)^{1/3}$ where $K = 25/(1 + 0.33 Mo^{0.29})$; and $m = 0.167/(1 + 0.34 Mo^{0.24})$ $V_{\infty} = 0.35 \sqrt{2 g r_B}$	Equation suits well for spherical cap shaped bubbles in various liquids ²⁹⁴ . Needs modification in terms of verification against complete force balance. Applicable for slugs with clean interface and potential flow of liquid in its vicinity.
Dumitrescu ¹⁹³	Air-PVA		$V_T = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho d_B} + \frac{d_B g \Delta \rho}{2\rho}}$	Modification of waveanalogy. Fits well for experimental in a better way than wave theory.
Lehrer ¹⁹⁴	Published data of Haberman and Morton (1953)	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$VT = \left(\frac{\mu}{\rho_L G} \right) Mo^{-0.149} (J - 0.857)$	Equation is suitable for preliquids over wide range of properties. Deviation is visible for spherical cap shaped bubbles.
Cliff et al. ¹⁴⁸	Published data Air-Newtonian liquids over wide range of properties	$782 < \rho < 1410 \text{ kg/m}^3$ $0.015 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.72 < \mu < 29000 \text{ cP}$	$J = 0.94 H^{0.747}$ for $2 < H < 59.3$ $J = 3.42 H^{0.441}$ for $H > 59.3$ $H = -\frac{4}{3} Eo Mo^{-0.149} \left(\frac{\mu}{\mu_{\infty}} \right)^{-0.14}$	
Abou-el Hassan ¹⁵⁰	Published data Air-Newtonian liquids over wide range of properties	$835 < \rho < 1039 \text{ kg/m}^3$ $0.015 < \sigma < 0.072 \text{ N/m}$ $0.233 < \mu < 59 \text{ cP}$	$V = 0.75(\log F)^2$ V - Velocity number F - Flow number	Excellent match with experimental data in terms of Velocity and Flow number.

Table 4. Correlations for Bubble Rise Velocity in Newtonian and Non-Newtonian Liquids

investigator	system	physicochemical properties	correlation	remarks
Stokes ¹⁸⁸	Pure gases- clean liquids		$V_T = \frac{2g\rho_B^2}{9\mu}$	Simple in formulation, however applicable only for the cases, where slip at interface as well as internal circulation in bubble is negligible.
Haberman & Morton ¹⁸⁹	Air-cold, hot water, mineral oil, varsol, turpentine, methanol, corn syrup-in water, glycerin-water, ethanol-water, olive oil	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$V_T = 1.02\sqrt{g r_B}$	Although simple in formulation, not applicable to most of the systems, except where effect of physical properties is negligible.
Mandelson ¹⁹⁰	Published data of Habberman and Morton (1953)	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$V_T = \sqrt{\frac{\sigma}{r_B \rho_L} + g r_B}$	Suits well for medium sized bubbles (> 2 mm) in most of the pure liquids. Modification is required for including very small bubbles and contaminated liquids.
Peebles and Garber ¹⁸⁷	Measured data for: Air-water, acetic acid, ethyl ether, oil, ethyl acetate-oil, aniline, acetone, methanol, butanol, benzene, toluene, nitro benzene, pyridine, 2-propanol	$626 < \rho < 1071 \text{ kg/m}^3$ $0.016 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.22 < \mu < 31 \text{ cP}$	$V_{T1} = \frac{2g\rho_L r_B^2}{0.33g^{0.78} \rho_L^{0.82} r_B^{1.28}}$ $V_{T2} = \frac{10\mu^{0.82}}{0.33g^{0.78} \rho_L^{0.82} r_B^{1.28}}, 2 < Re < 4.02Mo^{-0.214}$ $V_{T3} = 1.35\sqrt{\frac{g\sigma}{r_B \rho_L}}, 4.02Mo^{-0.214} < Re < 3.10Mo^{-0.25}$	Applicable for certain ranges of Re and Mo .
Harmathy ¹⁹¹			$V_{T4} = 1.18\left(\frac{g\sigma}{\rho_L}\right)^{1/4}, 3.10Mo^{-0.25} < Re$ $V_\infty = 1.53\left[\frac{g\Delta\rho}{\rho_L^2}\right]^{1/4}$, moderately distorted ellipsoids $V_\infty = \lambda\sqrt{\frac{g\Delta\rho D}{\rho_L}}$ for cylindrical slugs	Applicable for bubbles with $Re > 500$.
Astarita and Apuzzo ¹⁴⁶	Air-viscous liquids (Separan AP30, J100 in water)		Hadamard region $V_T = \frac{126V_B^{0.66}}{42V_B^{0.66} \nu}$ Levich region $V_T = \frac{\nu}{V}$	Known correlations are categorized for different regions in terms of shapes and bubble sizes. Since it is similar to Stoke's formulation, applicability is limited.
Angelino ¹⁹²	Air-Viscous liquids		Taylor region $V_T = \frac{2}{3}(gR)^{0.5}$ R' - Radius of curvature $V_T = K(4r_B^2)^{m/3}$ where $K = 25/(1 + 0.33Mo^{0.29})$; and $m = 0.167/(1 + 0.34Mo^{0.24})$ $V_\infty = 0.35\sqrt{2gr_B}$	Equation suits well for spherical cap shaped bubbles in various liquids ²⁰⁴ . Needs modification in terms of verification against complete force balance.
Dumitrescu ¹⁹³	Air-PVA		$V_T = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho d_B} + \frac{d_B g \Delta \rho}{2\rho}}$	Applicable for slugs with clean interface and potential flow of liquid in its vicinity.
Lehrer ¹⁹⁴	Published data of Habberman and Morton (1953)	$782 < \rho < 1480 \text{ kg/m}^3$ $0.02 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.52 < \mu < 18000 \text{ cP}$	$VT = \left(\frac{\mu}{\rho_L G}\right) Mo^{-0.149} (J - 0.857)$	Modification of waveanalogy. Fits well for experimental in a better way than wave theory.
Clift et al. ¹⁴⁵	Published data Air-Newtonian liquids over wide range of properties	$782 < \rho < 1410 \text{ kg/m}^3$ $0.015 < \sigma < 0.72 \text{ N/m}$ $0.72 < \mu < 29000 \text{ cP}$	$J = 0.94 H^{0.747}$ for $2 < H < 59.3$ $J = 3.42 H^{0.441}$ for $H > 59.3$ $H = -\frac{4}{3} Eo Mo^{-0.149} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{-0.14}$	Equation is suitable for pureliquids over wide range of properties. Deviation is visible for spherical cap shaped bubbles.
Abou-el Hassan ¹⁵⁰	Published data Air-Newtonian liquids over wide range of properties	$835 < \rho < 1039 \text{ kg/m}^3$ $0.015 < \sigma < 0.072 \text{ N/m}$ $0.233 < \mu < 59 \text{ cP}$	$V = 0.75(\log F)^2$ F - Velocity number F - Flow number	Excellent match with experimental data in terms of Velocity and Flow number.

C

Código Computacional para Solução Numérica do Modelo Matemático

Neste Anexo é apresentada a rotina feita utilizando o software Matlab, foi desenvolvida para solucionar o sistema de equações e calcular outros resultados apresentados neste trabalho.

As principais funções da rotina são:

- Solução do sistema de equações. O sistema está conformado por uma equação diferencial tipo Stiff moderado e um polinômio ordem 3.
- Comparação entre os resultados numéricos e resultados experimentais.
- cálculo de erros e desvios da comparação de resultados.
- cálculo automático dos melhores fatores de correção x e y do modelo matemático.
- cálculo dos gráficos de velocidade, aceleração, número de Reynolds, deslocamento, erro absoluto, desvio padrão, número de Froude, etc.
- Organização e filtro de dados e matrizes de resultados.
- Validação de resultados indicando quando o erro é muito alto ou a interteça nos cálculos supera a admissível.
- armazenar informação das simulações.
- cálculo de curve fitt se for solicitadas no painel de controle.

A rotina está conformada por várias sub-rotinas como se indica na seguinte imagem.

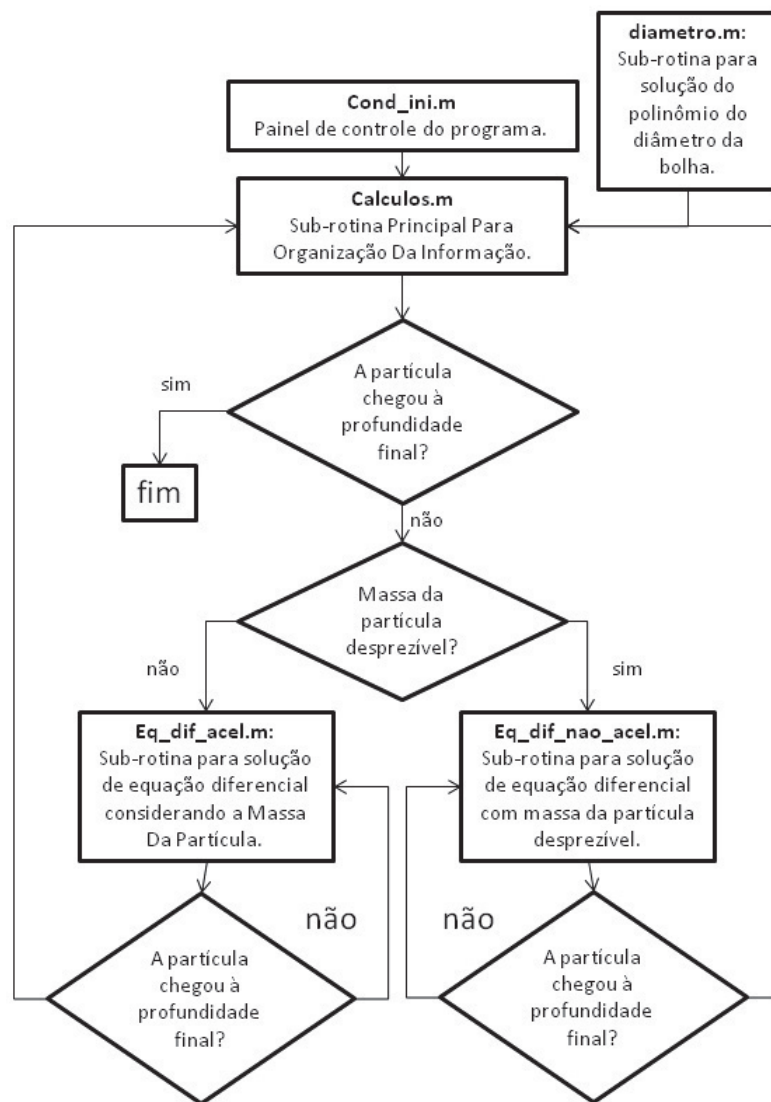


Figura C.1: Diagrama de Funcionamento da Rotina em Matlab para o cálculo dos Resultados neste Trabalho

C.1

Rotina de Paine de Controle

```

clc

clear all

close all

format long

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PROGRAMA PARA CALCULO DO COMPORTAMENTO%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%DE BOLHAS DE GAS E ESFERAS RIGIDAS EM FLUIDO%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%NEWTONIANO E VISCOPLASTICO%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%WILLIAM LOPEZ E MONICA NACCACHE%%%%%%%%%%%%%%

%CONFIGURAÇÃO DA CORRIDA

tipo_part=2;    %1 para bolha de gas com diametro variavel || 2 para esfera rigida de diametro
constante

caso_av=1;    %1 para massa consideravel || 2 para massa desprezivel || no caso de massa
desprezivel (2) nao usar tipo_part=2 porque nao tem sentido assumir esfera rigida de massa
desprezivel

comparacao=0;    %0 nao fazer comparacao || 1 comparacao para bolha em newtoniano || 2
para bolha em viscoplastico || 3 para esfera rigida em viscoplastico

id_exp=1;    %identifica a bateria de dados dos experimentos feitos por outros autores.

kx_disc=0;    %0 mostra resultados sem correcao de x,k || 1 mostra resultados com correcao
de x,k || funciona para o caso de fluido viscoplastico

%CONDIÇÕES INICIAIS

paso=0.01;    %vetor de paso de tempo [sg/iteracao]

hbo=0;;    %profundidade inicial bolha ou esfera[m]

hbf=-0.26;    %profundidade final bolha ou esfera[m]

prof_esp=-0.25% profundidade determinada para calcular resultados exactos

vel_ini=0;    %velocidade inicial da bolha ou esfera

tmax=100;    %tempo maximo de deslocamento da bolha ou esfera [sg]

diam_min=39.6*10^-3; %diametro inicial minimo da bolha ou esfera

diam_max=39.6*10^-3; %diametro inicial maximo da bolha ou esfera

diam_paso=1*10^-3; %paso no diametro inicial da bolha ou esfera

%REOLOGIA

to_min=7;%    %tensao limite inicial (t=0) fluido[Pa] || to=0 para newtoniano

to_max=7;%

```



```

to_paso=1;

C=30;          %indice exponencial para to

n_min=0.5;     %indice power -law [-] || n=1 newtoniano

n_max=0.5;%1;

n_paso=0.05;

den_l=1000;    %densidade do fluido [kg/(m^3)]

ts=0;          %tensao superficial fluido[N/m] || 63*10^-3 bolha em newtoniano

visc_inicial=6; % [Pa.sg] viscosidade no tempo zero e taxa de cisalhamento zero, viscosidade
utilizada para o calculo da viscosidade aparente ou generalizada

ind_cons_min=6; %indice de consistencia inicial (fluido viscoplastico) ou viscosidade (fluido
newtoniano) [pa.s^n]

ind_cons_max=6;

ind_cons_paso=1;

A_min=0;       %minimo indice linear comportamento indice consistencia

A_max=0;       %maximo indice linear comportamento indice consistencia

A_paso=1;      %paso do indice linear comportamento indice consistencia

B_min=10;      %minimo indice exponencial comportamento indice consistencia

B_max=10;      %maximo indice exponencial comportamento indice consistencia

B_paso=1;      %paso indice exponencial comportamento indice consistencia

%FATORES DE CORREÇÃO

fc_k_min=1;    %minimo fator de correcao de reologia

fc_k_max=1;    %maximo fator de correcao de reologia

fc_k_paso=0.1; %paso fator de correcao de reologia

fc_x_min=1.26; %minimo fator de correcao de superficie particula

fc_x_max=1.26; %maximo fator de correcao de superficie particula

fc_x_paso=0.01; %paso fator de correcao de superficie particula

%OTROS

erro_aceito=1*10^-9; %maximo erro aceito nas ecuacoes basicas do modelo

temp_g=295.15;  %temperatura gas em K [kelvin]

patm=101325;    %pressao atmosferica [Pa]

```

```
cte_ug=8.314472;    %cte universal dos gases [J/kelvin.mol]

mm=0.0289;          %massa molar do ar [kg/mol]

g=9.80665;          %gravidade [m/(s^2)]

h_queda=0.05;        %altura de queda para o caso de esfera rígida 0.05 m, calculada desde a
altura inicial ate a superficie livre do fluido

diam_coluna_visc=1;    %diametro da coluna de fluido

np=30;              %numero de particoes da curve fit para a correcao em fluido viscoplastico

ordem_poly=2;        %ordem do polinomio da curve fit para a correcao em fluido viscoplastico

densidade_part=[1606 1670 1736 1801 1866 1931];    %vetor de densidade para o caso de
esfera rígida

[resultados,teste_resultados_diam,teste_resultados_vel_acel,teste_resultados_massa,diametr
o_bolha,densidade_bolha,tempo_max_corrida,diam_critic,h_a]=calculos(kx_disc,caso_av,tma
x,hbo,ts,ind_cons_min,ind_cons_max,ind_cons_paso,den_l,g,n_min,n_max,n_paso,to_min,to_
max,to_paso,patm,cte_ug,temp_g,mm,hbf,prof_esp,paso,tipo_part,densidade_part,id_exp,vel
_ini,comparacao,h_queda,diam_coluna_visc,np,ordem_poly,diam_min,diam_max,diam_paso,f
c_x_min,fc_x_max,fc_x_paso,fc_k_min,fc_k_max,fc_k_paso,erro_aceito,A_min,A_max,A_paso
,B_min,B_max,B_paso,visc_inicial,C);
```

C.2

Sub-Rotina Principal

```
function[resultados,teste_resultados_diam,teste_resultados_vel_acel,teste_resultados_massa
,diametro_bolha,densidade_bolha,tempo_max_corrida,diam_critic,h_a]=calculos(kx_disc,case
_av,tmax,hbo,ts,ind_cons_min,ind_cons_max,ind_cons_paso,den_l,g,n_min,n_max,n_paso,to
_min,to_max,to_paso,patm,cte_ug,temp_g,mm,hbf,prof_esp,paso,tipo_part,densidade_part,i
d_exp,vel_ini,comparacao,h_queda,diam_coluna_visc,np,ordem_poly,diam_min,diam_max,di
am_paso,fc_x_min,fc_x_max,fc_x_paso,fc_k_min,fc_k_max,fc_k_paso,erro_aceito,A_min,A_m
ax,A_paso,B_min,B_max,B_paso,visc_inicial,C)

%CONDICOES DE INICIO

tmax_global=tmax;          %tempo maximo de calculo

diam=(diam_min:diam_paso:diam_max); %definindo vetor de diametros

fc_k=(fc_k_min:fc_k_paso:fc_k_max); %definindo vetor de fator de correcao k

fc_x=(fc_x_min:fc_x_paso:fc_x_max); %definindo vetor de fator de correcao x

fc_to=(to_min:to_paso:to_max);

fc_ind_cons=(ind_cons_min:ind_cons_paso:ind_cons_max);

fc_n=(n_min:n_paso:n_max);

fc_A=(A_min:A_paso:A_max);

fc_B=(B_min:B_paso:B_max);

[~,i_diam_max]=size(diam); %maximo numero de diametros para avaliar

[~,comparacao_desvio]=size(paso); %maximo numero de pasos para avaliar

[~,x_fatory]=size(fc_x); %maximo numero de fatores de correcao x

[~,k_fatory]=size(fc_k); %maximo numero de fatores de correcao k

[~,to_fatory]=size(fc_to);

[~,ind_cons_fatory]=size(fc_ind_cons);

[~,n_fatory]=size(fc_n);

[~,A_fatory]=size(fc_A);

[~,B_fatory]=size(fc_B);

crit_limit=0; %constante q indica se a bolha chegou ou nao à profundidade final

%COMEÇANDO BARRIDO

for Ai=1:A_fatory

    A=fc_A(1,Ai);

    for Bi=1:B_fatory

        B=fc_B(1,Bi);
```

```

for toi=1:to_fatory
    to=fc_to(1,toi);
    for ind_consi=1:ind_cons_fatory
        ind_cons=fc_ind_cons(1,ind_consi);
        for ni=1:n_fatory
            n=fc_n(1,ni);
            for xi=1:x_fatory    %fator de correcao x
                x=fc_x(1,xi);    %iteracao xi do fator de correcao x
                for ki=1:k_fatory    %fator de correcao k
                    k=fc_k(1,ki);    %iteracao ki do fator de correcao k
                    if tipo_part==1    %calculando diametro critico para bolha de gas
                        if caso_av==1    %massa consideravel
                            pres_g_critic=-den_l*g*hbo+patm;    %pressao gas no tempo zero [pa]
                            den_disc_critic=mm*pres_g_critic/(cte_ug*temp_g);    %densidade gas
no tempo zero[kg/m^3]
                            diam_critic=18*x*k*to/((den_l-den_disc_critic)*g);    %diametro critico
para para bolha de gas levando em conta a massa
                        else    %massa desprezivel
                            diam_critic=18*x*k*to/(den_l*g);    %diametro critico para
bolha sem levar em conta a massa
                        end
                    end
                end
            for i_diam=1:i_diam_max    %diametros iniciais da bolha
                if tipo_part==1 && diam(1,i_diam)<diam_critic    %medida de seguranca para
diametro critico
                    diam_critic
                    'diametro inicial menor que o diametro critico de deslocamento'
                    pause
                end
            end

            clearvars indice_consistencia delta_t_a f_empuxo f_arrasto rel_forcas froude
prof_diam diam_vetor t_a h_a diam_i pres_g den_disc h_a1_temp h_a1_temp

```

```

diametro_bolha profundidade velocidade aceleracao tempo reynold bingham cdpI
par_dinamic pressao_bolha densidade_bolha massa_bolha %deletando variaveis reutilizadas

if tipo_part==2 %calculo da velocidade inicial de queda para o caso de
esfera rigida

    tempo_queda=abs(sqrt((h_queda+diam(1,i_diam)/2)/g));

    vel_ini=-g*tempo_queda; %velocidade inicial

    diam_critic(1,i_diam)=18*x*k*to/((den_l-densidade_part(1,id_exp))*g);
%diametro critico para esfera rigida levando em conta a massa da esfera

    if diam(1,i_diam)<diam_critic(1,i_diam) %medida de seguranca para
diametro critico

        diam_critic

        'diametro inicial menor que o diametro critico de deslocamento'

        pause

    end

end

dbo=diam(1,i_diam); %diametro da particula esferica inicial para iteracao i

for is=1:comparacao_desvio %para varios pasos de avaliacao

    %CORRIGINDO PASO E ITERACOES EM FUNCAO DO TEMPO MAXIMO DE CALCULO

    iteracoes=ceil(tmax/paso(1,is)); %iteracoes corrigidas (inteiras)

    pasoi(is,1)=tmax/iteracoes; %paso corrigido

    %CALCULO DO VETOR DE DIAMETRO DA BOLHA DE GAS

    [prof_diam,diam_vetor]=diametro(iteracoes,dbo,i_diam,hbo,diam,ts,den_l,g,patm,hbf,tipo_pa
rt);

    %CALCULO PROFUNDIDADE, VELOCIDADE E ACELERACAO

    rango_ha=0:pasoi(is,1):tmax-pasoi(is,1); %vetor de tempo de analise

    if caso_av==1 %caso de bolha ou esfera rigida com massa consideravel

        [t_a,h_a]=ode23s(@(t_a,h_a)

eq_dif_acel(t_a,h_a,prof_diam,diam_vetor,i_diam,diam,ts,ind_cons,den_l,g,n,k,to,x,patm,cte_
ug,temp_g,mm,tipo_part,densidade_part,id_exp,A,B,rango_ha,C),rango_ha,[hbo
vel_ini]);%Runge kutta para o caso com massa consideravel

        [max_it,~]=size(h_a);

        for i=1:max_it

            function_ind_cons(i,1)=ind_cons+A*exp(B*t_a(i,1)/3600);

```

```

function_to(i,1)=to*exp(C*t_a(i,1)/3600);

if tipo_part==1 %para bolha de gas

    diam_i(i,1)=interp1(prof_diam,diam_vetor,h_a(i,1),'linear');
%iterando o diametro para a profundidade q preciso

    pres_g(i,1)=-den_l*g*h_a(i,1)+patm+4*ts/diam_i(i,1);
%pressao gas [pa]

    den_disc(i,1)=mm*pres_g(i,1)/(cte_ug*temp_g);
%densidade gas [kg/m^3]

    h_a(i,3)=(den_l-den_disc(i,1))*g/den_disc(i,1)-
(18*x/(den_disc(i,1)*diam_i(i,1)))*(function_ind_cons(i,1)*h_a(i,2)^n/diam_i(i,1)^n+k*functio
n_to(i,1)); %ansley & smith

else %para esfera rigida

    diam_i(i,1)=diam(1,i_diam); %diametro constante

    den_disc(i,1)=densidade_part(1,id_exp); %densidade constante

    h_a(i,3)=-(abs((den_l-den_disc(i,1))*g/den_disc(i,1))-
abs((18*x/(den_disc(i,1)*diam_i(i,1)))*((function_ind_cons(i,1)*(abs(h_a(i,2))^n)/(diam_i(i,1)^
n))+k*function_to(i,1))));

end

end

elseif caso_av==2 %caso de bolha com massa desprezivel

    [t_a,h_a]=ode23s(@(t_a,h_a)
eq_dif_nao_acel(h_a,prof_diam,diam_vetor,i_diam,diam,ind_cons,den_l,g,n,k,to,x,tipo_part,A
,B,rango_ha),rango_ha,hbo); %Runge kutta para o caso com massa desprezivel

    [max_it,~]=size(h_a);

    for i=1:max_it

        function_ind_cons(i,1)=ind_cons+A*exp(B*t_a(i,1)/3600);

        if tipo_part==1 %para bolha de gas com massa desprezivel

            den_disc(i,1)=0; %densidade desprezivel

            diam_i(i,1)=interp1(prof_diam,diam_vetor,h_a(i,1),'linear');
%iterando o diametro para a profundidade q preciso

            pres_g(i,1)=-den_l*g*h_a(i,1)+patm+4*ts/diam_i(i,1);

%pressao gas [pa]

            h_a(i,2)=((diam_i(i,1)^n/(18*function_ind_cons(i,1)*x))*(den_l*g*diam_i(i,1)-
18*k*to*x))^(1/n); %velocidade caso nao acelerado

```

```

        if i==1
            h_a(i,3)=0; %como nao tenho a aceleracao no tempo 0, entao
coloco esta condicao
        else
            h_a(i,3)=(h_a(i,2)-h_a(i-1,2))/(t_a(i,1)-t_a(i-1,1)); %aceleracao
massa desprezivel
        end
        else %para esfera rigida com massa desprezivel
            den_disc(i,1)=0; %densidade desprezivel
            diam_i(i,1)=diam(1,i_diam); %diametro constante

            h_a(i,2)=((diam_i(i,1)^n/(18*function_ind_cons(i,1)*x))*(den_l*g*diam_i(i,1)-
            18*k*to*x))^(1/n); %velocidade esfera rigida caso massa desprezivel

            if i==1
                h_a(i,3)=0; %como nao tenho dois valores de velocidade para
calcular aceleracao vou assumir aceleracao zero
            else
                h_a(i,3)=(h_a(i,2)-h_a(i-1,2))/(t_a(i,1)-t_a(i-1,1)); %aceleracao
esfera rigida massa desprezivel
            end
        end
    end
end
end
end

%FILTRANDO OS RESULTADOS QUE SÃO REALES
if tipo_part==1 %para q a bolha nao supere a superficie a
profundidade zero
    prof_limit=hbf;
    h_a1_temp=h_a(:,1);
    vel_temp=h_a(:,2);
else %para q a esfera rigida nao supere a profundidade
maxima do tanque
    prof_limit=-hbf;
    h_a1_temp=-h_a(:,1);

```



```

        vel_temp=-h_a(:,2);

    end

    for i=1:max_it %barrido aos resultados da funcao Runge kutta ate o
tempo maximo

        if real(h_a1_temp(i,1))<=prof_limit && real(vel_temp(i,1))>=0
%filtrando os resultados q estao na profundidade aceita

            indice_consistencia(i,1)=function_ind_cons(i,1);

            diametro_bolha(i,1)=real(diam_i(i,1));

            profundidade(i,1)=real(h_a(i,1));

            velocidade(i,1)=real(h_a(i,2));

            aceleracao(i,1)=real(h_a(i,3));

            tempo(i,1)=t_a(i,1);

            to_t(i,1)=function_to(i,1);

            reynold(i,1)=abs(((abs(h_a(i,2)))^(2-
n)))*(diametro_bolha(i,1)^n)*den_l/indice_consistencia(i,1);

            bingham(i,1)=to_t(i,1)*diametro_bolha(i,1)^n/(indice_consistencia(i,1)*(abs(velocidade(i,1))^n
));

            cdpl(i,1)=24*x*(1+k*bingham(i,1))/reynold(i,1);

            par_dinamic(i,1)=reynold(i,1)/(1+k*bingham(i,1));

            froude(i,1)=velocidade(i,1)/(sqrt(g*(diametro_bolha(i,1)/2)));
%calculo do numero de Froude para o caso de bolha em viscoplastico

            viscosidade_aparente(i,1)=to_t(i,1)*diametro_bolha(i,1)/velocidade(i,1)+(visc_inicial+A*exp(te
mpo(i,1)/(3600*B)))*((abs(velocidade(i,1))/diametro_bolha(i,1))^(n-1));

            taxa_cisalhamento(i,1)=abs(velocidade(i,1))/diametro_bolha(i,1);

            if tipo_part==1 %para bolha de gas

                densidade_bolha(i,1)=den_disc(i,1);

                if caso_av==1 %para masa consideravel

                    pressao_bolha(i,1)=pres_g(i,1);

                massa_bolha(i,1)=(1/6)*pi()*diametro_bolha(i,1)^3*densidade_bolha(i,1);

                f_empuxo(i,1)=abs(((den_l-
densidade_bolha(i,1))*g*pi()*diametro_bolha(i,1)^3)/6);

```



```

        f_arrasto(i,1)=abs(3*x*pi()*diametro_bolha(i,1)^(2-
n)))*(indice_consistencia(i,1)*(velocidade(i,1)^n)+k*(diametro_bolha(i,1)^n)*to_t(i,1));

        rel_forcas(i,1)=f_empuxo(i,1)/f_arrasto(i,1);

    else %para massa desprezível

        f_empuxo(i,1)=abs(((den_l)*g*pi()*diametro_bolha(i,1)^3)/6);

        f_arrasto(i,1)=abs(3*x*pi()*diametro_bolha(i,1)^(2-
n)))*(ind_cons*(velocidade(i,1)^n)+k*(diametro_bolha(i,1)^n)*to_t(i,1));

        rel_forcas(i,1)=f_empuxo(i,1)/f_arrasto(i,1);

    end

else %para esfera rígida

    densidade_bolha(i,1)=densidade_part(1,id_exp);

    H_temp(i,1)=(g*diametro_bolha(i,1)*abs((den_l-
densidade_bolha(i,1))-18*x*k*to)/(18*x*indice_consistencia(i,1)));

    H_temp(i,2)=diametro_bolha(i,1)*(H_temp(i,1)^(1/n);

end

end

end

[max_it_real,~]=size(diametro_bolha); %maxima iteracao onde os
resultados sao reais (a bolha ainda nao chegou na profundidade aceita)

%TESTANDO EQUACOES

%teste_resultados_diam utilizo para validar diametros de bolha de gas ou
esfera rígida.

%teste_resultados_vel_acel utilizo para validar aceleracao (massa
consideravel) ou velocidade (massa desprezível)

%teste_resultados_den utilizo para validar densidade da bolha para bolha
de gas ou esfera rígida.

if is==1 %so vai testar para o valor de iteracoes estavel, que é o passo
menor

    for i=1:max_it_real %barrido para todas as profundidades

        if tipo_part==1 %para bolha de gas

            teste_resultados_diam(i,i_diam)=diametro_bolha(i,1)^3-
(4*ts/(patm-den_l*g*profundidade(i,1)))*diametro_bolha(i,1)^2-((patm*dbo-
den_l*g*hbo*dbo+4*ts)/(patm-den_l*g*profundidade(i,1)))*dbo^2; %teste de diametro da
bolha para massa e tensão superficial consideravel

        else %para esfera rígida

```

```

        teste_resultados_diam(i,i_diam)=0;

    end

    if caso_av==1 %caso massa consideravel

        if tipo_part==1 %bolha de gas

            teste_resultados_vel_acel(i,i_diam)=-aceleracao(i,1)+g*(den_l-
densidade_bolha(i,1))/densidade_bolha(i,1)-
18*x*indice_consistencia(i,1)*velocidade(i,1)^n/(densidade_bolha(i,1)*diametro_bolha(i,1)^(1
+n))-18*x*k*to_t(i,1)/(densidade_bolha(i,1)*diametro_bolha(i,1)); %teste de aceleracao para
caso com massa apreciavel

        else %esfera rigida

            teste_resultados_vel_acel(i,i_diam)=-aceleracao(i,1)-
(abs((den_l-densidade_bolha(i,1))*g/densidade_bolha(i,1))-
abs((18*x/(densidade_bolha(i,1)*diametro_bolha(i,1)))*((indice_consistencia(i,1)*(abs(velocid
ade(i,1)^n)/(diametro_bolha(i,1)^n))+k*to_t(i,1))))));

        end

    end

    teste_resultados_massa(i,i_diam)=densidade_bolha(i,1)*pi()*diametro_bolha(1,1)^3/6-
densidade_bolha(i,1)*pi()*diametro_bolha(i,1)^3/6; %teste de massa da bolha constante

    else %caso massa desprezivel

        teste_resultados_vel_acel(i,i_diam)=-
velocidade(i,1)+((diametro_bolha(i,1)^n/(18*ind_cons*x))*(den_l*g*diametro_bolha(i,1)-
18*k*to_t(i,1)*x))^(1/n); %teste de velocidade para bolha de gas com massa desprezivel

        teste_resultados_massa(i,i_diam)=0;

    end

end

max_teste_resultados_diam=max(max(teste_resultados_diam));

max_teste_resultados_vel_acel=max(max(teste_resultados_vel_acel));

max_teste_resultados_massa=max(max(teste_resultados_massa));

if max_teste_resultados_diam>erro_aceito ||
max_teste_resultados_vel_acel>erro_aceito || max_teste_resultados_massa>erro_aceito
%se o erro é maior que o erro maximo aceito

    teste_resultados_vel_acel

    max_teste_resultados_diam

    max_teste_resultados_vel_acel

    max_teste_resultados_massa

```

```

        erro_aceito

        'erro das equacoes superior ao maximo permitido'

        pause

    end

    %VALIDANDO DADOS NUMERICOS COM EXPERIMENTAIS PARA ESFERA RIGIDA

    if comparacao==3 %&& i_diam==id_exp %para o caso de esfera rigida
em fluido viscoplastico

        coordenadas_xy_linear_esfera_rigida=importdata('coordenadas_xy_linear_esfera_rigida.mat')
        ; %vetor de resultados de paper de outro autor

        [xlinear,~]=size(coordenadas_xy_linear_esfera_rigida);

        coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp=coordenadas_xy_linear_esfera_rigida(:,2*id_exp-
1:2*id_exp);

        coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_sort=sort(coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_t
emp,1,'descend');

        for i=1:xlinear %valor para um diametro especifico a avaliar

            if coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_sort(i,1)~=0
%condicao pq os dados de varios pasos estao na mesma matriz e o programa enche de zeros
automaticamente

                coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(i,:)=coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_tem
p_sort(i,:);

                profundidade_esp_i(i,1)=interp1(tempo,profundidade,coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_t
emp_fil(i,1),'linear');

                erro_profundidade_i(i,1)=100*abs((abs(profundidade_esp_i(i,1))-
coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(i,2))/coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_te
mp_fil(i,2));

                desvio_profundidade_i(i,1)=abs(profundidade_esp_i(i,1))-
coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(i,2);

            end

        end

        [xlinear_fil,~]=size(desvio_profundidade_i);

        desvio_profundidade_meia=sum(desvio_profundidade_i)/xlinear_fil;

```

```

coordenadas_xy_loglog_cd_q_esfera=importdata('coordenadas_xy_loglog_cd_q_esfera.mat');

[xlog,~]=size(coordenadas_xy_loglog_cd_q_esfera);

for i=1:xlog %eliminando os dados experimentais com valor zero
    if coordenadas_xy_loglog_cd_q_esfera(i,1)~=0

coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp_fil(i,:)=coordenadas_xy_loglog_cd_q_esfera(i,:);

        end

    end

end

end

%GRAFICOS DE COMPORTAMENTO REGIME TRASIENTE PARA BOLHA E ESFERA RIGIDA

if tipo_part==1 %grafico para bolha de gas

    hold on

    subplot(2,4,1); plot(profundidade,reynold,'r--')

    grid on

    hold off

    title('Re Generalizado regime trasiente vs Profundidade')

    xlabel('Profundidade [m]')

    ylabel('Reynold Generalizado[-]')


    hold on

    subplot(2,4,2); plot(tempo,profundidade,'r--')

    grid on

    hold off

    title('profundidade trasiente vs tempo')

    xlabel('tempo [sg]')

    ylabel('profundidade trasiente [m]')


    hold on

    subplot(2,4,3); plot(profundidade,velocidade,'r--')

```

```
grid on

hold off

title('vel trasiente vs prof')
xlabel('profundidade [m]')
ylabel('velocidade trasiente [m/sg]')


hold on

subplot(2,4,4); plot(profundidade,diametro_bolha,'r--')

grid on

hold off

title('diametro tras vs prof')
xlabel('profundidade [m]')
ylabel('diametro bolha trasiente [m]')


hold on

subplot(2,4,5); plot(tempo,viscosidade_aparente,'r--')

grid on

hold off

title('viscosidade apar vs taxa cisalh')
xlabel('tempo [sg]')
ylabel('viscosidade [pa.s^n]')


hold on

subplot(2,4,6); plot(tempo,to_t,'r--')

grid on

hold off

title('tensao limite vs tempo')
xlabel('tempo [sg]')
ylabel('tensao limite [pa]')
```

```
else %grafico para esfera rigida

    deslocamento=abs(profundidade); %para capturar o deslocamento

da comparacao

    tempo_esfera=tempo; %para capturar o tempo da comparacao

    hold on

    subplot(2,4,1); plot(tempo_esfera,deslocamento,'r')

    title('deslocamento trasiente vs tempo')

    xlabel('tempo [sg]')

    ylabel('deslocamento trasiente [m]')

    grid on

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,2); plot(tempo,reynold,'r')

    hold off

    title('reynold trasiente vs tempo')

    xlabel('tempo [sg]')

    ylabel('reynold trasiente [-]')

    grid on

    hold on

    subplot(2,4,3); plot(tempo,aceleracao,'r')

    hold off

    title('aceleracao trasiente vs tempo')

    xlabel('tempo [sg]')

    ylabel('aceleracao trasiente [m/sg^2]')

    grid on

    hold on

    subplot(2,4,4); plot(tempo,velocidade,'r')
```

```

        hold off

        title('velocidade trasiente vs tempo')

        xlabel('tempo [sg]')

        ylabel('velocidade trasiente [m/sg]')

        grid on

    hold on

    subplot(2,4,5); plot(taxa_cisalhamento,viscosidade_aparente,'r')

    hold off

    title('viscosidade aparente vs taxa de cisalhamento')

    xlabel('taxa de cisalhamento [sg^-1]')

    ylabel('viscosidade aparente [pa.s^n]')

    grid on

    if comparacao==3 %&& i_diam==id_exp %graficos de avaliacao com
    experimentais para esfera rigida

        hold on

        subplot(2,4,1);
        plot(coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(:,1),coordenadas_xy_linear_esfera_rigida
        _temp_fil(:,2)); %resultados experimentais de velocidade para esfera rigida

        hold off

        hold on

        subplot(2,4,3);
        loglog(coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp_fil(:,1),coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp_fil(:,2
        ))

        hold off

        hold on

        subplot(2,4,3); loglog(par_dinamic,cdpl,'r')

        hold off

        title('Cd vs Q')

        xlabel('Q parametro dinamico [-]')
    
```

```

        ylabel('Cd coef de arrasto [-]')

        grid on

    hold on

        subplot(2,4,6);
        plot(coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(:,1),erro_profundidade_i,'r'); %grafico do
        erro absoluto pára a velocidade em esfera rigida

        hold off

        title('erro absoluto vs tempo')

        xlabel('tempo [sg]')

        ylabel('erro absoluto [%]')

        grid on

    hold on

        subplot(2,4,7);
        plot(coordenadas_xy_linear_esfera_rigida_temp_fil(:,1),desvio_profundidade_i,'r'); %grafico
        do desvio pára o deslocamento em esfera rigida

        hold off

        title('desvio vs tempo')

        xlabel('tempo [sg]')

        ylabel('desvio [m]')

        grid on

    end

end

%CALCULO RESULTADOS PROFUNDIDADE ESPECIFICA

[x_prof_esp,~]=size(profundidade);

if tipo_part==1      %profundidade especifica para bolha de gas

    prof_temp=profundidade(x_prof_esp,1);

    prof_limit_esp=prof_esp;

else                %profundidade especifica para esfera rigida

    prof_temp=-profundidade(x_prof_esp,1);

    prof_limit_esp=-prof_esp;

```



```

end

if prof_temp>=prof_limit_esp %para valores anteriores a profundidade
especifica

tempo_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),tempo(:,1),prof_esp,'linear');

diametro_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),diametro_bolha(:,1),prof_esp,'linear');

velocidade_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),velocidade(:,1),prof_esp,'linear');

reynold_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),reynold(:,1),prof_esp,'linear');

cdpl_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(2:max_it_real,1),cdpl(2:max_it_real,1),prof_esp,'linear'); %desde iteracao 2 pq a iteracao 1 para cdpl no esta definida por ter denominador zero da velocidade zero

par_dinamic_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),par_dinamic(:,1),prof_esp,'linear');

froude_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),froude(:,1),prof_esp,'linear');

volume_esp(is,i_diam)=(1/6)*pi()*diametro_esp(is,i_diam)^3;

if tipo_part==1 %para bolha de gas

if caso_av==1 %para massa consideravel

densidade_bolha_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),densidade_bolha(:,1),prof_esp,'linear');

f_empuxo_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),f_empuxo(:,1),prof_esp,'linear');

f_arrasto_esp(is,i_diam)=interp1(profundidade(:,1),f_arrasto(:,1),prof_esp,'linear');

end

end

else

[temp1,~]=size(profundidade);

crit_limit=1;

tempo

velocidade

```

```

        'iteracao'

        temp1

        profundidade

        xi

        i_diam

        'tempo de calculo muito baixo e a bolha nao atinge a profundidade
        especifica, recomenda-se aumentar o tempo'

    end

    %CALCULO DO ERRO DO PASO EM REGIME PERMANENTE

    if crit_limit==0

        erro_diametro_i(is,i_diam)=100*abs((diametro_esp(is,i_diam)-
        diametro_esp(1,i_diam))/diametro_esp(1,i_diam));

        erro_reynold_i(is,i_diam)=100*abs((reynold_esp(is,i_diam)-
        reynold_esp(1,i_diam))/reynold_esp(1,i_diam));

        erro_cdpli(is,i_diam)=100*abs((cdpl_esp(is,i_diam)-
        cdpl_esp(1,i_diam))/cdpl_esp(1,i_diam));

        erro_velocidade_i(is,i_diam)=100*abs((velocidade_esp(is,i_diam)-
        velocidade_esp(1,i_diam))/velocidade_esp(1,i_diam));

    end

end

    tmax=tempo(max_it_real,1); %armazena o tempo maximo para o is=1 para
    reduzir o tempo maximo de calculo segundo o diametro da bolha inicial aumente, para

end

%ALMACENANDO DADOS EM MATRIZ TRIDIMENSIONAL

if crit_limit==0

    tempo_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=tempo_esp(1,:);

    diametro_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=diametro_esp(1,:);

    velocidade_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=velocidade_esp(1,:);

    reynold_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=reynold_esp(1,:);

    cdpl_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=cdpl_esp(1,:);

    par_dinamic_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=par_dinamic_esp(1,:);

    froude_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=froude_esp(1,:);

```

```

volume_esp_kx(ki,:,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=volume_esp(1,:);

if tipo_part==1 %para bolha de gas

    if caso_av==1 %para massa consideravel

        densidade_bolha_esp_kx(ki,:,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=densidade_bolha_esp(1,:);

        f_empuxo_esp_kx(ki,:,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=f_empuxo_esp(1,:);

        f_arrasto_esp_kx(ki,:,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=f_arrasto_esp(1,:);

    end

end

end

tmax=tmax_global; %armazeno o tempo maximo para o is=1 para reducir o
tempo maximo de calculo segundo o diametro da bolha inicial aumente, para

end

if crit_limit==0

    tempo_max_corrida=max(max(max(max(max(max(max(max(tempo_esp_kx))))))))); %tempo
    maximo total da corrida

end

end

end

end

end

end

end

if tipo_part==1 %texto bolha de gas

    if crit_limit==0 %a bolha chegou à profundidade final

        gtext(['tempo max:' num2str(tempo_max_corrida) 'fluido:' num2str(id_exp) ' diam: '
        num2str(diam_min) ':' num2str(diam_paso) ':' num2str(diam_max) ' tempo:'
        num2str(tempo_max_corrida) ' to: ' num2str(to_min) ':' num2str(to_paso) ':' num2str(to_max)
        ' ind cons:' num2str(ind_cons_min) ':' num2str(ind_cons_paso) ':' num2str(ind_cons_max) ' n:'
        num2str(n_min) ':' num2str(n_paso) ':' num2str(n_max) ' dens liq:' num2str(den_l) ' k: '
        num2str(fc_k_min) ':' num2str(fc_k_paso) ':' num2str(fc_k_max) ' x: ' num2str(fc_x_min) ':'
        num2str(fc_x_paso) ':' num2str(fc_x_max) ' paso:' num2str(paso) ' diam crit:'
        num2str(diam_critic) ' prof ini:' num2str(hbo) ' prof esp:' num2str(prof_esp) ' A: '
    ]
    )
    
```

```

num2str(A_min) ':' num2str(A_paso) ':' num2str(A_max) ' B: ' num2str(B_min) ':'
num2str(B_paso) ':' num2str(B_max) ));

resultados=[diametro_esp_kx(1,1,1,1,1,1)/diam_coluna_visc,froude_esp_kx(1,1,1,1,1,1)
',reynold_esp_kx(1,1,1,1,1,1)',flipud(tempo_esp_kx(1,1,1,1,1,1)),diametro_esp_kx(1,1,
1,1,1,1,1)',velocidade_esp_kx(1,1,1,1,1,1)'];

else      %a bolha não chegou à profundidade final

resultados=[tempo,profundidade,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente,to
_t];

end

else %esfera rigida

if crit_limit==0 %a esfera chegou à profundidade final

    gtext(['tempo max:' num2str(tempo_max_corrida) ' fluido:' num2str(id_exp) ' diam: '
num2str(diam_min) ':' num2str(diam_paso) ':' num2str(diam_max) ' tempo:' ' to: '
num2str(to_min) ':' num2str(to_paso) ':' num2str(to_max) ' ind cons:' num2str(ind_cons_min)
':' num2str(ind_cons_paso) ':' num2str(ind_cons_max) ' n:' num2str(n_min) ':'
num2str(n_paso) ':' num2str(n_max) ' dens liq:' num2str(den_l) ' k: ' num2str(fc_k_min) ':'
num2str(fc_k_paso) ':' num2str(fc_k_max) ' x: ' num2str(fc_x_min) ':' num2str(fc_x_paso) ':'
num2str(fc_x_max) ' paso:' num2str(paso) ' diam crit:' num2str(diam_critic) ' prof ini:'
num2str(hbo) ' prof esp:' num2str(prof_esp) ' A: ' num2str(A_min) ':' num2str(A_paso) ':'
num2str(A_max) ' B: ' num2str(B_min) ':' num2str(B_paso) ':' num2str(B_max) ' dens part:'
num2str(densidade_part))]);

resultados=[tempo,deslocamento,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente];

else %a esfera não chegou à profundidade final

resultados=[tempo,deslocamento,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente,t
o_t];

end

end

if crit_limit==0

%CALCULO DO ERRO RESPECTO AOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA O CASO DE BOLHA
DE GAS

if i_diam_max~=1 %para o caso de varios diametros iniciais a avaliar

    %FILTRANDO VELOCIDADE

    if comparacao==1 %para comparar o caso de bolha em fluido newtoniano

```

```

        coordenadas_xy_linear_vel_diam=importdata('coordenadas_xy_linear_vel_diam.mat');
%para validar a velocidade

        [xlinear,~]=size(coordenadas_xy_linear_vel_diam);

        coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp=coordenadas_xy_linear_vel_diam(:,2*id_exp-
1:2*id_exp);

        coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_sort=sort(coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp,1,'
descend');

        for i=1:xlinear %valor para um diametro especifico a avaliar

            if coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_sort(i,1)~=0 %filtrando zeros

                coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_fil(i,:)=coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_sort(i,
:);

                velocidade_esp_i(i,1)=interp1(diametro_esp(1,:),velocidade_esp(1,:),coordenadas_xy_linear_v
el_diam_temp_fil(i,1),'linear');

                erro_velocidade_i(i,1)=100*abs((velocidade_esp_i(i,1)-
coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_fil(i,2))/coordenadas_xy_linear_vel_diam_temp_fil(i,
2)); %erro calculado sobre a diferenca vertical dos dados

            end

        end

        %FILTRANDO CD

        coordenadas_xy_loglog_cd_re=importdata('coordenadas_xy_loglog_cd_re.mat');
%para avaliar o coeficiente de arrasto

        [xlog,~]=size(coordenadas_xy_loglog_cd_re);

        coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp=coordenadas_xy_loglog_cd_re(:,2*id_exp-
1:2*id_exp);

        for i=1:xlog %eliminando os dados experimentais com valor zero

            if coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp(i,1)~=0 %filtrando zeros

                coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp_fil(i,:)=coordenadas_xy_loglog_cd_re_temp(i,:);

            end

        end

        elseif comparacao==2 %para comparar caso de bolha em fluido viscoplastico
    
```

```
%FILTRANDO FROUDE

i_fil=0;

i_crit_temp_froude=0; %criterio para definir se existem dados experimentais de froude-
rel diam

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel=importdata('coordenadas_xy_linear_
bolha_viscoplastico_froude_rel.mat'); %vetor de resultados de paper de outro autor

[xlinear,~]=size(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp=coordenadas_xy_linear_bolha_
viscoplastico_froude_rel(:,2*id_exp-1:2*id_exp);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sort=sortrows(coordenadas_xy_
linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sort=flipud(coordenadas_xy_li
near_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sort);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil=zeros(1,2); %para
criar um vetor dimenssão 1,1 e se aumenta a x,2 significa q tem dados experimentais para
comparar e graficar, se nao aumenta a dimenssão é pq nao tem dados experimentais

for i=1:xlinear %valor para um diametro especifico a avaliar

    if coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sort(i,1)~=0
%filtrando zeros

        if i==1 %para filtrar os resultados num vetor novo sem zeros

            i_fil=1;

        else

            i_fil=i_fil+1;

        end

        i_crit_temp_froude=i_crit_temp_froude+1; %tamanho vetor dados experimentais
filtrado

        coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil(i_fil,:)=coordenadas_xy_line
ar_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sort(i,:);

    end

end

%CALCULO DO FROUDE NUMERICO E O ERRO DE FROUDE
```



```

rel_diametro_esp_kx_max=max(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_tem
p_fil(:,1));

rel_diametro_esp_kx_min=min(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_tem
p_fil(:,1));

paso_rel_diametro_esp_kx=(rel_diametro_esp_kx_max-rel_diametro_esp_kx_min)/np;

rel_diametro_esp_kx_fit=(rel_diametro_esp_kx_min:paso_rel_diametro_esp_kx:rel_diametro
_esp_kx_max);

[~,ylinear]=size(rel_diametro_esp_kx_fit);

[fit_froude_vert,~]=polyfit(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_tem
p_fil(:,1),coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_tem_p_fil(:,2),ordem_poly);

fit_froude_vert_disc=polyval(fit_froude_vert,rel_diametro_esp_kx_fit);

for Ai=1:A_fatory
    for Bi=1:B_fatory
        for toi=1:to_fatory
            for ind_consi=1:ind_cons_fatory
                for ni=1:n_fatory
                    for xi=1:x_fatory
                        for ki=1:k_fatory
                            for i=1:ylinear %valor para um diametro especifico a avaliar

froude_esp_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=interp1(diametro_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi
,Ai,Bi)/diam_coluna_visc,froude_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi),rel_diametro_esp_kx_fit(1
,i),'linear');

froude_esp_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=interp1(froude_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai
,Bi),diametro_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)/diam_coluna_visc,fit_froude_vert_disc(1,i),'li
near');

erro_froude_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=100*abs((froude_esp_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi
,toi,Ai,Bi)-fit_froude_vert_disc(1,i))/fit_froude_vert_disc(1,i)); %erro da velocidade calculado
sobre a diferenca vertical dos dados

erro_froude_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=100*abs((froude_esp_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi
,toi,Ai,Bi)-rel_diametro_esp_kx_fit(1,i))/rel_diametro_esp_kx_fit(1,i)); %erro da velocidade
calculado sobre a diferenca horizontal dos dados

```

```

        end
    end
end
end
end
end
end
end

%CALCULO DOS RESULTADOS NUMERICOS COM X E K CORRIGIDOS PARA BOLHA EM
VISCOPLASTICO

if i_crit_temp_froude>0 %vetor filtrado experimental de froude, se é maior que zero
entao tenho dados experimentais

    xi_corrigida_froude_vert=NaN;
    ki_corrigida_froude_vert=NaN;
    ki_corrigida_froude_hor=NaN;
    xi_corrigida_froude_hor=NaN;
    for i=1:ylinear
        erro_froude_vert_dinamico(1,i)=erro_froude_i_vert(1,i,1,1,1,1,1,1);
        froude_esp_vert_dinamico(1,i)=froude_esp_i_vert(1,i,1,1,1,1,1,1);
        erro_froude_hor_dinamico(1,i)=erro_froude_i_hor(1,i,1,1,1,1,1,1);
        froude_esp_hor_dinamico(1,i)=froude_esp_i_hor(1,i,1,1,1,1,1,1);
        for Ai=1:A_fatory
            for Bi=1:B_fatory
                for toi=1:to_fatory
                    for ind_consi=1:ind_cons_fatory
                        for ni=1:n_fatory
                            for xi=1:x_fatory
                                for ki=1:k_fatory
                                    if isnan(erro_froude_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi))==0 &&
erro_froude_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)<erro_froude_vert_dinamico(1,i)

erro_froude_vert_dinamico(1,i)=erro_froude_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi);

```



```
froude_esp_vert_dinamico(1,i)=froude_esp_i_vert(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi);

        ki_corrighida_froude_vert(i,1)=fc_k(1,ki);

        xi_corrighida_froude_vert(i,1)=fc_x(1,xi);

    end

    if isnan(erro_froude_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi))==0 &&
erro_froude_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)<erro_froude_hor_dinamico(1,i)

erro_froude_hor_dinamico(1,i)=erro_froude_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi);

froude_esp_hor_dinamico(1,i)=froude_esp_i_hor(ki,i,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi);

        ki_corrighida_froude_hor(i,1)=fc_k(1,ki);

        xi_corrighida_froude_hor(i,1)=fc_x(1,xi);

    end

end

end

end

end

end

end

end

%FILTRANDO K E X COM CALCULO DO ERRO VERTICAL

i_fil=0;

[~,ylinear1]=size(xi_corrighida_froude_vert);

rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert=NaN;

xi_corrighida_froude_vert_fil=NaN;

ki_corrighida_froude_vert_fil=NaN;

for i=1:ylinear1

    if isnan(xi_corrighida_froude_vert(i,1))==0 %filtrando zeros

        if i==1

            i_fil=1;
```

```

        else
            i_fil=i_fil+1;
        end

        rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert(1,i_fil)=rel_diametro_esp_kx_fit(1,i);
        xi_corrigida_froude_vert_fil(i_fil,1)=xi_corrigida_froude_vert(i,1);
        ki_corrigida_froude_vert_fil(i_fil,1)=ki_corrigida_froude_vert(i,1);
    end
end

%FILTRANDO K E X COM CALCULO DO ERRO HORIZONTAL
i_fil=0;

[~,ylinear1]=size(xi_corrigida_froude_hor);
rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor=NaN;
xi_corrigida_froude_hor_fil=NaN;
ki_corrigida_froude_hor_fil=NaN;
for i=1:ylinear1
    if isnan(xi_corrigida_froude_hor(i,1))==0 %filtrando zeros
        if i==1
            i_fil=1;
        else
            i_fil=i_fil+1;
        end

        rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor(1,i_fil)=rel_diametro_esp_kx_fit(1,i);
        xi_corrigida_froude_hor_fil(i_fil,1)=xi_corrigida_froude_hor(i,1);
        ki_corrigida_froude_hor_fil(i_fil,1)=ki_corrigida_froude_hor(i,1);
    end
end

%CURVE FIT DE K E X CORRIGIDAS VERTICAL E HORIZONTAL PARA BOLHA EM
VISCOPLASTICO

[fit_xi_corrigida_froude_vert,~]=polyfit(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert,xi_corrigida_froude_
vert_fil',ordem_poly);

```

```
[fit_ki_corrigida_froude_vert,~]=polyfit(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert,ki_corrigida_froude_
vert_fil',ordem_poly);

fit_xi_corrigida_froude_vert_disc=polyval(fit_xi_corrigida_froude_vert,rel_diametro_esp_kx_fi
t_fil_vert);

fit_ki_corrigida_froude_vert_disc=polyval(fit_ki_corrigida_froude_vert,rel_diametro_esp_kx_fi
t_fil_vert);

[fit_xi_corrigida_froude_hor,~]=polyfit(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor,xi_corrigida_froude_h
or_fil',ordem_poly);

[fit_ki_corrigida_froude_hor,~]=polyfit(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor,ki_corrigida_froude_h
or_fil',ordem_poly);

fit_xi_corrigida_froude_hor_disc=polyval(fit_xi_corrigida_froude_hor,rel_diametro_esp_kx_fit
_fil_hor);

fit_ki_corrigida_froude_hor_disc=polyval(fit_ki_corrigida_froude_hor,rel_diametro_esp_kx_fit
_fil_hor);

end

%GRAFICOS REGIME PERMANENTE COM K E X CORRIGIDO PARA CASO DE BOLHA EM
FLUIDO VISCOPLASTICO

hold on %para grafico de resultados experimentais filtrados

subplot(2,4,5);
plot(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil(:,1),coordenadas_xy_lin
ear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil(:,2));

hold off

if i_crit_temp_froude>0 %se é maior que zero é porque tenho resultados

hold on

subplot(2,4,5); plot(rel_diametro_esp_kx_fit,fit_froude_vert_disc,'g');

title('Numero de Froude vs Rb/Rc')

xlabel('Raio bolha/Raio coluna [-]')

ylabel('Numero de Froude [-]')

grid on
```

```

hold off

%para graficar os dados experimentais sem correcao nem

%curve fit

i_fil=0;

i_crit_temp_froude=0; %criterio para definir se existem dados experimentais de
froude-rel diam

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_sem=importdata('coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_sem_edit.mat'); %vetor de resultados de paper de outro autor

[xlinear,~]=size(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_sem);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sem=coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_sem(:,2*id_exp-1:2*id_exp);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_s_sem=sortrows(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_sem);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_s_sem=flipud(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_s_sem);

coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil_s=zeros(1,2);
%para criar um vetor dimenssão 1,1 e se aumenta a x,2 significa q tem dados experimentais para comparar e graficar, se nao aumenta a dimenssão é pq nao tem dados experimentais

for i=1:xlinear %valor para um diametro especifico a avaliar

    if coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_s_sem(i,1)~=0
    %filtrando zeros

        if i==1 %para filtrar os resultados num vetor novo sem zeros

            i_fil=1;

        else

            i_fil=i_fil+1;

        end

        i_crit_temp_froude=i_crit_temp_froude+1; %tamanho vetor dados experimentais filtrado

        coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil_s(i_fil,:)=coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_s_sem(i,:);

    end

```

```

end

hold on

subplot(2,4,5);
plot(coordenadas_xy_linear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil_s(:,1),coordenadas_xy_l
inear_bolha_viscoplastico_froude_rel_temp_fil_s(:,2),'k--*');

grid on

hold off

if kx_disc==0 %para mostrar resultados sem correcao

for Ai=1:A_fatory

for Bi=1:B_fatory

for toi=1:to_fatory

for ind_consi=1:ind_cons_fatory

for ni=1:n_fatory

for xi=1:x_fatory %para cada fator de correcao x

for ki=1:k_fatory %para cada fator de correcao k

hold on

subplot(2,4,6);
plot(diametro_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)/diam_coluna_visc,reynold_esp_kx(ki,xi,ni,i
nd_consi,toi,Ai,Bi),'r--*');

title('Numero de Reynold vs Rb/Rc')

xlabel('Raio bolha/Raio coluna [-]')

ylabel('Numero de Reynold [-]')

grid on

hold off

end

end

end

end

end

end

end

```

```

        end

    end

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert(1,:),fit_xi_corrigida_froude_vert_disc(1,:), 'g');

    grid on

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert(1,:),fit_ki_corrigida_froude_vert_disc(1,:), 'g');

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor(1,:),fit_xi_corrigida_froude_hor_disc(1,:), 'r');

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor(1,:),fit_ki_corrigida_froude_hor_disc(1,:), 'r');

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert(1,:),xi_corrigida_froude_vert_fil(:,1), 'm--');

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_vert(1,:),ki_corrigida_froude_vert_fil(:,1), 'm--');

    hold off

    hold on

    subplot(2,4,7);
    plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor(1,:),xi_corrigida_froude_hor_fil(:,1), 'm--');

    hold off

    hold on

```

```

        subplot(2,4,7);
        plot(rel_diametro_esp_kx_fit_fil_hor(1,:),ki_corrigida_froude_hor_fil(:,1),'--');

        hold off

        title('coef correcao x,k para froude')

        ylabel('coeficientes x,k [-]')

        xlabel('raio bolha/raio coluna [-]')

        legend('curve fit x vert','curve fit k vert','curve fit x hor','curve fit k hor')

        gtext(['poly k vert: ' num2str(fit_ki_corrigida_froude_vert)]);
        gtext(['poly k hor: ' num2str(fit_ki_corrigida_froude_hor)]);
        gtext(['poly x vert: ' num2str(fit_xi_corrigida_froude_vert)]);
        gtext(['poly x hor: ' num2str(fit_xi_corrigida_froude_hor)]);

        hold on

        subplot(2,4,8); plot(rel_diametro_esp_kx_fit(1,:),erro_froude_vert_dinamico(1,:),'r--')
        %grafico do erro vertical da velocidade

        grid on

        hold off

        hold on

        subplot(2,4,8); plot(rel_diametro_esp_kx_fit(1,:),erro_froude_hor_dinamico(1,:),'g--')
        %grafico do erro vertical da velocidade

        hold off

        title('erro froude vs raio bolha/raio coluna')

        ylabel('erro froude [%]')

        xlabel('raio bolha/raio coluna [-]')

        legend('erro vertical','erro horizontal')

    else

        'nao conseguiu comparar nenhum resultado numerico com experimental, por favor
        revise los limites da simulacao'

    end

end

end

end

```

```
%GRAFICOS PARA TODA FAIXA DE K E X SEM CORRECAO PARA REGIME PERMANENTE EM
FLUIDO VISCOPLASTICO

if tipo_part==1 %para bolha de gas

    %gtext(['fluido:' num2str(id_exp) ' diam: ' num2str(diam_min) ':' num2str(diam_paso) ':'
num2str(diam_max) ' tempo:' num2str(tempo_max_corrida) ' to: ' num2str(to_min) ':'
num2str(to_paso) ':' num2str(to_max) ' ind cons:' num2str(ind_cons_min) ':'
num2str(ind_cons_paso) ':' num2str(ind_cons_max) ' n:' num2str(n_min) ':' num2str(n_paso)
':' num2str(n_max) ' dens liq:' num2str(den_l) ' k: ' num2str(fc_k_min) ':' num2str(fc_k_paso) ':'
num2str(fc_k_max) ' x: ' num2str(fc_x_min) ':' num2str(fc_x_paso) ':' num2str(fc_x_max) '
paso:' num2str(paso) ' diam crit:' num2str(diam_critic) ' prof ini:' num2str(hbo) ' prof esp:'
num2str(prof_esp)]]);

    if n~=1 || to~=0 %para fluido nao newtoniano

        if kx_disc==0 %para mostrar resultados sem correcao

            for Ai=1:A_fatory

                for Bi=1:B_fatory

                    for toi=1:to_fatory

                        for ind_consi=1:ind_cons_fatory

                            for ni=1:n_fatory

                                for xi=1:x_fatory %para cada fator de correcao x

                                    for ki=1:k_fatory %para cada fator de correcao k

                                        hold on

                                        rel_diam_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)=diametro_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi)/dia
m_coluna_visc;

                                        subplot(2,4,5);
                                        plot(rel_diam_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi),froude_esp_kx(ki,xi,ni,ind_consi,toi,Ai,Bi),'r
')

                                        title('numero de Froude vs Rb/Rc')

                                        xlabel('Raio bolha/Raio coluna [-]')

                                        ylabel('numero de Froude [-]')

                                        grid on

                                        hold off

                                    end

                                end

                            end

                        end

                    end

                end

            end

        end

    end

end
```



```

        hold off

        title('Erro Velocidade vs Diametro')

        ylabel('Erro Velocidade[%]')

        xlabel('Diametro [m]')

        grid on

    end

end

end

tempo_max_corrida

end

max_teste_resultados_diam

max_teste_resultados_vel_acel

max_teste_resultados_massa

if crit_limit==1

    tempo_max_corrida=tempo;

end

if tipo_part==1 %texto bolha de gas

    if crit_limit==0 %chegou à profundidade final

        'chegou à profundidade final'

        'resultados=[diametro_esp_kx/diam_coluna_visc,froude_esp_kx,reynold_esp_kx,tempo_esp_
        kx,diametro_esp_kx,velocidade_esp_kx]

        else %não chegou à profundidade final

            'não chegou à profundidade final'

            'resultados=[tempo,profundidade,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente,t
            o_t]'

        end

    else %esfera rigida

        if crit_limit==0 %chegou à profundidade final

            'chegou à profundidade final'

            'resultados=[tempo,deslocamento,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente]'

```

```
else          %não chegou à profundidade final

    'não chegou à profundidade final'

    'resultados=[tempo,deslocamento,reynold,diametro_bolha,velocidade,viscosidade_aparente,t
    o_t]'
```



```
end

end

end
```

C.3

Sub-Rotina para cálculo da Equação de Dinâmica da partícula considerando sua massa

```
function
dh_a=eq_dif_acel(t_a,h_a,prof_diam,diam_vetor,i_diam,diam,ts,ind_cons,den_l,g,n,k,to,x,pat
m,cte_ug,temp_g,mm,tipos_part,densidade_part,id_exp,A,B,rango_ha,C)

%CALCULO EQUACOES DIFERENCIAIS CASO COM MASSA CONSIDERAVEL

function_ind_cons=ind_cons+A*exp(B*rango_ha/3600);

ind_cons_i=interp1(rango_ha,function_ind_cons,t_a,'linear');

function_to=to*exp(C*rango_ha/3600);

to_i=interp1(rango_ha,function_to,t_a,'linear');

dh_a=zeros(2,1);

dh_a(1)=h_a(2);

if tipos_part==1 %para bolha de gas

    diam_i=interp1(prof_diam,diam_vetor,h_a(1),'linear'); %interpolando diametro

    pres_g=-den_l*g*h_a(1)+patm+4*ts/diam_i; %pressao gas [pa]

    den_disc=mm*pres_g/(cte_ug*temp_g); %densidade gas [kg/m^3]

    dh_a(2)=(den_l-den_disc)*g/den_disc-
    (18*x/(den_disc*diam_i))*(ind_cons_i*h_a(2)^n/diam_i^n+k*to_i); %ansley & smith

else %para esfera rigida

    den_disc=densidade_part(1,id_exp); %densidade constante

    diam_i=diam(1,i_diam); %diametro constante

    dh_a(2)=-(abs(g*(den_l-den_disc)/den_disc)-
    abs((18*x/(den_disc*diam_i))*((ind_cons_i*(abs(h_a(2))^n)/(diam_i^n))+k*to_i)));

end

end
```

C.4

Sub-Rotina para cálculo da Equação de Dinâmica da Partícula desprezando sua massa

```
function
dh=eq_dif_nao_acel(h_a,prof_diam,diam_vetor,i_diam,diam,ind_cons,den_l,g,n,k,to,x,tipo_pa
rt)

%CALCULO DA MATRIZ DE DIAMETRO

if tipo_part==1

    diam_i=interp1(prof_diam,diam_vetor,h_a,'linear'); %interpolando diametro para caso de
    bolha de gas

else

    diam_i=diam(1,i_diam);          %diametro para caso de diametro constante

end

%CALCULO EQUACOES DIFERENCIAIS CASO COM MASSA DESPREZIVEL

dh=((diam_i^n/(18*ind_cons*x))*(den_l*g*diam_i-18*k*to*x))^(1/n);

end
```

C.5

Sub-Rotina para cálculo da Equação de Diâmetro da Bolha de Gás

```
function
[prof_diam,diam_vetor]=diametro(iteracoes,dbo,i_diam,hbo,diam,ts,den_l,g,patm,hbf,tipopa
rt)

%DIAMETRO BOLHA

a1=zeros(iteracoes,1);
a2=zeros(iteracoes,1);
a3=zeros(iteracoes,1);
pres_liq=zeros(iteracoes,1);
root_total=zeros(iteracoes,3);
prof_diam=linspace(hbo,hbf,iteracoes)'; %vetor de profundidade
if tipo_part==1 %para o caso de bolha de gas
    for i=1:iteracoes
        pres_liq(i,1)=patm-den_l*g*prof_diam(i,1); %pressao da coluna de liquido
        a1(i,1)=-4*ts/pres_liq(i,1); %coeficiente 1 polinomio
        a2(i,1)=0; %coeficiente 2 polinomio
        a3(i,1)=-((patm*dbo-den_l*g*hbo*dbo+4*ts)*(dbo^2))/pres_liq(i,1); %coeficiente 3
        polinomio
        root_unit=(roots([1 a1(i,1) a2(i,1) a3(i,1)]))'; %calcula raiz i
        for j=1:3
            root_total(i,j)=root_unit(1,j); %matriz de raices
        end
    end
end
for i=1:iteracoes
    for j=1:3
        if imag(root_total(i,j))==0 && real(root_total(i,j))>0 %filtrando raices reais
            diam_vetor(i,1)=root_total(i,j);
        end
    end
end
else %diametro constante para o caso de esfera rigida
    for i=1:iteracoes
```

```
        diam_vetor(i,1)=diam(1,i_diam);  
    end  
end  
end
```